

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ბიძინა მაცაბერიძე

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
კომპიუტერულ მეცნიერებათა დეპარტამენტი

საექსპერტო ცოდნის ინჟინერია ფაზი-დაფარვის ამოცანებში
და მათი გადაწყვეტის ზუსტი ალგორითმები

სადოქტორო დისერტაცია

ხელმძღვანელები:

სადოქტორო პროგრამის ხელმძღვანელი:

თსუ პროფესორი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

გია სირბილაძე

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

თსუ პროფესორი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

გია სირბილაძე

თბილისი

2017

Ivane Javakishvili Tbilisi State University

Bidzina Matsaberidze

Faculty of Exact and Natural Sciences
Department of Computer Science

**Expert Knowledge Engineering and Exact Algorithms
for Fuzzy Covering Problems**

PhD Thesis

Supervisors:

Supervisor of the Doctoral Program:

Professor, TSU

Doctor of Science in Physics and Mathematics

Gia Sirbiladze

Scientific Supervisor:

Professor, TSU

Doctor of Science in Physics and Mathematics

Gia Sirbiladze

Tbilisi

2017

ანოტაცია

ნაშრომში წარმოდგენილია საექსპერტო ცოდნის ინჟინერიის საკითხები, რომლებიც ადამიანების (გარკვეული სფეროს ექსპერტების) მიერ მოცემული ინფორმაციის ფორმალიზებას, დამუშავებას და გადაწყვეტილებების მიღების პროცესში მის გათვალისწინებას გულისხმობს. ადამიანების მიერ გაკეთებული შეფასებები, ბუნებრივი ენის სპეციფიკის გათვალისწინებით, თითქმის ყოველთვის შეიცავს გარკვეულ არამკაფიოობას. სალაპარაკო ენაში ჩვენ ხშირად ვიყენებთ სიტყვებს, რომლებიც, მათემატიკური თვალსაზრისით, არ არის ზუსტი (მაგალითად: მაღალი, ძალიან დიდი, დაახლოებით და სხვა). ინფორმაციის აღწერისას ჩვენ ასევე ვიყენებთ გაურკვევლობის (განუზღვრელობის) შემცველ შეფასებებს (მაგალითად: სავარაუდოდ, შესაძლოა, ალბათ და სხვა).

ბევრი პრაქტიკული ამოცანის მონაცემები, ანუ საწყისი ინფორმაცია არასრულია და ინფორმაციის ერთ-ერთ წყაროს მაინც ექსპერტები წარმოადგენენ. ამ ამოცანებში ხელმისაწვდომი მწირი ინფორმაციის გამდიდრება ზოგჯერ სწორედ ექსპერტული შეფასებებით გვიწევს, რადგან შეუძლებელია მოვიპოვოთ უფრო ზუსტი ინფორმაცია, მაგალითად, დაკვირვებების და ექსპერიმენტების გზით. ნაშრომში შემოთავაზებულია მეთოდოლოგია, რომელიც არასრულ ინფორმაციაში გამოყოფს ორ პოლუსს - უზუსტობას და განუზღვრელობას, იძლევა არასრული ინფორმაციის ამ ორი მახასიათებლის ფორმალიზების და შემდეგ, შესაბამისი მათემატიკური ინსტრუმენტების გამოყენებით, მათი აგრეგირების საშუალებას. შედეგად, შესაძლებელი ხდება საექსპერტო ცოდნის გათვალისწინება გადაწყვეტილებების მიღების პროცესში. კონკრეტულად, ნაშრომში წარმოდგენილია დისკრეტული ოპტიმიზაციის პრაქტიკული ამოცანების ახალი მოდელები, რომლებშიც, კლასიკურ მიზნის ფუნქციებთან ერთად, განიხილება ახალი მიზნის ფუნქციები, როგორც მოდელის სანდოობის მაჩვენებლები.

