

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო  
უნივერსიტეტი

---

ალექსანდრე სბორშჩიკოვი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი მათემატიკის  
დეპარტამენტი

"ზოგიერთი სეისმური პროცესის ალბათურ-  
სტატისტიკური მოდელირება"

სადოქტორო დისერტაცია



სამეცნიერო ხელმძღვანელები: რობერტ მნაცაკანოვი  
ელიზბარ ნადარაია  
თეიმურაზ მაჭარაშვილი

თბილისი 2018

## აბსტრაქტი

ამ კვლევის მთავარი მიზანია კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის შესწავლა იმ შემთხვევაში, როცა გვაქვს არასრული ინფორმაცია განაწილების ფუნქციაზე. მაგალითად, თუ ცნობილია მომენტები გარკვეულ რიგამდე, ან როცა ლაპლასის გარდაქმნაა მოცემული.

აღნიშნულ ნაშრომში შესწავლილია აპროქსიმაციისა და შეფასების სამი მოდელი. პირველი მოდელის გამოყენება შეიძლება მაშინ, როცა გვაქვს ინფორმაცია ე.წ. სიხშირულ მომენტებზე. მეორე მოდელი ეხება კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციას იმ შემთხვევაში, როცა მოცემულია ჩვეულებრივი მომენტები, ხოლო მესამე მოდელის გამოყენება ხდება, როცა მოცემულია ტრანსპონირებული მომენტები.

კვანტილის ფუნქციის შეფასების სხვადასხვა მოდელი არსებობს. ჩვენი განხილული მოდელის უპირატესობა მდგომარეობს იმაში, რომ მათი გამოყენება შეიძლება მაშინაც, როცა განაწილების ფუნქციის შესახებ გვაქვს მცირე ინფორმაცია, მაგალითად, მხოლოდ ჩვეულებრივი, ენტროპიული ან ტრანსპონირებული მომენტების მნიშვნელობები.

კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციის შესწავლის საკითხი ძალზედ პოპულარურია, მისი შესწავლა დაიწყო ჯერ კიდევ 1980 წლებში. ამ ნაშრომში მოყვანილია რამოდენიმე ახალი კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასება. ჩვენ განვიხილავთ იმ შემთხვევებს, როცა განაწილების ფუნქციის განსაზღვრის არე არის სასრული ან არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული.

**Aleksandre Sborshchikovi**

**Faculty of Exact and Natural Sciences Department of  
Mathematics**

Thesis submitted for the degree of PhD in Mathematics



Probability-statistical modeling of some seismic processes

Scientific advisers: Robert Mnatsakanov  
Elizbar Nadaraya  
Teimuraz Matcharashvili

**Tbilisi 2018**

## Abstract

The main aim of this work is to construct accurate approximations of a quantile function  $Q$  under incomplete information upon the underlying distribution function  $F$ . Namely, we assume that the only available data represent the values of a finite number of moments (“frequency” or “entropic” moments, the values of Laplace transform) of  $F$  or  $Q$ .

We propose three methods for approximation and estimation of a quantile function  $Q$ . The first method (method I) is based on the knowledge of the so-called “frequency” (entropic) moments of  $F$ . The second one (method II) enables us to recover  $Q$ , when only the ordinary moments of  $F$  are known (or estimated) up to some order. And the third method is based on the knowledge of the so called transformed moments. In addition we also consider the problem of approximation of the quantile density function  $q = Q'$ .

There exists many different nonparametric methods for estimating the quantile function  $Q$  and the quantile density function  $q$ . The advantage of our approach is that it can be applied in the situations when only ordinary, frequency moments, or the finite number of values of the Laplace transform of underlying distribution  $F$  are available.

Since 1980's the recovery of a quantile density functions had become a popular area of investigation. In this work several new estimates of a quantile and quantile density functions are suggested and their asymptotic properties are investigated in two different cases: when the support of the distribution function  $F$  is finite and when it is unbounded from above.

აბსტრაქტი -----	4
შესავალი -----	7

**თავი I: კვანტილის ფუნქციის აღდგენა**

1.1 მოდელი I: $\text{supp}\{F\} = (0, T), T < \infty$ -----	16
1.2 მოდელი I: $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$ -----	21
1.3 მოდელი II: $\text{supp}\{F\} = (0, T), T < \infty$ -----	24
1.4 მოდელი II: $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$ -----	26
1.5 მოდელი III: $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$ -----	27
1.6 კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციების მოდელიზაცია -----	28

**თავი II: კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაცია**

2.1 მოდელი I: $\text{supp}\{F\} = (0, T)$ -----	30
2.2 მოდელი II: $\text{supp}\{F\} = (0, T)$ -----	33
2.3 კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციის მოდელიზაცია -----	34

**თავი III: შეფასებები**

3.1 კვანტილის ფუნქციის შეფასება -----	35
3.2 მოსალოდნელი დევიაციის შეფასება -----	41
3.3 ლორენცის მრუდის შეფასება -----	43

## თავი IV: მაგალითები

4.1 კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციები და შეფასებები -----	45
4.2 ცხრილები -----	70
4.3 მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალების გამოთვლა და შესაბამისი კვანტილის ფუნქციის შეფასებისთვის გამოყენება -----	75
დასკვნა -----	87
გამოყენებული ლიტერატურა -----	89
პროგრამული კოდები -----	91

## შესავალი

დღესდღეობით მომენტთა პრობლემა თამაშობს საკმაოდ მნიშვნელოვან როლს სტატისტიკაში და გამოყენებით მათემატიკაში, ფინანსურ მათემატიკაში, ეკონომიკაში, დაზღვევაში და აგრეთვე სხვადასხვა დარგში. ბოლო ორი საუკუნეა, რაც მომენტთა პრობლემა ბევრ სამეცნიერო ნაშრომში არის დასმული და შესწავლილი. დღემდე ეს პრობლემა თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთ საინტერესო ამოცანად რჩება.

ამ ნაშრომში განხილულია კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის და შეფასების საკითხები, როცა მოცემულია უცნობი განაწილების ფუნქციის მომენტების მნიშვნელობები გარკვეულ რიგამდე.

ვიტყვი, რომ მომენტთა პრობლემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, როცა შემდეგ განტოლებათა სისტემას  $\int x^j dF(x) = \int x^j dG(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots$  აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ე.ი.  $F = G$ .

მომენტთა პრობლემის დასმის და შესწავლის ფუძემდებლები იყვნენ: ფ.ჰაუსდორფი (F. Hausdorff), ტ.სტიელტესი (T. J. Stieltjes), პ.ჩებიშევი (P. Chebyshev), ტ.კარლემანი (T. Carleman), ნ.ახიეზერი (N. Akhiezer) და სხვები. მომენტთა პრობლემის შესწავლის დროს კლასიკურ საკითხს წარმოადგენს ასეთი ფუნქციის არსებობის და ერთადერთობის აუცილებელი და საკმარისი პირობის მოძებნა, მაგალითად კარლემანის და კრეინის პირობები. მეორე მნიშვნელოვან საკითხს წარმოადგენს ასეთი  $F$  ფუნქციის და მისი შებრუნებული  $Q = F^{-1}$  ფუნქციის აღდგენა. ამ ნაშრომში განიხილება ეს საკითხები.

თანამედროვე მეცნიერები სწავლობდნენ განაწილების ფუნქციის შეფასების და აპროქსიმაციის (აღდგენის) საკითხს იმ შემთხვევისთვის, როცა მოცემულია ემპირიული განაწილების ფუნქცია. აღსანიშნავია შემდეგ მეცნიერთა მიღწევები: ფ.ჰარელი (F. Harrell) და ს.დევისი (C. Davis), ჯ.სვანპოელი (J. Swanepoel) და ფ.ვან გრანი (F. van Graan), ე.ნადარაია (E. Nadaraya), ე.პარზენი (E. Parzen), ჩ.ჩენგი (C. Cheng) და ა.შ.. წარმოდგენილი ნაშრომი ეხება განაწილების ფუნქციის შებრუნებული ანუ კვანტილის ფუნქციის აღდგენას იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია ჩვეულებრივი, ენტროპიული ან ტრანსპონირებული მომენტები გარკვეულ რიგამდე.

არსებობს კვანტილის ფუნქციის არაპარამეტრული შეფასების რამოდენიმე მეთოდი. გამოვეყნოთ რამოდენიმე, მაგალითად Harrell, Davis [1] ნაშრომში მოყვანილი შეფასება წარმოადგენს რიგობრივი სტატისტიკის წონიან ჯამს, Sheather, Marron [2] ნაშრომში გლუვი ბირთვული ტიპის შეფასება. Swanepoel, Van Graan [3] თავის ნაშრომში შემოგვთავაზეს კვანტილის ფუნქციის ისევ ბირთვული ტიპის შეფასება, არაპარამეტრული გარდაქმნის ტექნიკის გამოყენებით. Bolance, Guillen, Nielsen [4] და Brewer [5] ნაშრომებში იყო განხილული ბერნშტეინის პოლინომის გამოყენებით კვანტილის ფუნქციის შეფასება.

შესავალში უფრო დაწვრილებით აღვწეროთ ზოგიერთი ცნობილი შეფასებები და განვმარტოთ ჩვენს მიერ შემოთავაზებული კონსტრუქციები.

პირველ რიგში შემოვიღოთ განაწილების  $F$  ფუნქციის შესაბამისი კვანტილის ფუნქციის განმარტება.  $Q(x)$  ვუწოდებთ კვანტილის ფუნქციას, თუ

$Q(x) = \inf\{t : F(t) \geq x\}$ ,  $x \in (0,1)$ . შევნიშვნოთ, რომ თუ  $F$  არის უწყვეტი ფუნქცია მაშინ  $Q = F^{-1}$ .  $Q$  საზოგადოდ უწოდებენ  $F$ -ის განზოგადოებულ შებრუნებულ ფუნქციას. ახლა მოვიყვანოთ სხვადასხვა ტიპის კვანტილის ფუნქციის შეფასებები.

ვთქვათ გვაქვს  $X_1, X_2, \dots, X_n$  შერჩევა დამოუკიდებელ დაკვირვებებიდან, რომელთა განაწილების ფუნქცია არის  $F(x)$ . ვთქვათ  $F(x)$  განაწილების სიმკვრივე არის  $f(x)$  და ის უწყვეტია მთელ  $x$  ღერძზე.

აღვნიშნოთ:

$$\hat{Q}_n(x) = \inf\{t : \hat{F}_n(t) \geq x\}, \quad 0 < x < 1. \quad (1)$$

აქ  $\hat{F}_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq t)$ , წარმოადგენს ემპირიულ განაწილების ფუნქციას, სადაც

$I(X_i \leq t) = 1$ , როცა  $X_i \leq t$ , და  $0$ , როცა  $X_i > t$ .

ერთ-ერთი  $Q$ -ს გლუვი შეფასება იყო შემოთავაზებული (Cheng, Parzen [6]) ე.პარზენის მიერ 1979 წელს. მან შემოიღო ბირთვული (kernel) შეფასება, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\hat{Q}_n^K(x) = \int_0^1 h_n^{-1} k\left(\frac{t-x}{h_n}\right) \hat{Q}_n(t) dt, \quad (2)$$

სადაც  $k(\cdot)$  არის გარკვეული სიმეტრიული ალბათური განაწილების სიმკვრივე.

მან განიხილა ბირთვული ტიპის ემპირიული კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასება, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\hat{q}(x) = \int_0^1 h_n^{-2} k\left(\frac{x-t}{h_n}\right) \hat{Q}_n(t) dt = \frac{d}{dx} \int_0^1 h_n^{-1} k\left(\frac{x-t}{h_n}\right) \hat{Q}_n(t) dt, \quad 0 < x < 1. \quad (3)$$

აღვნიშნოთ, რომ  $q(x) = Q'(x) = \frac{1}{f(Q(x))}$  და მას ვუწოდებთ კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციას.

1964 წელს Nadaraya [7] ნაშრომში განხილული იყო განაწილების ფუნქციის სხვა ტიპის გლუვი შეფასება. კერძოდ მიახლოების როლში აღებული იყო შემდეგი განაწილების ფუნქცია:

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt,$$



სადაც  $f_n(t) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{t-X_i}{h}\right)$ , არის განაწილების სიმკვრივის ე.წ. პარზენ-

როზენბლატის შეფასება.

ვთქვათ  $\zeta_p$  არის  $F$  განაწილების  $p$  რიგის კვანტილი, ის წარმოადგენს  $F(\zeta) = p$  განტოლების ფესვს, სადაც  $0 < p < 1$ . დავუშვათ  $F$  არის უწყვეტი და ეს ფესვი ერთადერთია.

$\zeta_p$  კვანტილთან შეფასების როლში ავიღოთ განტოლების ფესვი  $F_n(\bar{\zeta}_p) = p$ , შემდგომში  $\bar{\zeta}_p$  ვუწოდებთ არჩევით კვანტილს. ყოველი  $\varepsilon > 0$ , აღვნიშნოთ

$$\delta(\varepsilon) = \min \{F(\zeta_p + \varepsilon) - F(\zeta_p), F(\zeta_p) - F(\zeta_p - \varepsilon)\}$$

ვინაიდან თავიდან შემოთავაზებული იყო, რომ  $\zeta_p$  არის ერთადერთი ფესვი აქედან გამომდინარე გვექნება  $\delta(\varepsilon) > 0$ , და და, ასევე სამართლიანია შემდეგი უტოლობები:

$$P\{|\bar{\zeta}_p - \zeta_p| > \varepsilon\} \leq P\{|F(\bar{\zeta}_p) - F(\zeta_p)| > \delta(\varepsilon), \varepsilon > 0\},$$

$$|F(\bar{\zeta}_p) - F(\zeta_p)| = |F(\bar{\zeta}_p) - F_n(\bar{\zeta}_p)| \leq \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|,$$

ამასთან ცნობილია, რომ  $\sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| \rightarrow 0$ , როცა  $n \rightarrow \infty$ . ამიტომ მივიღეთ, რომ

$P\{|\bar{\zeta}_p - \zeta_p| > \varepsilon\} \rightarrow 0$  (იხ. Nadaraya [7]). ამ გზით დამტკიცებულია  $\bar{\zeta}_p$  შეფასების ძალდებულობა.

1982 წელს [1] ნაშრომში განხილული იყო ე.წ. Harrell, Davis კვანტილის ფუნქციის შეფასება ( $\hat{Q}_{HD}$ ). ამ შეფასების ფორმულირება მიღებულ იქნა შემდეგი მოსაზრებების გათვალისწინებით:  $k$ -ური რიგობითი სტატისტიკის მათემატიკური ლოდინი მოიცემა შემდეგი სახით:

$$E(X_{(k)}) = \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_{-\infty}^{\infty} x F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} dF(x) =$$

$$= \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^1 F^{-1}(y) y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy. \quad (4)$$

(იხ. Maritz, Jarrett [8]). ამასთან  $E(X_{(k)}) \rightarrow F^{-1}(p)$ -სკენ, როცა  $k \approx (n+1)p$  და  $n \rightarrow \infty$ , ყოველი  $p \in (0,1)$ , მე-(4) გამოყენებით ვიღებთ H-D შეფასებას:

$$\hat{Q}_{HD}(p) = \frac{1}{B((n+1)p, (n+1)(1-p))} \int_0^1 \hat{F}_n^{-1}(y) y^{(n+1)p-1} (1-y)^{(n+1)(1-p)-1} dy. \quad (5)$$

ზემოთ მოცემულ შეფასებას შეიძლება მიეცეს შემდეგი სახე:

$$\hat{Q}_{HD}(p) = \sum_{i=1}^n W_{n,i} X_{(i)}, \quad (6)$$

სადაც

$$W_{n,i}(p) = \frac{1}{B((n+1)p, (n+1)(1-p))} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} y^{(n+1)p-1} (1-y)^{(n+1)(1-p)-1} dy. \quad (7)$$

2005 წელს სტატისტიკის სკანდინავიურ ჟურნალში ჯ.სვანპოულის და ფ.ვან გრანის მიერ დაიბეჭდა სტატია Swanepoel, Van Graan [3], სადაც, განხილული იყო ახალი ბირთვული განაწილების ფუნქციის შეფასება იმ მოდელის მსგავსი, რომელიც იქნა განხილული Nadaraya [7]. სადაც განხილული იყო მონაცემთა არაპარამეტრული გარდაქმნით ბირთვული ტიპის განაწილების ფუნქციის შეფასება. ნაჩვენები იყო, რომ ასიმტოტური გადახრის და საშუალო ცდომილების შეფასება არის უფრო ზუსტი ვიდრე სტანდარტული ბირთვული ტიპის შეფასება.

$$\hat{F}_{n,h}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K \left( \frac{\hat{F}_n(x) - \hat{F}_n(X_i)}{h} \right), \quad (8)$$

$h = h_n$  პარამეტრი არის სიგლუვის პარამეტრი, ისეთი რომ,  $h \rightarrow 0$  და  $nh \rightarrow \infty$ , როცა  $n \rightarrow \infty$ . ცნობილია  $\hat{F}_{n,h}$  ზოგიერთი თვისება, მაგალითად  $\hat{F}_{n,h}$  მიისწრაფის  $F$ -სკენ იყო ნაჩვენები Nadaraya [7] და სხვა შედეგები მიღებულია ბევრ სამეცნიერო ნაშრომში.

ერთ-ერთი გზა განხილული არის Tagliani [9] და Inverardi [10] ნაშრომებში. ზემოთ ხსენებული მეთოდი ეყრდნობა სიმკვრივის ფუნქციის ენტროპიის მაქსიმალიზაციას, უფრო სწორედ მოცემულ  $F$  ფუნქციის მომენტთა მიმდევრობა

$$\{m(j, F)\}_0^M, \text{ და შენონის ენტროპია } H(f) = - \int_0^1 f(x) \ln f(x) dx.$$

ამ მოდელში ეძებენ ფუნქციების ისეთ ოჯახს, რომლისათვის დაანგარიშებული ენტროპია  $f_M(x) = \exp(-\sum_{j=0}^M \lambda_j x^{aj})$  და  $\lambda$  მიმართ მოგვცემს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. მოყვანილი მიდგომა მრავალბიჯიანი პროცედურაა და მოითხოვს დაანგარიშებისთვის დიდ დროს.

ახლა შემოვიღოთ ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდი, რომელიც ეხება ჰაუსდორფის მომენტთა პრობლემას და წარმოადგენს უცნობი განაწილების ფუნქციის  $F(x)$  აღდგენას, როცა ცნობილია  $\{m(j, F)\}_{j=0}^\infty$  მომენტები, სადაც

$m(j, F) = \int_0^1 x^j dF(x), j \geq 0$ . განაწილების ფუნქციის აღდგენის საკითხი მომენტთა

მეშვეობით ძალიან მოხერხებულია იმ შემთხვევაში, როცა გვაქვს ფუნქციის შესახებ მწირი ინფორმაცია, ხოლო მომენტთა გამოთვლა მარტივად ხდება.

ჩვენ მოცემულ ნაშრომში ვისარგებლებთ განაწილების და სიმკვრივის ფუნქციების აღდგენის შემდეგი ფორმულებით, რომელიც იყო გამოყენებული Mnatsakanov [11] და Mnatsakanov [12]:

$$F_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\alpha x}{T} \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} \frac{(-1)^{j-k}}{T^j} m(j, F), \quad (9)$$

$$f_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\lfloor \frac{\alpha x}{T} \rfloor + 1)} \sum_{j=0}^{\alpha - \lfloor \frac{\alpha x}{T} \rfloor} \frac{(-1)^j m(j + \lfloor \frac{\alpha x}{T} \rfloor)}{j!(\alpha - \lfloor \frac{\alpha x}{T} \rfloor - j)!}. \quad (10)$$

მსგავსი ტექნიკა იქნება გამოყენებული კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციების აღდგენის და შეფასების დროს.

ნაშრომი შედგება შესავლისგან, მთავარი ნაწილისგან, რომელიც თავის მხრივ იყოფა ოთხ თავად და დასკვნისგან.

პირველ თავში არის განხილული კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის სამი მოდელი. იმ შემთხვევებისთვის, როცა გვაქვს მოცემული მომენტების მნიშვნელობები სასრულ რიგამდე

$$m_F^- = \{m^-(j, F), j = 0, 1, \dots, \alpha\}, \quad m^-(j, F) = \int_0^1 [F(t)]^j dt. \quad (11)$$

ასევე, მოდელები განაწილების ფუნქციის supp-ის (მზიდის) მიხედვით არის დაყოფილი ორ ნაწილად: თუ  $\text{supp } \{F = (0, 1)\}$ , ან  $\text{supp } \{F = (0, \infty)\}$ .

მოდელი I:

$$Q_\alpha^-(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^-(j, F), \quad x \in (0, 1)$$

$$Q_{\alpha, S}(x) = \sum_{k=\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^-(j, S),$$

$$m^-(j, S) = \int_0^\infty [S(t)]^j dt, \quad j = 1, \dots, \alpha., \quad \text{სადაც } S(t) = 1 - F(t).$$

მოდელი II:

$$Q_\alpha(x) = \int_0^1 B_\alpha(F_\alpha(u), x) du,$$

$$Q_{\alpha,b}(x) = \int_0^\infty B_\alpha(F_{\alpha,b}(u), x) du.$$

მოდელი III:

$$Q_\alpha^+(x) = \int_0^1 \beta(t, c_x, d_x) Q(t) dt.$$

$$m^+(j, F) = \int t [F(t)]^j dF(t), \quad j = 0, 1, \dots, \alpha$$

$\beta(t, c_x, d_x)$  - ბეტა განაწილების სიმკვრივეა.

მეორე თავში მოყვანილია კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციების მოდელები ისეთივე პირობებში, როცა განაწილების ფუნქციის (მზიდი)  $\text{supp}$  არის კომპაქტი.

მოდელი I:

$$q_\alpha^-(x) = (B_\alpha^{-1} m_F^-)(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\lceil \alpha x \rceil + 1)} \sum_{j=0}^{\alpha - \lceil \alpha x \rceil} \frac{(-1)^j m^-(j + \lceil \alpha x \rceil, F)}{j!(\alpha - \lceil \alpha x \rceil - j)!}, \quad x \in (0, 1)$$

ან და  $(0, \infty)$  :

$$q_{\alpha,S}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\lceil \alpha \varphi(x) \rceil + 1)} \sum_{j=0}^{\alpha - \lceil \alpha \varphi(x) \rceil} \frac{(-1)^j m^-(j + \lceil \alpha \varphi(x) \rceil, S)}{j!(\alpha - \lceil \alpha \varphi(x) \rceil - j)!}, \quad x \in (0, \infty)$$

აქ  $\varphi(x) = 1 - x$ .

მოდელი II:

$$q_\alpha^*(x) = \int_0^1 \beta(F_\alpha(u), \lceil \alpha x \rceil + 1, \alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1) du, \quad \text{supp}(0, 1)$$

$$q_{\alpha,b}(x) = \int_0^\infty \beta(F_{\alpha,b}(u), b(u), \lceil \alpha x \rceil + 1, \alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1) du, \quad \text{supp}(0, \infty)$$

აგრეთვე პირველ ორ თავში შემოღებულია ახალი მოდიფიცირებული ვერსია კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციების აპროქსიმაციების

$$\tilde{q}_\alpha^-(x) = 2q_{\tilde{\alpha}}^-(x) - q_\alpha^-(x),$$

$$\tilde{q}_{\alpha,S}(x) = 2q_{\tilde{\alpha},S}(x) - q_{\alpha,S}(x),$$

სადაც  $\tilde{\alpha} = 2\alpha$ . და ნაჩვენებია მისი უპირატესობა ორიგინალ მოდელებთან შედარებით.

ნაშრომის მესამე თავი ეხება კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციების შეფასებას სხვადასხვა მოდელებისთვის:

$$\hat{Q}_\alpha^-(x) = (K_\alpha^{-1} m_{\hat{F}_n}^-)(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^-(j, \hat{F}_n),$$

$$Q_{\alpha, \hat{S}_n}(x) = (\bar{K}_\alpha^{-1} m_{\hat{S}_n}^-)(x) = \sum_{k=\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^-(j, \hat{S}_n)$$

$$\hat{Q}_{\alpha, n}(x) = \int_0^1 B_\alpha(\hat{F}_n(u), x) du$$

აღწერილია და შესწავლილია მათი ზოგიერთი თვისება, დამტკიცებულია ძალდებულობის თეორემები.

მეოთხე თავში არის შესწავლილი კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციის და შესაბამისი ემპირიული ანალოგების (შეფასებების) ყოფაქცევა განხილულია რამოდენიმე მაგალითი და შედეგი მოყვანილია გრაფიკების სახით სხვადასხვა პარამეტრების დროს.

ნაშრომში ასევე შესწავლილია კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასების და აპროქსიმაციის საკითხი ეკონომიკაში გამოყენებად

პროცესებში. მაგალითად ლორენცის მრუდის შეფასება :  $\hat{L}_\alpha(x) = \frac{1}{\hat{\mu}} \int_0^x \hat{Q}_\alpha(t) dt$ , ან

მოსალოდნელი დეფიციტი (ES) Mnatsakanov, Sborshchikovi[13]:  $\hat{e}s_\alpha(x) = \frac{1}{1-x} \int_x^1 \hat{Q}_\alpha(t) dt$ .

$$ES(x) = \frac{1}{1-x} \int_x^1 Q(\tau) d\tau$$

კიდევ ერთი საინტერესო საკითხი, რომელიც შესწავლილია ამ ნაშრომში განიხილავს კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აღდგენას მარჯვნიდან

ცენზურირების პირობებში:  $\hat{Q}_{\alpha, KM}(x) = \int_0^\infty B_\alpha(F_{KM}(u), x) du$ ,

$$\hat{q}_{\alpha, KM}(x) = (B_\alpha^{-1} m_{\hat{S}_{KM}}^{-1})(x).$$

აგრეთვე ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი საკითხი, რომელიც შემოთავაზებულ იქნება მეოთხე თავში შეეხება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალების ე.წ. მოლოდინის (ლოდინის) დროის (waiting time) გამოყენებას ჩვენს მიერ შემოთავაზებულ მოდელებისთვის.

ზემოთ აღნიშნული მოლოდინის (ლოდინის) დროის არის აღებული ჩვენს მიერ არსებული სხვადასხვა მიწისძვრების კატალოგიდან. შედარებისთვის აღებულ იქნა დედამიწის სხვადასხვა რეგიონის სეისმური მონაცემები მაგალითად: კავკასია, სომხეთი, საბერძნეთი, ყირგიზეთი და სამხრეთ კალიფორნია.

საბერძნეთის, კალიფორნიის და ყირგიზეთის კატალოგი მოძიებულ იქნა ინტერნეტიდან. კავკასიის კატალოგი მიღებულ იქნა მ.ნოდის სახელობის გეოფიზიკის ინსტიტუტის და ილიას უნივერსიტეტის ბაზაზე, ხოლო სასომხეთის

კატალოგი გამოყენებულ იქნა იმავე სტილის, რაც იყო გამოყენებული Gevorgyan and etc.[14] სტატიაში.

ჩვენ ვიღებდით  $\alpha$  და  $n$  სხვადასხვა პარამეტრების მნიშვნელობებს. ვადარებდით თუ როგორ იქცევა ჩვენი მოდელის შეფასება და ჰარელ-დევისის შეფასება. ეს კვლევა იყო ჩატარებული სპეციალურად შემუშავებული პროგრამულ Matlab-ის ბაზაზე. სამწუხაროდ ტექნიკური ხარვეზების გამო ( მძლავრი კომპიუტერების ნაკლებობა),  $\alpha$  პარამეტრის მაღალი მნიშვნელობის გამოყენება ვერ ხერხდება რადგანაც ფორმულაში მონაწილეობენ ფაქტორიალები, რომლებიც გვაძლევს დიდ ცდომილებას მაღალ  $\alpha$  -სთვის.  $\alpha$  ოპტიმალური მნიშვნელობა მერყეობს 30-35 ფარგლებში. მაგრამ აპროქსიმაციების უფრო ზუსტი მიახლოება შესაძლებელია პროგრამა მათემატიკის (Mathematika) გამოყენების დროს, რადგან შეგვიძლია მაღალი  $\alpha$  მნიშვნელობის აღება.

განხილული მოდელის შესაბამისი შეფასებები ჰარელ-დევისის მოდელთან შედარებით არ არის უწყვეტი, თუმცა ამ ფაქტის თავის არიდების მიზნით შეიძლება ავალთ ინტერპოლიაცია მაგალითად ბერნშტეინის პოლინომის საშუალებით. ჰარელ-დევისის მოდელთან შედარებით აღნიშნული მოდელის უპირატესობა მდგომარეობს იმაში რომ მისი გამოყენება ხდება მაშინ როდესაც არ არსებობს დაკვირვებები და გვაქვს მოცემული მომენტები ან მათი შეფასება გარკვეულ რიგამდე.

ასევე ნაშრომის შედეგები, რომელიც მოყვანილი იქნება მეოთხე თავში ცხრილების საშუალებით, გვიჩვენებს, რომ  $\alpha$  კოეფიციენტი ზრდა აპროქსიმაციის შემთხვევაში გვაძლევს უკეთეს მიახლოებას თეორიულ კვანტილის ფუნქციასთან. რაც შეეხება შეფასებას ასევე ცხრილებზე დაყრნობით ვხედავთ, რომ  $\alpha$  და  $n$  პარამეტრების ზრდა გვაძლევს უფრო უკეთეს მიახლოებას. მაგრამ მათი სიჩქარის ზრდა არ არის ბოლომდე შესწავლილი. დანამდვილებით ცნობილია, რომ  $\frac{\alpha}{n} \rightarrow 0$ , როცა  $\alpha \rightarrow \infty$  და  $n \rightarrow \infty$ .

# თავი I

## კვანტილის ფუნქციის აღდგენა

მომენტთა პრობლემა დღევანდელი მეცნიერებისთვის ახალი არ არის. ეს პრობლემა, მე-19 საუკუნის დასაწყისიდან (იხილეთ სტიელტესის და ჰაუსდორფის ნაშრომები), განხილული იყო ცნობილი მათემატიკოსების ნაშრომებში. დღესდღეობით, ამ სფეროში არსებობს ბევრი არაშესწავლილი საკითხები.

ერთ-ერთ ასეთ საკითხს წარმოადგენს პრობლემა, როცა საჭიროა უცნობი განაწილების ფუნქციის კვანტილის (შებრუნებული ფუნქციის) აღდგენა, ისეთი სიტუაციაში, როცა ჩვენთვის ცნობილია მხოლოდ მომენტები გარკვეულ რიგამდე.

მოცემულ თავში განხილულია კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის სამი ტიპის მოდელი:

მოდელი 1: როცა ცნობილია ენტროპიული მომენტები;

მოდელი 2: როცა მოცემული ჩვეულებრივი მომენტები;

მოდელი 3: როცა ჩვენ გვაქვს საქმე ტრანსპონირებულ მომენტებთან.

აღნიშნული მოდელებისთვის განხილულია ორი შემთხვევა, როცა განაწილების ფუნქციის განსაზღვრის არე არის კომპაქტი, ან ის არის დადებით ნახევარ ღერძი  $R_+ = (0, \infty)$ .

აგრეთვე ამ თავში მოყვანილია კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის მოდიფიცირებული ვერსია და ნაჩვენებია მისი უპირატესობა, ძირითად აპროქსიმაციასთან შედარებით. დამტკიცებულია თეორემები კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის რიგის შესახებ.

დავუშვათ  $F$  არის აბსოლუტურად უწყვეტი განაწილების ფუნქცია, ლეზეგის ზომის მიმართ  $R_+$ -ზე. შესაბამისი სიმკვრივის ფუნქცია აღვნიშნოთ  $f$  –ით. შემდეგში ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ გვაქვს შემდეგი მომენტების თანმიმდევრობა Romera, Angulo, Dehesa [15]:

$$m(j, F) = \int t^j dF(t),$$

$$m^-(j, F) = \int_0^1 [F(t)]^j dt, \quad m^-(j, S) = \int_0^\infty [S(t)]^j dt,$$

$$m^+(j, F) = \int t [F(t)]^j dF(t), \quad j \in N.$$

შემდგომში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ აღნიშნული მომენტები წარმოადგენენ სასრულ რიცხვთა მიმდევრობას, ხოლო  $N$  არის ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა.

შემოვიდოთ ზოგიერთი აღნიშვნები, რომელიც შემდგომ პარაგრაფებში იქნება გამოყენებული

$f$  - ის ნორმა თანაბარ მეტრიკაში:  $\|f\| = \sup_{0 \leq x \leq T} |f(x)| < \infty$ .

$f$  - ის  $L_1$ -ნორმა:  $\|f\|_{L_1} = \int |f(t)| dt$ .

### 1.1 მოდელი I, შემთხვევა (A): $\text{supp}\{F\} = (0, T)$ , $T < \infty$ .

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმობთ რომ  $T = 1$ . დავუშვათ, ჩვენთვის ცნობილია ენტროპიული მომენტების შემდეგი მიმდევრობა  $\alpha$  რიგამდე

$$m_F^- = \{m^-(j, F),$$

$j = 0, 1, \dots, \alpha\}$ , სადაც:

$$m^-(j, F) = \int_0^1 [F(t)]^j dt. \quad (1.1)$$

ყოველი  $0 < x < 1$  -ისთვის, გავიხსენოთ კვანტილის ფუნქციის განსაზღვრება,  $Q(x) = \inf\{t : F(t) \geq x\}$ .  $Q$  -ს განზოგადოებული შებრუნებული ფუნქციას უწოდებენ, როცა  $F$  არის უწყვეტი, მაშინ  $Q(x) = F^{-1}(x)$ .

განვმარტოთ კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია შემდეგნაირად:

$$Q_\alpha^-(x) = (K_\alpha^{-1} m_F^-)(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1.2)$$

სადაც

$$(K_\alpha^{-1} m_F^-)(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^-(j, F). \quad (1.3)$$

აქ  $\alpha \in N$  არის პარამეტრი, რომელიც განსაზღვრავს გამოყენებულ მომენტების რაოდენობას.

**თეორემა 1.1.** დავუშვათ ფუნქციები  $Q', Q''$  არიან შემოსაზღვრული  $(0, 1)$  - ზე და ამასთანავე  $Q''$  უწყვეტია, მაშინ, როცა  $\alpha \rightarrow \infty$  მივიღებთ:

$$Q_\alpha^-(x) - Q(x) = \frac{1}{\alpha + 1} [(1 - x + \lfloor \alpha x \rfloor - \alpha x) Q'(x) + \frac{1}{2} x(1 - x) Q''(x)] + o\left(\frac{1}{\alpha}\right); \quad (1.4)$$

$$\|Q_\alpha^- - Q\| \leq \frac{1}{\alpha + 1} \left\{ \|Q'\| + \frac{1}{8} \|Q''\| \right\} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right). \quad (1.5)$$

**დამტკიცება:** ჩავსვათ (1.1) ფორმულით განსაზღვრული ენტროპიული მომენტები (1.3)-ს გამოსახულებაში, მივიღებთ:



$$\begin{aligned}
Q_{\alpha}^{-}(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \int_0^1 [F(t)]^j dt = \\
& \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \int_0^1 [F(t)]^{j+k-k} dt \\
& \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!k!(j-k)!} \int_0^1 [F(t)]^k [-F(t)]^{j-k} dt = \\
& \int_0^1 \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \frac{\alpha!(\alpha-k)!}{(\alpha-j)!(j-k)!k!(\alpha-k)!} [F(t)]^k [-F(t)]^{j-k} dt =
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!} [F(t)]^k \sum_{j=k}^{\alpha} \frac{(\alpha-k)!}{(\alpha-j)!(j-k)!} [-F(t)]^{j-k} dt.$$

(1.6) ბოლო სტრიქონის მეორე ჯამში შემოვიღოთ ახალი ინდექსი,  $m = j - k$ , და ნიუტონის ბინომის ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$\begin{aligned}
Q_{\alpha}^{-}(x) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \frac{\alpha! [F(t)]^k}{k!(\alpha-k)!} \sum_{m=0}^{\alpha-k} \frac{(\alpha-k)!}{m!(\alpha-k-m)!} [-F(t)]^m dt = \\
& \int_0^1 \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \binom{\alpha}{k} [F(t)]^k (1-F(t))^{\alpha-k} dt = \int_0^1 B_{\alpha}(F(t), x) dt .
\end{aligned} \tag{1.7}$$

აქ

$$B_{\alpha}(t, x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \binom{\alpha}{k} t^k (1-t)^{\alpha-k}, \quad 0 < t < 1. \tag{1.8}$$

მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა ინტეგრალის შიგნით  $u = F(t)$ , ე.ი.  $t = Q(u)$ ,

ე.ი. (1.7) გამოსახულება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$Q_{\alpha}^{-}(x) = \int_0^1 B_{\alpha}(F(t), x) dt = \int_0^1 B_{\alpha}(u, x) dQ(u). \tag{1.9}$$

(1.9)-ის მარჯვენა მხარეს ნაწილობრივი ინტეგრირების ფორმულის გამოყენების შემდეგ მივიღებთ ტოლობას:

$$B_{\alpha}(t, x) Q(t) I_0^1 - \int_0^1 Q(t) \frac{\partial}{\partial t} B_{\alpha}(t, x) dt = \tag{1.10}$$

$$B_\alpha(1, x)Q(1) - B_\alpha(0, x)Q(0) - \int_0^1 Q(t) \frac{\partial}{\partial t} B_\alpha(t, x) dt ,$$

სადაც  $Q(0) = 0$  და  $B_\alpha(1, x) = 0$  მაშასადამე გვექნება:

$$Q_\alpha^-(x) = - \int_0^1 Q(t) \frac{\partial}{\partial t} B_\alpha(t, x) dt . \quad (1.11)$$

გამოვთვალოთ  $B_\alpha(t, x)$ -ს კერძო წარმოებული პირველი არგუმენტის მიმართ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\alpha(t, x)}{\partial t} &= -\alpha(1-t)^{\alpha-1} + \sum_{k=1}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \binom{\alpha}{k} k t^{k-1} (1-t)^{\alpha-k} - \sum_{k=1}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \binom{\alpha}{k} t^k (1-t)^{\alpha-k-1} = \\ &= -\alpha(1-t)^{\alpha-1} + \alpha \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor - 1} \binom{\alpha-1}{k} t^k (1-t)^{\alpha-1-k} - \alpha \sum_{k=1}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \binom{\alpha-1}{k} t^k (1-t)^{\alpha-1-k} = \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor - 1} \binom{\alpha-1}{k} t^k (1-t)^{\alpha-1-k} - \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \binom{\alpha-1}{k} t^k (1-t)^{\alpha-1-k} = \\ &= -\alpha \binom{\alpha-1}{\lfloor \alpha x \rfloor} t^{\lfloor \alpha x \rfloor} (1-t)^{\alpha-1-\lfloor \alpha x \rfloor} = -\beta(t, c, d-1) . \end{aligned} \quad (1.12)$$

ახლა განვიხილოთ შემდეგი სხვაობა:

$$Q_\alpha^-(x) - Q(x) = \int_0^1 B_\alpha(t, x) dQ(t) - Q(x) = \int_0^1 [Q(t) - Q(x)] \beta_\alpha(t, c, d-1) dt, \quad (1.13)$$

სადაც  $\beta_\alpha(\cdot, c, d)$ -ით აღნიშნულია ზეტა განაწილების სიმკვრივე პარამეტრებით  $c = \lfloor \alpha x \rfloor + 1, d - 1 = \alpha - \lfloor \alpha x \rfloor$ . მისი საშუალო და დისპერსია მოიცემა შემდეგი

სახით:

$$\theta_\alpha = \frac{\lfloor \alpha x \rfloor + 1}{\alpha + 1}, \sigma_\alpha^2 = \frac{(\lfloor \alpha x \rfloor + 1)(\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor)}{(\alpha + 1)^2(\alpha + 2)}, \quad (1.14)$$

გადავწეროთ  $\theta_\alpha - x$  სხვაობა შემდეგნაირად:

$$\theta_\alpha - x = \frac{1-x}{\alpha+1} + \frac{\lfloor \alpha x \rfloor - \alpha x}{\alpha+1}, \quad (1.15)$$

და აღვნიშნოთ, რომ

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{x(1-x)}{(\alpha+2)} + \Delta_{2,\alpha}(x),$$

სადაც  $\Delta_{2,\alpha}(x) \leq \frac{2}{(\alpha+2)^2}$  (იხ. Chen [16], Johnson, Kotz, Balakrishnan [18]). შემდგომში

სიმარტივისთვის  $\beta_\alpha(\cdot, c, d-1)$  აღვნიშნავთ  $\beta_\alpha(t, x)$ .

ტეილორის ფორმულის გამოყენებით (1.4)-ში  $Q(t)$ -ისთვის  $t = x$  წერტილის მახლობლად მივიღებთ:

$$\int_0^1 (Q'(x)(t-x) + \frac{Q''(\tilde{t})(t-x)^2}{2}) \beta_\alpha(t, x) dt, \quad (1.16)$$

განვიხილოთ პირველი შესაკრების ყოფაქცევა:

$$\int_0^1 Q'(x)(t-x)\beta_\alpha(t,x)dt = Q'(x)\left[\int_0^1 t\beta_\alpha(t,x)dt - x\int_0^1 \beta_\alpha(t,x)dt\right], \quad (1.17)$$

სადაც  $\int_0^1 t\beta_\alpha(t,x)dt$  არის ბეტა განაწილების პირველი მომენტი, რომელიც იყო

მოყვანილი (1.14)-ში, რაც შეეხება  $\int_0^1 \beta_\alpha(t,x)dt = 1$ , მაშასადამე საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\int_0^1 Q'(x)(t-x)\beta_\alpha(t,x)dt = Q'(x)(\theta_\alpha - x) = Q'(x)\frac{(1-x - \lfloor \alpha x \rfloor - \alpha x)}{\alpha + 1}. \quad (1.18)$$

ახლა განვიხილოთ მეორე შესაკრები

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^1 Q''(\tilde{t})(t-x)^2\beta_\alpha(t,x)dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 (Q''(\tilde{t}) - Q''(x) + Q''(x))(t-x)^2\beta_\alpha(t,x)dt = \\ &= \frac{1}{2}Q''(x)\int_0^1 (t-x)^2\beta_\alpha(t,x)dt + \int_0^1 (Q''(\tilde{t}) - Q''(x))(t-x)^2\beta_\alpha(t,x)dt, \end{aligned} \quad (1.19)$$

შევაფასოთ (1.19)-ის მეორე შესაკრები:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}\int_0^1 (Q''(\tilde{t}) - Q''(x))(t-x)^2\beta_\alpha(t,x)dt \right| &\leq \frac{1}{2}\int_{|t-x|\leq\delta} |(Q''(\tilde{t}) - Q''(x))|(t-x)^2\beta_\alpha(t,x)dt + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{|t-x|\geq\delta} |(Q''(\tilde{t}) - Q''(x))|(t-x)^2\beta_\alpha(t,x)dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon \int_{|t-x|\leq\delta} (t-x)^2\beta_\alpha(t,x)dt + \frac{1}{2} * 2\|Q''\| \int_{|t-x|\geq\delta} (t-x)^2\beta_\alpha(t,x)dt. \end{aligned} \quad (1.20)$$

ნებისმიერი  $\varepsilon$ , რადგანაც  $Q''(x)$  უწყვეტია  $(0,1)$  და  $t < \tilde{t} < x$ ,  $|(Q''(\tilde{t}) - Q''(x))|$

შევცვლით  $\varepsilon$ . აგრეთვე აღვნიშნოთ, რომ

$$\int_{|t-x|\leq\delta} (t-x)^2\beta_\alpha(t,x)dt \leq \sigma_\alpha^2 = \frac{x(1-x)}{\alpha+1} + \Delta_{2,\alpha}(x) = \frac{C_1}{\alpha+1}, \quad (1.21)$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$\frac{1}{2}\int_{|t-x|\geq\delta} (t-x)^2\beta_\alpha(t,x)dt = o\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad \text{როცა } \alpha \rightarrow \infty. \quad (1.22)$$

შემოვიღოთ ფუნქციათა მიმდევრობა:

$$\beta^*(t,x) = (\alpha+1)(t+x)^2\beta_\alpha(t,x). \quad (1.23)$$

ეს ფუნქციები წარმოადგენენ  $\delta$ - მიმდევრობას, წერტილში  $t=x$ , და

$$\int_{|t-x|\geq\delta} \beta^*(t,x)dt \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow \infty. \quad (1.24)$$

საბოლოოდ ჩვენ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{|t-x|\geq\delta} (t-x)^2 \beta_\alpha(t,x)dt &= \frac{\frac{1}{2} \int_{|t-x|\geq\delta} (t-x)^2 \beta_\alpha(t,x)dt}{\frac{1}{2} \int_0^1 (t-x)^2 \beta_\alpha(t,x)dt} \times \\ &\times \frac{1}{2} \int_0^1 (t-x)^2 \beta_\alpha(t,x)dt \approx \\ &\approx \frac{1}{2C} (\alpha+1) \int_{|t-x|\geq\delta} (t-x)^2 \beta_\alpha(t,x)dt \left( \frac{C}{\alpha+1} \right) + o\left( \frac{1}{\alpha} \right), \end{aligned} \quad (1.25)$$

თუმცა, ჩვენ ვიცით, რომ როცა  $\alpha \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{2C} (\alpha+1) \int_{|t-x|\geq\delta} (t-x)^2 \beta_\alpha(t,x)dt \leq \frac{1}{2C} \int_{|t-x|\geq\delta} \beta^*(t,x)dt \rightarrow 0, \quad (1.26)$$

ამიტომ (1.24)-(1.26) გამოყენებით, დავასკვნით, რომ როცა  $\alpha \rightarrow \infty$  გვექნება:

$$\frac{1}{2} \int_{|t-x|\geq\delta} (t-x)^2 \beta_\alpha(t,x)dt = o\left( \frac{1}{\alpha} \right). \quad (1.27)$$

გადაწეროთ (1.19) გამოსახულების პირველი შესაკრები შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{2} Q''(x) \int_0^1 (t-x)^2 \beta_\alpha(t,x)dt = \frac{1}{2} Q''(x) \int_0^1 (t-\theta + \theta-x)^2 \beta_\alpha(t,x)dt, \quad (1.28)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t-\theta + \theta-x)^2 \beta_\alpha(t,x)dt &= \int_0^1 (t-\theta)^2 \beta_\alpha(t,x)dt - 2 \int_0^1 (t-\theta)(\theta-x) \beta_\alpha(t,x)dt + \\ &+ \int_0^1 (\theta-x)^2 \beta_\alpha(t,x)dt. \end{aligned} \quad (1.29)$$

განვიხილოთ სამივე შესაკრები ცალ-ცალკე:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t-\theta)^2 \beta_\alpha(t,x)dt &\text{ არის } \sigma_\alpha^2 \text{ ტოლი, ხოლო} \\ -2 \int_0^1 (t-\theta)(\theta-x) \beta_\alpha(t,x)dt &= -2(\theta-x) \int_0^1 (t-\theta) \beta_\alpha(t,x)dt = \\ -2(\theta-x) \left[ \int_0^1 t \beta_\alpha(t,x)dt - \int_0^1 \theta \beta_\alpha(t,x)dt \right] &= -2(\theta-x)(\theta-\theta) \int_0^1 \beta_\alpha(t,x)dt = \end{aligned}$$

$$-2(\theta-x)(\theta-\theta)=0,$$

და

$$\int_0^1 (\theta-x)^2 \beta_\alpha(t,x) dt = (\theta-x)^2 \int_0^1 \beta_\alpha(t,x) dt = (\theta-x)^2 = \left( \frac{1-x}{\alpha+1} + \frac{\lfloor \alpha x \rfloor - \alpha x}{\alpha+1} \right)^2, \quad (1.30)$$

საიდანაც მიღებული შედეგების ჩასმით მივიღებთ დასამტკიცებელს

$$Q_\alpha^-(x) - Q(x) = \frac{1}{\alpha+1} [(1-x + \lfloor \alpha x \rfloor - \alpha x) Q'(x) + \frac{1}{2} x(1-x) Q''(x)] + o\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha \rightarrow \infty. \quad (1.31)$$

წინა შედეგების თანახმად ადვილად მიიღება უტოლობა:

$$\|Q_\alpha^- - Q\| \leq \frac{1}{\alpha+1} \left\{ \|Q'\| + \frac{1}{8} \|Q''\| \right\} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha \rightarrow \infty. \quad (1.32)$$

რადგანაც ყოველი  $0 \leq x \leq 1$ ,  $|1-x + \lfloor \alpha x \rfloor - \alpha x| \leq 1$ , და  $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ . თეორემა დამტკიცებულია.  $\square$

## 1.2 მოდელი I, შემთხვევა (B): $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$

დავუშვათ ჩვენთვის ცნობილია ენტროპიული მომენტები  $a$  რიგამდე  $m_s^- = \{m^-(j, S), j = 0, 1, \dots, \alpha\}$ , რომლებიც მოიცემა შემდეგი სახით:

$$m^-(j, S) = \int_0^\infty [S(t)]^j dt, \quad j = 1, \dots, \alpha. \quad (1.33)$$

აქ  $S = 1 - F$  წარმოადგენს  $F$  განაწილების კუდს. ჩვენ ფორმულებში ვიყენებთ დაშვებას, რომ პირველი მომენტი სასრულია და არსებობს ყველა შემდეგი მომენტი  $m^-(1, S) = E(X) < \infty$ , ამის გათვალისწინებით შემოვიღოთ  $Q$ -ს შემდეგნაირად განსაზღვრული აპროქსიმაცია

$$Q_{\alpha, S}(x) = (\bar{K}_\alpha^{-1} m_s^-)(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1.34)$$

სადაც

$$(\bar{K}_\alpha^{-1} m_s^-)(x) = \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^-(j, S). \quad (1.35)$$

**თეორემა 1.2:** თუ კი  $Q'$  და  $Q''$  შემოსაზღვრულია  $x \in (\delta, 1-\delta)$  და  $Q'$  არის უწყვეტი, მაშინ როცა  $\alpha \rightarrow \infty$ , ჩვენ გვექნება

$$(i) Q_{\alpha, S}(x) - Q(x) = \frac{1}{\alpha+1} [(1-x + \lfloor \alpha x \rfloor - \alpha x) Q'(x) + \frac{1}{2} x(1-x) Q''(x)] + o\left(\frac{1}{\alpha}\right); \quad (1.36)$$

$$(ii) \|Q_{\alpha, S} - Q\| \leq \frac{1}{\alpha+1} \left\{ \|Q'\| + \frac{1}{8} \|Q''\| \right\} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right). \quad (1.37)$$

**დამტკიცება:** (1.33) ფორმულაში მოცემული სიხშირული მომენტები ჩავსვათ (1.35), მივიღებთ

$$\begin{aligned} Q_{\alpha, S}(x) &= \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \int_0^{\infty} [S(t)]^j dt = \\ &= \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \int_0^{\infty} [S(t)]^{j+k-k} dt \\ &= \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)! k!(j-k)!} \int_0^{\infty} [S(t)]^k [-S(t)]^{j-k} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \frac{\alpha!(\alpha-k)!}{(\alpha-j)!(j-k)! k!(\alpha-k)!} [S(t)]^k [-S(t)]^{j-k} dt = \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\int_0^{\infty} \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \frac{\alpha! [S(t)]^k}{k! (\alpha-k)!} \sum_{j=k}^{\alpha} \frac{(\alpha-k)!}{(\alpha-j)!(j-k)!} [-S(t)]^{j-k} dt,$$

(1.38) შემოვიღოთ ბოლო სტრიქონის მეორე ჯამში ახალი ინდექსი,  $l = j - k$ .

ნიუტონის ბინომის ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha, S}(x) &= \int_0^{\infty} \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \frac{\alpha! [S(t)]^k}{k! (\alpha-k)!} \sum_{l=0}^{\alpha-k} \frac{(\alpha-k)!}{l! (\alpha-k-l)!} [-S(t)]^l dt = \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} [S(t)]^k (1-S(t))^{\alpha-k} dt = \int_0^{\infty} B_{\alpha}(F(t), x) dt = \\ &= \int_0^1 B_{\alpha}(t, x) dQ(t). \end{aligned}$$

თუ კი გავითვალისწინებთ შემდეგ გამოსახულებას

$$Q_{\alpha, S}(x) - Q(x) = \int_0^1 B_{\alpha}(t, x) dQ(t) - Q(x) = \int_0^1 [Q(t) - Q(x)] \beta_{\alpha}(t, c, d-1) dt,$$

და გამოვიყენებთ იგივე ტექნიკას, რასაც თეორემა 1.1 (1.10)-(1.32) გამოსახულებებში და აგრეთვე (იხ. Mnatsakanov, Sborshchikovi [19]) მარტივად დავამტკიცებთ (i)-(ii).  $\square$

**ლემა 1.1:** თუ კი  $\text{supp}\{F\} = (0,1)$ , მაშინ  $Q_{\alpha,S}(x) = Q_{\alpha}^{-}(x)$ , ყოველი  $x \in (0,1)$ .

**დამტკიცება:** რადგანაც, ყოველი  $j \in N_{\alpha}$ , სადაც  $N_{\alpha} = \{0,1,\dots, \alpha\}$ , შემდეგი ინტეგრალები

სასრულია:  $\int_0^1 [F(t)]^j dt < \infty$ . თუ კი გავითვალისწინებთ (1.7) და (1.38) გაკეთებულ

ეტაპებს მივიღებთ:

$$Q_{\alpha,S}(x) = \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \int_0^1 [S(t)]^j dt =$$

$$\int_0^{\infty} \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} [S(t)]^k (1-S(t))^{\alpha-k} dt = \int_0^1 B_{\alpha}(F(t), x) dt = Q_{\alpha}^{-}(x) \quad , \quad (1.39)$$

ე.ი. ორივე მოდელისთვის გვაქვს (იხ.1.8):

$$Q_{\alpha,S}(x) = Q_{\alpha}^{-}(x) = \int_0^1 B_{\alpha}(F(t), x) dt. \quad (1.40) \quad \square$$

**შენიშვნა 1:** მოცემულ თეორემებში განხილული თეორიული ზღვრების პრაქტიკაში გამოთვლა ვერ ხერხდება, რადგან პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები  $Q'$  და  $Q''$  არ არიან ცნობილი. იმის გათვალისწინებით, რომ  $Q''$  არის უწყვეტი  $(0,1)$ -ზე, შემოგვაქვს  $Q'$  და  $Q''$  აპროქსიმაციები:

$$Q_{\alpha}'(x) = (B_{\alpha}^{-1} m_F^{-})(x)$$

და

$$Q_{\alpha}''(x) = (B_{\alpha}^{-1} m_F^+)(x), \quad x \in (0,1), \quad (1.41)$$

სადაც

$$m_F^{-} = (m^{-}(j, F), j = 0,1,\dots, \alpha)$$

$$m_F^{+} = (m_{-}(j, F), j = 1,\dots, \alpha), \quad (1.42)$$

$$m_{-}(j, F) = (-j)m^{-}(j-1, F) + Q_{\alpha}'(1). \quad (1.43)$$

აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ  $Q_{\alpha}'$  და  $Q_{\alpha}''$  ეფუძნება ერთ და იგივე ფორმულას Mnatsakanov, Garai [20], Mnatsakanov, Sborshchikovi [19]:

$$(B_{\alpha}^{-1} m)(x) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\lfloor \alpha x \rfloor + 1)} \sum_{j=0}^{\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor} \frac{(-1)^j m(j+\lfloor \alpha x \rfloor)}{j!(\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor-j)!}, \quad x \in (0,1). \quad (1.44)$$

$\varepsilon_0$  სიზუსტის აპროქსიმაციისთვის ვიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\frac{1}{\alpha_0 + 1} \left\{ \|Q_{\alpha}'\| + \frac{1}{8} \|Q_{\alpha}''\| \right\} = \varepsilon_0$$

სადაც  $\alpha_0$  განისაზღვრება შემდეგნაირად:  $\alpha_0 = \left\lfloor \frac{\varepsilon_0}{\|Q'_\alpha\| + \frac{1}{8}\|Q''_\alpha\|} - 1 \right\rfloor$ .

$\alpha_0$  შერჩევისას უნდა ავიღოთ  $\alpha$  საკმარისად დიდი მნიშვნელობა.

### 1.3 მოდელი II, შემთხვევა (A): $\text{supp } \{F\} = (0, T), T < \infty$ .

**შემთხვევა (A):** ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმობთ რომ  $T=1$ , და დავუშვათ რომ ცნობილია  $F$  განაწილების ფუნქციის მომენტები  $\alpha$  რიგამდე  $m_F = \{1, m(1, F), \dots, m(\alpha, F)\}$ , სადაც

$$m(j, F) = \int_0^1 t^j dF(t), \quad j \in N = \{1, 2, \dots\}, \quad (1.45)$$

აღნიშვნით  $F$  განაწილების ფუნქციის შემდეგი აპროქსიმაცია  $F_\alpha = K_\alpha^{-1} m_F$ , როცა  $\alpha \rightarrow \infty$ , მივიღებთ

$$(K_\alpha^{-1} m_F)(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m(j, F), \quad x \in (0, 1). \quad (1.46)$$

$Q(x)$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია მეორე მოდელისათვის განვმარტოთ შემდეგნაირად:

$$Q_\alpha(x) = \int_0^1 B_\alpha(F_\alpha(u), x) du, \quad 0 < x < 1. \quad (1.47)$$

(1.47) ფორმულაში მონაწილე აპროქსიმაცია  $F_\alpha$  – თვის ზემოთ ნაჩვენები იყო

$\|F_\alpha - F\| \leq \frac{C_2}{\alpha + 1}$  (იხ. Mnatsakanov [11], Mnatsakanov, Ruymgaart[17]), აგრეთვე

შევნიშვნოთ (იხ. Johnson[18]):

$$\beta(t, \lfloor \alpha x \rfloor + 1, \alpha - \lfloor \alpha x \rfloor + 1) \leq \frac{C_1 \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad 0 < x < 1, \quad (1.48)$$

სადაც  $C_1$  დადებითი მუდმივია. შემდგომში გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნებს:

$$\|f\|_\delta = \sup_{\delta \leq x \leq 1-\delta} |f(x)|, \quad C_2 = \|f\| + \|f'\|/2, \quad C_3 = \|f\| + \|f'\|/12,$$

$$C_4 = \|Q'\|_{L_1}, \quad C_5 = \int |Q''(x)| x(1-x) dx.$$

**თეორემა 1.3:** თუ  $f$  და  $f'$  და აგრეთვე  $Q', Q''$  ფუნქციები უწყვეტი არიან  $(0, 1)$ -ზე, მაშინ, როცა  $\alpha \rightarrow \infty$ :



$$(i) \quad \|Q_\alpha - Q_\alpha^-\|_\delta \leq \frac{C_2 \|Q'\|_\delta}{\alpha + 1} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad (1.49)$$

(ii) თუ (1.47)-ში  $[ax]$  ქვეშ ვიგულისხმებთ უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც ნაკლებია  $\alpha x$ -ზე მაშინ :

$$\|Q_\alpha - Q\|_\delta \leq \frac{1}{\alpha + 1} \left\{ (1 + C_2) \|Q'\|_\delta + \frac{1}{8} \|Q''\|_\delta \right\} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad (1.50)$$

(iii) თუ  $C_4 < \infty$  და  $Q''$  უწყვეტია  $(0,1)$ -ზე, მაშინ

$$\|Q_\alpha - Q_\alpha^-\|_{L_1} \leq \frac{C_1 C_3 \pi}{8\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\alpha + 1} \left\{ C_4 + \frac{1}{2} C_5 \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right), \quad \alpha \rightarrow \infty. \quad (1.51)$$

**დამტკიცება:** (i): ყოველი  $x \in (\delta, 1 - \delta)$ , გამოვიყენოთ ტეილორის ფორმულა  $B_\alpha(t, x)$ -სთვის (პარაგრაფი 1.1, (1.13) ტოლობა) და

$$\frac{\partial^2 B_\alpha(t, x)}{\partial t^2} = \beta(t, c, d - 2) - \beta(t, c - 1, d - 1) = \Delta\beta(t, x), \quad (1.52)$$

გამოყენებით, მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\begin{aligned} Q_\alpha(x) - Q_\alpha^-(x) &= \int_0^1 [B_\alpha(F_\alpha(u), x) - B_\alpha(F(u), x)] du = \\ &= - \int_0^1 [F_\alpha(u) - F(u)] \beta(F(u), c, d - 1) du + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 [F_\alpha(u) - F(u)]^2 \Delta\beta(\tilde{F}(u), x) du. \end{aligned} \quad (1.53)$$

შევაფასოთ (1.53) პირველი შესაკრები:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 [F_\alpha(u) - F(u)] \beta(F(u), c, d - 1) du \right| &\leq \|F_\alpha - F\| \int_0^1 \beta(F(u), x) du \leq \\ &\frac{C_2}{\alpha + 1} \int_0^1 \beta(t, x) Q'(t) dt \leq \frac{C_2 \|Q'\|_\delta}{\alpha + 1}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

განვიხილოთ (1.53) მეორე შესაკრები აღვნიშვნოთ, რომ:

$$\Delta\beta(t, x) = \beta(t, c, d - 2) - \beta(t, c - 1, d - 1),$$

ამიტომ, (1.48) გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} |\beta(t, c, d - 2) - \beta(t, c - 1, d - 1)| &\leq |\beta(t, c, d - 2)| + |\beta(t, c - 1, d - 1)| \leq \\ &\leq \frac{C_1 \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x(1-x)}} + \frac{C_1 \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2C_1 \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x(1-x)}}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

და

$$\sup_{\delta \leq x \leq 1-\delta} \left| \frac{2C_1 \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x(1-x)}} \right| \frac{1}{2} \int_0^1 [F_\alpha(u) - F(u)]^2 du \leq \frac{C_1 \alpha^{\frac{1}{2}} C_2}{\delta(\alpha+1)^2} = o\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

ამიტომ ვლუბლობთ მე-(1.49).

(ii) -ს დამტკიცებას ადვილად მივიღებთ (1.49) და თეორემა 1.1-ში მიღებული შედეგების გამოყენებით:

$$\begin{aligned} \|Q_\alpha - Q\|_\delta &= \frac{C_2 \|Q\|_\delta}{\alpha+1} + \left( \frac{1}{\alpha+1} [\|Q'\|_\delta + \frac{1}{8} \|Q''\|_\delta] + o\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha+1} (\|Q'\|_\delta (1+C_2) + \frac{1}{8} \|Q''\|_\delta), \text{ როცა } \alpha \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.56)$$

(iii) ის დამტკიცება ხდება ისევ (1.49) გამოყენებით

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Q_\alpha - Q_\alpha^-| dx &\leq \int_0^1 \int_0^1 |F_\alpha(u) - F(u)| \beta(\tilde{F}(u), c, d-1) du dx \leq \\ &\leq \frac{C_1 C_2 \sqrt{\alpha}}{\alpha+1} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) = \\ &= \frac{C_1 C_3 \pi}{8\sqrt{\alpha}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right). \end{aligned} \quad (1.57)$$

მეორეს მხრივ (1.31) -ის გამოყენებით გვექნება:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Q_\alpha^-(x) - Q(x)| dx &\leq \frac{1}{\alpha+1} \{ |Q'(x)(1-x + \lfloor \alpha x \rfloor - \alpha x)| dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 |Q''(x)| x(1-x) dx \} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right), \text{ როცა } \alpha \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.58)$$

ამიტომ (1.57)-(1.59) -ს საშუალებით დებულება დამტკიცებულია.  $\square$

#### 1.4 მოდელი II, შემთხვევა (B): $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$

ვთქვათ ჩვენთვის ცნობილია  $F$  ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნის მნიშვნელობები შემდეგ წერტილებში  $s \in \{0, \ln b, 2 \ln b, \dots, \alpha \ln b\}$ , რაიმე  $b > 1$

$$L_{F,b}(j) = \int e^{-j \ln(b)\tau} dF(\tau), j = 0, 1, \dots, \alpha, \quad (1.59)$$

$Q$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია  $L_{F,b}(j)$  -ს საშუალებით ხდება ანალოგიურად:

$$Q_{\alpha,b}(x) = \int_0^{\infty} B_{\alpha}(F_{\alpha,b}(u), x) du, \quad (1.60)$$

$F_{\alpha,b}$  - შესწავლილი იყო ადრე იხ. Mnatsakanov, Sarkisian [21] და განისაზღვრება გამოსახულებით:  $F_{\alpha,b} = L_{\alpha}^{-1} L_{F,b}$ , სადაც

$$L_{\alpha}^{-1} L_{F,b}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha b^{-x} \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} L_{F,b}(j), x \in R_+, \quad (1.61)$$

აგებულ კონსტრუქციაში  $b$  ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვია და  $\alpha \rightarrow \infty$ .

### 1.5 მოდელი III, შემთხვევა (B): $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$

ვთქვათ გვაქვს მოცემული ტრანსპონირებული მომენტები  $m_F^+ = \{m^+(j, F), j = 0, \dots, \alpha\}$ , სადაც

$$m^+(j, F) = \int_0^{\infty} x [F(x)]^j dF(x). \quad (1.62)$$

დავუშვათ, რომ პირველი რიგის მომენტი  $m^+(0, F) = \int x dF(x)$  სასრულია, მაშინ არსებობს ყველა უფრო მაღალი რიგის მომენტიც  $m^+(j, F)$ , განვიხილოთ ყოველი  $j \geq 2$ .  $\beta(t, c_x, d_x), t \in (0, 1)$ , ბეტა განაწილების ფუნქციას, რომლის პარამეტრებია  $c_x = \lfloor \alpha x \rfloor + 1$  და  $d_x = \alpha - \lfloor \alpha x \rfloor + 1$  სამართლიანი შემდეგი უტოლობა

$$\beta(t, c_x, d_x) \leq \frac{C_1 \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x(1-x)}}, 0 < x < 1, \quad (1.63)$$

ნებისმიერი მუდმივი  $C_1 > 0$  (იხ. Chen [16]).

შემოვიღოთ  $Q$ -ს კვანტილის ფუნქციის მესამე ტიპის (მოდელის) აპროქსიმაცია (იხ. Sborshchikovi [22]) :

$$Q_{\alpha}^+(x) := (B_{\alpha}^{-1} m_F^+)(x), x \in (0, 1), \quad (1.64)$$

სადაც

$$(B_{\alpha}^{-1} m_F^+)(x) := \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\lfloor \alpha x \rfloor + 1)} \sum_{j=0}^{\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor} \frac{(-1)^j m^+(j + \lfloor \alpha x \rfloor, F)}{j! (\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor - j)!}. \quad (1.65)$$

თუ (1.62) მოცემული  $m_F^+$  ჩავსვით (1.65) მარჯვენა მხარეში მივიღებთ

$$Q_{\alpha}^+(x) = \int_0^{\infty} \beta(F(u), c_x, d_x) u dF(u) = \int_0^1 \beta(t, c_x, d_x) Q(t) dt. \quad (1.66)$$

**თეორემა 1.4:** თუ  $Q'$  და  $Q''$  შემოსაზღვრული და უწყვეტი ფუნქციებია  $[\delta, 1 - \delta]$ -ზე, მაშინ ყოველი  $x \in (0, 1)$  და  $\alpha \rightarrow \infty$  გვაქვს:

$$(i) Q_\alpha^+ - Q(x) = \frac{1}{\alpha+2} \{ (1-2x + \lceil \alpha x \rceil - \alpha x) Q'(x) + \frac{1}{2} x(1-x) Q''(x) \} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad (1.67)$$

$$(ii) \|Q_\alpha^+ - Q\|_\delta \leq \frac{1}{\alpha+2} \left\{ \frac{3}{2} \|Q'\|_\delta + \frac{1}{8} \|Q''\|_\delta \right\} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad (1.68)$$

**დამტკიცება:** იმის გამო, რომ სამართლიანია (1.66) და ანალოგიური მსჯელობის გამოყენებით, რომელიც შემოთავაზებული იყო Mnatsakanov, Garai [20], ადვილად მტკიცდება (i), რაც შეეხება (ii) მისი დამტკიცების ანალოგიური პროცედურა განხილულ იყო Mnatsakanov [12]. □

## 1.6 კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციების მოდიფიკაცია

მოცემულ პარაგრაფში განვიხილოთ კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის მოდიფიცირებული ვერსია, რომლის გამოყენებაც შეიძლება ნაშრომში განხილული ყველა მოდელისთვის.

აღვნიშნოთ  $\tilde{\alpha} = 2\alpha$ , და

$$\tilde{Q}_{\alpha,s}(x) = 2Q_{\tilde{\alpha},s}(x) - Q_{\alpha,s}(x)$$

$$\tilde{Q}_\alpha^+(x) = 2Q_{\tilde{\alpha}}^+(x) - Q_\alpha^+(x)$$

$$\tilde{Q}_\alpha^-(x) = 2Q_{\tilde{\alpha}}^-(x) - Q_\alpha^-(x).$$

აქ ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ბოლო შემთხვევას მოდელი I შემთხვევა (A), რადგანაც დანარჩენი მოდელისთვის დამტკიცება ანალოგიურია.