ახალი მოდელები აგებულია დაყოფისა და დაფარვის ამოცანების ფართოდ გავრცელებული კლასისთვის, ასევე ექსტრემალურ და განუზღვრელობის შემცველ გარემოში სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანისთვის, რომელიც, საბოლოოდ, დაყოფის ორკრიტერიუმთან ამოცანაზე დაიყვანება. სწორედ ამიტომ, ნაშრომში ასევე შემოთავაზებულია დაფარვისა და დაყოფის ერთ და ორკრიტერიუმის ამოცანების გადაჭრის ზუსტი მეთოდები და ახალი ალგორითმები, რომლებიც დონალდ კნუტის “მოცეკვავე ბმულების” ეფექტურ ტექნიკაზე დაყრდნობით არის შექმნილი და კარგად მუშაობს მცირე და საშუალო განზომილებების მქონე ამოცანებისთვის. კვლევის პარალელურად, შექმნილია შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფა, რომლის გამოყენებით მიღებული შედეგები ასევე ასახულია ნაშრომში.

განხილულია ასევე ორი საილუსტრაციო მაგალითი (კანდიდატების შერჩევის და სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანებისთვის), რომლებიც გადაჭრილია ჩვენ მიერ შემოთავაზებული მეთოდოლოგიის და ალგორითმების გამოყენებით. ნაჩვენებია ექსპერტთა შეფასებების გათვალისწინების, არასრული ინფორმაციის ეფექტურად დამუშავების და გადაწყვეტილებების მიღების პროცესში ამ “დამატებითი” ინფორმაციის გამოყენების უპირატესობები.

Annotation

The PhD thesis deals with the problems of experts' knowledge engineering, like formalizing, processing and considering the information provided by humans (experts of some field) in the decision-making process. Experts' evaluations almost always include some type of fuzziness, because of specifics and characteristics of a natural language. When we speak, we often use words that are imprecise from the mathematical point of view (e.g. high, very large, approximately, etc.). While describing information, we also use assessments containing some uncertainty (e.g. probably, possibly, perhaps, etc.).

The data of many practical problems is incomplete and we often find experts as one of the sources of available information. As it is often impossible to obtain more accurate data through observations and experiments, we often have to enrich the incomplete information with experts' evaluations. The methodology, presented in the thesis, differentiates two poles of incomplete information - imprecision and uncertainty; by applying appropriate mathematical instruments, it allows us to formalize and aggregate these two characteristics of imperfect data. Afterwards, this aggregated data is used in decision-making processes of well-known discrete optimization problems, for which new models are constructed. These models, together with the classical objective functions, consider new objective functions reflecting adequacy and reliability of solutions.

The new models are built for a widespread class of covering and partitioning problems, as well as for the vehicle routing problems (VRPs) in extreme and uncertain environments. Constructed VRPs are also reduced to the bicriteria partitioning problem. This is the reason for which the thesis also presents exact methods and new algorithms for single as well as bi-criteria covering and partitioning problems. These algorithms are based on Donald Knuth's effective technique of dynamic programming, called "Dancing Links" and work well for the problems with small and medium dimensions. In parallel to the research, relevant software is also developed and the results obtained using this software are also reflected in the thesis.

The thesis also presents two illustrative examples – one for the candidates' selection and another for the vehicle routing problem. Both of them are considered in uncertain environments and are solved using our methodology and algorithms. This examples clearly demonstrate the advantages of using experts' knowledge while dealing with incomplete information, as well as efficiency of the methodology presented in the thesis.