**თეორემა 1.5:** დავუშვათ ფუნქციები  $Q', Q''$  არიან შემოსაზღვრული  $(0,1)$  – ზე და ამასთანავე  $Q''$  უწყვეტია, მაშინ, როცა  $\alpha \rightarrow \infty$ .

$$(i) \quad \tilde{Q}_\alpha^-(x) - Q(x) = \frac{1}{(\alpha+1)(2\alpha+1)} [Q'(x)((1-x) + (2\alpha+3)(\lceil \alpha x \rceil - \alpha x)) + \frac{1}{2} x(1-x) Q''(x) + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)]. \quad (1.69)$$

$$(ii) \quad \tilde{Q}_\alpha^+(x) - Q(x) = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} [(1-2x + (\lceil \alpha x \rceil - \alpha x))(\alpha+3)Q'(x) + \frac{1}{2} x(1-x)Q''(x)] + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right). \quad (1.70)$$

**დამტკიცება:** ავიღოთ  $\tilde{Q}_\alpha^-(x) - Q(x)$  გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_\alpha^-(x) - Q(x) &= 2[(Q_{\tilde{\alpha}}^-(x) - Q(x)) - (Q_\alpha^-(x) - Q(x))] = 2\left[\frac{1}{2\alpha+1} [(1-x + \lceil 2\alpha x \rceil - 2\alpha x)Q'(x) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} x(1-x)Q''(x)] - \frac{1}{\alpha+1} [(1-x + \lceil \alpha x \rceil - \alpha x)Q'(x) + \frac{1}{2} x(1-x)Q''(x)] \right], \end{aligned} \quad (1.71)$$

დავაჯგუფოდ შესაკრებები და მივიღებთ

$$\left[\frac{1}{2}x(1-x)Q''(x)\right]\left(\frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)}\right). \quad (1.72)$$

და

$$Q'(x)\left[\frac{4\lfloor\alpha x\rfloor-4\alpha x}{2\alpha+1}-\frac{\lfloor\alpha x\rfloor-\alpha x}{\alpha+1}\right]=\frac{Q'(x)}{(2\alpha+1)(\alpha+1)}\left[(\lfloor\alpha x\rfloor-\alpha x)(2\alpha+3)\right], \quad (1.73)$$

საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_\alpha^-(x)-Q(x) &= \frac{1}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}[Q'(x)((1-x)+(2\alpha+3)(\lfloor\alpha x\rfloor-\alpha x)) \\ &+ \frac{1}{2}x(1-x)Q''(x)], \end{aligned} \quad (1.74)$$

რადგანაც (1.38) და (1.10) გამოსახულებას აქვს იდენტური სახე ანალოგიურად დამტკიცდება (ii). □

## თავი II

### კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაცია

პირველ თავში განხილული იყო კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის სამი მოდელი. ანალოგიურად საინტერესოა შესაბამისი კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაცია არასრული ინფორმაციის შემთხვევაში, როცა ცნობილია განაწილების ფუნქციის მხოლოდ მომენტები გარკვეულ რიგამდე. მოცემულ თავში განხილულია კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციის ორ მოდელი, როცა ცნობილია ენტროპიული და ჩვეულებრივი მომენტები ან ლაპლასის გარდაქმნის მნიშვნელობა (სასრული რაოდენობა). თითო მოდელისათვის განხილულია ორი შემთხვევა, როცა განაწილების ფუნქციის განსაზღვრის არე არის  $(0,1)$ , ან  $(0,\infty)$ . დამტკიცებულია თეორემები, კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციის რიგის შესახებ. აგრეთვე ამ თავში მოყვანილია კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციის მოდიფიცირებული ვერსია. შემოთავაზებული კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციის ყოფაქცევა ნაჩვენებია იქნება მეოთხე თავში, ნახაზების მეშვეობით, სხვა და სხვა პარამეტრების არჩევის დროს.

#### 2.1 მოდელი I: $\text{supp}\{F\} = (0,T)$

**შემთხვევა (A):**  $\text{supp}\{F\} = (0,1)$ , აქ ჩვენ ზოგადობის შეუზღუდავად ვუშვებთ, რომ  $T = 1$ . ვთქვათ ჩვენთვის ცნობილია ენტროპიული მომენტების შემდეგი მიმდევრობა  $m_F^- = \{m^-(j, F), j = 0, 1, \dots, \alpha\}$ , სადაც:

$$m^-(j, F) = \int_0^1 [F(t)]^j dt. \quad (2.1)$$

სტატიაში Mnatsakanov [23] იყო აგებული  $F$  განაწილების სიმკვრივის  $f$  ფუნქციის აპროქსიმაცია:

$$f_\alpha(x) = |\varphi'(x)| (B_\alpha^{-1} m_\varphi)(\varphi(x)) = \frac{|\varphi'(x)| \Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\lceil \alpha \varphi(x) \rceil + 1)} \sum_{j=0}^{\alpha - \lceil \alpha \varphi(x) \rceil} \frac{(-1)^j m_\varphi(j + \lceil \alpha \varphi(x) \rceil, F)}{j! (\alpha - \lceil \alpha \varphi(x) \rceil - j)!}, \quad x \in \text{supp}\{f\}, \quad (2.2)$$

სადაც  $m_\varphi(j) = \int [\varphi(x)]^j dF(x)$ ,  $j = \{0, 1, \dots, \alpha\}$ , ხოლო  $\varphi: \text{supp}\{f\} \rightarrow (0,1)$ ,  $\varphi$  არის ან ზრდადი (ან კლებადი) უწყვეტი ფუნქცია.

განვმარტოთ  $m_\varphi(j) = m^-(j, F)$  და  $\varphi(x) = x$ . მივიღებთ  $q$ -ს აპროქსიმაციას:

$$q_\alpha^-(x) = (B_\alpha^{-1} m_F^-)(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\lceil \alpha x \rceil + 1)} \sum_{j=0}^{\alpha - \lceil \alpha x \rceil} \frac{(-1)^j m^-(j + \lceil \alpha x \rceil, F)}{j! (\alpha - \lceil \alpha x \rceil - j)!}, \quad (2.3)$$

ყოველი  $x \in (0,1)$ .

**თეორემა 2.1.** თუ  $q'$  და  $q''$  შემოსაზღვრულია და  $q''$  არის უწყვეტი  $(0,1)$ -ზე, მაშინ ყოველი  $x \in (0,1)$  და  $\alpha \rightarrow \infty$ , გვექნება:

$$(i) \quad q_\alpha^-(x) - q(x) = \frac{1}{\alpha + 2} [(1 - 2x + \lceil \alpha x \rceil - \alpha x) q'(x) + \frac{1}{2} x(1-x) q''(x)] + o\left(\frac{1}{\alpha}\right); \quad (2.4)$$

$$(ii) \quad \|q_\alpha^- - q\|_\delta \leq \frac{1}{\alpha + 2} \left\{ \frac{3}{2} \|q'\|_\delta + \frac{1}{8} \|q''\|_\delta \right\} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right). \quad (2.5)$$

**დამტკიცება:** ჩავსვათ (2.1) გამოსახულება (2.3)-ში მაშინ მარტივი ალგებრული გარდაქმნების საშუალებით მივიღებთ:

$$q_\alpha^-(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\lceil \alpha x \rceil + 1)} \int_0^1 [F(t)]^{\lceil \alpha x \rceil - \lceil \alpha x \rceil} \sum_{j=0}^{\lceil \alpha x \rceil - \lceil \alpha x \rceil} \frac{[-F(t)]^j}{j! (\alpha - \lceil \alpha x \rceil - j)!} dt = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\lceil \alpha x \rceil + 1) (\alpha - \lceil \alpha x \rceil)!} \int_0^1 [F(t)]^{\lceil \alpha x \rceil - \lceil \alpha x \rceil} \sum_{j=0}^{\lceil \alpha x \rceil - \lceil \alpha x \rceil} \frac{[-F(t)]^j (\alpha - \lceil \alpha x \rceil)!}{j! (\alpha - \lceil \alpha x \rceil - j)!} dt =$$

$$\frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\lceil \alpha x \rceil + 1)\Gamma(\alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1)!} \int_0^1 [F(t)]^{\lceil \alpha x \rceil} (1 - F(t))^{\alpha - \lceil \alpha x \rceil} dt = \int_0^1 \beta(F(t), \lceil \alpha x \rceil + 1, \alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1) dt. \quad (2.6)$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$q_{\alpha}^{-}(x) = \int_0^1 \beta(t, \lceil \alpha x \rceil + 1, \alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1) dQ(t) = \int_0^1 \beta(t, x) q(t) dt. \quad (2.7)$$

დამტკიცებისთვის გამოვიყენოთ მსჯელობა რომელიც გამოყენებულ იყო თეორემა 1.1-სთვის (იხ.1.13-1.30 განტოლებები). შევნიშვნოთ, რომ განტოლებებში

$$q_{\alpha}^{-}(x) - q(x) = \int_0^1 \beta_{\alpha}(t, x) dq(t) - q(x) = \int_0^1 [q(t) - q(x)] \beta_{\alpha}(t, x) dt,$$

და მაშასადამე საბოლოოდ მივიღებთ:

$$q_{\alpha}^{-}(x) - q(x) = \frac{1}{\alpha + 2} [(1 - 2x + \lceil \alpha x \rceil - \alpha x) q'(x) + \frac{1}{2} x(1 - x) q''(x)] + o\left(\frac{1}{\alpha}\right);$$

ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება (2.5) გამოსახულებაც.  $\square$

**შემთხვევა (B):**  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$ . ვთქვათ ცნობილია ენტროპიული მომენტების შემდეგი მიმდევრობა  $m_{\mathcal{S}}^{-} = \{m^{-}(j, \mathcal{S}), j = 1, \dots, \alpha\}$ , სადაც:

$$m^{-}(j, \mathcal{S}) = \int_0^{\infty} [S(t)]^j dt. \quad (2.8)$$

განხილულ მოდელში ძირითადი მოთხოვნაა  $F$ -ის პირველი მომენტის არსებობა და სასრულობა:  $m^{-}(1, \mathcal{S}) = E(X) < \infty$ . მაშინ ამ პირობის დროს ყველა  $m^{-}(j, \mathcal{S})$ , როცა  $j \geq 2$  იქნება აგრეთვე სასრული.

ყოველი  $0 < x < 1$ -ისთვის, განვიხილოთ (2.2) გამოსახულებაში აგებული აპროქსიმაცია, სადაც  $m_{\varphi}(j) = m^{-}(j, \mathcal{S})$  და  $\varphi(x) = 1 - x$ , მივიღებთ  $q_{\alpha, \mathcal{S}}(x)$  აპროქსიმაციას:

$$q_{\alpha, \mathcal{S}}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\lceil \alpha \varphi(x) \rceil + 1)} \sum_{j=0}^{\alpha - \lceil \alpha \varphi(x) \rceil} \frac{(-1)^j m^{-}(j + \lceil \alpha \varphi(x) \rceil, \mathcal{S})}{j!(\alpha - \lceil \alpha \varphi(x) \rceil - j)!}, \quad (2.9)$$

**ლემა 2.1.** იმ შემთხვევაში, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, 1)$ , გვექნება  $q_{\alpha, \mathcal{S}}(x) = q_{\alpha}^{-}(x)$ , ყოველი  $x \in (0, 1)$ .

**დამტკიცება:**  $m^{-}(j, \mathcal{S}) = \int_0^1 [S(t)]^j dt$  ჩასმა  $q_{\alpha, \mathcal{S}}(x)$  ფორმულაში, გვაძლევს შემდეგ

გამოსახულებას:

$$q_{\alpha,s}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\lceil \alpha \varphi(x) \rceil + 1)} \int_0^1 [S(t)]^{\lceil \alpha \varphi(x) \rceil} \sum_{j=0}^{\lceil \alpha \varphi(x) \rceil} \frac{(-1)^j [S(t)]^j}{j!(\alpha - \lceil \alpha \varphi(x) \rceil - j)!} dt. \quad (2.10)$$

$\alpha - \lceil \alpha \varphi(x) \rceil$  შევცვალოთ  $\lceil \alpha x \rceil$ , ხოლო  $\lceil \alpha \varphi(x) \rceil$  კი  $\alpha - \lceil \alpha x \rceil$ , მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned} q_{\alpha,s}(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1)} \int_0^1 [S(t)]^{\alpha - \lceil \alpha x \rceil} \sum_{j=0}^{\lceil \alpha x \rceil} \frac{[-S(t)]^j}{j!(\lceil \alpha x \rceil - j)!} dt = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1) \lceil \alpha x \rceil!} \int_0^1 [1 - F(t)]^{\alpha - \lceil \alpha x \rceil} \sum_{j=0}^{\lceil \alpha x \rceil} \frac{\lceil \alpha x \rceil! [-S(t)]^j}{j!(\lceil \alpha x \rceil - j)!} dt = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\lceil \alpha x \rceil + 1) \Gamma(\alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1) \lceil \alpha x \rceil!} \int_0^1 [1 - F(t)]^{\alpha - \lceil \alpha x \rceil} (1 - S(t))^{\lceil \alpha x \rceil} dt = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\lceil \alpha x \rceil + 1) \Gamma(\alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1) (\lceil \alpha x \rceil)!} \int_0^1 F(t)^{\lceil \alpha x \rceil} [1 - F(t)]^{\alpha - \lceil \alpha x \rceil} dt = \\ &= \int_0^1 \beta(F(t), \lceil \alpha x \rceil + 1, \alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1) dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

მეორეს მხრივ შევნიშვნოთ, რომ ყოველი  $x \in (0,1)$  შეიძლება ჩავწეროთ:

$$q_{\alpha}^{-}(x) = (B_{\alpha}^{-1} m_{F}^{-})(x) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\lceil \alpha x \rceil + 1)} \sum_{j=0}^{\alpha - \lceil \alpha x \rceil} \frac{(-1)^j m^{-}(j + \lceil \alpha x \rceil, F)}{j!(\alpha - \lceil \alpha x \rceil - j)!}. \quad (2.12)$$

$m^{-}(j, F) = \int_0^1 [F(t)]^j dt$  ჩასმა (2.12) -ის მარჯვენა მხარეში მივიღებთ:

$$\begin{aligned} q_{\alpha}^{-}(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\lceil \alpha x \rceil + 1)} \int_0^1 [F(t)]^{\lceil \alpha x \rceil} \sum_{j=0}^{\alpha - \lceil \alpha x \rceil} \frac{[-F(t)]^j}{j!(\alpha - \lceil \alpha x \rceil - j)!} dt = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\lceil \alpha x \rceil + 1) (\alpha - \lceil \alpha x \rceil)!} \int_0^1 [F(t)]^{\lceil \alpha x \rceil} \sum_{j=0}^{\alpha - \lceil \alpha x \rceil} \frac{[-F(t)]^j (\alpha - \lceil \alpha x \rceil)!}{j!(\alpha - \lceil \alpha x \rceil - j)!} dt = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\lceil \alpha x \rceil + 1) \Gamma(\alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1)!} \int_0^1 [F(t)]^{\lceil \alpha x \rceil} (1 - F(t))^{\alpha - \lceil \alpha x \rceil} dt = \\ &= \int_0^1 \beta(F(t), \lceil \alpha x \rceil + 1, \alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1) dt. \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.11) და (2.13) გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს, რომ  $q_{\alpha,s}(x) = q_{\alpha}^{-}(x)$ , როცა  $\text{supp}\{F\} = (0,1)$ . □

**თეორემა 2.2.** თუ კი  $q'$  და  $q''$  შემოსაზღვრულია და  $q''$  არის უწყვეტი  $(0,1)$ , მაშინ ყოველი  $x \in (0,1)$  და  $\alpha \rightarrow \infty$  გვექნება:

$$(i) \quad q_{\alpha,s}(x) - q(x) = \frac{1}{\alpha+2} [(1 - 2x + \lceil \alpha x \rceil - \alpha x) q'(x) +$$



$$\frac{1}{2}x(1-x)q''(x)] + o\left(\frac{1}{\alpha}\right); \quad (2.14)$$

$$(ii) \quad \|q_{\alpha,s} - q\| \leq \frac{1}{\alpha+2} \left\{ \frac{3}{2}\|q'\| + \frac{1}{8}\|q''\| \right\} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right). \quad (2.15)$$

**დამტკიცება:** დამტკიცებისთვის გამოვიყენებთ იგივე მსჯელობას, რაც იყო გამოყენებული თეორემა 2.1-ში

$$q_{\alpha,s}(x) - q(x) = \int_0^{\infty} [q(t) - q(x)] \beta_{\alpha}(t, x) dt, \text{ გათვალისწინებით მივიღებთ (i) და (ii)}$$

□

დამტკიცებას.

## 2.2 მოდელი II: $\text{supp}\{F\} = (0, T)$

**შემთხვევა (A):**  $\text{supp}\{F\} = (0, 1)$ . განვსაზღვროთ კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შემდეგნაირი აპროქსიმაცია

$$q_{\alpha}^*(x) = \int_0^1 \beta(F_{\alpha}(u), [\alpha x] + 1, \alpha - [\alpha x] + 1) du, \quad (2.16)$$

სადაც  $F_{\alpha}(x) = K_{\alpha}^{-1} m_F(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha x]} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m(j, F), x \in (0, 1)$ , ხოლო

$m_F = m(j, F) = \int t^j dF(t), j = 0, 1, \dots, \alpha$  მოცემული შემთხვევის ანალოგიური

აპროქსიმაციის აგება განიხილა Mnatsakanov, Hakobyan [24], (იხ. განტოლება 3.16).

**შემთხვევა (B):**  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$ , კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაცია ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$q_{\alpha,b}(x) = \int_0^{\infty} \beta(F_{\alpha,b}(u), [\alpha x] + 1, \alpha - [\alpha x] + 1) du, \quad (2.17)$$

სადაც  $F_{\alpha,b}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{[ab^{-x}]} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} L_{F,b}(j), x \in R$ ,

ხოლო  $L_{F,b}(j) = \int e^{-j \ln(b)\tau} dF(\tau), j = 0, 1, \dots, \alpha, b > 1$ . ცნობილია, რომ  $F_{\alpha,b} \rightarrow F$  თანაბარ მეტრიკაში, როცა  $\alpha \rightarrow \infty$  (იხ. Mnatsakanov [25]).

ნაშრომში განხილული მოდელებისთვის კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციის ყოფაქცევა ნაჩვენებია იქნება მეოთხე თავში შესაბამისი გრაფიკების (ნახაზების) საშუალებით.

## 2.3 კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციის მოდიფიკაცია

მოცემულ პარაგრაფში შემოვიტანოთ კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციის მოდიფიცირებული ვერსია. ანალოგიური პროცედურები, რომელიც იყო შემოთავაზებული კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის მოდიფიცირებული ვერსიისთვის გამოვიყენოთ კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციისთვისაც, რისთვისაც აღვნიშნოთ  $\tilde{\alpha} = 2\alpha$  და  $\tilde{q}_\alpha(x) = 2q_{\tilde{\alpha}}(x) - q_\alpha(x)$ ,  $x \in (0,1)$

**თეორემა 2.3:** თუ  $q'$  და  $q''$  შემოსაზღვრულია და  $q''$  არის უწყვეტი  $(0,1)$ , მაშინ ყოველი  $x \in (0,1)$  და  $\alpha \rightarrow \infty$  გვექნება:

$$\tilde{q}_\alpha(x) - q(x) = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} [(1-2x + (\alpha+3)(\lceil \alpha x \rceil - \alpha x)q'(x) + \frac{1}{2}x(1-x)q''(x)] + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right). \quad (2.18)$$

**დამტკიცება:** განვიხილოთ შემდეგი სხვაობა  $\tilde{q}_\alpha(x) - q(x)$  შემდეგნაირად:

$$\tilde{q}_\alpha(x) - q(x) = 2(q_{\tilde{\alpha}}(x) - q(x)) - (q_\alpha(x) - q(x)),$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} \tilde{q}_\alpha(x) - q(x) &= 2\left[\frac{1}{2\alpha+2}(1-2x + \lceil 2\alpha x \rceil - 2\alpha x)q'(x) + \right. \\ &\left. \frac{1}{2}x(1-x)q''(x)\right] - \frac{1}{\alpha+2}[(1-2x + \lceil \alpha x \rceil - \alpha x)q'(x) + \frac{1}{2}x(1-x)q''(x)] + \\ &+ O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

აქედან მარტივი ალგებრული გარდაქმნებით და დაჯგუფების შედეგად მივიღებთ დასამტკიცებელ (2.19) გამოსახულებას. □

მოცემულ თავში განვიხილავთ წინა თავებში მოყვანილი კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციების შესაბამის შეფასებებს. ზოგიერთი შეფასებისთვის დამტკიცებულია ძალდებლობის თეორემები.

მოცემული შეფასებები აგებულია, როგორც პირდაპირი ასევე მარჯვენა ცენზურირებული მოდელებისთვის (შერჩევებისთვის).

ამასთანავე განვიხილავთ ეკონომიკაში გამოყენებულ ლორენცის მრუდის შეფასებას და დავამტკიცებთ შეფასების ძალდებლობას (მოდელი I, შემთხვევა(A)).

კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასებების ყოფაქცევა მოყვანილი იქნება მეოთხე თავში ნახაზების და ცხრილების მეშვეობით, სხვადასხვა პარამეტრებისთვის.

მოცემულ თავში განვიხილავთ შემდეგი კვანტილის ფუნქციის შეფასებებს რომლებიც წარმოადგენენ შემდეგი აპროქსიმაციების ემპირიულ ანალოგს:

$$Q_{\alpha}^{-}(x) = (K_{\alpha}^{-1}m_{F}^{-})(x),$$

$$Q_{\alpha,s}(x) = (\bar{K}_{\alpha}^{-1}m_{s}^{-})(x)$$

$$Q_{\alpha,n}(x) = \int_0^1 B_{\alpha}(F_{\alpha}(u), x) du.$$

აღვნიშნოთ ისინი შესაბამისად, როგორც  $\hat{Q}_{\alpha}^{-}(x)$ -მოდელი I, შემთხვევა (A),  $Q_{\alpha,s}(x)$ - მოდელი I, შემთხვევა (B),  $\hat{Q}_{\alpha,n}(x)$ -მსგავსი მოდელი II, შემთხვევა (B).

### 3.1 კვანტილის ფუნქციის შეფასება

განვიხილოთ უცნობი განაწილების ფუნქცია  $F$  და დავუშვათ, რომ მოცემულია შერჩევა  $X_1, \dots, X_n$ . მაშინ  $F$  განაწილების ფუნქციის ნაცვლად ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ ემპირიული განაწილების ფუნქცია  $\hat{F}_n$  და გადავწეროთ (1.3) შემდეგი სახით:

$$\hat{Q}_{\alpha}^{-}(x) = (K_{\alpha}^{-1}m_{\hat{F}_n}^{-})(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha]} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^{-}(j, \hat{F}_n), \quad (3.1)$$

თავის მხრივ (3.1) შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\hat{Q}_{\alpha}^{-}(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha]} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \int_0^1 [\hat{F}_n(t)]^j dt = \sum_{i=1}^{n+1} \Delta X_{(i)} B_{\alpha}\left(\frac{i-1}{n}, x\right) = \sum_{i=1}^n X_{(i)} [B_{\alpha}\left(\frac{i-1}{n}, x\right) - B_{\alpha}\left(\frac{i}{n}, x\right)], \quad (3.2)$$

სადაც  $\Delta X_{(i)} = X_{(i)} - X_{(i-1)}, i = 1, \dots, n+1$ , წარმოადგენს ე.წ. შერჩევით ინტერვალებს (spacings). აქ  $X_{(0)} = 0$  და  $X_{(n+1)} = 1$ .

პირველ თავში განმარტებული იყო კვანტილის ფუნქციის მოდელი I შემთხვევა (B)- ს აპროქსიმაცია (იხილეთ 1.33-1.35). ამ მოდელისთვის შემოვიღოთ კვანტილის ფუნქციის შეფასება. თუკი  $S$  მაგვირად ავიღებთ მის ემპირიულ ანალოგს  $\hat{S}_n$ , სადაც  $\hat{S}_n = 1 - \hat{F}_n$ . მაშინ შეფასებას ექნება შემდეგი სახე:

$$Q_{\alpha, \hat{S}_n}(x) = (\bar{K}_\alpha^{-1} m_{\hat{S}_n}^-)(x) = \sum_{k=\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^-(j, \hat{S}_n) \quad (3.3)$$

აგრეთვე შემოვიღოთ შემდეგი შეფასება, რომელიც წარმოადგენს პირველ თავში მოყვანილ მოდელი II, შემთხვევა (A) (იხილეთ 1.47) შეფასებას:

$$\hat{Q}_{\alpha, n}(x) = \int_0^1 B_\alpha(\hat{F}_n(u), x) du, \quad 0 < x < 1. \quad (3.4)$$

აგრეთვე აღვნიშნოთ, რომ

$$Q_{\alpha, \hat{S}_n}(x) = \int_0^{\infty} B_\alpha(\hat{F}_n(u), x) du, \quad 0 < x < 1$$

მარტივად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ  $\hat{Q}_\alpha^-(x) = \hat{Q}_{\alpha, n}(x) = Q_{\alpha, \hat{S}_n}(x)$ , თუ

$\text{supp}\{F\} = (0,1)$ .

**ლემა 3.1.** ყოველი  $n \in N_+$ , თუ  $\text{supp}\{F\} = (0,1)$ , მაშინ გვექნება  $\hat{Q}_\alpha^-(x) = Q_{\alpha, \hat{S}_n}(x) = \hat{Q}_{\alpha, n}(x)$ .

**დამტკიცება:** ლემა 1.1-ში გამოყენებული პროცედურების გათვალისწინებით მარტივად ვაჩვენებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_\alpha^-(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \int_0^1 [\hat{F}_n(t)]^j dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \int_0^1 [\hat{F}_n(t)]^{j+k-k} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!k!(j-k)!} \int_0^1 [\hat{F}_n(t)]^k [-\hat{F}_n(t)]^{j-k} dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \frac{\alpha!(\alpha-k)!}{(\alpha-j)!(j-k)!k!(\alpha-k)!} [\hat{F}_n(t)]^k [-\hat{F}_n(t)]^{j-k} dt = \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \frac{\alpha! [\hat{F}_n(t)]^k}{k! (\alpha-k)!} \sum_{j=k}^{\alpha} \frac{(\alpha-k)!}{(\alpha-j)!(j-k)!} [-\hat{F}_n(t)]^{j-k} dt$$

(3.5) ბოლო სტრიქონის მეორე ჯამში შემოვიღოთ ახალი ინდექსი,  $m = j - k$ .

ნიუტონის ბინომის ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$\hat{Q}_\alpha^-(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \frac{\alpha! [\hat{F}_n(t)]^k}{k! (\alpha - k)!} \sum_{m=0}^{\alpha - k} \frac{(\alpha - k)!}{m! (\alpha - k - m)!} [-\hat{F}_n(t)]^m dt =$$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \binom{\alpha}{k} [\hat{F}_n(t)]^k (1 - \hat{F}_n(t))^{\alpha - k} dt = \int_0^1 B_\alpha(\hat{F}_n(t), x) dt = \hat{Q}_{\alpha, n}(x). \quad (3.6)$$

მეორეს მხრივ

$$Q_{\alpha, \hat{S}_n}(x) = \sum_{k=\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \int_0^1 [\hat{S}_n(t)]^j dt =$$

$$\sum_{k=\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \int_0^1 [\hat{S}_n(t)]^{j-k+k} dt$$

$$\sum_{k=\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \frac{\alpha!}{j! (\alpha - j)!} \frac{j!}{k! (j - k)!} \int_0^1 [\hat{S}_n(t)]^k [-\hat{S}_n(t)]^{j-k} dt =$$

$$\int_0^1 \sum_{k=\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \frac{\alpha! (\alpha - k)!}{(\alpha - j)! (j - k)! k! (\alpha - k)!} [\hat{S}_n(t)]^k [-\hat{S}_n(t)]^{j-k} dt = \quad (3.7)$$

$$\int_0^1 \sum_{k=\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \frac{\alpha! [\hat{S}_n(t)]^k}{k! (\alpha - k)!} \sum_{j=k}^{\alpha} \frac{(\alpha - k)!}{(\alpha - j)! (j - k)!} [-\hat{S}_n(t)]^{j-k} dt$$

(3.7) ბოლო სტრიქონის მეორე ჯამში შემოვიღოთ ახალი ინდექსი,  $l = j - k$ .

ნიუტონის ბინომის ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$Q_{\alpha, \hat{S}_n}(x) = \int_0^1 \sum_{k=\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \frac{\alpha! [\hat{S}_n(t)]^k}{k! (\alpha - k)!} \sum_{l=0}^{\alpha - k} \frac{(\alpha - k)!}{l! (\alpha - k - l)!} [-\hat{S}_n(t)]^l dt =$$

$$\int_0^1 \sum_{k=\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} [\hat{S}_n(t)]^k (1 - \hat{S}_n(t))^{\alpha - k} dt = \int_0^1 B_\alpha(\hat{S}_n(t), x) dt = \hat{Q}_\alpha^-(x). \quad (3.8)$$

მაგრამ, ცნობილია, რომ (იხილეთ 3.4), რომ  $\hat{Q}_{\alpha, n}(x) = \int_0^1 B_\alpha(\hat{F}_n(u), x) du$ , მაშასადამე

შეიძლება დავასკვნათ, რომ  $\hat{Q}_{\alpha, n}(x) = Q_{\alpha, \hat{S}_n}(x) = \hat{Q}_\alpha^-(x)$ . □

**თეორემა 3.1.** თუ  $Q'$  და  $Q''$  არიან სასრული  $[\delta, 1 - \delta]$ , მაშინ  $\hat{Q}_{\alpha, n} \xrightarrow{P} Q$  და  $\hat{Q}_\alpha^- \xrightarrow{P} Q$ , თანაბრად  $[\delta, 1 - \delta]$ -ზე, როცა  $\alpha = o(n) \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow 0$  და ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობებს:

$$(i) \quad \|\hat{Q}_{\alpha, n} - Q\|_\delta \leq \frac{C_1 O_P(1)}{\delta} \sqrt{\frac{\alpha}{n}} + \frac{1}{\alpha + 1} \left\{ \|Q'\|_\delta + \frac{1}{8} \|Q''\|_\delta \right\} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right);$$

$$\|\hat{Q}_\alpha^- - Q\|_\delta \leq \frac{C_1 O_p(1)}{\delta} \sqrt{\frac{\alpha}{n}} + \frac{1}{\alpha+1} \left\{ \|Q\|_\delta + \frac{1}{8} \|Q''\|_\delta \right\} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right); \quad (3.9)$$

(ii) თუ  $C_4, C_5 < \infty$ , მაშინ, აქედან გამომდინარე გვექნება:

$$\|\hat{Q}_{\alpha,n} - Q\|_{L_1} \leq \frac{\pi}{8} C_1 O_p(1) \sqrt{\frac{\alpha}{n}} + \frac{1}{\alpha+1} (C_4 + \frac{1}{2} C_5) + o\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right);$$

$$\|\hat{Q}_\alpha^- - Q\|_{L_1} \leq \frac{\pi}{8} C_1 O_p(1) \sqrt{\frac{\alpha}{n}} + \frac{1}{\alpha+1} (C_4 + \frac{1}{2} C_5) + o\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right). \quad (3.10)$$

**დამტკიცება:** მუდმივების  $C_1 - C_5$  განმარტება შემოღებული იყო თავი I, 1.3

პარაგრაფში, ცნობილია, რომ  $\hat{Q}_\alpha^-(x) = \hat{Q}_{\alpha,n}(x)$  ამიტომ (i) და (ii) მოყვანილი ორ-ორი უტოლობა იდენტურია, რადგან ორივე უტოლობის დამტკიცება არის იდენტური, აქედან გამომდინარე საკმარისია მხოლოდ ერთის ჩვენება.

გადავწეროთ სხვაობა  $\hat{Q}_{\alpha,n} - Q$  შემდეგნაირად,  $\hat{Q}_{\alpha,n} - Q_\alpha^- + Q_\alpha^- - Q$ .

$Q_\alpha^- - Q$  ნორმა შეფასებულია წინა თავებში (იხილეთ 1.5 განტოლება), ამიტომ

შესაფასებელი დარჩა პირველი სხვაობა  $\hat{Q}_\alpha^- - Q_\alpha^-$ :

$$\begin{aligned} |\hat{Q}_{\alpha,n}(x) - Q_\alpha^-(x)| &= \left| \int_0^1 [B_\alpha(\hat{F}_n(u), x) - B_\alpha(F(u), x)] du \right| \\ &\leq \int_0^1 |B_\alpha(\tilde{F}(u), x)| |\hat{F}_n(u) - F(u)| du \leq \\ &\leq \|\hat{F}_n - F\| \int_0^1 \beta(\tilde{F}(u), x) du. \end{aligned} \quad (3.11)$$

აქ  $\hat{F}_n(u) < \tilde{F}(u) < F(u)$ .

მოცემული გამოსახულება გავამრავლოთ და გავყოთ  $\sqrt{n}$ :

$$\|\hat{F}_n - F\| \int_0^1 \beta(\tilde{F}(u), x) du \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n} \|\hat{F}_n - F\| \int_0^1 \beta(\tilde{F}(u), x) du, \quad (3.12)$$

ცნობილია, რომ  $\sqrt{n} \|\hat{F}_n - F\| = O_p(1), n \rightarrow \infty$ . (Shorack, Wellner [26])

მაშინ დასამტკიცებელი რჩება (3.12) მეორე ნამრავლი, თუ გამოვიყენებთ (1.48) მარჯვენა მხარისთვის მივიღებთ:

$$\int_0^1 \beta(\tilde{F}(u), x) du \leq \int_0^1 \frac{C_1 \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x(1-x)}} du \leq \frac{C_1 \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad (3.13)$$

მაშასადამე

$$\|\hat{Q}_{\alpha,n} - Q_{\alpha}^{-}\|_{\delta} \leq O_p(1)C_1 \sqrt{\frac{\alpha}{n}} \sup_{\delta \leq x \leq 1-\delta} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \leq O_p(1) \sqrt{\frac{\alpha}{n}} \frac{C_1}{\delta}, \text{ როცა } n \rightarrow \infty, \quad (3.14)$$

წინა თავში დამტკიცებული სხვაობის  $Q_{\alpha}^{-} - Q$ , შეფასება შესაძლებელია შემდეგნაირად:

$$\|Q_{\alpha}^{-} - Q\|_{\delta} \leq \frac{1}{\alpha+1} \{ \|Q'\|_{\delta} + \frac{1}{8} \|Q''\|_{\delta} \}, \quad (3.15)$$

მაშასადამე (1.32) და თეორემა 1.1 ანალოგიური ტექნიკის გამოყენებით საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\|\hat{Q}_{\alpha,n} - Q\|_{\delta} \leq \frac{C_1 O_p(1)}{\delta} \sqrt{\frac{\alpha}{n}} + \frac{1}{\alpha+1} \left\{ \|Q'\|_{\delta} + \frac{1}{8} \|Q''\|_{\delta} \right\} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha, n \rightarrow \infty.$$

ანალოგიური გზით მტკიცდება (i) მეორე უტოლობა. (მის დამტკიცებაზე არ შევჩერდებით.

განვიხილოთ დებულება (ii). ამჯერად,  $\hat{Q}_{\alpha,n} - Q$  გადავწეროთ, როგორც  $\hat{Q}_{\alpha,n} - Q_{\alpha}^{-} + Q_{\alpha}^{-} - Q$  შევაფასოთ პირველის ხვაობა  $\hat{Q}_{\alpha,n} - Q_{\alpha}^{-}$ :

$$\begin{aligned} \|\hat{Q}_{\alpha,n} - Q_{\alpha}^{-}\|_{L_1} &= \int_0^1 |\hat{Q}_{\alpha,n}(x) - Q_{\alpha}^{-}(x)| dx \leq \int_0^1 \int_0^1 |\hat{F}_n(u) - F(u)| \beta(\hat{F}_n(u), x) du dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \frac{C_1 \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x(1-x)}} dx \int_0^1 |\hat{F}_n(u) - F(u)| du, \end{aligned} \quad (3.16)$$

რადგან  $\sqrt{n} \|\hat{F}_n - F\| = O_p(1)$ , როცა  $n \rightarrow \infty$ , (იხილეთ 1.48) ამიტომ:

$$\int_0^1 \frac{C_1 \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x(1-x)}} dx \int_0^1 |\hat{F}_n(u) - F(u)| du \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \leq C_1 \sqrt{\frac{\alpha}{n}} \frac{\pi}{8} O_p(1), \quad (3.17)$$

ხოლო  $|Q_{\alpha}^{-} - Q| \leq \frac{1}{\alpha+1} \{C_4 + \frac{1}{2} C_5\}$ , მაშინ საბოლოოდ გვექნება:

$$\|\hat{Q}_{\alpha,n} - Q\|_{L_1} \leq \frac{\pi}{8} C_1 O_p(1) \sqrt{\frac{\alpha}{n}} + \frac{1}{\alpha+1} (C_4 + \frac{1}{2} C_5) + o\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right), \quad (3.18)$$

რაც შეეხება (ii) მეორე უტოლობა მტკიცდება ანალოგიურად რადგანაც

$\hat{Q}_{\alpha}^{-}(x) = \hat{Q}_{\alpha,n}(x)$ . თუმცა, (3.8) გამოსახულებიდან ცნობილია, რომ  $\hat{Q}_{\alpha}^{-}(x) = Q_{\alpha, \hat{s}_n}(x)$

მაშასადამე, ანალოგიური მსჯელობით მოხდება  $Q_{\alpha, \hat{s}}(x)$ -ის შეფასება. თეორემა □

დამტკიცებულია.

პირველ ორ თავში შემოდებული იყო კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციები, შესაძლებელია განისაზღვროს შემდეგი შეფასებები თუ  $F$  და  $S$  -ს ჩანაცვლება მოხდება ემპირიული ანალოგებით  $\hat{F}$  და  $\hat{S}$ .

**მოდელი II, შემთხვევა (B):** შეფასება გამოიყურება შემდეგნაირად:

$$\hat{Q}_{\alpha,b}(x) = \int_0^{\infty} B_{\alpha}(\hat{F}_{\alpha,b}(u), x) du, \quad x \in [0,1] \quad (3.19)$$

აქ  $\hat{F}_{\alpha,b}$  შესწავლილი იყო ადრე (იხ. Mnatsakanov, Sarkisian [21]) და განისაზღვრება შემდეგნაირად:  $\hat{F}_{\alpha,b} = L_{\alpha}^{-1} \hat{L}_{F,b}$ , სადაც  $\forall \alpha$

$$L_{\alpha}^{-1} \hat{L}_{F,b}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{[\alpha b^{-1}]} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \hat{L}_{F,b}(j), \quad x \in R_+ \quad (3.20)$$

ხოლო  $\hat{L}_{F,b}(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-j(\ln b)X_i}$  - ემპირიული ლაპლასის გარდაქმნა.

აგრეთვე შეიძლება კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასება. ამისთვის საჭიროა ემპირიული განაწილების ფუნქციის შემოტანა.

$m_{\hat{S}}^{-} = \{m^{-}(j, \hat{S}), j = 1, \dots, \alpha\}$ , მეორე თავში მოყვანილი  $m_{\hat{S}}^{-}$  ნაცვლად ჩავსვათ  $m_{\hat{S}}^{-}$  და მივიღებთ:

$$q_{\alpha, \hat{S}}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma([\alpha \varphi(x)] + 1)} \sum_{j=0}^{\alpha - [\alpha \varphi(x)]} \frac{(-1)^j m^{-}(j + [\alpha \varphi(x)], \hat{S})}{j!(\alpha - [\alpha \varphi(x)] - j)!}, \quad (3.21)$$

საიდანაც (2.11) გამოყენებით მივიღებთ:

$$q_{\alpha, \hat{S}}(x) = \int_0^1 \beta(\hat{F}(t), [\alpha x] + 1, \alpha - [\alpha x] + 1) dt. \quad (3.22)$$

შემოვიტანოთ კვანტილის ფუნქციის შეფასება ტრანსპონირებული მომენტების შემთხვევაში:

$$\hat{Q}_{\alpha}^{+}(x) = B_{\alpha}^{-1} m_{\hat{F}_n}^{+}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma([\alpha x] + 1)} \sum_{j=0}^{\alpha - [\alpha x]} \frac{(-1)^j m^{+}(j + [\alpha x], \hat{F})}{j!(\alpha - [\alpha x] - j)!}, \quad (3.23)$$

სადაც

$$m^{+}(j, \hat{F}_n) = \int_0^{\infty} t [\hat{F}_n(t)]^j d\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} \left(\frac{i}{n}\right)^j. \quad (3.24)$$

### 3.2 მარჯვენა ცენზურირებული მოდელი



ვთქვათ  $\{X_i\}_{i=1}^n$  და  $\{C_i\}_{i=1}^n$  წარმოადგენენ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეებს, სადაც  $X_i \sim F$  და  $C_i \sim G$  ხოლო განაწილების  $F$  და  $G$  ფუნქციები არ არის ცნობილი. მოცემული დაკვირვებები  $\{Z_i, \delta_i\}_{i=1}^n$ , სადაც  $Z_i = \min(X_i, C_i)$  და  $\delta_i = I(X_i \leq C_i)$ . შემოვიღოთ კაპლან-მაიერის შეფასება (Kaplan, Meier [27], Zhang [28]).

$$S_{KM}(t) = 1, \text{ როცა } 0 < t < Z_{(i)}, \quad S_{KM}(t) = \prod_{i=1}^{k-1} \left( \frac{n-i}{n-i+1} \right)^{\delta_{(i)}}, \text{ როცა } Z_{(k-1)} < t < Z_k, k = 2, \dots, n,$$

$$S_{KM}(t) = 0, \text{ როცა } t > Z_{(n)}.$$

ამ ფორმულაში  $\delta_{(i)}$  წარმოადგენს შესაბამის მნიშვნელობას, რომელიც შეესაბამება  $Z_{(i)}$ -ს ავადოთ  $Q$  კვანტილის ფუნქციის შეფასება მარჯვენა ცენზურირების პირობებში:

$$\hat{Q}_{\alpha, KM}(x) = (\bar{K}_\alpha^{-1} m_\delta^-)(x) = \sum_{k=\alpha-[\alpha]}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^-(j, \hat{S}_{KM}), \quad (3.25)$$

შემოვიღოთ  $BQ_n$  შეფასება რომელიც ეფუძნება  $L$ -სტატისტიკას (beta kernel density) (Kaplan, Meier [26]):

$$BQ_n(x) = \int_0^1 F_{KM}^{-1}(t) \beta\left(t, \frac{x}{b_n+1}, \frac{1-x}{b_n+1}\right) dt = \sum_{i=1}^n Z_{(i)} [L_\beta(P_i, x) - L_\beta(P_{i-1}, x)], \quad (3.26)$$

სადაც  $F_{KM} = 1 - S_{KM}$ ,  $b_n$  არის ბირთვის ტიპის კონსტრუქცია პარამეტრებით

$\left(\frac{x}{b_n+1}, \frac{1-x}{b_n+1}\right)$ . ხოლო  $P_i = F_{KM}(Z_{(i)})$  და  $L_\beta$  არის ბეტა განაწილების ფუნქცია და მათი

შედარება საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ რომ ეს სიდიდეები არიან ტოლები, რაც საშუალებას გვაძლევს გადავწეროთ (3.25) შემდეგნაირად:

$$\hat{Q}_{\alpha, KM}(x) = \int_0^1 B_\alpha(F_{KM}(u), x) du = \sum_{i=1}^n \Delta Z_{(i)} B_\alpha(F_{KM}(Z_{(i)}), x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.27)$$

დავასკვნით, რომ შეფასება წარმოადგენს კერძო შემთხვევას თუ  $S_{KM}$  -ის ნაცვლად ავიღებთ  $S$ . ამ შემთხვევაში  $\Delta Z_{(i)} = Z_{(i)} - Z_{(i-1)}$ .

ამასთანავე, შესაძლებელია კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასება კაპლან-მაიერის ტერმინებში:

$$\hat{q}_{\alpha, KM}(x) = (B_\alpha^{-1} m_{S_{KM}}^{-1})(x), \quad x \in (0, 1) \quad (3.28)$$

## მოსალოდნელი დეფიციტი ES( Expected shortfall)

დავუშვათ, რომ შემთხვევითი სიდიდე  $X$  წარმოადგენს ფინანსური ერთეულს, თუ  $E(X) < \infty$  მოსალოდნელი დეფიციტი  $ES$  (Expected shortfall) განსაზღვრულია  $x \in (0,1)$ :

$$ES(x) = E[XIX > Q(x)] = \frac{\int_{Q(x)}^{\infty} t dF(t)}{P(X > Q(x))} = \frac{1}{1-x} \int_x^1 Q(\tau) d\tau, \quad (3.29)$$

გავაკეთოთ ჩასმის (plug-in) წესით აპროქსიმაციის ნაცვლად შემოვიღოთ პრიმიტიული ფუნქციის აპროქსიმაცია რომელიც ეფუძნება მომენტების ცოდნას:

$$G(x) = \int_0^x Q(t) dt, \quad x \in (0,1),$$

რომელთა მომენტებს აქვს შემდეგი სახე:

$$m(j, G) = \int_0^1 u^j dG(u) = \int_0^1 u^j Q(u) du, \quad j = 0, \dots, \alpha, \quad (3.30)$$

$G$  აპროქსიმაციას ჩავწერთ შემდეგნაირად:

$$G_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha]} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m(j, G), \quad x \in (0,1). \quad (3.31)$$

**მაგალითი:** დავუშვათ, რომ  $X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$ ,  $\alpha = 2, \lambda = 2$ . ამ შემთხვევაში

$$S(x) = \left( \frac{\lambda}{x + \lambda} \right)^\alpha, \text{ ხოლო კვანტილის ფუნქცია } Q(t) = \frac{\lambda(1 - \sqrt{1-t})}{\sqrt{1-t}}, \quad t \in (0,1). \text{ ადგილი}$$

აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$m(j, G) = \int_0^{\infty} t [F(t)]^j dF(t) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)} \frac{\lambda}{a(j-k+1)-1}. \quad (3.32)$$

$ES$  აპროქსიმაცია ჩავწერთ შემდეგი სახით:

$$ES_\alpha(x) = \frac{1}{1-x} [G_\alpha(1) - G_\alpha(x)], \quad x \in (0,1). \quad (3.33)$$

შესაძლებელია აპროქსიმაციის მოდიფიცირებული ვერსიის ჩაწერა:

$$\tilde{ES}_\alpha(x) = \frac{1}{1-x} [\tilde{G}_\alpha(1) - \tilde{G}_\alpha(x)] \quad (3.34)$$

$$\text{სადაც } \tilde{G}_\alpha = 2G_{\tilde{\alpha}} - G_\alpha, \quad \tilde{\alpha} = 2\alpha.$$

მომენტების გამოყენებით  $ES$  შეფასებას თუ გამოვიყენებთ (3.32) ტოლობას,

$$\text{მივიღებთ: } \hat{m}(j, G) = \int_0^{\infty} t [\hat{F}(t)]^j d\hat{F}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} \left( \frac{i}{n} \right)^j, \quad j = 0, \dots, \alpha$$

(3.35)

(3.33) ემპირიული ფუნქციის ჩასმით მივიღებთ:

$$\hat{ES}_\alpha(x) = \frac{1}{1-x} [\hat{G}_\alpha(1) - \hat{G}_\alpha(x)], \quad x \in (0,1). \quad (3.36)$$

აღვნიშვნით, რომ შემოთავაზებული შეფასება, რომელშიც ვსვამთ  $\hat{Q}_\alpha$  ნაცვლად  $Q$  გვამღევს ახალ შეფასებას:

$$\hat{e}s_\alpha(x) = \frac{1}{1-x} \int_x^1 \hat{Q}_\alpha(t) dt,$$

სადაც

$$\hat{Q}_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\lfloor \alpha x \rfloor + 1)} \sum_{j=0}^{\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor} \frac{(-1)^j \hat{m}(j + \lfloor \alpha x \rfloor, G)}{j!(\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor - j)!}. \quad (3.37)$$

### 3.3 ლორენცის მრუდი

ლორენცის მრუდი წარმოადგენს ეკონომიკაში გამოყენებად ფუნქციას. პირველად ის შემოთავაზებული იყო 1905 წელს ამერიკელი ეკონომისტის მაქს ოტტო ლორენცის მიერ.

დავუშვათ, რომ  $X \sim F$  არის განსაზღვრული  $[0,1]$ . პირველი მომენტი არსებობს და ტოლია  $\mu = E(X)$ . შემოვიღოთ ლორენცის მრუდის განსაზღვრება:

$$L(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x Q(t) dt, \quad x \in [0,1], \quad (3.38)$$

$L$ -ჩასმის შეფასება, რომელიც ეფუძნება  $\hat{Q}_{\alpha,n}$  იქნება შემდეგი სახის:

$$\hat{L}_\alpha(x) = \frac{1}{\hat{\mu}} \int_0^x \hat{Q}_\alpha(t) dt, \quad x \in [0,1] \quad (3.39)$$

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \text{ ხოლო } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)}.$$

**თეორემა 3.2 :** თუ  $C_4 \leq \infty$  და  $Q$  "შემოსაზღვრულია  $(0,1)$ -ზე,  $\frac{\alpha}{n} \rightarrow 0$ , მაშინ როცა  $\alpha, n \rightarrow \infty$ , გვექნება:

$$\|\hat{L}_\alpha - L\| \leq \frac{1}{\hat{\mu}} \left\{ \frac{\pi}{8} C_1 O_p(1) \sqrt{\frac{\alpha}{n}} + \frac{1}{\alpha+1} [C_4 + \frac{1}{8} \|Q''\|] \right\} + \frac{O_p(1)}{\mu \hat{\mu} \sqrt{n}} \|Q\|_{L_1} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right). \quad (3.40)$$

**დამტკიცება:** ვიცით, რომ  $\|Q\|_{L_1} = \int_0^1 Q(x) dx$ ,

შევაფასოთ სხვაობა:

$$\|\hat{L}_\alpha - L\| \leq \frac{1}{\hat{\mu}} \int_0^x \hat{Q}_{\alpha,n}(t) dt - \frac{1}{\mu} \int_0^x Q(t) dt \leq \frac{1}{\hat{\mu}} \|\hat{Q}_\alpha - Q\|_{L_1} + \frac{|\hat{\mu} - \mu|}{\hat{\mu}\mu} \|Q\|_{L_1}, \quad (3.41)$$

ჩაწეროთ სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} |\hat{L}(x) - L(x)| &= \left| \frac{1}{\hat{\mu}} \int_0^x \hat{Q}_{\alpha,n}(t) dt - \frac{1}{\mu} \int_0^x Q(t) dt + \frac{1}{\hat{\mu}} \int_0^x Q(t) dt - \frac{1}{\mu} \int_0^x Q(t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\hat{\mu}} \int_0^x |\hat{Q}_{\alpha,n}(t) - Q(t)| dt + \int_0^x \left( \frac{1}{\hat{\mu}} - \frac{1}{\mu} \right) Q(t) dt. \end{aligned} \quad (3.42)$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} \|\hat{L} - L\| &\leq \frac{1}{\hat{\mu}} \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^x |\hat{Q}_{\alpha,n}(t) - Q(t)| dt + \left( \frac{1}{\hat{\mu}} - \frac{1}{\mu} \right) \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^x |Q(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\hat{\mu}} \int_0^1 |\hat{Q}_{\alpha,n}(t) - Q(t)| dt + \left( \frac{1}{\hat{\mu}} - \frac{1}{\mu} \right) \int_0^1 |Q(t)| dt, \end{aligned} \quad (3.43)$$

პირველი ინტეგრალის ქვეშ გამოსახულება შეფასებულია წინა თავებში, ხოლო მეორე ინტეგრალის ქვეშ ჩაწერილი გამოსახულება განსაზღვრული იყო დამტკიცების დასაწყისში, აქედან გამომდინარე გვექნება:

$$\|\hat{L}_\alpha - L\| \leq \frac{1}{\hat{\mu}} \left\{ \frac{\pi}{8} C_1 O_p(1) \sqrt{\frac{\alpha}{n}} + \frac{1}{\alpha+1} [C_4 + \frac{1}{8} \|Q''\|] \right\} + \frac{|\hat{\mu} - \mu|}{\hat{\mu}\mu} \|Q\|_{L_1}; \quad (3.44)$$

გავამრავლოთ და გავყოთ მეორე შესაკრები  $\sqrt{n}$ :

$$\|\hat{L}_\alpha - L\| \leq \frac{1}{\hat{\mu}} \left\{ \frac{\pi}{8} C_1 O_p(1) \sqrt{\frac{\alpha}{n}} + \frac{1}{\alpha+1} [C_4 + \frac{1}{8} \|Q''\|] \right\} + \frac{\sqrt{n} |\hat{\mu} - \mu|}{\hat{\mu}\mu\sqrt{n}} \|Q\|_{L_1}, \quad (3.45)$$

მაგრამ ვიცით, რომ  $\sqrt{n} |\hat{\mu} - \mu| \rightarrow O_p(1)$ ,

$$\|\hat{L}_\alpha - L\| \leq \frac{1}{\hat{\mu}} \left\{ \frac{\pi}{8} C_1 O_p(1) \sqrt{\frac{\alpha}{n}} + \frac{1}{\alpha+1} [C_4 + \frac{1}{8} \|Q''\|] \right\} + \frac{O_p(1)}{\hat{\mu}\mu\sqrt{n}} \|Q\|_{L_1}. \quad (3.46)$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

## თავი IV: მაგალითები

მოცემული თავში განვიხილავთ აპროქსიმაციის და შეფასების ყოფაქცევას მოყვანილი მოდელების სხვადასხვა პარამეტრებისთვის. აგებულია შესაბამისი გრაფიკები. ამასთანავე, მოცემულია გრაფიკული გამოსახულება კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციისა და შეფასებისათვის. მოცემული თავი ასევე განიხილავს ლორენცის მრუდის შეფასებას.

და ბოლოს, განვიხილავთ საკითხს მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალების გამოთვლის წესებსა და პროცედურებს. მიღებულ შედეგებს შემოწმება შემოწმება ჩვენს მიერ შემოთავაზებული კვანტილის ფუნქციის შეფასების ფორმულისთვის და მისი შედარება ცნობილ ჰარელ-დევისის ფორმულასთან.

### 4.1 კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციები და შეფასებები

განვიხილოთ აპროქსიმაციის ყოფაქცევა სხვადასხვა პარამეტრების შერჩევის შემთხვევები.

#### მაგალითი 1

**მოდელი I, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0,1)$**

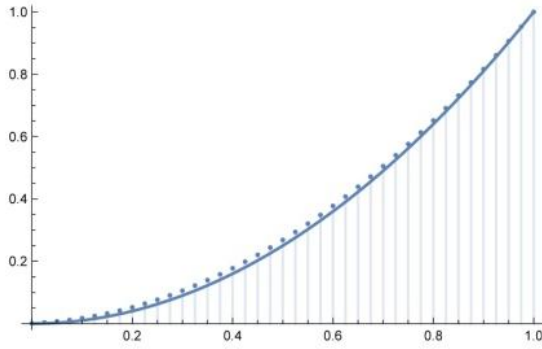
$$Q_{\alpha}^{-}(x) = (K_{\alpha}^{-1} m_{F}^{-})(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha]} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^{-}(j, F), \text{ სადაც } m^{-}(j, F) = \int_0^1 [F(t)]^j dt.$$

(იხილეთ.1.1-1.3)

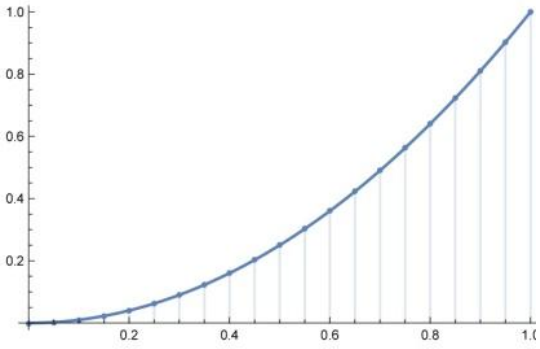
განვიხილოთ  $F(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ,  $0 < x < 1$ , ე.ი.  $Q(x) = x^2$  ნახაზს 1. ა) - მოყვანილია  $Q_{\alpha}^{-}(x)$ , როცა  $\alpha = 40$ .

ნახაზს 1. ბ) - ვიხილავთ კვანტილის ფუნქციის მოდიფიცირებულ ვერსიას:

$$\tilde{Q}_{\alpha}^{-}(x) = 2Q_{\alpha}^{-}(x) - Q_{\alpha}^{-}(x) \text{ და } \alpha = 20.$$



ა)



ბ)

**ნახაზი 1.** კვანტილის ფუნქციის  $Q(x) = x^2$  აპროქსიმაცია.

ა) ლურჯი წერტილები -  $Q_\alpha^-(x)$ , როცა  $\alpha = 40$ , სწორი მრუდი - თეორიული კვანტილი.

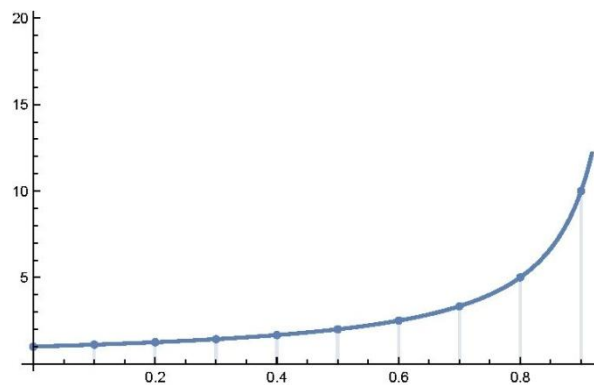
ბ) კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის მოდიფიცირებული ვერსია, ლურჯი წერტილები -  $\tilde{Q}_\alpha^-$ , როცა  $\alpha = 20$ , სწორი მრუდი - თეორიული კვანტილი.

## მაგალითი 2

**მოდელი II**, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$

$\tilde{q}_\alpha(x) = 2q_{\tilde{\alpha}}(x) - q_\alpha(x)$ , (იხილეთ პარაგრაფი 2.3),  $X \sim \text{Exp}(1)$

მე-2 ნახაზზე წარმოდგენილია კვანტილის სიმკვრივის  $\tilde{q}_\alpha$  მოდიფიცირებული ვერსიის ყოფაქცევა, როდესაც სიმკვრივის ფუნქცია არის  $q(x) = \frac{1}{1-x}$ , ხოლო  $\alpha = 10$ .

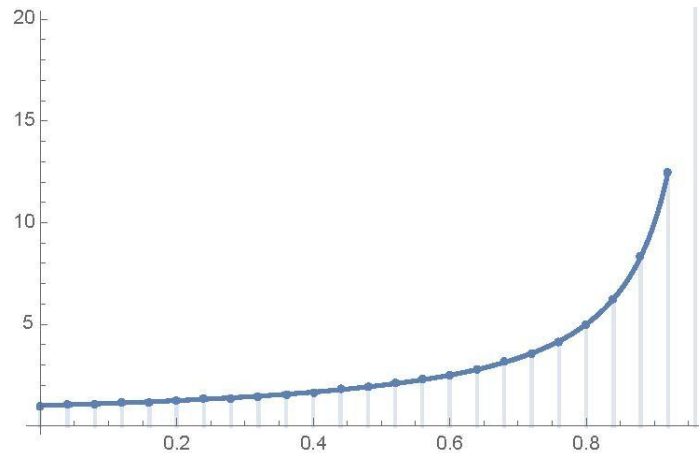


**ნახაზი 2.** კვანტილის ფუნქცია არის  $q(x) = \frac{1}{1-x}$  კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაცია, ლურჯი წერტილები -  $\tilde{q}_\alpha$ , როცა  $\alpha = 10$ . სწორი მრუდი - თეორიული კვანტილი.

მოდელი II , როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$

$\tilde{q}_\alpha(x) = 2q_{\tilde{\alpha}}(x) - q_\alpha(x)$ , (იხილეთ პარაგრაფი 2.3),  $X \sim \text{Exp}(1)$

მე-3 ნახაზზე წარმოდგენილია კვანტილის სიმკვრივის  $\tilde{q}_\alpha$  მოდიფიცირებული ვერსიის ყოფაქცევა, როცა სიმკვრივის ფუნქცია არის  $q(x) = \frac{1}{1-x}$ , ხოლო  $\alpha = 25$ .

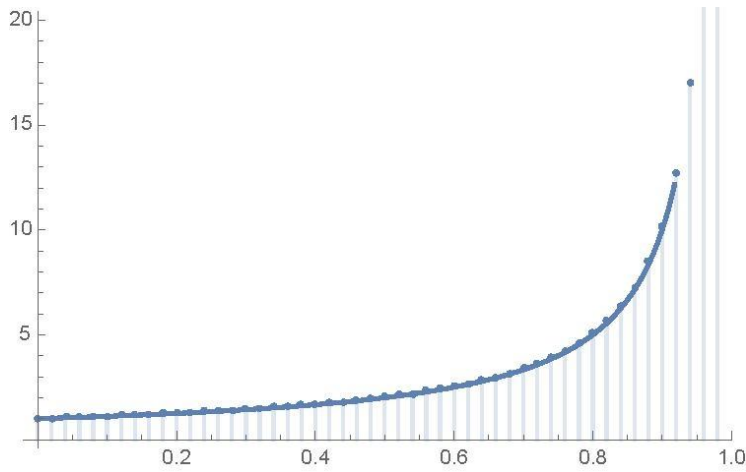


**ნახაზი 3.** კვანტილის ფუნქცია არის  $q(x) = \frac{1}{1-x}$  კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაცია, ლურჯი წერტილები-  $\tilde{q}_\alpha$ , როცა  $\alpha = 25$ . სწორი მრუდი - თეორიული კვანტილი.

მოდელი II , როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$

$\tilde{q}_\alpha(x) = 2q_{\tilde{\alpha}}(x) - q_\alpha(x)$ , (იხილეთ პარაგრაფი 2.3)

მე-4 ნახაზზე წარმოდგენილია კვანტილის სიმკვრივის  $\tilde{q}_\alpha$  მოდიფიცირებული ვერსიის ყოფაქცევა, როცა სიმკვრივის ფუნქცია არის  $q(x) = \frac{1}{1-x}$ , ხოლო  $\alpha = 50$ .

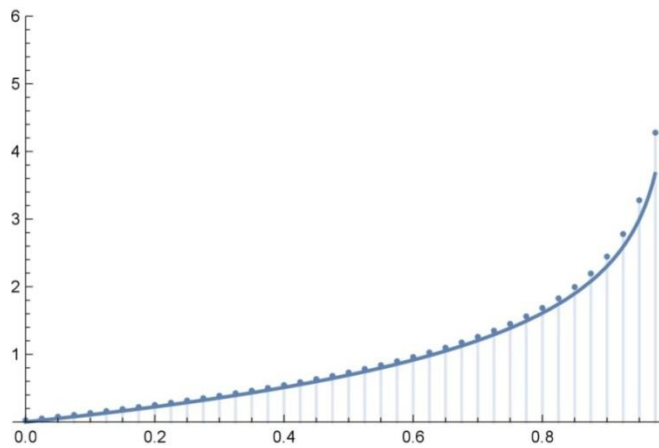


**ნახაზი 4.** კვანტილის ფუნქცია არის  $q(x) = \frac{1}{1-x}$  კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაცია, ლურჯი წერტილები-  $\tilde{q}_\alpha$ , როცა  $\alpha = 50$ . სწორი მრუდი - თეორიული კვანტილი.

### მაგალითი 3

<p>მოდელი II, როცა <math>\text{supp}\{F\} = (0, \infty)</math></p>
<p><math>Q(x) = -\ln(1-x)</math> და <math>Q_{\alpha,b}(x) = \int_0^\infty B_\alpha(F_{\alpha,b}(u), x) du</math> (იხილეთ (1.59-1.61))</p>

მე-5 ნახაზზე წარმოდგენილია კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის ყოფაქცევა  $Q_{\alpha,b}$ , როცა კვანტილის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:  
 $Q(x) = -\ln(1-x)$ .



**ნახაზი 5.**  $Q(x) = -\ln(1-x)$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია ლურჯი წერტილები-  $Q_{\alpha,b}$ , როცა  $\alpha = 40$ ,

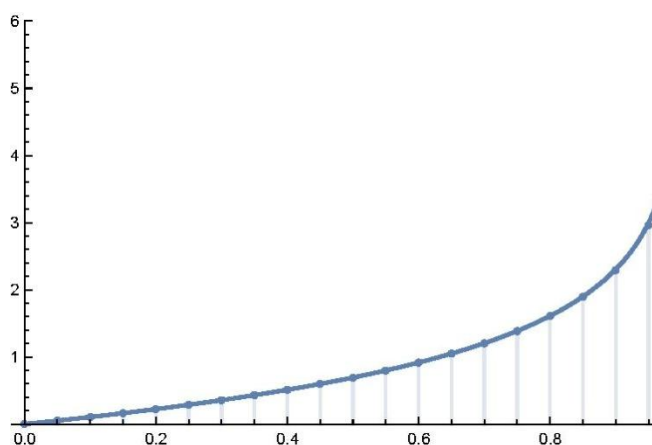


## მაგალითი 4

მოდელი I, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$

$$Q(x) = -\ln(1-x) \text{ და } Q_{\alpha,S}(x) = \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^-(j, S)$$

მე-6 ნახაზზე წარმოდგენილია კვანტილის ფუნქციის მოდიფიცირებული აპროქსიმაციის ყოფაქცევა  $\tilde{Q}_{\alpha,S}$ , როცა კვანტილის ფუნქცია მოცემულია შემდეგნაირად  $Q(x) = -\ln(1-x)$ , როცა  $\alpha = 20$ .

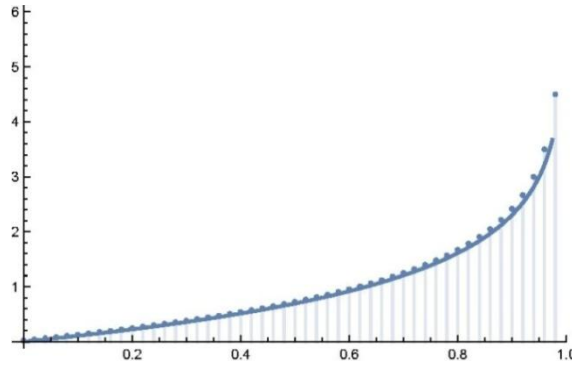


**ნახაზი 6.**  $Q(x) = -\ln(1-x)$  კვანტილის ფუნქციის მოდიფიცირებული აპროქსიმაცია ლურჯი წერტილები- $\tilde{Q}_{\alpha,S}$ , როცა  $\alpha = 20$ .

მოდელი I, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$

$$Q(x) = -\ln(1-x) \text{ და } Q_{\alpha,S}(x) = \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^-(j, S), \text{ (იხილეთ 1.33-1.35).}$$

მე-7 ნახაზზე წარმოდგენილია კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის ყოფაქცევა  $Q_{\alpha,S}$ , როცა კვანტილის ფუნქცია მოცემულია შემდეგნაირად  $Q(x) = -\ln(1-x)$ , როცა  $\alpha = 50$ .

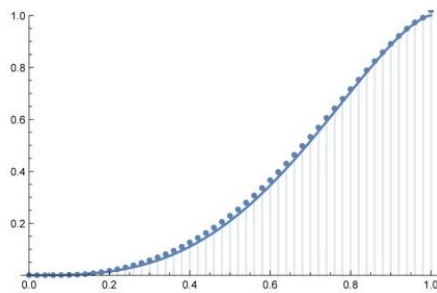


ნახაზი 7.  $Q(x) = -\ln(1-x)$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია ლურჯი წერტილები-  $Q_{\alpha,s}$ , როცა  $\alpha = 50$ , როცა ქვედა ზღვარი  $\alpha - \lceil \alpha x \rceil$  ტოლია.

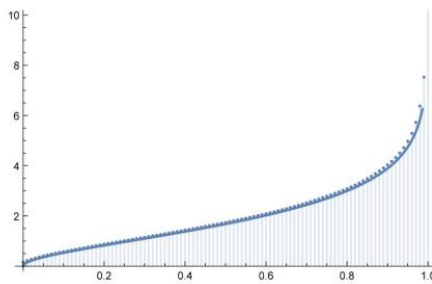
### მაგალითი 5

<p><b>მოდელი II, როცა <math>\text{supp}\{F\} = (0,1)</math> და <math>\text{supp}\{F\} = (0, \infty)</math></b></p> <p>ა) <math>Q_\alpha(x) = \int_0^1 B_\alpha(F_\alpha(u), x) du</math>, <math>X_i \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)</math> და ბ) <math>Q_{\alpha,b}(x) = \int_0^\infty B_\alpha(F_{\alpha,b}(u), x) du</math>,  <math>X_i \sim \text{Gamma}(2,1)</math></p>
---

მე-8 ნახაზზე წარმოდგენილია კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის ყოფაქცევა  $Q_\alpha(x)$  (იხ. 1.47), როცა კვანტილის ფუნქცია მოცემულია შემდეგნაირად, როცა ა)  $X_i \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  და  $\alpha = 50$ . ბ)  $Q_{\alpha,b}$  (იხ. 1.60), მეშვეობით, (წერტილოვანი მრუდი), როცა  $X_i \sim \text{Gamma}(2,1)$  და  $\alpha = 100, b = 1.5$ .



ა)



ბ)

ნახაზი 8. ა)  $Q_\alpha$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია,  $X_i \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ , და  $\alpha = 50$ ,  
(წერტილოვანი მრუდი).