შინაარსი

შესავალი.....	3
თავი 1. მინიმალური დაფარვისა და დაყოფის კლასიკური ამოცანები და მათი გადაჭრის გზები 7	
1.1. დაფარვისა და დაყოფის ამოცანები	7
1.2. დაფარვისა და დაყოფის ამოცანის გამოყენებები	8
1.3. დაფარვისა და დაყოფის ამოცანების გადაჭრის გზები	8
1.4. DLX ალგორითმის მოდიფიკაცია.....	13
თავი 2. არასანდოობის კრიტერიუმის ინჟინერია დაფარვისა და დაყოფის ამოცანებში... 17	
2.1. უზუსტობა და განუზღვრელობა.....	17
2.1.1. არამკაფიო სიმრავლეები.....	18
2.1.2. მონოტონური (არამკაფიო) ზომები.....	24
2.1.3. “არამკაფიო” ინტეგრალები	39
2.2. არასანდოობის კრიტერიუმი მინიმალური ფაზი-დაფარვის და დაყოფის ამოცანებში.....	48
2.2.1. ფაზი-დაფარვის ამოცანა	48
2.2.2. არასანდოობის შეფასების წონებზე დაფუძნებული მეთოდი	53
2.2.3. არასანდოობის შოკეს ინტეგრალით შეფასების მეთოდი	54
2.3. საილუსტრაციო მაგალითი	55
თავი 3. სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანა და მისი განზოგადება განუზღვრელ გარემოში..... 61	
3.1. სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანები	61
3.1.1. უზუსტობა და განუზღვრელობა სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანებში	62
3.2. სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანა განუზღვრელ გარემოში	64
3.2.1. მარშრუტების განხორციელებადობის კრიტერიუმის აგება	67
3.2.2. სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის აგებული ამოცანის ამოხსნა	70
3.3. საილუსტრაციო მაგალითი	79
თავი 4. პროგრამული უზრუნველყოფა	91
4.1. პროგრამული ბიბლიოთეკა და ინტერაქტიული სისტემა.....	91
4.2. ექსპერიმენტული შედეგები	94
დასკვნა	97
ბიბლიოგრაფია	101

შესავალი

თანამედროვე მსოფლიოში ინტერნეტის განვითარებამ ხელმისაწვდომი გახადა უზღვევი რაოდენობის ინფორმაცია. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ თუ XX საუკუნის ჩათვლით ძირითადი პრობლემა ინფორმაციის მოძიება იყო, XXI საუკუნეში ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა ჭარბი ინფორმაციის ფილტრაციაა. სწორედ ამ მიზანს ემსახურება, მაგალითად, სხვადასხვა საძიებო სისტემები, რომელთა შორის ის არის ყველაზე პოპულარული, რომელიც სხვებზე უკეთესად ფილტრავს ინტერნეტში არსებულ უსაზღვრო რაოდენობის ინფორმაციას და მომხმარებლისთვის გამოაქვს მის მოთხოვნასთან მაქსიმალური შესაბამისობის მქონე შედეგები.

თუმცა ინფორმაციის წყარო ყოველთვის ინტერნეტი არ არის. კომპიუტერული მეცნიერებების, განსაკუთრებით კი ხელოვნური ინტელექტის, ოპერაციათა კვლევის, ფიზიკის, ეკონომიკის და სხვა სამეცნიერო მიმართულებების ამოცანები ხშირად გულისხმობს იმგვარი ინფორმაციის დამუშავებას, რომელიც მიღებულია სხვადასხვა გაზომვების და სუბიექტური შეფასებების შედეგად. გაზომვები შეიძლება ტარდებოდეს, მაგალითად, სენსორების გამოყენებით (ტემპერატურა, ქარის სიჩქარე, წნევა, ვიდეო და აუდიო ჩანაწერები და ა.შ.), შეფასებები კი ადამიანის ან ადამიანთა ჯგუფის მიერ გაკეთებული სუბიექტური დასკვნები თუ პროგნოზებია. ამგვარი ინფორმაცია არ არის ზუსტი და უტყუარი და თუ გვსურს, რომ მათი გამოყენებით სანდო და რეალობასთან მიახლოებული დასკვნები თუ ამონახსნები მივიღოთ, აუცილებელია ინფორმაციის ბუნების გათვალისწინება და მისი შესაბამისად დამუშავება.