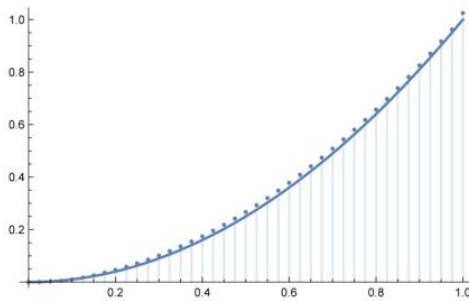
ბ)  $Q_{\alpha,b}$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია , როცა  $X_i \sim \text{Gamma}(2,1)$  და  $\alpha = 100, b = 1.5$ . (წერტილოვანი მრუდი.

## მაგალითი 6

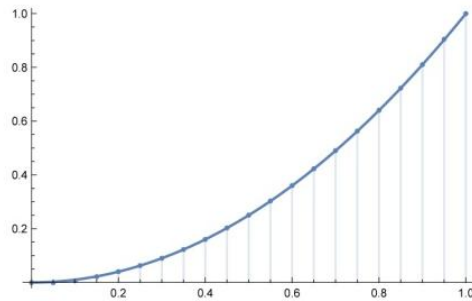
მოდელი II, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0,1)$

$$Q_\alpha(x) = \int_0^1 B_\alpha(F_\alpha(u), x) du, \quad Q(x) = x^2 \quad X \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

მე-9 ნახაზზე ა) წარმოდგენილია კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის ყოფაქცევა  $Q_\alpha$  (იხილეთ (1.47)), როცა კვანტილის ფუნქცია მოცემულია შემდეგნაირად  $Q(x) = x^2$ , როცა  $\alpha = 40$ , ბ) კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის მოდიფიცირებული ვერსია  $\tilde{Q}_\alpha$ , რომელიც იყო განსაზღვრული 1.6 პარაგრაფში, როცა  $\alpha = 20$ .



ა)



ბ)

**ნახაზი 9.** კვანტილის ფუნქციის  $Q(x) = x^2$  აპროქსიმაცია

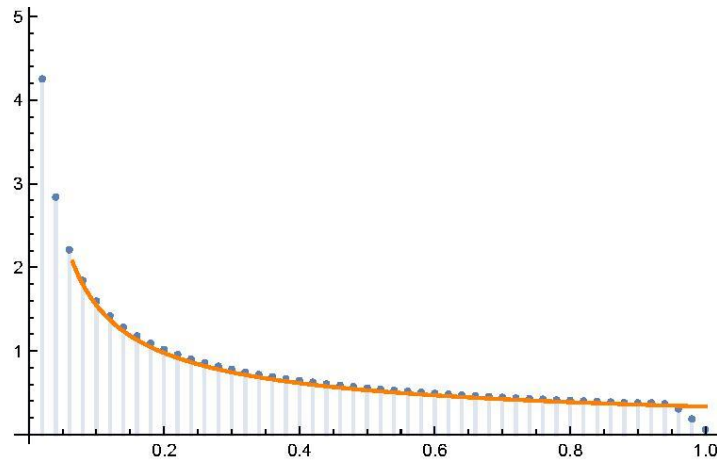
ა)  $Q_\alpha$  - ლურჯი წერტილები, როცა  $\alpha = 40$ , ბ)  $\tilde{Q}_\alpha$  - კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის მოდიფიცირებული ვერსია , როცა  $\alpha = 20$ .

## მაგალითი 7

მოდელი II, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0,1)$

$$Q_\alpha(x) = \int_0^1 B_\alpha(F_\alpha(u), x) du, \quad X \sim \text{Beta}(3,1)$$

მე-10 ნახაზზე არის კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია  $Q_\alpha$  (იხილეთ 1.47), როცა განაწილება Beta (3,1) და  $\alpha = 50$ .



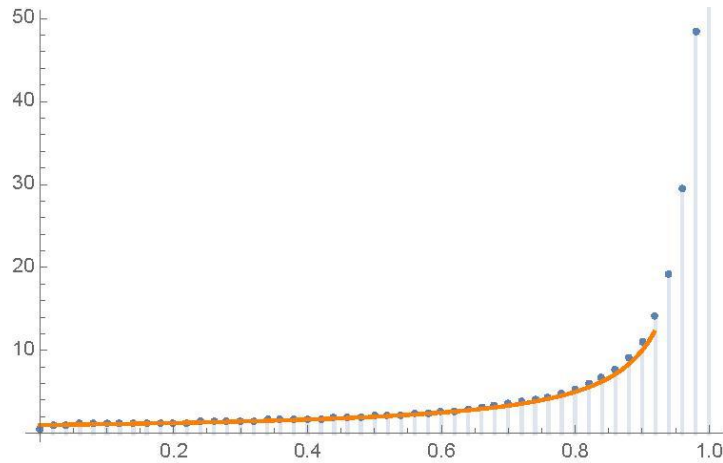
*ნახაზი 10.  $Q_\alpha$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია, როცა  $\alpha = 50$ .  $X_i \sim \text{Beta}(3,1)$  (წერტილოვანი მრუდი).*

## მაგალითი 8

მოდელი II, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$

$$Q_{\alpha,b}(x) = \int_0^\infty B_\alpha(F_{\alpha,b}(u), x) du, \quad X \sim \text{Exp}(1)$$

მე-11 ნახაზზე არის კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია  $Q_{\alpha,b}$  (იხ. 1.60), როცა გვაქვს ექსპონენციალური განაწილება და  $\alpha = 25$ .

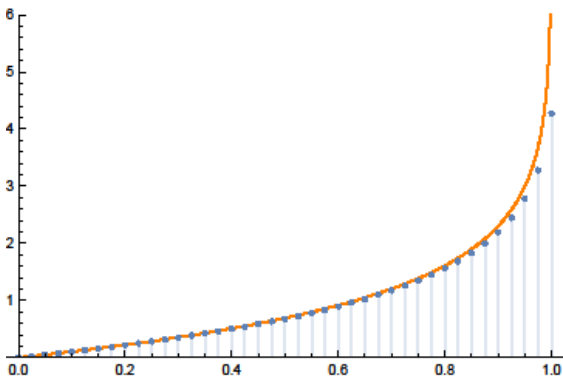


**ნახაზი 11.**  $Q_{\alpha,b}$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია, როცა  $\alpha = 25$   
 $X \sim Exp(1)$ .

### მაგალითი 9

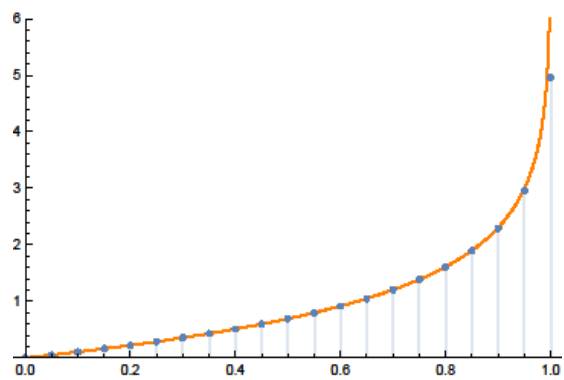
**მოდელი II,** როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$

$$Q_{\alpha,b}(x) = \int_0^{\infty} B_{\alpha}(F_{\alpha,b}(u), x) du, \quad X \sim Exp(1)$$



ა)

**ნახაზი 12.** ა) თეორიული  $Q(x) = -\ln(1-x)$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის შედარება  $Q_{\alpha,b}(x)$ , როცა  $\alpha = 40$ .



ბ)

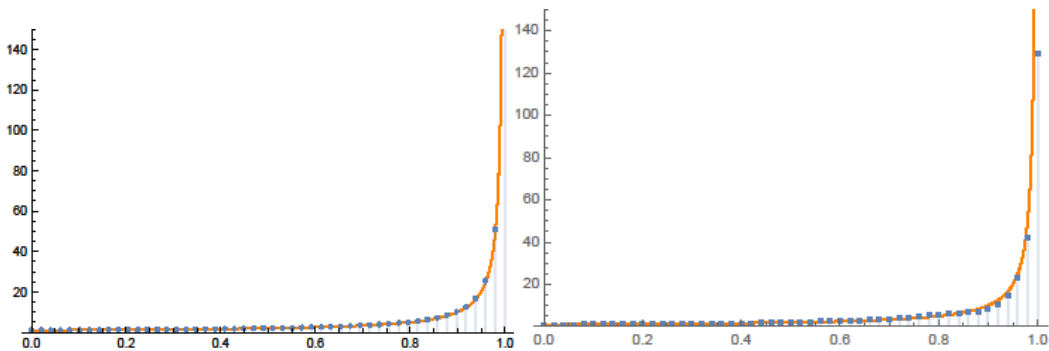
ბ) თეორიული  $Q(x) = -\ln(1-x)$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის შედარება მოდიფიცირებულ  $\tilde{Q}_{\alpha,b}(x)$ , როცა  $\alpha = 20$ .

## მაგალითი 10

მოდელი II, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, T)$ ,  $T < \infty$

$$q_{\alpha, S}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\lceil \alpha \varphi(x) \rceil + 1)} \sum_{j=0}^{\alpha - \lceil \alpha \varphi(x) \rceil} \frac{(-1)^j m^-(j + \lceil \alpha \varphi(x) \rceil, S)}{j!(\alpha - \lceil \alpha \varphi(x) \rceil - j)!},$$

$$q_{\alpha, b}(x) = \int_0^{\infty} \beta(F_{\alpha, b}(u), \lceil \alpha x \rceil + 1, \alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1) du$$



ა)

ბ)

**ნახაზი 13.ა)** თეორიული  $q(x) = \frac{1}{1-x}$  კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციის შედარება  $q_{\alpha, S}$ , როცა  $\alpha = 50$ , კვანტილის სიმკვრივის მოდელთან

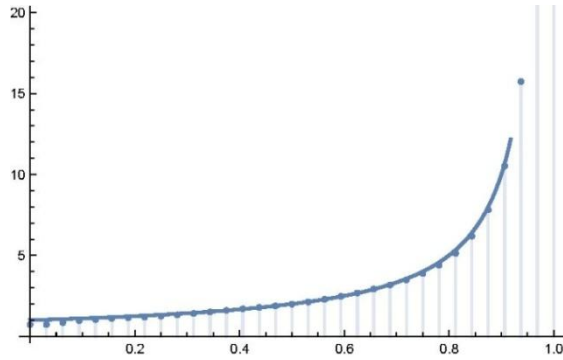
ბ)  $q_{\alpha, b} = \frac{1}{f_{\alpha, b}(Q_{\alpha, b})}$ , როცა  $\alpha = 50$ ,  $b = 1.95$ .

ახლა მოვიყვანოთ გრაფიკული გამოსახულება კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასების ყოფაქცევის.

## მაგალითი 11

მოდელი II, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, T)$ ,  $T < \infty$

$$\hat{q}_\alpha^*(x) = \int_0^1 \beta(\hat{F}_\alpha(u), \lceil \alpha x \rceil + 1, \alpha - \lceil \alpha x \rceil + 1) du.$$



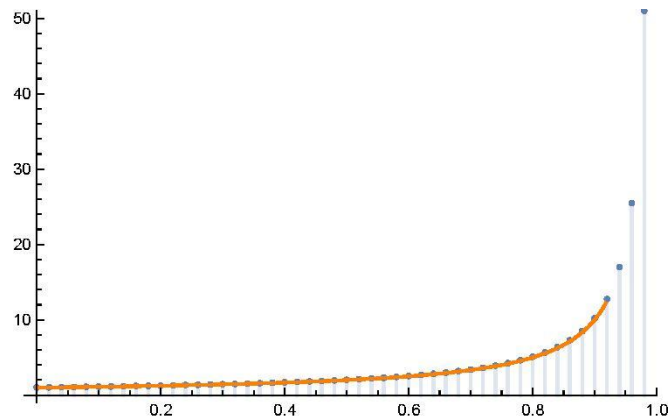
**ნახაზი 14.**  $\hat{q}_\alpha^*$  – კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასება, როცა  $\alpha = 32$  და  $n = 500$ .

## მაგალითი 12

**მოდელი I,** როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$

$$Q_{\alpha, \hat{s}}(x) = (\bar{K}_\alpha^{-1} m_\alpha^-)(x) = \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^-(j, \hat{S}), \quad X \sim \text{Exp}(1)$$

მე-15 ნახაზზე მოცემული კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასება, როცა გვაქვს ექსპონენციალური განაწილება და  $\alpha = 50$ .

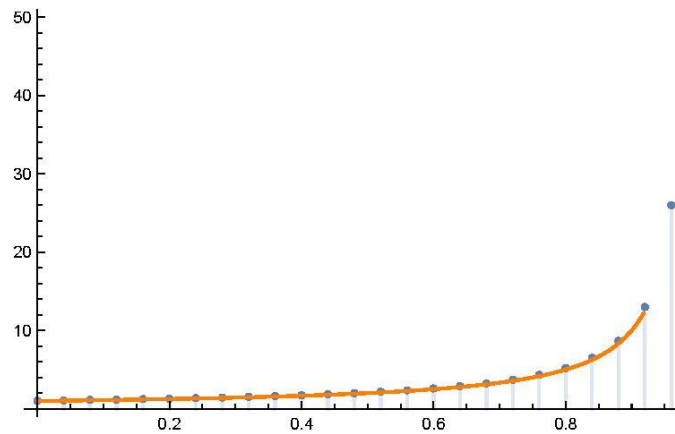


**ნახაზი 15.**  $Q_{\alpha, \hat{s}}$ ,  $\alpha = 50$ , კვანტილის ფუნქციის შეფასება, როცა გვაქვს ექსპონენციალური განაწილება  $X \sim \text{Exp}(1)$ .

**მოდელი I, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$**

$$Q_{\alpha, \hat{S}}(x) = (\bar{K}_\alpha^{-1} m_\alpha^-)(x) = \sum_{k=\alpha-\lfloor \alpha \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^-(j, \hat{S}), \quad X \sim \text{Exp}(1)$$

მე-16 ნახაზზე მოცემული კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასება, როცა აღებულია ექსპონენციალური განაწილება და  $\alpha = 25$ .



**ნახაზი 16.**  $Q_{\alpha, \hat{S}}, \alpha = 25$ , კვანტილის ფუნქციის შეფასება, როცა გვაქვს ექსპონენციალური განაწილება  $X \sim \text{Exp}(1)$ .

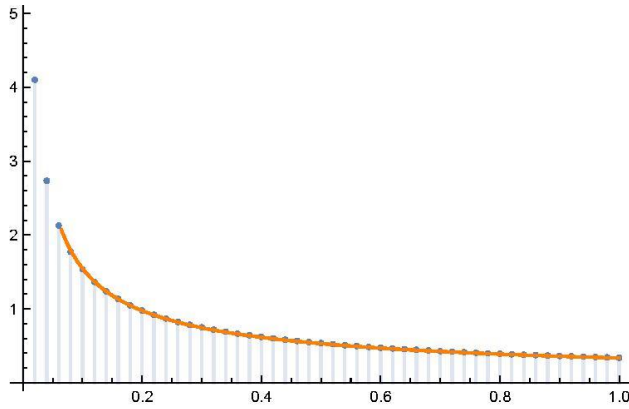
### მაგალითი 13

**მოდელი II, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0,1)$**

$$\hat{Q}_{\alpha, n}(x) = \int_0^1 B_\alpha(\hat{F}_n(u), x) du, \quad X \sim \text{Beta}(3,1)$$

მე-17 ნახაზზე მოცემული კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასება, Beta (3,1) შემთხვევაში და როცა  $\alpha = 50$ .





ნახაზი 17.  $\hat{Q}_{\alpha,n}^-$ , როცა  $\alpha = 50$ , კვანტილის ფუნქციის შეფასება, Beta (3,1) განაწილების შემთხვევაში.

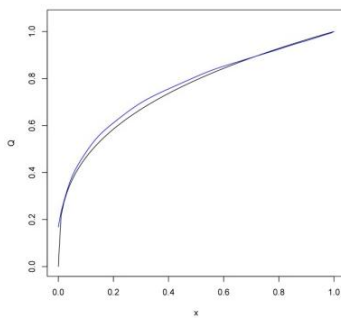
## მაგალითი 14

მოდელი I, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0,1)$

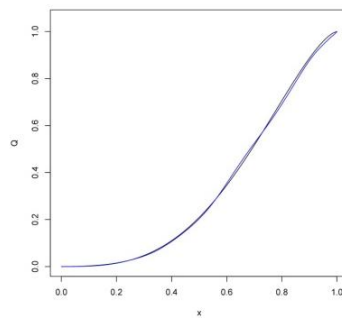
$$\hat{Q}_{\alpha}^{-}(x) = (K_{\alpha}^{-1} m_{\hat{F}_n}^{-})(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^{-}(j, \hat{F}), \quad \text{ა) } X \sim F(x) = x^3 \text{ და}$$

$$\text{ბ) } X \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

მე-18 ნახაზზე წარმოდგენილია კვანტილის ფუნქციის შეფასების ყოფაქცევა მეორე მოდელისთვის შემთხვევა (A):  $\text{supp}\{F\} = (0, T), T < \infty$ , როცა კვანტილის ფუნქცია მოცემულია შემდეგნაირად, როცა ა)  $X_i \sim F(x) = x^3$  ბ)  $X_i \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  ორივე შემთხვევაში  $n = 500$  და  $\alpha = 100$ .



ა)



ბ)

**ნახაზი 18.**  $\hat{Q}_\alpha$  კვანტილის ფუნქციის შეფასება  $\hat{Q}_\alpha$  -ლოურჯი მრუდი, როცა

$$X_i \sim F(x) = x^3,$$

ბ)  $X_i \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  ორივე შემთხვევაში  $n = 500$  და  $\alpha = 100$ .

**მაგალითი 15**

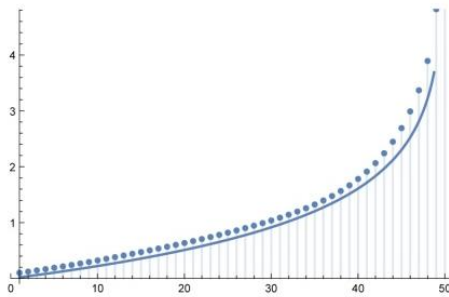
**მოდელი II, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$**

$$\hat{Q}_{\alpha,b}(x) = \int_0^\infty B_\alpha(\hat{F}_{\alpha,b}(u), x) du \quad \text{ა) } X \sim \text{Exp}(1), \text{ ბ) } X \sim \text{Gamma}(2,1)$$

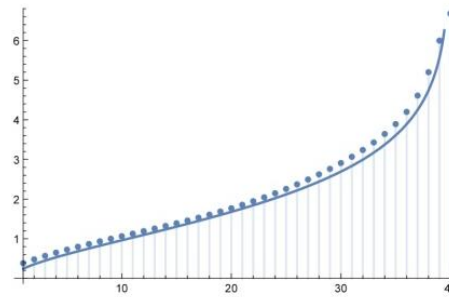
მე-19 ნახაზზე არის გამოსახულია  $\hat{Q}_{\alpha,b}$  კვანტილის ფუნქციის შეფასება, როცა  $X_i \sim$

$\text{Exp}(1)$  და  $n = 500, \alpha = 50, b = 1.75$ ,

ბ) როცა  $X_i \sim \text{Gamma}(2,1)$  და  $n = 300, \alpha = 40, b = 1.75$ .



ა)



ბ)

**ნახაზი 19.**  $\hat{Q}_{\alpha,b}$  კვანტილის ფუნქციის შეფასება-წერტილოვანი მრუდი, ა) როცა  $X_i \sim$

$\text{Exp}(1)$ , და  $n = 500, \alpha = 50, b = 1.75$

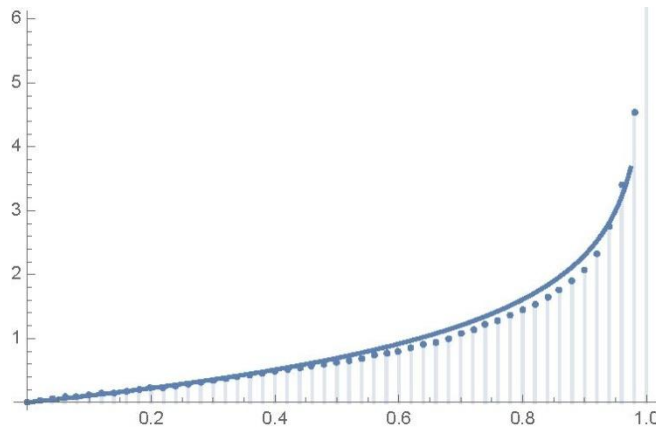
ბ) როცა  $X_i \sim \text{Gamma}(2,1)$ , და  $n = 300, \alpha = 40, b = 1.75$ .

**მაგალითი 16**

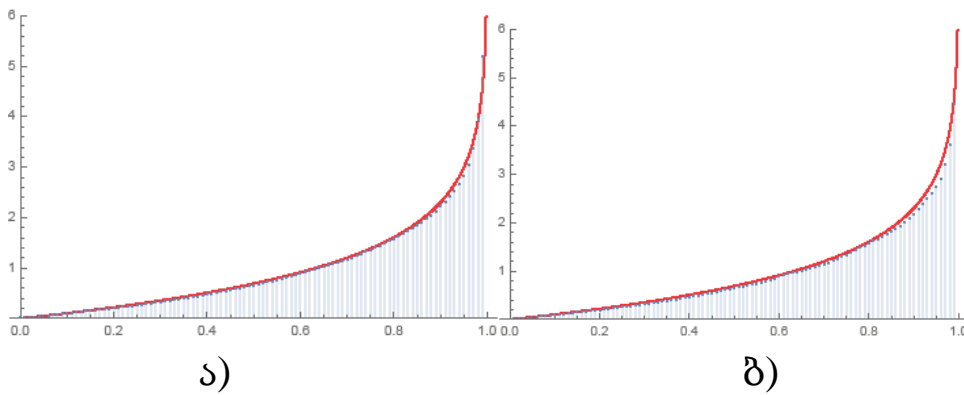
**მოდელი II, როცა  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$**

$$\hat{Q}_{\alpha,b}(x) = \int_0^\infty B_\alpha(\hat{F}_{\alpha,b}(u), x) du, \quad X \sim \text{Exp}(1)$$

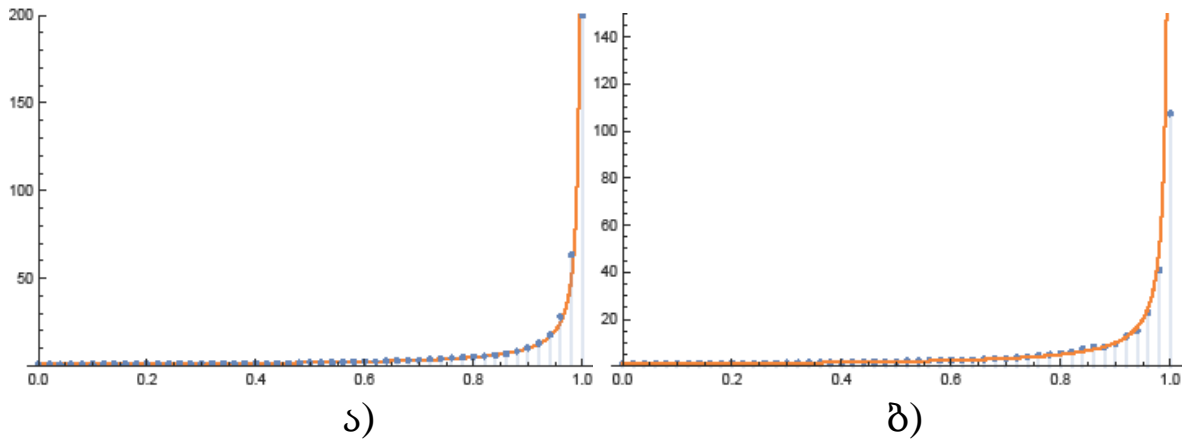
მე-20 ნახაზზე მოცემულია კვანტილის ფუნქციის შეფასება, ექსპონენციალური განაწილების შემთხვევაში, როცა  $\alpha = 50$  და  $n = 200$ .



ნახაზი 20.  $\hat{Q}_{\alpha,b}$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის შეფასება, როცა  $\alpha = 50$  და  $n = 200$ .



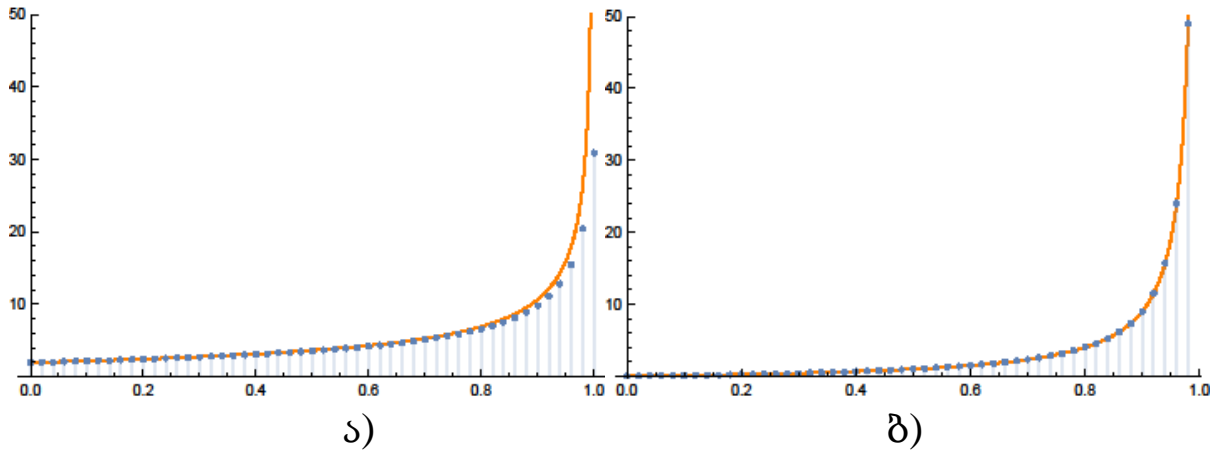
ნახაზი 21. ა)  $Q(x) = -\ln(1-x)$  შეფასების შედარება  $Q_{\alpha,\hat{\sigma}}(x)$  მოდელთან როცა  $\alpha = 100, n = 500$ , ბ)  $Q_{H-D}$  შედარება  $Q_{\alpha,\hat{\sigma}}(x)$  მოდელთან, როცა  $n = 500$



**ნახაზი 22.** ა)  $q(x) = \frac{1}{1-x}$  კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასების შედარება  $q_{\alpha,s}$

მოდელთან

ბ)  $q_{\alpha,b} = \frac{1}{f_{\alpha,b}(Q_{\alpha,b})}$  როცა  $b = 1.55$ , ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 50$  და  $= 500$ .



**ნახაზი 23.** ა) თეორიული  $ES$  შეფასების შედარება  $\hat{ES}_\alpha$ , როცა  $\alpha = 50$  და  $n = 800$ ,

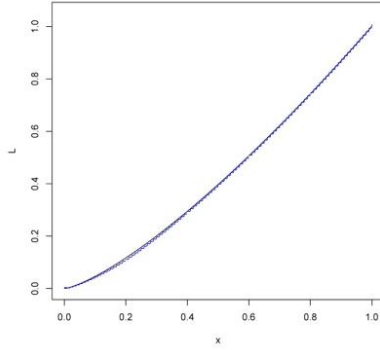
ბ) თეორიული  $Q$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის შედარება  $Q_{\alpha,s}$ , აქ  $\alpha = 50$  მოდელთან, როცა  $X \sim Pareto(1,1)$ .

## მაგალითი 17

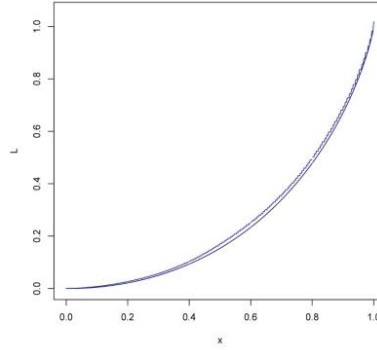
### ლორენცის მრუდის შეფასება

მე-20 ნახაზზე მოყვანილი ლორენცის მრუდის შეფასება, როცა

ა)  $X_i \sim F(x) = x^3$  და  $n = 200, \alpha = 100$ , ბ) როცა  $X_i \sim Exp(1)$  და  $n = 300, \alpha = 150$ .



ა)



ბ)

**ნახაზი 24.**  $\hat{L}_\alpha$  შეფასება ა) როცა  $X_i \sim F(x) = x^3$  და  $n = 200, \alpha = 100$ .

ბ) როცა  $X_i \sim \text{Exp}(1)$  და  $n = 300, \alpha = 150$ , ორივე შემთხვევაწარმოადგენს ლორენცის მრუდის ჭეშმარიტ სახეს.

## მაგალითი 18

### მარჯვენა ცენზურირების მოდელი

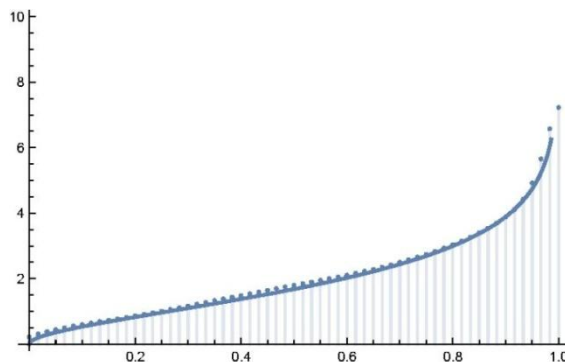
შემდეგი ნახაზებში (21-24) მოყვანილია კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის ყოფაქცევა მარჯვენა ცენზურირების შემთხვევაში, როცა  $X \sim \text{Gamma}(2,1)$ ,  $C \sim \text{Gamma}(6,1)$ ,  $\hat{Q}_{\alpha, KM}$  მეშვეობით (ლურჯი წერტილები), სადაც  $\alpha = 60$  და  $n = 500$ .

(ნახაზი 21)  $BQ_n$  მეშვეობით (ლურჯი წერტილები), სადაც  $\alpha = 60$  და  $n = 500$ ,

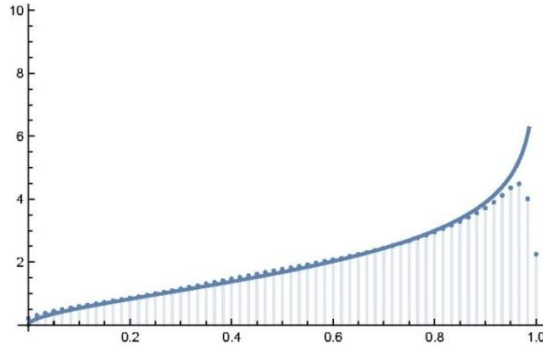
(ნახაზი 22), როცა  $X \sim \text{Exp}(1)$  და  $C \sim \text{Gamma}(6,1)$ , სადაც  $\alpha = 100, n = 1500$ , (ნახაზი 23),

როცა  $X \sim \text{Exp}(1)$  და  $C \sim \text{Gamma}(2.5, 2)$ , სადაც  $\alpha = 100, n = 1500$ ,.

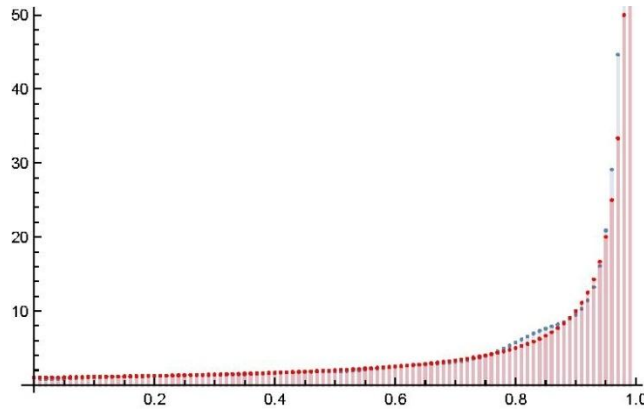
(ნახაზი 24).



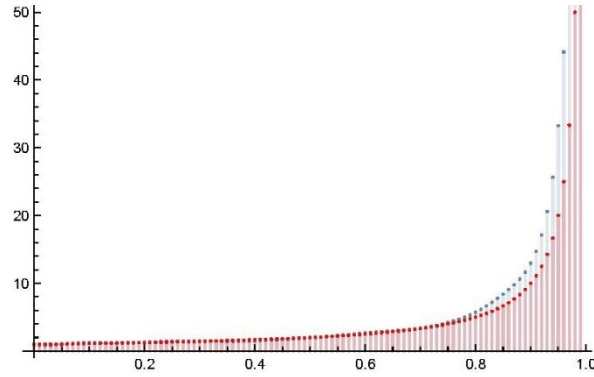
**ნახაზი 25.**  $\hat{Q}_{\alpha, KM}$  - ლურჯი წერტილები, კვანტილის ფუნქციის შეფასება, როცა  $X \sim Gamma(2,1), C \sim Gamma(6,1)$ , სადაც  $\alpha = 60$  და  $n = 500$ . ცენზურირების პროცენტული მნიშვნელობა 5% ტოლია.



**ნახაზი 26.**  $BQ_n$  - ლურჯი წერტილები, კვანტილის ფუნქციის შეფასება, როცა  $X \sim Gamma(2,1), C \sim Gamma(6,1)$ , სადაც  $\alpha = 60$  და  $n = 500$ . ცენზურირების პროცენტული მნიშვნელობა 5% ტოლია,



**ნახაზი 27.**  $\hat{q}_{\alpha, KM}$  - ლურჯი წერტილები, კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასება როცა  $X \sim Exp(1)$  და  $C \sim Gamma(6,1)$ , სადაც  $\alpha = 100, n = 1500$ . ცენზურირების პროცენტული მნიშვნელობა 2% ტოლია.



**ნახაზი 28.**  $\hat{q}_{\alpha, KM}$  -ლურჯი წერტილები, კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის შეფასება როცა  $X \sim Exp(1)$  და  $C \sim Gamma(2.5, 2)$ , სადაც  $\alpha = 100, n = 1500$ . ცენზურირების პროცენტული მნიშვნელობა 6% ტოლია.

## მაგალითი 19

### პარეტოს განაწილება

დავუშვათ  $\text{supp}\{F\} = (0, \infty)$  და გვაქვს  $X \sim Pareto(a, \lambda)$ , სადაც  $a = \lambda = 2$ .