ტრადიციულად, არაზუსტი და არამკაფიო ინფორმაციის, მასთან დაკავშირებული განუსაზღვრელობის (განუზღვრელობის) დამუშავებისთვის ალბათობის თეორია გამოიყენებოდა და ახლაც ხშირად გამოიყენება, თუმცა XX საუკუნის ბოლო მესამედში უკვე აქტიურად განიხილებოდა განუზღვრელობის ის შემთხვევები და ფორმები, რომელთა დამუშავება ალბათობის თეორიის მეთოდებით არაეფექტურ შედეგებს იძლეოდა. ამის ერთ-ერთ მთავარ მიზეზად ადამიანური ენის “ელასტიურობა” განიხილება (Dubois & Prade, 1988), რაც ბუნებრივ ენებში ხშირად გამოყენებადი სიტყვების არამკაფიოობასთან არის დაკავშირებული (მაგალითის სახით, შეგვიძლია მოვიტანოთ შემდეგი წინადადება: თუ ძალიან ცივა და ცა მეტწილად მოწმენდილია, ძლიერი ყინვა იქნება). მსგავსი არამკაფიოობის აღსაწერად ცნობილმა მათემატიკოსმა, კომპიუტერულ მეცნიერებათა და ხელოვნური ინტელექტის მიმართულების მკვლევარმა ლოთფი ზადემ 1965 წელს შემოიღო არამკაფიო სიმრავლის ცნება (Zadeh, 1965). მას შემდეგ არამკაფიო სიმრავლეთა თეორია და არამკაფიო ლოგიკა მნიშვნელოვნად განვითარდა და დიდი პრაქტიკული გამოყენება ჰპოვა. თუმცა მხოლოდ არამკაფიო სიმრავლეები საკმარისი არ აღმოჩნდა არაზუსტ და არამკაფიო ინფორმაციასთან დაკავშირებული განუზღვრელობის სრულფასოვნად აღწერისთვის და 1978 წელს, არამკაფიო სიმრავლეთა და არამკაფიო ლოგიკის მისივე თეორიის გაფართოების სახით, კვლავ პროფესორმა ზადემ შემოგვთავაზა შესაძლებლობის თეორია (Zadeh, 1978), რომელიც მოგვიანებით კიდევ უფრო განავითარეს დუბუამ და პრადმა (Dubois & Prade, 1988). აღნიშნული თეორია განიხილავს ცვლადის არა ალბათურ, არამედ შესაძლო მნიშვნელობებს, ანუ არა ალბათობას, არამედ შესაძლებლობას იმისა, რომ ცვლადი მიიღებს გარკვეულ მნიშვნელობას.

განუზღვრელობის შემცველ სიტუაციებში გადაწყვეტილებების მიღების მეთოდოლოგია შემოგვთავაზეს ასევე დემპსტერმა (Dempster, 1967) და შეიფერმა (Shafer, 1976). დემპსტერ-შეიფერის თეორია, რომელიც ეფუძნება არაზუსტ ალბათობებს (imprecise probability) და

შესაძლებლობის ზომას, გვთავაზობს სარწმუნო ინფორმაციის მიღების წესს რამდენიმე წყაროსგან მიღებული არასრულყოფილი ინფორმაციის (მტკიცებულებების) კომბინირების გზით. ინფორმაციის სარწმუნოება (სანდობა) გამოსახულია სანდობისა (belief) და დასაჯერობის (plausibility) არაადიციური ზომებით.

მიუხედავად იმისა, რომ ბოლო ათწლეულებში, არასრული ინფორმაციის ეფექტურად დამუშავებისთვის ალბათური და სხვა ადიციური ზომების ნაცვლად, ხშირად განიხილება უფრო ზოგადი, არაადიციური ზომების გამოყენების უპირატესობები (Grabisch, 1996; Torra & Narukawa, 2006; Wang & Klir, 2009; Sirbiladze, 2013; Dubois & Prade, 2015), ბევრ მნიშვნელოვან პრაქტიკულ ამოცანაში დღემდე გამოიყენება კლასიკური მიდგომები და კლასიკური მათემატიკური აპარატი, რომელიც ადიციურ ზომებს ეფუძნება. ითვლება, რომ განზოგადებული მათემატიკური აპარატის გამოყენება მეტ სირთულეებთან არის დაკავშირებული.

ჩვენ მიგვაჩნია, რომ ზოგჯერ არამკაფიო სიმრავლეების და არაადიციური ზომების გამოყენება მართლაც ართულებს მათემატიკურ მოდელებს და უფრო ინტენსიურს ხდის კომპიუტერულ გამოთვლებს, მაგრამ ეს გამოწვეულია სწორედ იმით, რომ მსგავსი მიდგომები ითვალისწინებენ და ამუშავებენ ხელმისაწვდომი ინფორმაციის იმ ნაწილსაც, რომელიც, მისი ბუნებიდან გამომდინარე, ვერ აღიწერება მკაფიო სიმრავლეებითა და ადიციური ზომებით და რომლის უგულებელყოფა და დაკარგვა ხდება კლასიკური მეთოდებით სარგებლობის შემთხვევებში.

ჩვენი მიზანია, ნათლად განვსაზღვროთ ის შემთხვევები, როდესაც ინფორმაციის ბუნება მოითხოვს განზოგადებული მეთოდებით დამუშავებას და ჩამოვაცალიბოთ ერთ-ერთი უნივერსალური მეთოდი, რომელიც ითვალისწინებს და კომბინირებას უკეთებს არასრული ინფორმაციის ორ მახასიათებელს - უზუსტობას და განუზღვრელობას და იძლევა ადეკვატურ, რეალობასთან უფრო მეტად მიახლოებულ შედეგებს.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ადამიანების მიერ ბუნებრივი ენის გამოყენებით გამოთქმული (ჩაწერილი) შეფასებები ხშირად შეიცავს იმაზე მეტ ინფორმაციას, რაც შეიძლება აღიწეროს ზუსტი რიცხვების, მკაფიო სიმრავლეებისა და ადიციური ზომების გამოყენებით. ამიტომ ამა თუ იმ ამოცანაში, როდესაც შემავალი მონაცემების ერთ-ერთ წყაროს მაინც წარმოადგენს ადამიანების (ამოცანის შესაბამისი დომენის ექსპერტების) ცოდნა და მათი მხრიდან გაკეთებული პროგნოზები თუ შეფასებები, მაღალი სიზუსტის შედეგების მისაღებად მნიშვნელოვანია ინფორმაციის ბუნების გათვალისწინება და კლასიკურთან შედარებით უფრო უნივერსალური მეთოდების გამოყენება.

ერთი შეხედვით, შეიძლება ვიფიქროთ, რომ პრაქტიკულ ამოცანებში იშვიათად გვხვდება ექსპერტთა შეფასებები და მსგავსი კომპლექსური ბუნების მქონე ინფორმაცია, მაგრამ რეალობა სხვაგვარია: ყოველდღიურ ცხოვრებაში გადაწყვეტილებების მისაღებად ჩვენ ხშირად ვიყენებთ ინფორმაციას, რომელიც საექსპერტო, ადამიანურ ცოდნას ეფუძნება. მაგალითისთვის შეგვიძლია დავასახელოთ რაიმე პოზიციაზე ასაყვანი კანდიდატების ცოდნის, კვალიფიკაციის თუ უნარ-ჩვევების შეფასებები, სხვადასხვა ტიპის გასაუბრებების შედეგად გაკეთებული შეფასებები, გარკვეული სამუშაოს შესასრულებლად საჭირო რესურსების დაგეგმვის მიზნით გაკეთებული შეფასებები, რისკების შეფასებები, მოსალოდნელი დატვირთვის, ფინანსური მდგომარეობის პროგნოზები და ა.შ.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ ექსპერტების მიერ მოწოდებული ინფორმაცია ზუსტი და მკაფიო იქნება, მაშინ, რეალურად, ორ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე: ან ექსპერტს ვაიძულებთ მკაფიო