მაშინ:

$$S(t) = \left( \frac{\lambda}{t + \lambda} \right)^\alpha, t > 0, \quad (4.1)$$

ჩავწეროთ მათემატიკური ლოდინი:

$$EX = \int_0^\infty S(t) dt = \int_0^\infty \left( \frac{\lambda}{t + \lambda} \right)^a dt, \quad (4.2)$$

ვიციტ, რომ მომენტები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$m^-(j, S) = \int_0^\infty [S(t)]^j dt, j = 1, \dots, \alpha. \quad (4.3)$$

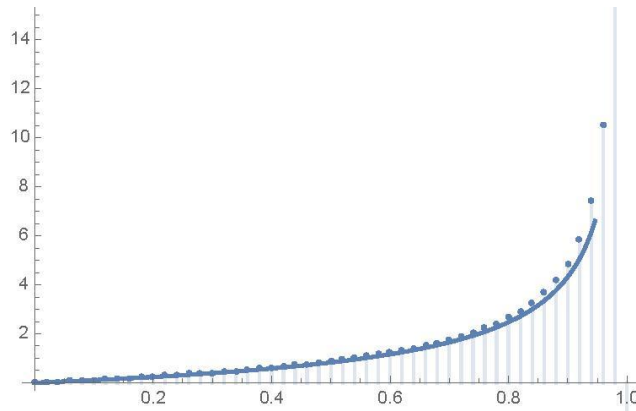
განხილულ მაგალითში  $S(t)$  ნაცვლად ჩავსვათ (1.77) მოცემულ გამოსახულებას და მივიღებთ

$$m^-(j, S) = \int_0^\infty \left[ \left( \frac{\lambda}{t + \lambda} \right)^a \right]^j dt = \int_0^\infty \left( \frac{\lambda}{t + \lambda} \right)^{aj} dt = \frac{\lambda}{aj + 1}, \quad (4.4)$$

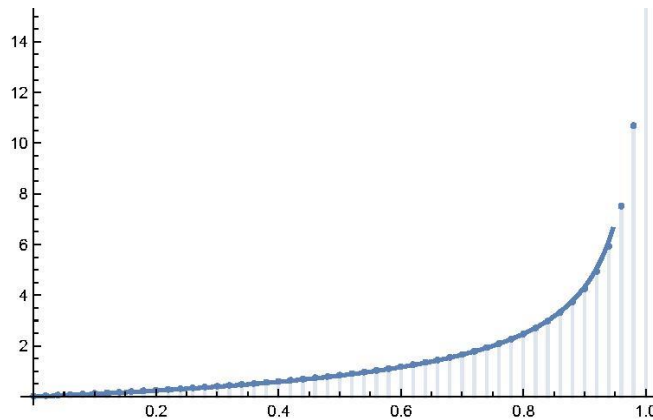
რაც შეეხება კვანტილის ფუნქციას მისი ჩაწერა შესაძლებელია შემდეგი სახით:

$$Q(t) = \frac{\lambda(1-(1-t)^{\frac{1}{a}})}{(1-t)^{\frac{1}{a}}}, \quad (4.5)$$

რადგანაც  $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x+\lambda}\right)^a$ , და  $1 - \left(\frac{\lambda}{x+\lambda}\right)^a = t$ , განტოლების ამონახსნი იქნება (4.5) ტოლობა.



**ნახაზი 29.**  $Q_\alpha^-$ -კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია  $X \sim \text{Pareto}(2,2)$  პარეტოს მაგალითი, როცა  $\alpha = 50$ .

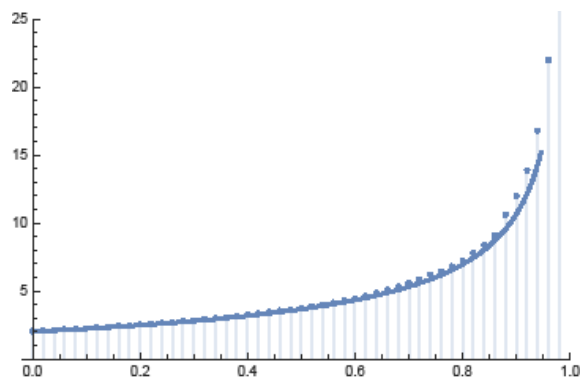


**ნახაზი 30.**  $Q_\alpha^+$ -კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია  $X \sim \text{Pareto}(2,2)$  პარეტოს მაგალითი, როცა  $\alpha = 50$ .

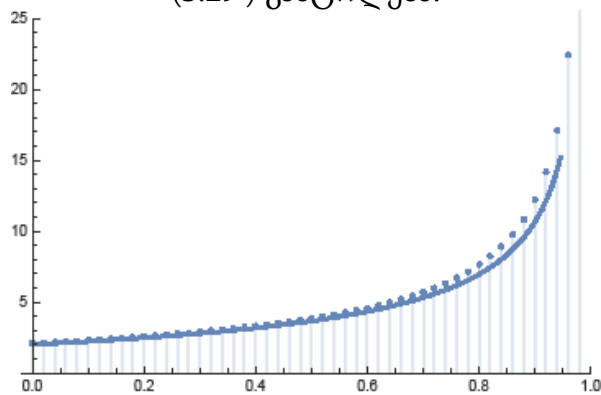


მაგალითი 20

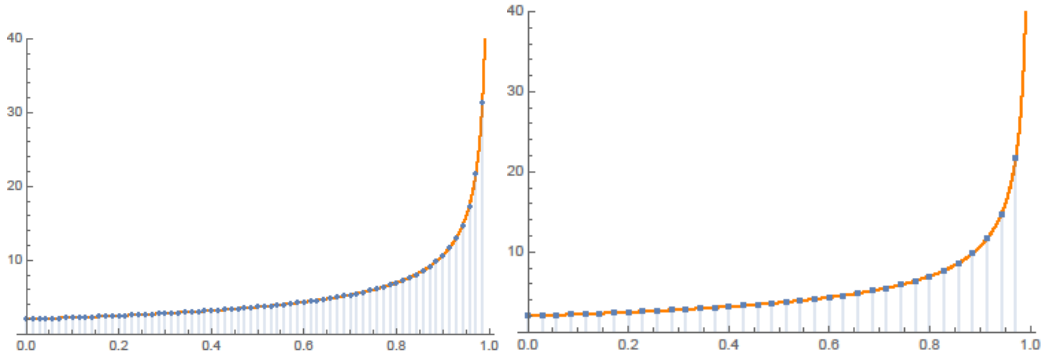
მოსალოდნელი დეფიციტი ES( Expected shortfall)



*ნახაზი 31.* მოსალოდნელი დეფიციტი ES (Expected shortfall),  $\alpha = 50, n = 300$ , იხილეთ (3.29) განტოლება.



*ნახაზი 32.* მოსალოდნელი დეფიციტი ES (Expected shortfall),  $\alpha = 50, n = 300$ , იხილეთ (3.29) განტოლება.



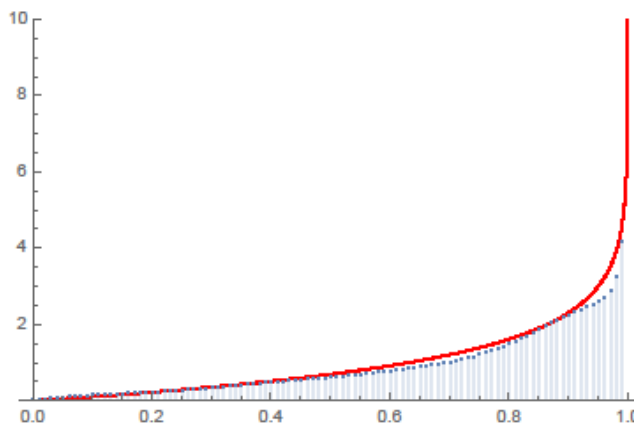
ა)

ბ)

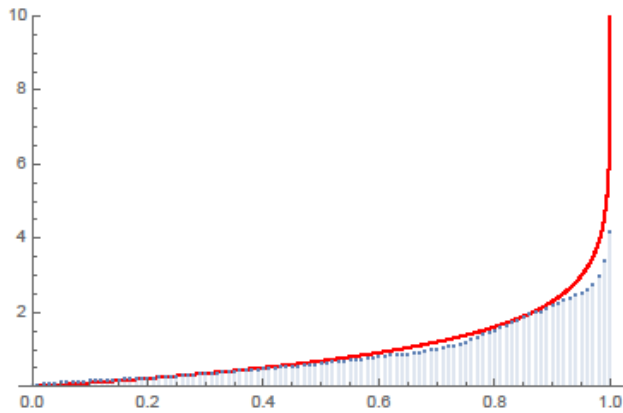
**ნახაზი 33.** ა) თეორიული ES აპროქსიმაციის შედარება  $ES_\alpha$ -სთან როცა  $\alpha = 70$ , ბ)  $\tilde{ES}$ , როცა  $\alpha = 35$ .

როგორც ჩანს მიღებული ანალიზიდან, კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციების აპროქსიმაციისას  $\alpha$  ზრდა გვაძლევს უკეთეს შედეგს. ხოლო შეფასების შემთხვევაში ჩანს დამოკიდებულება  $\alpha$  და  $n$  შორის, თუმცა ეს დამოკიდებულება ბოლომდე შესწავლილი არ არის.

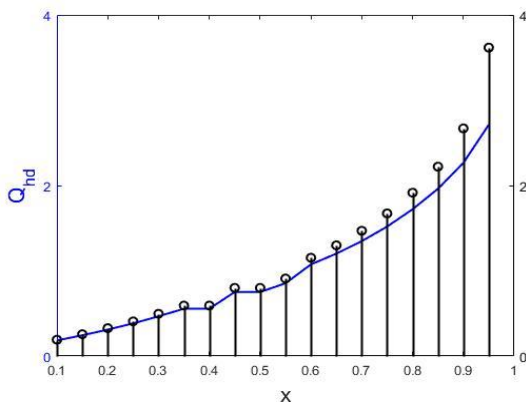
### კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის შედარება ჰარელ-დევისის მოდელთან



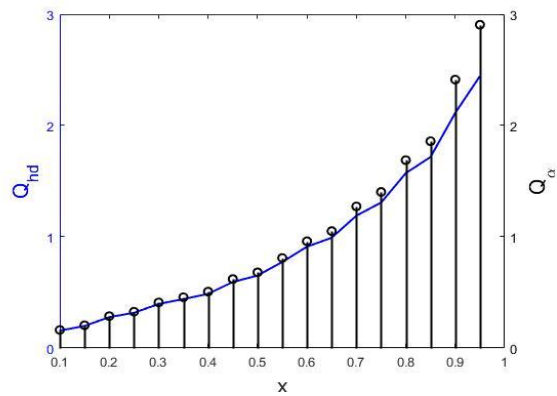
**ნახაზი 34.** წითელი მრუდი თეორიული კვანტილის ფუნქცია ლურჯი წერტილები ჰარელ-დევისის მოდელით კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია,  $n=200$ .



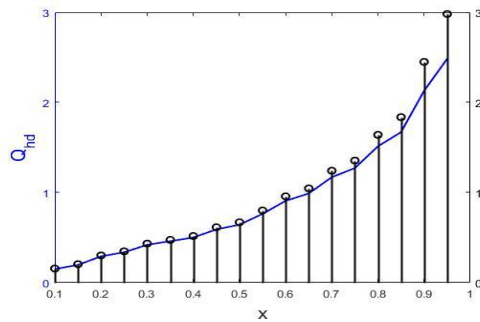
**ნახაზი 35.** წითელი მრუდი თეორიული კვანტილის ფუნქცია ლურჯი წერტილები კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაცია  $\hat{Q}_{\alpha,S}(x)$ ,  $n=200$ .



ა)

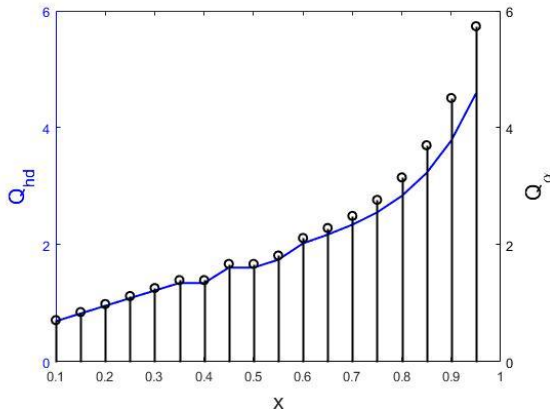


ბ)

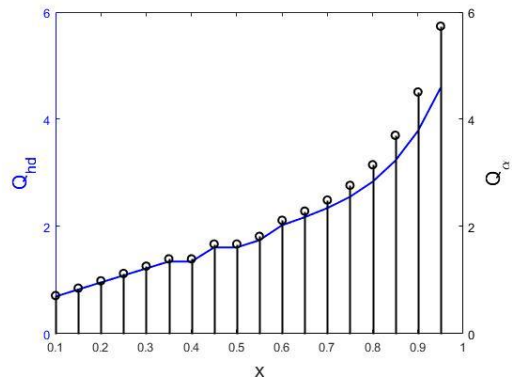


გ)

**ნახაზი 36.** Gamma (1,1) განაწილების ფუნქციის კვანტილის ფუნქციის შეფასება  $\hat{Q}_{\alpha,S}(x)$  მოდელით და ჰარელ-დევისის მოდელთან შედარება ა)  $n=200$ ,  $\alpha =20$ , ბ)  $n=200$ ,  $\alpha =30$  , გ)  $n=500$ ,  $\alpha =30$  .

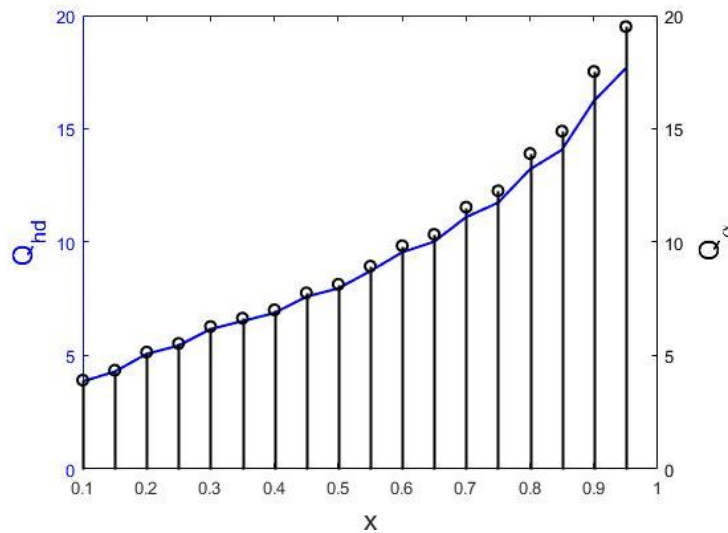


ა)



ბ)

**ნახაზი 37.** Gamma (2,1) განაწილების ფუნქციის კვანტილის ფუნქციის შეფასება  $\hat{Q}_{\alpha,s}(x)$  მოდელით და ჰარელ-დევისის მოდელთან შედარება  
 ა)  $n=100$ ,  $\alpha =20$ , ბ)  $n=100$ ,  $\alpha =30$ .

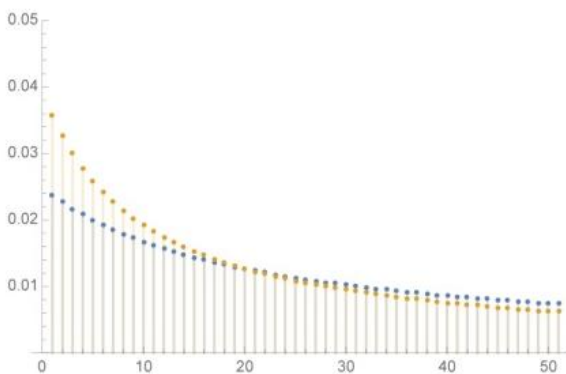


**ნახაზი 38.** Gamma (3,3) განაწილების ფუნქციის კვანტილის ფუნქციის შეფასება  $\hat{Q}_{\alpha,s}(x)$  მოდელით და ჰარელ-დევისის მოდელთან შედარება  $n=300$ ,  $\alpha =30$ .

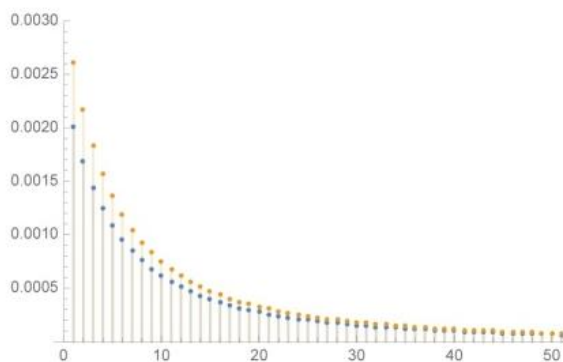
## მაგალითი 21

<p><b>მოდელი I და II, როცა <math>\text{supp}\{F\} = (0, T)</math>, <math>T &lt; \infty</math>:</b></p>
<p><math>Q_\alpha^-(x) = (K_\alpha^{-1} m_F^-)(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m^-(j, F)</math>, სადაც <math>m^-(j, F) = \int_0^1 [F(t)]^j dt</math>.</p> <p>(იხილეთ.1.1-1.3).</p>
<p><math>Q_\alpha(x) = (K_\alpha^{-1} m_F)(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} m(j, F)</math>, სადაც <math>m(j, F) = \int_0^1 t^j dF(t)</math></p> <p>(იხილეთ.1.45-1.47).</p>

განვიხილოთ  $F(x) = x^{\frac{1}{2}}$  ე.ი.  $Q(x) = x^2$ . ნახაზზე 39 წარმოდგენილი შედარება პირველი (ნარინჯისფერი წერტილები) და მეორე (ლუჯი წერტილები) მოდელის. ხოლო ნახაზს 2 ბ) -ზე მოყვანილია კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის მოდიფიცირებული ვერსია:



ა)



ბ)

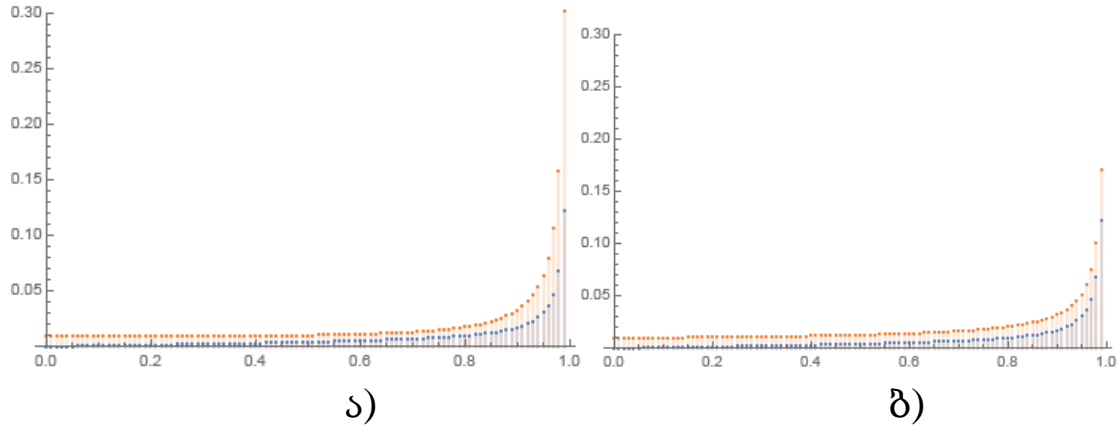
**ნახაზი 39.** კვანტილის ფუნქციის  $Q(x) = x^2$  აპროქსიმაცია.

ა) მაქსიმალური ცდომილების შედარება  $Q_\alpha^-$  კვანტილის ფუნქციის

აპროქსიმაციის (ნარინჯისფერი წერტილები), როცა  $x \in \{\frac{j}{\alpha}, j = 1, 2, \dots, 51.\}$  და

თეორიული კვანტილი - (ლუჯი წერტილები),

ბ) მაქსიმალური ცდომილების შედარება კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის მოდიფიცირებული ვერსია  $\tilde{Q}_\alpha^-$ , თეორიული კვანტილის ფუნქციასთან, ზედა ზღვრით  $\frac{2,25}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}$ .



**ნახაზი 40.** ა)  $es_\alpha$  ცდომილების შედარება  $ES_\alpha$ ,

ბ)  $es_{\alpha,S}$  ცდომილების შედარება  $ES_\alpha$ , როცა  $X \sim Pareto(2,2)$  და  $\alpha = 100$ .

## 4.2 ცხრილები

გამოვთვალოთ  $\hat{Q}_{\alpha,n}^-$  ცდომილება sup-ნორმის პირობებში, რომელიდაც  $n \in (30, 50, 80, 100, 150, 200)$  ყოველი ფიქსირებული  $\alpha \in (20, 25, 27, 32, 35, 40)$  მაგალითისთვის განვიხილოთ მოდელი I, როცა  $X \sim Beta(\frac{1}{2}, 1)$  გამოვთვალოთ საშუალო სხვაობა  $\hat{Q}_{\alpha,n}^-$  და თეორიულს  $Q$  შორის:

$$d_{\alpha,n} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max_{1 \leq j \leq \alpha} \left| \hat{Q}_{\alpha,n}^- \left( \frac{j}{\alpha} \right) - Q \left( \frac{j}{\alpha} \right) \right|_{(r)}, \quad (4.6)$$

სადაც  $\max_{(r)} || \cdot ||$  არის  $\max_{(r)} || \cdot ||$  მნიშვნელობა აღებული (r)-ჯერ სიმულაციების შედეგი N-არის სიმულაციების საერთო რაოდენობა.

ზემოთ აღნიშნულ შემთხვევაში  $N = 100$  ცხრილი 1-დან ჩანს, რომ ფიქსირებული  $\alpha$ , sup-საშუალო გადახრა კლებულობს  $n$  ზრდასთან ერთად და

ოპტიმალური მნიშვნელობა არის  $\alpha = 32$ . ამ შემთხვევაში განხილულია მოდელი I, შემთხვევა (A):

$\alpha$	n=30	n=50	n=80	n=100	n=150	n=200
$\alpha = 20$	0.114598	0.093038	0.078636	0.073276	0.060652	0.057185
$\alpha=25$	0.125014	0.088782	0.076538	0.063731	0.055863	0.049935
$\alpha=27$	0.115505	0.087545	0.074182	0.064114	0.054311	0.053130
$\alpha = 32$	0.114053	0.093895	0.077641	0.067305	0.062066	0.048991
$\alpha=35$	0.1215987	0.086238	0.073245	0.066488	0.059522	0.052396
$\alpha = 40$	0.120899	0.094359	0.078736	0.070749	0.059771	0.051791

**ცხრილი 1:**  $\hat{Q}_{\alpha,n}^-$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის შეფასების sup-საშუალო ცდომილება  $d_{\alpha,n}$ .

ზემოთ მოყვანილი ცხრილის დიაგონალიდან ჩანს რომ როდესაც  $n$  იზრდება, მაშინ ცდომილება კლებულობს. მონაცემები გვაძლევს საშუალებას შევარჩიოთ ოპტიმალური  $\alpha$  მნიშვნელობები, მაგალითად  $\alpha \in \{32,35,35,25,27,32\}$ , როცა  $n \in \{30,50,80,100,150,200\}$ .

$d_{\alpha,n}$  არის საშუალო sup -ნორმის ცდომილება, ხოლო  $d_{\alpha,n}^{(2)}$  საშუალო  $L_2$  -ნორმის ცდომილება, რომელიც  $g$  ფუნქციისთვის რომლისთვისაც შეიძლება შევარჩიოთ, როგორც  $Q$  ასევე  $q$ .

$$d_{\alpha,n}^{(2)} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \left( \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{\alpha} \left| \hat{g}_{\alpha}^{(r)} \left( \frac{j}{\alpha} \right) - g \left( \frac{j}{\alpha} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.7)$$

ამ შემთხვევაში (ცხრილი 2 ) გვაქვს ალბულო  $Beta(\frac{1}{2},1)$  განაწილება ყოველი  $\alpha \in (20,25,27,32,35,40)$  და  $n \in (30,50,80,100,150,200)$  ხოლო  $N = 100$  არის სიმულაციების რაოდენობა. ამ შემთხვევაში გვაქვს მოდელი I, შემთხვევა (B):

$\alpha \backslash n$	n=30	Nn=50	Nn=80	Nn=100	Nn=150	Nn=200
$\alpha = 20$	0.117183	0.0926284	0.0813783	0.0686702	0.0564375	0.0540543
$\alpha = 25$	0.118216	0.0965993	0.0704848	0.0620735	0.0564775	0.0484887
$\alpha = 27$	0.112326	0.0980536	0.0753036	0.0699084	0.0594046	0.0535075
$\alpha = 32$	0.122392	0.0871647	0.0769663	0.0685027	0.0537052	0.0489044
$\alpha = 35$	0.116864	0.0873369	0.0735198	0.0713555	0.0572845	0.0503919
$\alpha = 40$	0.129239	0.0982514	0.0763146	0.0662617	0.0575136	0.0516567

**ცხრილი 2:**  $\hat{Q}_{\alpha, \hat{s}_n}$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის შეფასების sup-საშუალო

$$\text{ცდომილება } d_{\alpha, n}. \text{ სადაც } X \sim Beta\left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

მონაცემები გვაძლევს საშუალებას შევარჩიოთ ოპტიმალური  $\alpha$  მნიშვნელობები, მაგალითად  $\alpha \in \{27, 32, 25, 25, 32, 25\}$ , როცა  $n \in \{30, 50, 80, 100, 150, 200\}$ .

**ცხრილი 3** შემთხვევაში ვიღებთ  $X \sim Exp(1)$  განაწილება ყოველი  $\alpha \in (20, 25, 27, 32, 35, 40)$  და  $n \in (30, 50, 80, 100, 150, 200)$  ხოლო  $N = 100$  არის სიმულაციების რაოდენობა. ამ შემთხვევაში განვიხილოთ მოდელი I, შემთხვევა (B): შესაბამისი შეფასება  $Q_{\alpha, \hat{s}_n}$  და მოყვანილია კვანტილის ფუნქციის შეფასების საშუალო ცდომილება  $d_{\alpha, n}^{(2)}$ .



$\alpha/n$	n=500	N n =800	N n =1000	N n =1500
$\alpha = 18$	0.146019	0.136024	0.116072	0.098003
$\alpha = 20$	0.145407	0.126567	0.110721	0.103853
$\alpha = 23$	0.153186	0.121576	0.113600	0.094919
$\alpha = 25$	0.155578	0.138228	0.116751	0.104284
$\alpha = 27$	0.157890	0.138642	0.115316	0.102614
$\alpha = 30$	0.178616	0.141714	0.110185	0.107214
$\alpha = 32$	0.173047	0.142434	0.131508	0.113178
$\alpha = 35$	0.179566	0.143279	0.120869	0.116382

ცხრილი 3:  $Q_{\alpha, \hat{s}_n}$  კვანტილის ფუნქციის შეფასების საშუალო ცდომილებების მნიშვნელობები  $d_{\alpha, n}^{(2)}$ .

მონაცემები გვაძლევს საშუალებას შევარჩოთ ოპტიმალური  $\alpha$  მნიშვნელობები, მაგალითად  $\alpha \in \{20, 23, 30, 23\}$ , როცა  $n \in \{500, 800, 1000, 1500\}$ .

ცხრილებში 4 და 5 განხილულია ორი განაწილების შემთხვევა, როცა  $X \sim \text{Beta}(\frac{1}{2}, 1)$  და

$X \sim \text{Exp}(1)$  განაწილება ყოველი  $\alpha \in (20, 40, 60, 80, 100, 120)$  და  $n \in (100, 300, 600, 1000)$  ამ შემთხვევაში ვიხილავთ მესამე მოდელს:

$$d_{\alpha, n} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \max_{1 \leq j \leq \lceil \alpha(1-\delta) \rceil} \left| \hat{Q}_{\alpha, n}^{(r)}\left(\frac{j}{\alpha}\right) - Q\left(\frac{j}{\alpha}\right) \right|. \quad (4.9)$$

	$d_{\alpha, n}$					
$\alpha/n$	$\alpha = 20$	$\alpha = 40$	$\alpha = 60$	$\alpha = 80$	$\alpha = 100$	$\alpha = 120$
n=100	0.0962547	0.0916660	0.0874313	0.0905589	0.119838	0.145500

n=300	0.0769729	0.0552744	0.0496481	0.0506326	0.0521042	0.0485487
n=600	0.0739440	0.0477722	0.0415074	0.0328432	0.0357198	0.0345494
n=1000	0.0714150	0.0458237	0.0342856	0.0301669	0.0298474	0.0281450

ცხრილი 4:  $\hat{Q}_{\alpha,n}^+$  კვანტილის ფუნქციის შეფასების საშუალო ცდომილება  $d_{\alpha,n}$ , როცა

$$X \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ და } \delta = 0.$$

მონაცემები საშუალებას გვაძლევს შევარჩიოთ ოპტიმალური  $\alpha$  მნიშვნელობები, მაგალითად  $\alpha \in \{60, 60, 80, 120\}$ , როცა  $n \in \{100, 300, 600, 1000\}$ .

	$d_{\alpha,n}$					
$\alpha/n$	$\alpha = 20$	$\alpha = 40$	$\alpha = 60$	$\alpha = 80$	$\alpha = 100$	$\alpha = 120$
n=100	0.162267	0.174211	0.186656	0.188134	0.181125	0.207305
n=300	0.100038	0.111704	0.0988033	0.109227	0.106078	0.114819
n=600	0.0930935	0.0740184	0.0787526	0.0688771	0.0755520	0.0794764
n=1000	0.0757144	0.0645206	0.0610075	0.0593421	0.0559969	0.0684779

ცხრილი 5:  $\hat{Q}_{\alpha,n}^+$  კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის შეფასების საშუალო ცდომილება

$$d_{\alpha,n}, \text{ როცა } X \sim \text{Exp}(1) \text{ და } \delta = \frac{1}{5}.$$

მონაცემები გვაძლევს საშუალებას შევარჩიოთ ოპტიმალური  $\alpha$  მნიშვნელობები, მაგალითად  $\alpha \in \{20, 60, 80, 100\}$ , როცა  $n \in \{100, 300, 600, 1000\}$ .

$\alpha / n$	$d_{\alpha,n}$		
	n=500	n=800	n=1000
$\alpha = 18$	0.146019	0.136024	0.116072
$\alpha = 20$	0.145407	0.126567	0.110721
$\alpha = 23$	0.153186	0.121576	0.113600
$\alpha = 25$	0.155578	0.138228	0.116751
$\alpha = 27$	0.157890	0.138642	0.115316
$\alpha = 30$	0.178616	0.141714	0.110185
$\alpha = 32$	0.173047	0.142434	0.131508
$\alpha = 35$	0.179566	0.143279	0.120869

ცხრილი 6:  $d_{\alpha,n}$  საშუალო ცდომილება  $\hat{q}_{\alpha,n}$ -სთვის, სიმულაციები აგებულია  $X \sim Exp(1)$ .

როგორც კვლევის შედეგებიდან ჩანს ცხრილ 6-ში მოყვანილი მონაცემები გვაძლევს საშუალებას შევარჩიოთ ოპტიმალური  $\alpha$  მნიშვნელობები, მაგალითად  $\alpha \in \{20, 23, 30\}$ , როცა  $n \in \{500, 800, 1000\}$ . აგრეთვე აღვნიშნოთ, რომ მოყვანილი

ცხრილებიდან ჩანს, რომ  $\frac{\alpha(n)}{n} \rightarrow 0$ , როცა  $n \rightarrow \infty$ .

### 4.3 მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალების გამოთვლა და კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციისთვის გამოყენება

მოცემულ თავში განვიხილავთ ეგრეთ წოდებულ ინტერვენტ დროის ინტერვალებს მიწისძვრებს შორის. გამოყენებულია მოლოდინის დრო (waiting time) კატალოგიდან.

მონაცემები აღებულია სამხრეთ კალიფორნიის ლიკალური მიწისძვრების კატალოგიდან, (<http://www.data.scec.org/ftp/catalogs/>) დროის შუალედი არის 1932 წლიდან 2013-მდე.

აგრეთვე ჩვენ გვინდა გავაკეთოთ შედარება, რისთვისაც ვიყენებთ სხვადასხვა რეგიონების მიწისძვრების კატალოგებს: სასომხეთი, კავკასია, საბერძნეთი და ყირგიზეთი.

საბერძნეთის, კალიფორნიის და ყირგიზეთის კატალოგი იყო ხელმისაწვდომი ინტერნეტში, კავკასიის კატალოგი იყო მიღებული მ.ნოდის სახელობის გეოფიზიკის ინსტიტუტის და ილიას უნივერსიტეტის ბაზაზე, ხოლო სასომხეთის კატალოგი იყო გამოყენებული იგივე სტილის რაც იყო გამოყენებული სტატიაში (Gevorgyan [14]).

ჩვენ ხელთ არსებული კატალოგი გამოიყურება შემდეგნაირად :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	LONG	LAT	Year	Month	Day	MAG	DEPTH	Hour	Min
2	-115.571	32.552	1975	1	9	2.98	15.7	20	13
3	-115.51	32.673	1975	1	10	2.97	6	20	9
4	-115.234	32.431	1975	1	20	2.78	6	9	25
5	-115.191	32.27	1975	1	27	2.87	6	3	29
6	-115.174	32.454	1975	1	29	2.75	6	2	54
7	-115.476	32.188	1975	2	23	4.26	6	19	7
8	-115.519	32.215	1975	2	27	2.73	6	10	43
9	-115.078	32.219	1975	3	14	2.79	6	14	36
10	-115.037	32.43	1975	3	14	2.78	6	14	58
11	-115.104	32.283	1975	3	14	2.83	6	15	17
12	-115.129	32.318	1975	3	14	2.84	6	15	56
13	-115.103	32.332	1975	3	14	2.86	6	16	5
14	-115.149	32.322	1975	3	14	2.96	6	16	9
15	-115.101	32.343	1975	3	14	2.74	6	16	14
16	-115.232	32.513	1975	3	15	2.86	6	11	46
17	-115.257	32.516	1975	3	16	2.68	6	0	55
18	-115.266	32.455	1975	3	16	2.82	6	3	44
19	-115.086	32.331	1975	3	26	2.75	6	15	56
20	-115.722	32.493	1975	4	5	2.6	3.6	12	29
21	-115.738	32.504	1975	4	6	2.74	5.5	15	48
22	-115.748	32.476	1975	4	6	2.94	1.2	16	59
23	-115.059	32.16	1975	4	28	2.77	6	2	25
24	-114.877	32.28	1975	4	28	2.88	6	2	32
25	-114.845	32.19	1975	4	28	3.07	6	2	49
26	-114.844	32.196	1975	4	28	2.98	6	9	53
27	-114.88	32.311	1975	4	28	2.8	6	10	1
28	-115.048	32.183	1975	6	2	3	6	10	57
29	-115.144	32.407	1975	6	14	2.9	6	20	57
30	-115.521	32.16	1975	8	19	2.66	6	19	40
31	-115.494	32.186	1975	8	19	2.89	13.7	21	52
32	-115.103	32.298	1975	8	20	2.64	6	5	3
33	-115.753	32.202	1975	8	21	2.67	6	22	48
34	-115.493	32.193	1975	8	24	2.91	6	0	0
35	-115.35	32.227	1975	8	27	3.12	6	22	37
36	-115.521	32.172	1975	8	28	3.26	6	10	45
37	-115.531	32.226	1975	9	2	2.89	13.8	4	1
38	-115.531	32.128	1975	9	2	2.77	5.5	6	31

ნახაზი 41. სამუშაო კატალოგის მაგალითი

ამის შემდეგ ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მ.ნოდის სახელობის გეოფიზიკის ინსტიტუტის ბაზაზე შექმნილი სპეციალური პროგრამის მეშვეობით ვახდენთ ამ კატალოგიდან მიწისძვრებს შორის მოლოდინის დროის ამოღებას. ამოღების შემდგომ მიღებულ ფაილს აქვს შემდეგი სახე:

სტრუქტურული მონაცემების ბაზაში  
 ინსტიტუტის სახელმწიფო უნივერსიტეტის  
 გეოფიზიკის ინსტიტუტის  
 მ.ნოდის სახელობის  
 სამუშაო კატალოგის  
 მაგალითი

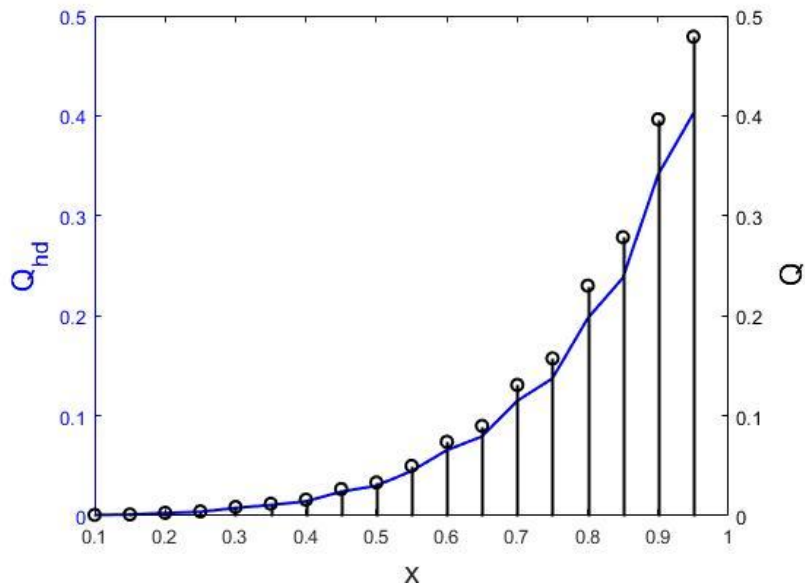
ნახაზი 42. პროგრამაში გატარებული და მიღებული waiting time

კვლევის შემდეგი ბიჯი არის ამ მონაცემებზე დაყრნობით კვანტილის ფუნქციის შეფასების გაკეთება პირველი მოდელისთვის და და მისი შედარება ცნობილ ჰარელ დევისის შეფასებასთან.. ამისთვის ვიყენებთ შემდეგ ფორმულებს:

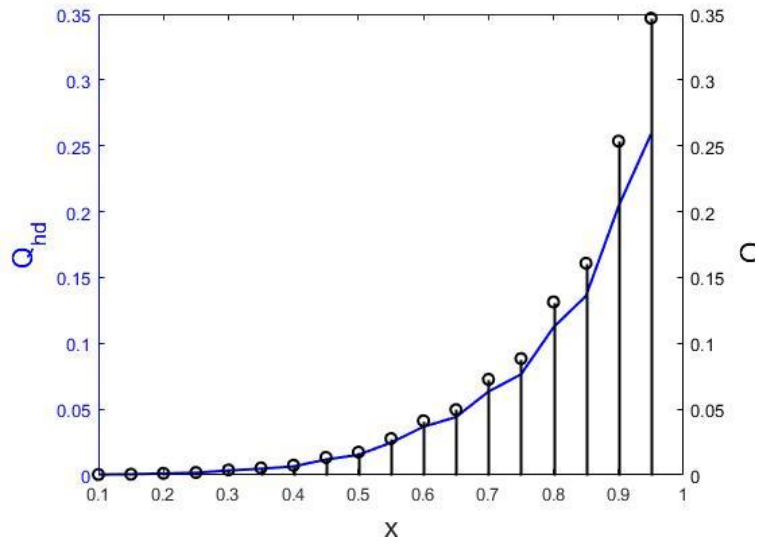
$$\hat{Q}_{HD}(x) = \sum_{i=1}^n X_{(i)} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \beta(y, \lfloor \alpha x \rfloor + 1, \alpha - \lfloor \alpha x \rfloor + 1) dy,$$

$$Q_{\alpha, \delta}^-(x) = \sum_{k=\alpha - \lfloor \alpha x \rfloor}^{\alpha} \sum_{j=k}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \sum_{i=1}^n \Delta X_{(i)} \left(\frac{n-i+1}{n}\right)^j$$

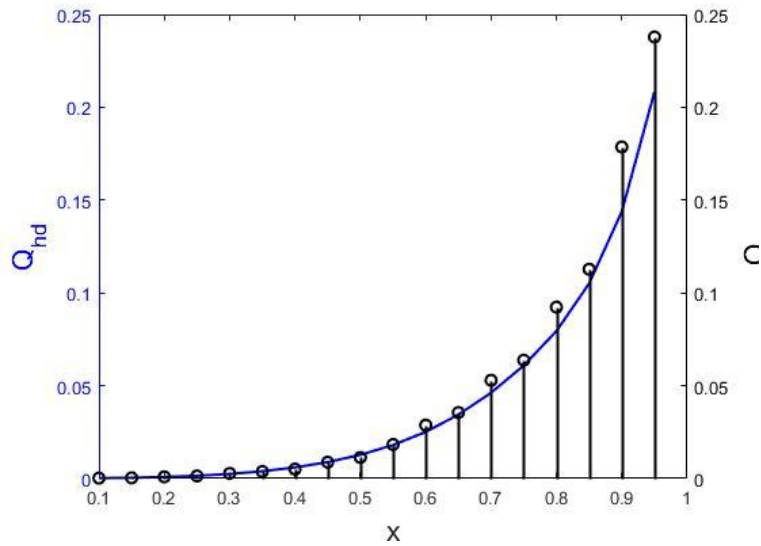
სხვა და სხვა პარამეტრებისთვის შედარების ყოფაქცევა იქნება შემდეგი სახის:



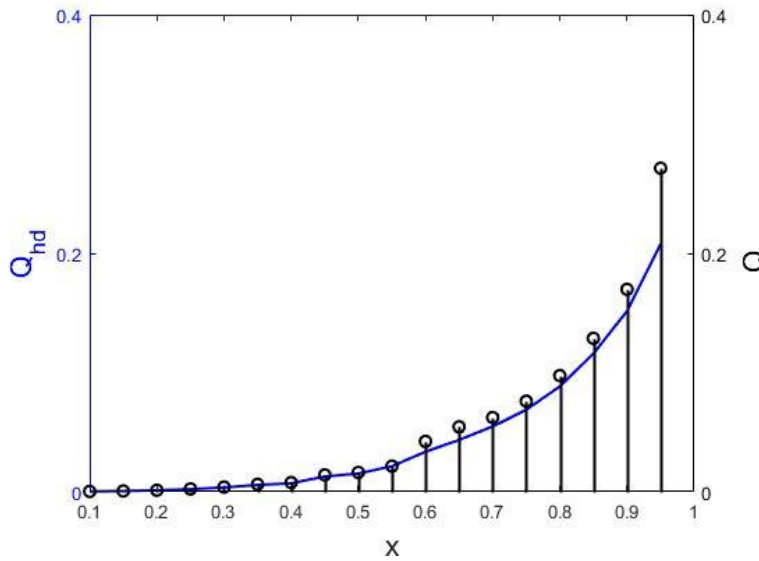
**ნახაზი 43:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალისთვის ლურჯი მრუდი, შავი წერტილები კვანტილის ფუნქციის შეფასება, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 30$  და  $N = 100$ . სამხრეთ კალიფორნიის კატალოგი.



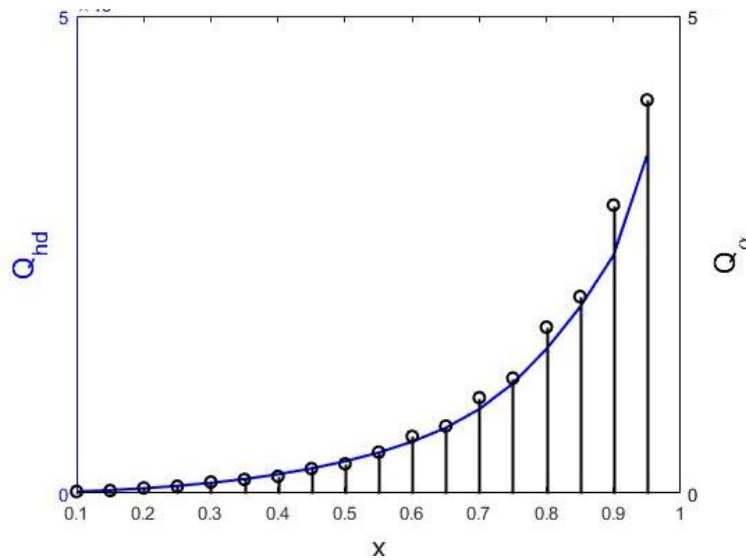
**ნახაზი 44:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, შავი წერტილები კვანტილის ფუნქციის შეფასება, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 30$  და  $N = 200$ . სამხრეთ კალიფორნიის კატალოგი.



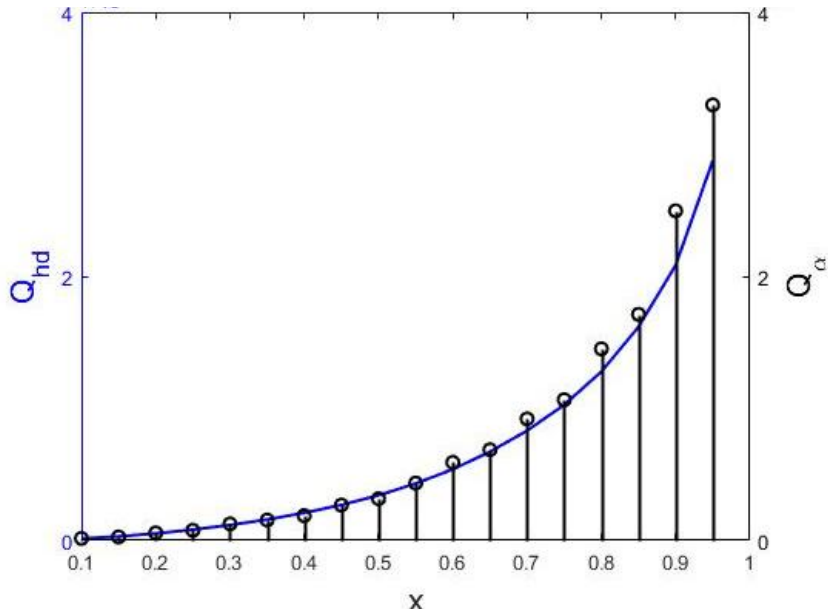
**ნახაზი 45:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, შავი წერტილები კვანტილის ფუნქციის შეფასება, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 30$  და  $N = 500$ . სამხრეთ კალიფორნიის კატალოგი.



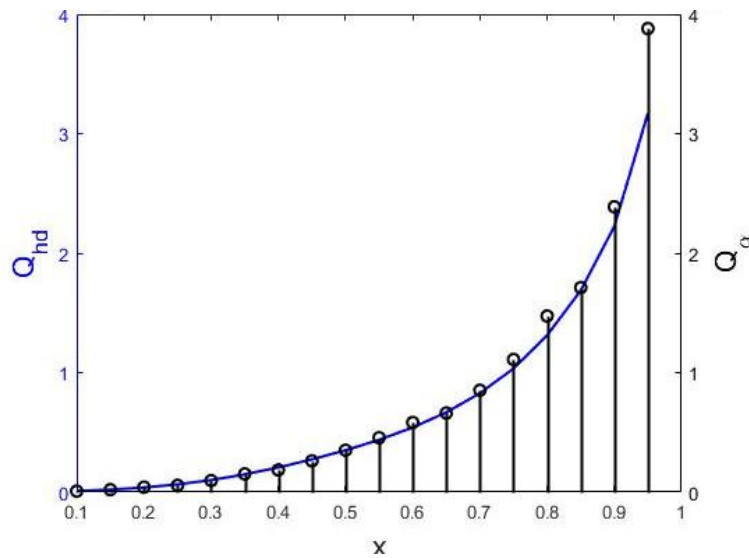
**ნახაზი 46:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, შავი წერტილები კვანტილის ფუნქციის შეფასება, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 40$  და  $N = 200$ . სამხრეთ კალიფორნიის კატალოგი.



**ნახაზი 47:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, შავი წერტილები კვანტილის ფუნქციის შეფასება, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 30$  და  $N = 100$ . სასომხეთის მიწისძვრების კატალოგი.

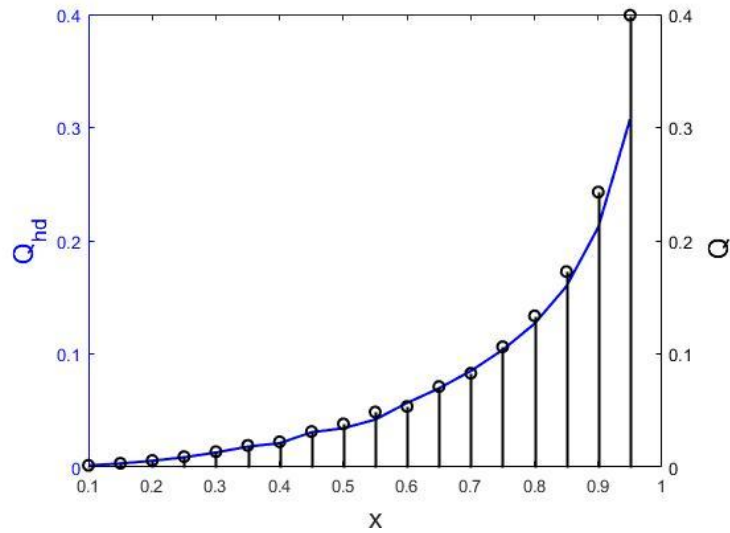


**ნახაზი 48:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, შავი წერტილები კვანტილის ფუნქციის შეფასება, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 30$  და  $N = 200$ . სასომხეთის მიწისძვრების კატალოგი.

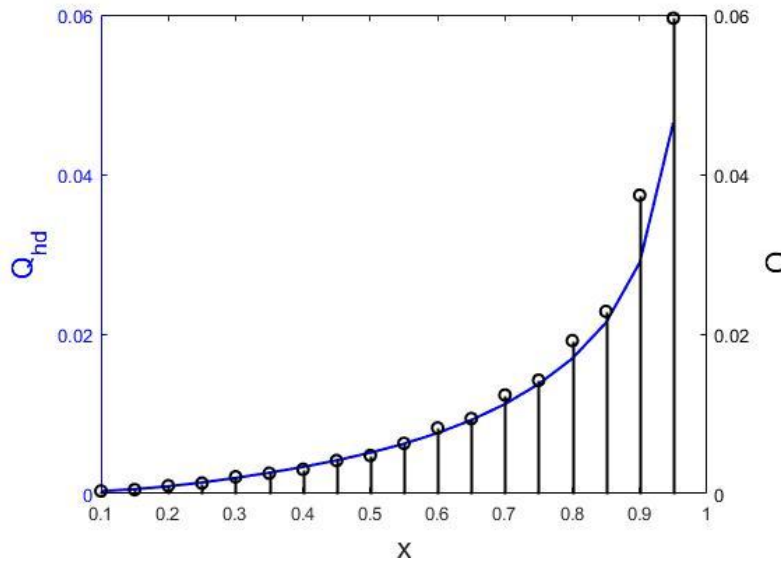


**ნახაზი 49:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, შავი წერტილები კვანტილის ფუნქციის შეფასება, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 35$  და  $N = 500$ . სასომხეთის მიწისძვრების კატალოგი.

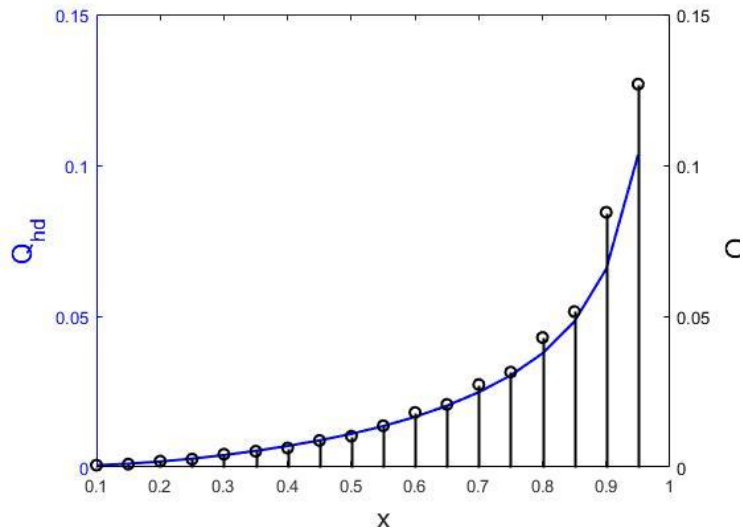




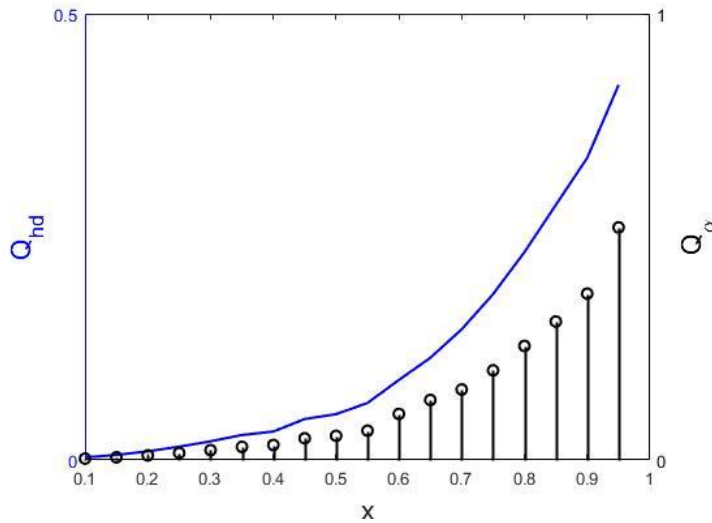
**ნახაზი 50:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, შავი წერტილები კვანტილის ფუნქციის შეფასება, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 40$  და  $N = 200$ . სასომხეთის მიწისძვრების კატალოგი.



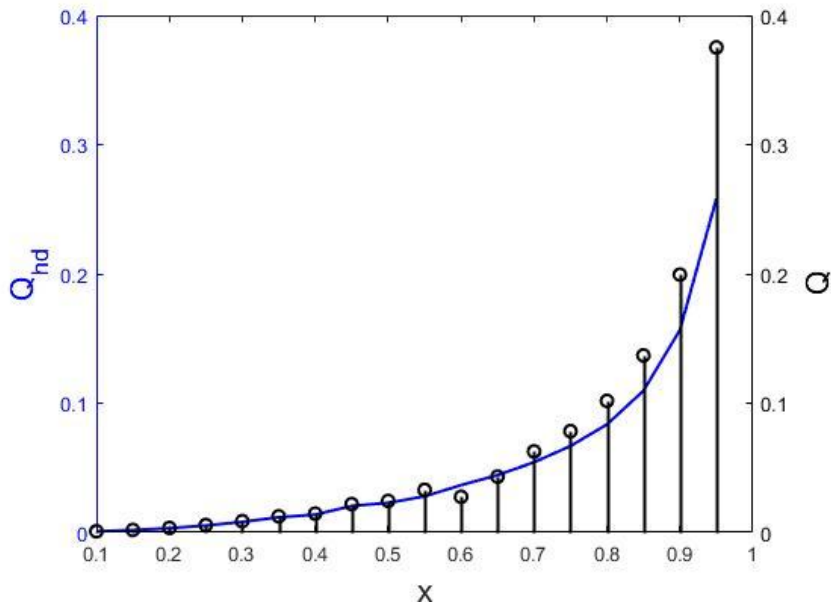
**ნახაზი 51 :** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, შავი წერტილები კვანტილის ფუნქციის შეფასება, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 30$  და  $N = 500$ . კავკასიის მიწისძვრების კატალოგი.



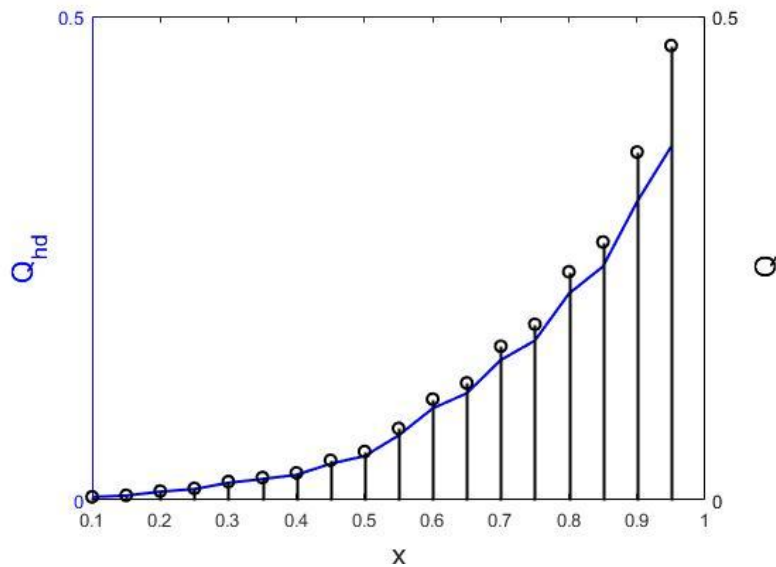
**ნახაზი 52 :** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, კვანტილის ფუნქციის შეფასება შავი წერტილები, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 30$  და  $N = 1000$ . კავკასიის მიწისძვრების კატალოგი.



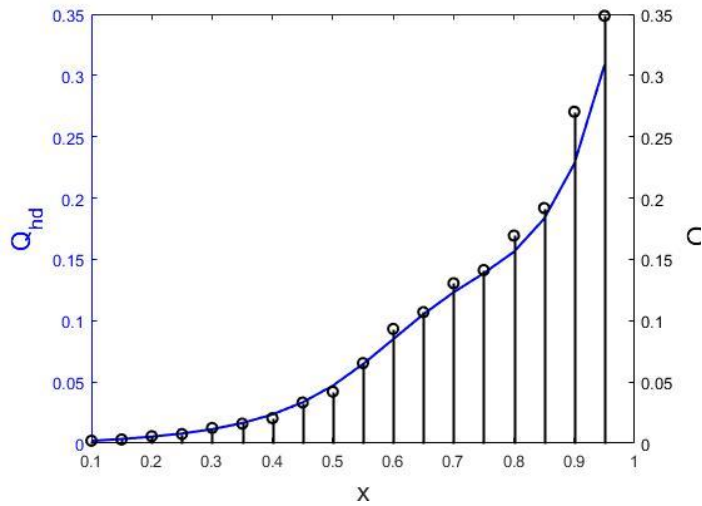
**ნახაზი 53 :** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, კვანტილის ფუნქციის შეფასება შავი წერტილები, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 40$  და  $N = 100$ . კავკასიის მიწისძვრების კატალოგი.



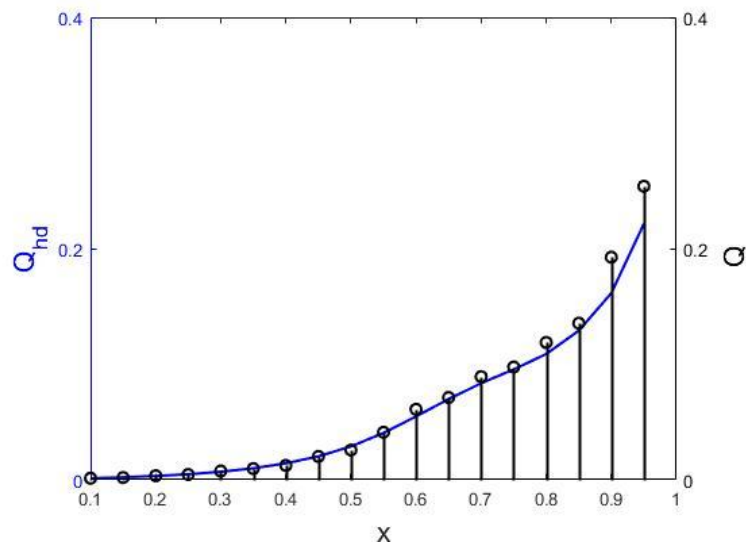
**ნახაზი 54:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, კვანტილის ფუნქციის შეფასება შავი წერტილები, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 40$  და  $N = 200$ . კავკასიის მიწისძვრების კატალოგი.



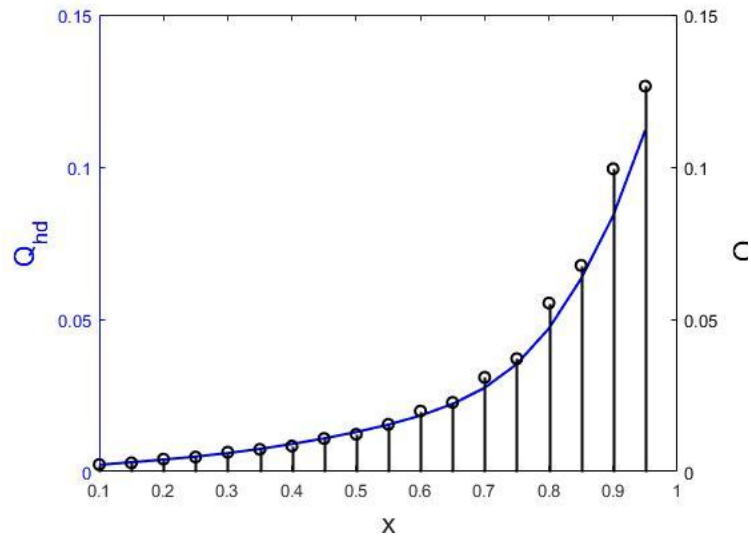
**ნახაზი 55:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, კვანტილის ფუნქციის შეფასება შავი წერტილები, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 30$  და  $N = 100$ . საბერძნეთის მიწისძვრების კატალოგი.



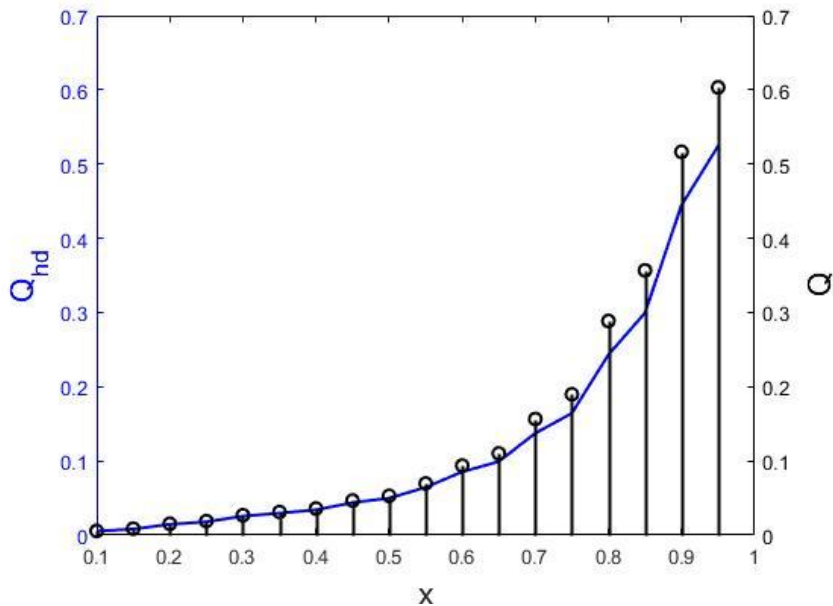
**ნახაზი 56:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, კვანტილის ფუნქციის შეფასება შავი წერტილები, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 30$  და  $N = 500$ . საბერძნეთის მიწისძვრების კატალოგი.



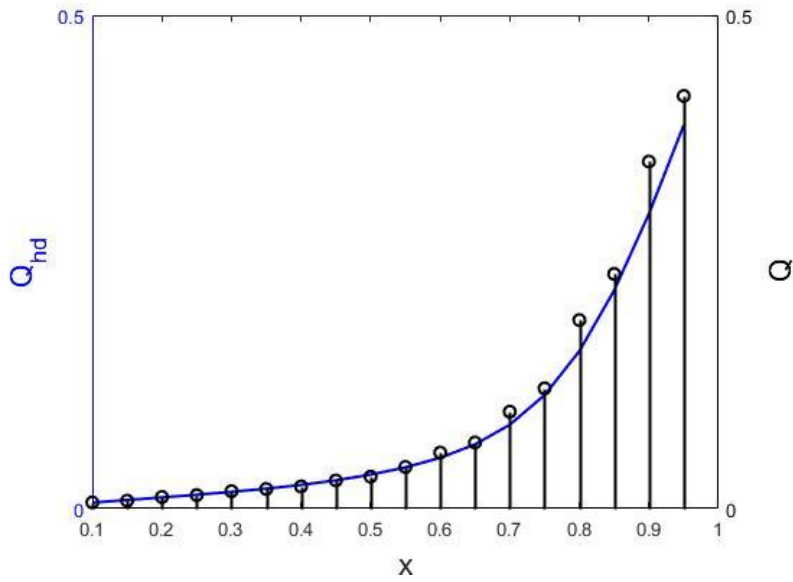
**ნახაზი 57:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, კვანტილის ფუნქციის შეფასება შავი წერტილები, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 30$  და  $N = 1000$ . საბერძნეთის მიწისძვრების კატალოგი.



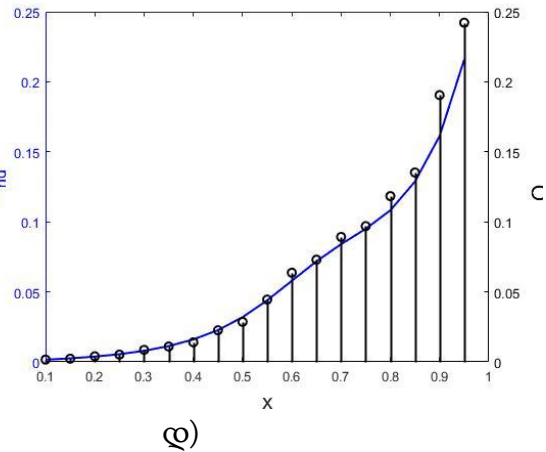
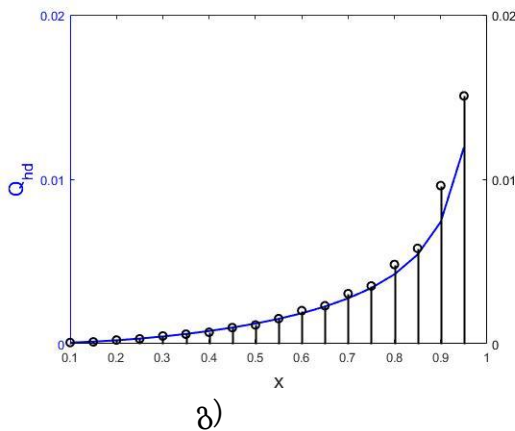
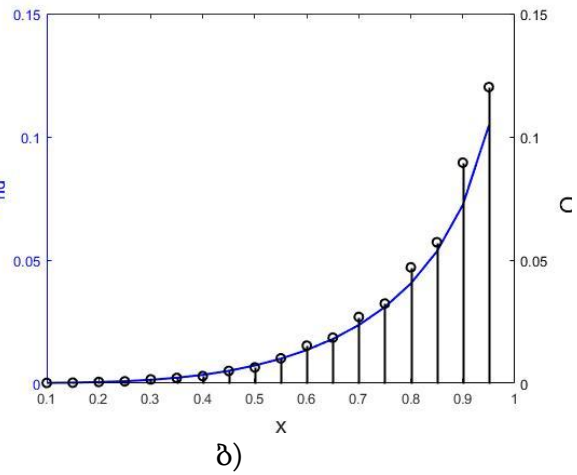
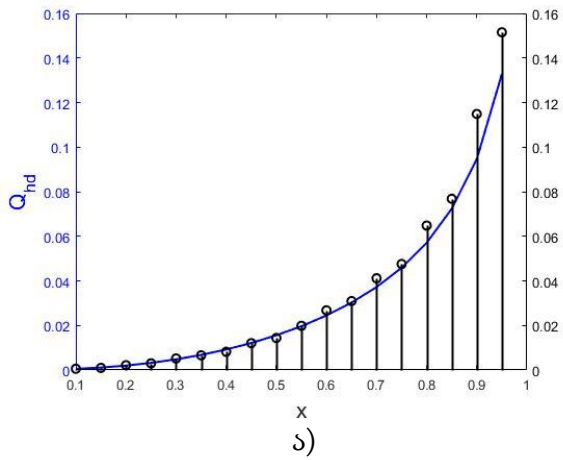
**ნახაზი 58:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, კვანტილის ფუნქციის შეფასება შავი წერტილები, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 30$  და  $N = 300$ . ყირგიზეთის მიწისძვრების კატალოგი.

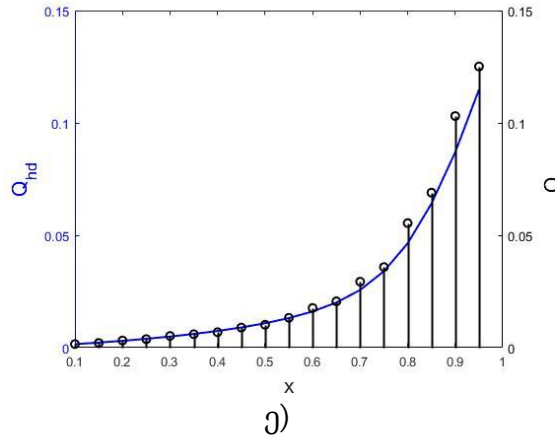


**ნახაზი 59:** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, კვანტილის ფუნქციის შეფასება შავი წერტილები, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 30$  და  $N = 200$ . ყირგიზეთის მიწისძვრების კატალოგი.



**ნახაზი 60 :** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, კვანტილის ფუნქციის შეფასება შავი წერტილები, ორივე შემთხვევაში  $\alpha = 30$  და  $N = 700$ . ყირგოზეთის მიწისძვრების კატალოგი.





**ნახაზი 61 :** ჰარელ დევისის შეფასება მიწისძვრებს შორის დროის ინტერვალებისთვის ლურჯი მრუდი, კვანტილის ფუნქციის შეფასება შავი წერტილები, ა) სასომხეთის კატალოგი, ბ) კალიფორნიის კატალოგი, გ) კავკასიის კატალოგი, დ) საბერძნეთის კატალოგი, ე) ყირგიზეთის კატალოგი ყველა შემთხვევაში გვაქვს აღებული მასივის მთელი სიგრძე და  $\alpha = 30$ .