ტერმინების გამოყენებას და შევუზღუდავთ მისთვის ბუნებრივ მოქნილობას, ან ექსპერტის მიერ გამოყენებულ ტერმინებს და შეფასებებს “ვთარგმნით” მკაფიო ტერმინებისა და ზუსტი რიცხვების ენაზე, რა დროსაც დავკარგავთ გარკვეულ ინფორმაციას.

ბოლო პერიოდში ხელოვნური ინტელექტის მიმართულების განვითარებამაც ნათელი გახადა ძირითადი განსხვავება მკაცრ მათემატიკურ მოდელებსა და ადამიანის ინტელექტს შორის. ეს განსხვავება სწორედ ადამიანის აზროვნების და ენის მოქნილობას უკავშირდება. ამიტომ ხელოვნური ინტელექტის სხვადასხვა ქვემიმართულების თანამედროვე წარმატებული მეთოდები ახდენენ მსგავსი მოქნილობის იმიტაციას, მკაცრ მოდელებში გარკვეული თავისუფლების ხარისხის შეტანის გზით.

ჩვენ ვთვლით, რომ ნაშრომში შემოთავაზებული მოდელი უნივერსალურია იმ თვალსაზრისით, რომ არამკაფიო ინფორმაციის დამუშავებისთვის მისი გამოყენება შესაძლებელია ნებისმიერ ამოცანაში, რომლის მონაცემები შეიცავს არაზუსტ და არასრულ ინფორმაციას, მიუხედავად ამოცანის კონკრეტული შინაარსისა. თუმცა ჩვენი მოდელის და მიდგომების შესაძლებლობების პრაქტიკულ ამოცანებზე დემონსტრირების მიზნით, გადაწყვიტეთ, შეგვეჩრია ამოცანათა კლასი, რომელიც ფართოდ გავრცელებულია, გამოირჩევა მრავალი პრაქტიკული გამოყენებით, კარგად დამუშავებულია მისი გადაჭრის კლასიკური მიდგომები და სწორედ ამ ტიპის ამოცანებზე გვეჩვენებინა ჩვენი მოდელის ეფექტიანობა რეალური ამოცანების გადაჭრისას. მსგავს ამოცანათა კლასად შევარჩიეთ დაფარვისა და დაყოფის ამოცანები (Garfinkel & Nemhauser, 1969; Christofides & Korman, 1975; Beasley, 1987; Hoffman & Padberg, 2009; Cormen, Leiserson, Rivest, & Stein, 2009), რომელთა კვლევა და პრაქტიკაში გამოყენება ათწლეულებს ითვლის (დეტალურად იხ. ქვემოთ).

წინამდებარე ნაშრომში, გარდა თეორიული კვლევისა და ფორმალიზებული მოდელისა, ასევე წარმოდგენილია ორი საილუსტრაციო მაგალითი. პირველი უკავშირდება კანდიდატების (მთარგმნელების) შერჩევის ცნობილ ამოცანას (Christofides, 1975), რომელიც განზოგადებულია რეალური ამოცანების მოთხოვნებიდან გამომდინარე და მისთვის შექმნილი მოდელი ითვალისწინებს სუბიექტური, არამკაფიო და განუზღვრელობის შემცველი ინფორმაციის დამუშავებას. შედეგად, აღნიშნული ტიპის რეალური ამოცანებისთვის ვიღებთ უფრო რეალურ ამონახსნებს. მეორე მაგალითი უკავშირდება სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანებს (Dantzig & Ramser, 1959) და მათ განზოგადებას ისეთი შემთხვევებისთვის, რომლებშიც გზებზე შეიძლება ფიქსირდებოდეს სხვადასხვა ტიპის შეფერხებები ან გაუთვალისწინებელი გარემოებები. ამ ტიპის ამოცანებისთვისაც შემოთავაზებულია მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა, არასრული ინფორმაცია შევავსოთ სუბიექტური წყაროებიდან მიღებული შეფასებებით და მივიღოთ ამონახსნები, ანუ მარშრუტები, რომელთა განხორციელება შედარებით რეალურია შექმნილი განუზღვრელობის შემცველი პირობების გათვალისწინებით.