ჩატარებული ანალიზიდან ჩანს რომ, სხვადასხვა რეგიონებისთვის გვაქვს ერთნაირი სტილის გრაფიკული გამოსახულებები, განსხვავება არის მხოლოდ  $\alpha$  და  $N$  პარამეტრების შერჩევაში. ამ პარამეტრების ზრდა გვამღევეს უფრო ზუსტ შედეგს.

## დასკვნა

განაწილების ფუნქციის აღდგენა მისი მომენტების საშუალებით წარმოადგენს მომენტთა პრობლემის ერთ-ერთ ნაწილს. მოცემულ ნაშრომში დასმულია ანალოგიური საკითხი და შესწავლილია კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აღდგენა, იმ შემთხვევაში როცა ცნობილია განაწილების ფუნქციის მომენტების მნიშვნელობები ან და ლაპლასის გარდექმნა. ეს მიდგომა განსხვავდება უკვე ცნობილი  $Q$  და  $q$  ბირთვის ტიპის შეფასებებისგან.

ნაშრომში მოყვანილია სამი მოდელი კვანტილის ფუნქციის აპროქსიმაციის, ჩვეულებრივი, ტრანსპონირებული და სიხშირული იმ შემთხვევაში როდესაც ცნობილია მომენტები. ამასთან, მოდელები დაყოფილია ორ შემთხვევადად, იმის და მიხედვით თუ როგორია განაწილების ფუნქციის მზიდი, სასრულია ის თუ

უსასრულო. იგივე პროცედურები იყო გამოყენებული კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციისთვისაც.

მოცემული ნაშრომის პირველ ორ თავში განხილული იყო კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციის მოდიფიცირებული ვერსიებიც. ნაშრომში მოყვანილია გრაფიკული გამოსახულებებიდან ჩანს, რომ მოდიფიცირებული ვერსიას აქვს უფრო კარგი აპროქსიმაცია ჩვეულებრივ მოდელთან შედარებით. დამტკიცებული იყო ძალდებულობის თეორემები. რომლებიც გვაძლევს კრებადობის სიჩქარეს. ასევე შემოყვანილი იყო აპროქსიმაციის მოდიფიცირებული ვერსიებიც, რომელთა ქცევაც ორიგინალურ მოდელებთან შედარებით არის უკეთესი..

ნაშრომის მე-3 თავში ერთ-ერთი განსახილველი თემა აგრეთვე არის ნაშრომში შემოღებული მიდგომის გამოყენება სხვადასხვა სფეროში, მაგალითად მოყვანილია ეკონომიკაში გამოყენებადი ორი პროცესი ლორენცის მრუდი და ES (Expected Shortfall) მოდელები. ერთ-ერთი საინტერესო და მნიშვნელოვანი საკითხი, რომელსაც ნაშრომი განიხილავს არის მარჯვენა ცენზურირების პირობებში კვანტილის და კვანტილის სიმკვრივის ფუნქციის აპროქსიმაციას და შეფასებას. კვლევამ აჩვენა, რომ აპროქსიმაცია მით უფრო ზუსტი ხდება რაც უფრო იზრდება  $\alpha$  და  $n$ .

დღესდღეობით ბოლომდე შესწავლილი არ არის თუ რა სიჩქარით იზრდება  $\alpha$  და  $n$ , მაგრამ დანამდვილებით ცნობილია, რომ  $\frac{\alpha}{n} \rightarrow 0$ , როცა  $\alpha, n \rightarrow \infty$ . აგრეთვე

აღსანიშნავია მიდგომის გამოყენება სეისმოლოგიური მონაცემებისთვის. ნაშრომში სხვადასხვა რეგიონების მიწისძვრების კატალოგიდან მონაცემების საფუძველზე დათვლილი იყო მიწისძვრებს შორის დროის შუალედები და მიღებულ მოლოდინის დრო-ზე დაყრნობით შეიქმნა მასივები და მოერგო ნაშრომში შემოთავაზებული მიდგომები, შედარდა ცნობილ ჰარელ--დევისის მოდელთან.

- მიღებული შედეგების უპირატესობა სხვა მოდელებთან შედარების საშუალებას აძლევს მის ეფექტიან გამოყენებას სხვადასხვა დარგში (ეკონომიკა, დაზღვევა, მედიცინა და ა.შ.), (Mnatsakanov, Sborshchikovi [13], Mnatsakanov, Sborshchikovi



[19], Fadahunsi, Mnatsakanov [28]) რადგანაც მას აქვს როგი უპირატესობა სხვა ცნობილ მოდელებთან.

## გამოყენებული ლიტერატურა

- [1] F.E. Harrell, C.E. Davis, *A new distribution-free quantile estimator*, *Biometrika* 69 (1982) 635–640.
- [2] S.J. Sheather, J.S. Marron, *Kernel quantile estimators*, *J. Amer. Statist. Assoc.* 85 (1990) 410–416.
- [3] J.W.H. Swanepoel, F.C. van Graan, *A New Kernel Distribution Function Estimator Based on a Nonparametric Transformation of the Data*, *Scand. J. Statist.* 32 (2005) 551–562.
- [4] C. Bolance, M. Guillen, J. Nielsen, *Transformation kernel estimation of insurance claim cost distributions*, in: M. Corazza, et al. (Eds.), *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*, Springer-Verlag, Italy (2010) 43–51.
- [5] K.R.W. Brewer, *Likelihood Based Estimation of Quantiles and Density Estimation*, (1986) (unpublished manuscript).
- [6] C. Cheng, E. Parzen, *Unified estimators of smooth quantile and quantile density functions*, *J. Statist. Plann. Inference* 59 (1997) 291–307.
- [7] E. A. Nadaraya, *Some New Estimates of Distribution Functions*, *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 9:3 (1964) 550–554; *Theory Probab. Appl.*, 9:3 (1964) 497–500.
- [8] J.S. Maritz, R.G. Jarrett, *A note on estimating the variance of the sample median*. *J. Am. Statist. Assoc.* 73 (1982) 194–196.
- [9] A. Tagliani, *Hausdorff moment problem and fractional moments: A simplified procedure*, *Applied Mathematics and Computation*, 218 (2011) 4423–4432.
- [10] P. Inverardi, G. Pontuale, A. Tagliani, *Hausdorff moment problem via fractional moments*, *Applied Mathematics and Computation* 144 (2003) 61–74.
- [11] R.M. Mnatsakanov, *Hausdorff moment problem: reconstruction of distributions*, *Statist. Probab. Lett.* 78 (2008a) 1612–1618.
- [12] R.M. Mnatsakanov, *Hausdorff moment problem: reconstruction of probability density function*. -*Statist. Probab. Lett.* 78 (2008b) 1869–1877.
- [13] R. Mnatsakanov, A. Sborshchikovi *Recovery of quantile and quantile density function using the frequency moments*, *Statistics and Probability Letters* 140 (2018) 53–62
- [14] A. Gevorgyan, A. Khangaldyan, S. Cth. Mavrodiev, M. Adibekyan, G. Melikadze,

- A. Sborshchikovi ,G. Kobzev ,T. Jimsheladze, *Method of standard deviation for analysis of hydrogeodynamic parameter*, Nano Studies 9 (2014) 155-162.
- [15] E. Romera, J.C. Angulo, J.S. Dehesa, *The Hausdorff entropic moment problem*, J. Math. Phys. 42 (2001) 2309–2314.
- [16] S.X. Chen, *Beta kernel for regression curves*, Statist. Sinica 10 (2000) 73–92.
- [17] R.M. Mnatsakanov, F.H. Ruymgaart, *Some Properties of Moment-empirical cdf's with Application to Some Inverse Estimation Problems*, Math. Meth. Statist, 12 (2003) 478-495.
- [18] N.L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan, *Continuous univariate distributions*, Vol. I, second ed., Wiley, New York, (1994).
- [19] R.M. Mnatsakanov, A.Sborshchikovi, *Recovery of a quantile function from moments*. J. Comput. Appl. Math. 315 (2017) 354-364.
- [20] R.M. Mnatsakanov, B. Garai, *On the moment-recovered approximations of regression and derivative functions with applications*, J. Comput. Appl.Math. 315 (2017) 17–31.
- [21] R.M. Mnatsakanov, K. Sarkisian, *A Note on Recovering the Distributions from Exponential Moments*, Appl. Math. Comput. 219 (2013) 8730–8737.
- [22] A.Sborshchikovi, *On nonparametric quantile function estimation using transformed moments*, Bulletin of Georgian national academy of sciences , vol. 11, no. 3, (2017)
- [23] R.M. Mnatsakanov, *Recovery of functions from transformed moments: A unified approach. Communication in Statistics: Theory and Methods*. 46 (2017) 3174-3185.
- [24] R.M. Mnatsakanov, A.S. Hakobyan, *Recovery of distributions via moments*, in: IMS Lecture Notes-Monograph Series, vol. 57 (2009) 252–265.
- [25] G. Shorack, J. Wellner, *Empirical Processes with Applications to Statistics*, Wiley, New York, (1986).
- [26] E.L. Kaplan, P. Meier, *Nonparametric estimation for incomplete observations*, Journal of the American Statistical Association, 53 (1958) 457-481.
- [27] B.Zhang, *Some asymptotic results for kernel density estimation under random censorship*, Bernoulli 2(2) (1996) 183-198.
- [28] A.Fadahunsi, R.M.Mnatsakanov, *Recovery of ruin probability and value at risk from the scaled Laplace transform inversion*, J. Comput. Appl.Math.vol. 342 (2018) 249-262.

## პროგრამული კოდები

### Est. of quantile function Q Method I (S) via frequency moments of S

```
X~Exp(1):
alpha = 32;
T = 1;
pre = 600;
a1 = 1;
b1 = 1;
n = 125;
Q[x_] := -Log[1 - x];
Yi = RandomVariate[GammaDistribution[a1, b1], n, WorkingPrecision -> pre];
(*Xi=sort[Yi]*)
(*di [[i_] := Yi [[i] - Yi [[i-1] ;*)
(*Xi=Sort[Yi, Greater];*)
Xi = SortBy[Yi, {1}];
hatMf[x_] :=
Sum[(Xi [[i] - Xi [[i - 1] [ * SetPrecision]])n - i + 1 [ [ n]^x, pre], {i, 2, n}];
Sminus[x_] := -Log[x];
S[k_, j_] := [SetPrecision[Factorial[alpha], pre][ * (-1)^j - k] *
hatMf[j] [ [T^j * SetPrecision[Factorial[k], pre] * SetPrecision[
Factorial[alpha - j], pre] * SetPrecision[Factorial[j - k], pre]];
hQaS[x_] := Sum[S[k, j], {k, alpha - Floor[alpha * (x / T)], alpha},
{j, k, alpha}];
Show[DiscretePlot[hQaS[x], {x, 0, 1, 1 / alpha}],
Plot[Q[x], {x, 0, 0.999}, PlotStyle -> Thick], PlotRange -> {0, 6}]
```

### Method I(F): support is finite: X~Beta(1/2, 1)

```
F(x)=x^0.5:
alpha = 32;
T = 1;
pre = 600;
a1 = 0;
b1 = 1;
n = 200;
Fminus[x_] := x^2;
Yi =
[RandomVariate[UniformDistribution[{a1, b1}], n, WorkingPrecision -> pre][^2;
(*Xi=sort[Yi]*)
```

```

(*di [[i_] := Yi [[i] - Yi [[i-1] ;*)
(*Xi=Sort[Yi, Greater];*)
Xi = SortBy[Yi, {1}];
Xi [[0] = 0;
hatMf[x_] :=
Sum[[Xi [[i] - Xi [[i - 1] [ * SetPrecision]]]i - 1] [ n^[x, pre], {i, 2, n];
S[k_, j_] := [SetPrecision[Factorial[alpha], pre][ * (-1)^[j - k] *
hatMf[j] [[T^j * SetPrecision[Factorial[k], pre] * SetPrecision[
Factorial[alpha - j], pre] * SetPrecision[Factorial[j - k], pre]];
hFminusaT[x_] := Sum[S[k, j], {k, 0, Floor[alpha * (x / T)]}, {j, k, alpha}];
alpha2 = 2 * alpha;
S2[k_, j_] := [SetPrecision[Factorial[alpha2], pre][ * (-1)^[j - k] *
hatMf[j] [[T^j * SetPrecision[Factorial[k], pre] * SetPrecision[
Factorial[alpha2 - j], pre] * SetPrecision[Factorial[j - k], pre]];
hFminusaR[x_] := Sum[S[k, j], {k, 0, Round[alpha * (x / T)]}, {j, k, alpha}];
hFminus2aR[x_] :=
2 * Sum[S2[k, j], {k, 0, Round[alpha2 * (x / T)]}, {j, k, alpha2}] - hFminusaR[x];
Show[DiscretePlot[hFminusaT[x], {x, 0, 1, 1 / alpha}],
Plot[Fminus[x], {x, 0, 1}, PlotStyle -> Thick], PlotRange -> {0, 1}]

```

**Estimation of Q using Round and Floor codes:  
X~Gamma (1,1)**

```

n = 100;
alpha = 30;
pre = 600;
b = SetPrecision[175 / 100, pre];
Q[x_] := InverseCDF[GammaDistribution[1, 1], x];
zi = RandomVariate[GammaDistribution[1, 1], n, WorkingPrecision -> pre];
(*ci=RandomVariate[GammaDistribution[1,10],n,WorkingPrecision->pre];
censx=Boole[Table[xi [[i] <ci [[i] ,{i,1,n}]];
zi=Reap[Do[If[xi [[i] <ci [[i] ,Sow[xi [[i] ]],{i,n}]]][[2,1]];*)
t = Length[zi]
hatMf[x_] := Sum[SetPrecision[b^[-zi [[i] * x], pre], {i, 1, t}] * (1 / n);
(*[1]1-CDF[GammaDistribution[1,10],zi [[i] ]][*(1/n),{i,1,t}];*)
S[k_, j_] := [SetPrecision[Factorial[alpha], pre]] * (-1)^[j - k] *
hatMf[j] [[SetPrecision[Factorial[k], pre] * SetPrecision[
Factorial[alpha - j], pre] * SetPrecision[Factorial[j - k], pre]]
SabF[x_] := Sum[S[k, j], {k, 0, Floor[alpha * SetPrecision[b^(-x), pre]]},
{j, k, alpha}];
F[x_] := CDF[GammaDistribution[1, 1], x];
S[x_] := 1 - CDF[GammaDistribution[1, 1], x] ;
100
SabR[x_] := Sum[S[k, j],
{k, 0, Round[alpha * SetPrecision[b^(-x), pre]]}, {j, k, alpha}];
FabR[x_] := 1 - SabR[x];
Show[DiscretePlot]

```

```
SabF[SetPrecision[Log[alpha ] ]alpha - j + 1]], pre[ [ SetPrecision[Log[b], pre]],
{j, 1, alpha}], Plot]
S[SetPrecision[Log[alpha [ [alpha - j + 1]], pre[[SetPrecision[Log[b], pre]],
{j, 1, alpha}, PlotStyle → Thick]]
```

**Estimation of Q using Round codes**  
**X~ Gamma (1,1)**

```
n = 500;
alpha = 30;
pre = 600;
b = SetPrecision[175 / 100, pre];
Q[x_] := InverseCDF[GammaDistribution[1, 1], x];
zi = RandomVariate[GammaDistribution[1, 1], n, WorkingPrecision → pre];
t = Length[zi]
hatMf[x_] := Sum[SetPrecision[b^[-zi [[i]] * x[, pre], {i, 1, t}] * (1 / n);
S[k_, j_] := [SetPrecision[Factorial[alpha], pre]] * (-1)^[j - k] *
hatMf[j] [[SetPrecision[Factorial[k], pre]] * SetPrecision[Factorial[alpha - j],
pre] * SetPrecision[Factorial[j - k], pre]] SabR[x_] :=
Sum[S[k, j], {k, 0, Round[alpha * SetPrecision[b^(-x), pre]]}, {j, k, alpha}];
FabR[x_] := 1 - SabR[x];
BR[z_, x_] := CDF[BinomialDistribution[alpha, z], Round[alpha * (x)]];
hatQabR[x_] := Sum[(Log[(alpha - 1 + 2) / (alpha - 1 + 1)] / Log[b]) *
(BR[FabR[Log[alpha / (alpha - 1 + 1)] / Log[b]], x ]), {1, 2, alpha}];
500
Show[DiscretePlot[hatQabR[j [ alpha[, {j, 1, alpha}],
Plot[Q]j [ alpha[, {j, 1, alpha}, PlotStyle → Thick]]
```

**Est. of quantile density function q (x) :**  
**via entropic S - moments**

```
Direct Model : X~Exp (1)
alpha = 50;
alpha2 = 2 * alpha;
T = 1;
pre = 600;
a1 = 1;
b1 = 1;
n = 500;
q[x_] := 1 / (1 - x);
Yi = [RandomVariate[GammaDistribution[a1, b1], n, WorkingPrecision → pre]];
Xi = SortBy[Yi, {1}];
Xi [[0]] = 0;
hMf[x_] :=
Sum[[Xi [[i]] - Xi [[i - 1]] [ * SetPrecision]]n - i + 1 [ [ n]^x, pre[, {i, 1, n}];
hqa[x_] :=
[[T^(-(Floor[alpha * ((1 - x) / T)) + 1) * SetPrecision[Gamma[alpha + 2], pre]]
[SetPrecision[Gamma[(Floor[alpha * ((1 - x) / T)) + 1], pre] \]] *
```

```

Sum[(-1)^j * SetPrecision[hMf[j + (Floor[alpha * ((1 - x) / T)]], pre]]
]SetPrecision[Factorial[j], pre] *
SetPrecision[Factorial[alpha - (Floor[alpha * ((1 - x) / T)] - j), pre]],
{j, 0, alpha - (Floor[alpha * ((1 - x) / T)]}];
hq2a[x_] := [[T^(-(Floor[alpha2 * ((1 - x) / T)) + 1) *
SetPrecision[Gamma[alpha2 + 2], pre]]]
[SetPrecision[Gamma[(Floor[alpha2 * ((1 - x) / T)) + 1], pre]] *
Sum[(-1)^j * SetPrecision[hMf[j + (Floor[alpha2 * ((1 - x) / T)]], pre]]]
[SetPrecision[Factorial[j], pre] *
SetPrecision[Factorial[alpha2 - (Floor[alpha2 * ((1 - x) / T)] - j), pre]],
{j, 0, alpha2 - (Floor[alpha2 * ((1 - x) / T)]}];
htqa[x_] := 2 * hq2a[x] - hqa[x]
Show[DiscretePlot[hqa[x], {x, 0, 1, 1 / alpha}],
Plot[q[x], {x, 0, 1}, PlotStyle -> Thick], PlotRange -> {0, 20}]

```

### Estimation of q(x) using KM-estimate and MR-approach

```

X~Exp(1)
C~ Gamma(2.5,2)
n = 1500;
alpha = 50;
pre = 800;
T = 1;
q[x_] := 1 / (1 - x);
xi = RandomVariate[ExponentialDistribution[1], n, WorkingPrecision -> pre];
ci = RandomVariate[GammaDistribution[5 / 2, 2], n, WorkingPrecision -> pre];
(*Censoring data using in Kaplan Meier *)
cens = Boole[Table[ci[[i]] < xi[[i]], {i, 1, n}]];
(*zi=min[xi,ci]*)
z = Reap[Do[If[xi[[i]] < ci[[i]], Sow[xi[[i]]], {i, n}]]][[2, 1]];
t = Length[z]
Y = SortBy[z, {1}];
x = Insert[Y, 0, 1];
(*x[[0]] = 0;*)
data =EventData[xi, cens];
22 = SurvivalModelFit[data, Method -> "KaplanMeier"];
M = Differences[x];
h = Length[M];
M3 = Sort[Normal[22][x], Greater];
mS[y_] := Sum[M[[i]] * [M3[[i]]] ^y, {i, h}];
hqaKM[x_] :=
[[T^(-(Floor[alpha * ((1 - x) / T)) + 1) * SetPrecision[Gamma[alpha + 2], pre]]]
[SetPrecision[Gamma[(Floor[alpha * ((1 - x) / T)) + 1], pre]] *
Sum[(-1)^j * SetPrecision[mS[j + (Floor[alpha * ((1 - x) / T)]], pre]]]
[SetPrecision[Factorial[j], pre] *
SetPrecision[Factorial[alpha - (Floor[alpha * ((1 - x) / T)] - j), pre]],
{j, 0, alpha - (Floor[alpha * ((1 - x) / T)]}];

```

```
hqaKM1[x_] := Delete[hqaKM[x], -1];
```

### Approx. of Q via frequency moments of S(x)

```
X~Exp(1)
supp of F is unbounded
Fig1a (paper 2)
a = 1;
beta = 1;
alpha = 40;
pre = 6000;
Q[x_] := Quantile[GammaDistribution[a, beta], x];
mf[x_] := SetPrecision[1 / x, pre];
phi[x_] := 1 - x;
S[k_, j_] := [SetPrecision[Factorial[alpha], pre]] *
(-1)^(j - k) * mf[j] [[SetPrecision[Factorial[k], pre] * SetPrecision[
Factorial[alpha - j], pre] * SetPrecision[Factorial[j - k], pre]];
QaF[x_] := Sum[S[k, j], {k, 0, Floor[alpha * SetPrecision[phi[x], pre]]}, alpha,
{j, k, alpha}];
QaR[x_] := Sum[S[k, j], {k, 0, Round[alpha * SetPrecision[phi[x], pre]]}, alpha,
{j, k, alpha}];
Show[DiscretePlot[QaR[x], {x, 0, 1, 1 / alpha}, PlotRange -> {0, 6}],
Plot[Q[x], {x, 0, 1}, PlotStyle -> Thick]]
```

### Approx. tildeQaS:

#### X~Exp(1)

```
alpha = 20;
alpha2 = 2 * alpha;
S2[k_, j_] := [SetPrecision[Factorial[alpha2], pre]] *
(-1)^(j - k) * mf[j] [[SetPrecision[Factorial[k], pre] * SetPrecision[
Factorial[alpha2 - j], pre] * SetPrecision[Factorial[j - k], pre]];
Q2a[x_] := Sum[S2[k, j], {k, 0, Floor[alpha2 * SetPrecision[phi[x], pre]]}, alpha2,
{j, k, alpha2}];
tQa[x_] := 2 * Q2a[x] - Qa[x]
Show[DiscretePlot[tQa[x], {x, 0, 1, 1 / alpha}, PlotRange -> {0, 6}],
Plot[Q[x], {x, 0, 1}, PlotStyle -> Thick]]
```

### Method I : with Floor codes

```
alpha = 40;
pre = 600;
a1 = 1 / 2;
beta = 1;
mu[j_] := SetPrecision[1 / (j^2 + 1), pre];
```

```

F[x_] := x^(1 / 2);
Q[x_] := x^2;
S[k_, j_] := [SetPrecision[Factorial[alpha], pre]] *
(-1)^(j - k)* mu[j] [[SetPrecision[Factorial[k], pre] * SetPrecision[
Factorial[alpha - j], pre] * SetPrecision[Factorial[j - k], pre]]
minusQaF[x_] := Sum[S[k, j], {k, 0, (Floor[alpha * (x)])}, {j, k, alpha}];
Show[DiscretePlot[minusQaF[x], {x, 0, 1, 1 / alpha}, PlotRange -> {0, 1}],
Plot[Q[x], {x, 0, 1}, PlotStyle ->Thick]]

```

tilde Qa=2 Q2a - Qa

alpha = 20;

alpha2 = 2 \* alpha;

pre = 600;

a1 = 1 / 2;

beta = 1;

mu[j\_] := SetPrecision[1 [[j ] 2 + 1], pre];

F[x\_] := x^(1 / 2);

Q[x\_] := x^2;

```

S[k_, j_] := [SetPrecision[Factorial[alpha], pre]] [ *
(-1)^(j - k) * mu[j] ] [SetPrecision[Factorial[k], pre] * SetPrecision[
Factorial[alpha - j], pre] * SetPrecision[Factorial[j - k], pre]]
minusQaF[x_] := Sum[S[k, j], {k, 0, (Floor[alpha * (x)])}, {j, k, alpha}];

```

```

S2[k_, j_] := [SetPrecision[Factorial[alpha2], pre]] *
(-1)^(j - k) * mu[j] [[SetPrecision[Factorial[k], pre] * SetPrecision[
Factorial[alpha2 - j], pre] * SetPrecision[Factorial[j - k], pre]]
Q2a[x_] := Sum[S2[k, j], {k, 0, (Floor[alpha2 * (x)])}, {j, k, alpha2}];

```

tildeQa[x\_] := 2 \* Q2a[x] - minusQaF[x];

```

Show[DiscretePlot[tildeQa[x], {x, 0, 1, 1 / alpha}, PlotRange -> {0, 1}],
Plot[Q[x], {x, 0, 1}, PlotStyle -> Thick]]

```

**Aprox. of quantile density function q(x):  
via entropic S-moments  
using Floor codes:**

alpha = 25;

T = 1;

pre = 600;

a1 = 1;

b1 = 1;

q[x\_] := 1 / (1 - x);

Mf[x\_] := SetPrecision[1 / x, pre];

qa[x\_] :=

```
[[T^(-(Floor[alpha * ((1 - x) / T)) + 1) * SetPrecision[Gamma[alpha + 2], pre]]]
```

```
[SetPrecision[Gamma[(Floor[alpha * ((1 - x) / T)) + 1], pre] ] ] *
```

```
Sum[(-1)^j * SetPrecision[Mf[j + (Floor[alpha * ((1 - x) / T)])], pre]]
```

```
[SetPrecision[Factorial[j], pre] *
```

```
SetPrecision[Factorial[alpha - (Floor[alpha * ((1 - x) / T)]) - j], pre]],
```

```
{j, 0, alpha - (Floor[alpha * ((1 - x) / T)]}] ;
```



```
Show[DiscretePlot[qa[x], {x, 0, 1, 1 / alpha}],
Plot[q[x], {x, 0, 1}], PlotRange → {0, 20}, PlotStyle → {Dashed, Red}]
```

**Using  $tq_a = 2q_{2a} - q_a$ :  
using the Floor codes:**

```
alpha = 10;
alpha2 = 2 * alpha;
T = 1;
pre = 600;
a1 = 1;
b1 = 1;
q[x_] := 1 / (1 - x);
Mf[x_] := SetPrecision[1 / x, pre];
qa[x_] :=
[[T^(-(Floor[alpha * ((1 - x) / T)]) + 1) * SetPrecision[Gamma[alpha + 2], pre]]]
[SetPrecision[Gamma[(Floor[alpha * ((1 - x) / T)]) + 1], pre]] *
Sum[(-1)^j * SetPrecision[Mf[j + (Floor[alpha * ((1 - x) / T)])], pre]]]
[SetPrecision[Factorial[j], pre]] *
SetPrecision[Factorial[alpha - (Floor[alpha * ((1 - x) / T)]) - j], pre]],
{j, 0, alpha - (Floor[alpha * ((1 - x) / T)])}];
q2a[x_] := [[T^(-Floor[alpha2 * (x / T)] - 1) * Gamma[alpha2 + 2]]]
(Gamma[(Floor[alpha2 * ((1 - x) / T)]) + 1]) *
Sum[(-1 / T)^j * SetPrecision[Mf[j + (Floor[alpha2 * ((1 - x) / T)])], pre]]]
[Factorial[j] * Factorial[alpha2 - (Floor[alpha2 * ((1 - x) / T)]) - j]],
{j, 0, alpha2 - (Floor[alpha2 * ((1 - x) / T)])}];
tqa[x_] := 2 * q2a[x] - qa[x];
```

**Tilde  $q_a^R$  with  $\phi(x)=1-x$ :  
with Round codes**

```
alpha=10 and alpha=25
alpha = 25;
T = 1;
pre = 600;
a1 = 1;
b1 = 1;
q[x_] := 1 / (1 - x);
Mf[x_] := SetPrecision[1 / x, pre];
qaR[x_] :=
[[T^(-(Round[alpha * ((1 - x) / T)]) + 1) * SetPrecision[Gamma[alpha + 2], pre]]]
[SetPrecision[Gamma[(Round[alpha * ((1 - x) / T)]) + 1], pre]] *
Sum[(-1)^j * SetPrecision[Mf[j + (Round[alpha * ((1 - x) / T)])], pre]]]
[SetPrecision[Factorial[j], pre]] *
SetPrecision[Factorial[alpha - (Round[alpha * ((1 - x) / T)]) - j], pre]],
{j, 0, alpha - (Round[alpha * ((1 - x) / T)])}];
4 approx_q(x).nb
Show[DiscretePlot[qaR[x], {x, 0, 1, 1 / alpha}],
```

Plot[q[x], {x, 0, 1}], PlotRange → {0, 20}, PlotStyle → {Dashed, Red}]

**Estimation of Q(x) via frequency moments using KM - estimate of S X~Gamma (2, 1), C~Gamma (6, 1)**

```
alpha = 100; n = 800; pre = 800; T = 1; a = 2; beta = 1; Q[x_] := Quantile[GammaDistribution[a,
beta], x]; xi = RandomVariate[GammaDistribution[a, beta], n, WorkingPrecision → pre];
ci = RandomVariate[GammaDistribution[12 / 2, 1], n, WorkingPrecision → pre]; (*Censoring
data using in Kaplan Meier *) cens = Boole[Table[ci [[i]] < xi [[i]] , {i, 1, n}]];
*)[xi,ci](*)zi=min z = Reap[Do[If[xi [[i]] < ci [[i]] , Sow[xi [[i]] ], {i, n}]]][[2, 1]]; t =
Length[z] x = SortBy[z, {1}]; (*x [[0]] =0;*) data = EventData[xi, cens]; 12 =
SurvivalModelFit[data, Method → "KaplanMeier"]; M = Differences[x]; h = Length[M]; M3 =
Sort[Normal[12][x], Greater]; ;[y, {i, h}{M3 [[i]] ]M [[i]] * ]mS[y_] := Sum phi[x_] := 1 - x;
*[SetPrecision[Factorial[alpha], pre][S[k_, j_] := SetPrecision[Factorial[k], pre] * SetPrecision[[
* mS[j] [j - k](-1)^ ;[Factorial[alpha - j], pre] * SetPrecision[Factorial[j - k], pre] ,ə,
alpha[Round[alpha * SetPrecision[phi[x], pre]]]k, [S[k, j], ]hQaRKM[x_] := Sum [{j, k, alpha}]
```

**Comparison of est. of q(x) using KM-estimate via PDF beta and MR-approach X~Exp, C~Gamma(2.5,2)**

```
n = 1500; alpha = 100; pre = 8000; T = 1; q[x_] := 1 / (1 - x); a1 = 1; b1 = 1; phi[x_] := 1 - x; xi
= RandomVariate[GammaDistribution[a1, b1], n, WorkingPrecision → pre];
ci = RandomVariate[GammaDistribution[5 / 2, 2], n, WorkingPrecision → pre]; (*Censoring
data using in Kaplan Meier *) cens = Boole[Table[ci [[i]] < xi [[i]] , {i, 1, n}]];
*)[xi,ci](*)zi=min z = Reap[Do[If[xi [[i]] < ci [[i]] , Sow[xi [[i]] ], {i, n}]]][[2, 1]]; t =
Length[z] Y = SortBy[z, {1}]; x = Insert[Y, 0, 1]; (*x [[0]] =0;*) data = EventData[xi, cens]; 22
= SurvivalModelFit[data, Method → "KaplanMeier"]; M = Differences[x]; h = Length[M]; M3 =
Sort[Normal[22][x], Greater]; ;[y, {i, h}{M3 [[i]] ]M [[i]] * [mS[y_] := Sum hatqaKM[x_] := ]
]T^(-(Floor[alpha * ((1 - x) / T)] + 1) * SetPrecision[Gamma[alpha + 2], pre] [[
*[[SetPrecision[Gamma[(Floor[alpha * ((1 - x) / T)] + 1), pre] [[[ (-1)^j * SetPrecision[mS[j +
(Floor[alpha * ((1 - x) / T)]), pre][[Sum SetPrecision[Factorial[j], pre] *
.]SetPrecision[Factorial[alpha - (Floor[alpha * ((1 - x) / T)] - j], pre] ;]{j, 0, alpha - (Floor[alpha
* ((1 - x) / T)])} * PDF[BetaDistribution[alpha * phi[x] + 1,[M [[i]] ]]hatqaBet[x_] := Sum
:[alpha - alpha * phi[x] + 1], M3 [[i]] ], {i, 1, t}
```

**Code for Matlab for waiting time**

```
function Qhd_oct2017b()
[fn, pathname] = uigetfile('*.txt', 'Select Input File with
waiting time series');
fname1=strcat(pathname,fn);
disp(fname1);
data = load(fname1);
nlen=length(data);
prompt = {'Set alpha','Set n'};
dlg_title = 'Parameters';
num_lines = 1;
def = {'50','100'};
answer = inputdlg(prompt,dlg_title,num_lines,def);
a=str2double(answer(1));
n=str2double(answer(2));
```

```

x=0.1;
x2=1.05;
xstep=0.06;

X=zeros(n,1);
ni=randperm(nlen);
ni=ni(1:n);
X(1:n)=data(ni);
X=0+(X-min(X)*6)/(max(X)-min(X));
% X=(X-std(X))/mean(X);
% X=X/60/60;
% X=gamrnd(1,1,n,1);
X=sort(X);
% plot(X),figure
%-----
j=1;
Q_hd=zeros(floor((x2-x)/xstep+1),1);
xx=zeros(floor((x2-x)/xstep+1),1);
while(x<=x2)
    aa=floor(a*x)+1;
    bb=a-floor(a*x)+1;
for i=1:n
    Q_hd(j)=Q_hd(j)+X(i)*(betacdf(i/n,aa,bb)-betacdf((i-
1)/n,aa,bb));
end
    xx(j)=x;
    j=j+1;
    x=x+xstep;
end

subplot(2,1,1),plot(xx,Q_hd,'-ok','LineWidth',2);
xlabel('x','FontSize',16);
legend('Q_{hd}');
%-----
i=1;
x=0.1;
Q_a=zeros(1,1);
xx=zeros(1,1);
while(x<=x2)
    ax=a-floor(a*x);
    QQ=0;
    k=ax;
while k<=a
for j=k:a

```

```

        vv=factorial(a).*(-1)^(j-
k).*mS2(X,n,j)/(factorial(k)*factorial(a-j)*factorial(j-k));
%         vv=(-1)^(j-k).*mS(X,n,j);%*mS(X,n,j);
        QQ=QQ+vv;
end
        k=k+1;
end
        Q_a(i)=QQ;
        xx(i)=x;
        i=i+1;
        x=x+xstep;
end

subplot(2,1,2),stem(xx,Q_a,'-ob','LineWidth',2);
legend('Q_{\alpha}');
xlabel('x','FontSize',16);

```