როგორც აღვნიშნეთ, დაფარვისა და დაყოფის ამოცანების შესწავლა დიდი ხანია მიმდინარეობს, მაგრამ ამ ამოცანების მნიშვნელობის და ამავე დროს მათი NP-სირთულის გამო, კვლევა დღესაც გრძელდება და ჩნდება ახალ-ახალი მიახლოებითი თუ ზუსტი ალგორითმები (Caprara, Toth, & Fischetti, 2000; Williamson & Shmoys, 2011; Berman, Karpinski, & Lingas, 2012; Akhter, 2015), რომლებიც უნივერსალურია, ან მორგებულია კონკრეტული ტიპის დაყოფის ან დაფარვის ამოცანაზე. ჩვენს მოდელზე მუშაობისას, მიღებული შედეგების პერიოდული ტესტირების მიზნით, ხშირად გვიწევდა დაფარვისა და დაყოფის კონკრეტული ამოცანების გადაჭრა. ამიტომ გადაწყვიტეთ შეგვექმნა შესაბამისი ალგორითმი, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა, კვლევის

განმავლობაში მარტივად ჩაგვეტარებინა სხვადასხვა ტიპის ექსპერიმენტები. ნაშრომზე მუშაობისას, ასევე სხვადასხვა სამეცნიერო პროექტებში ამ ალგორითმის გამოყენების შედეგად, საწყისი ალგორითმი ნელ-ნელა განვითარდა და დაიხვეწა. საბოლოოდ, მივიღეთ ეფექტური ზუსტი ალგორითმი, რომელსაც ასევე წარმოვადგენთ წინამდებარე ნაშრომში, როგორც ჩვენი კვლევის ერთ-ერთ შედეგს.

თავი 1. მინიმალური დაფარვისა და დაყოფის კლასიკური ამოცანები და მათი გადაჭრის გზები

1.1. დაფარვისა და დაყოფის ამოცანები

დაფარვის, დაყოფის და ჩალაგების ამოცანები წარმოადგენს მათემატიკის და კომპიუტერული მეცნიერების ერთ-ერთ კლასიკურ პრობლემას, რომელიც მიეკუთვნება რიჩარდ კარპის 21 NP-სრულ პრობლემათა სიმრავლეს (Karp, 1972) და რომელიც ცნობილია პრაქტიკული გამოყენებების სიუხვით. სწორედ ამის გამო, აღნიშნული პრობლემის კვლევის პროცესში შეიქმნა დისკრეტული ოპტიმიზაციის ამოცანების გადაჭრის არაერთი ფუნდამენტური მეთოდი და ზუსტი თუ მიახლოებითი ალგორითმი.

განვმარტოთ დაფარვის ამოცანა ფორმალურად (Christofides, 1975). განვიხილოთ სასრული $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ სიმრავლე და მისი ქვესიმრავლეთა კლასი $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$.

განსაზღვრება 1. $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ სიმრავლეთა კლასს ეწოდება R სიმრავლის დაფარვა, თუ R სიმრავლის ყოველი r_i ($i = \overline{1, m}$) ელემენტი მიეკუთვნება \mathcal{S}' კლასის რომელიმე სიმრავლეს (ერთს მაინც).

განსაზღვრება 2. $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ სიმრავლეთა კლასს ეწოდება R სიმრავლის ჩალაგება, თუ R სიმრავლის ყოველი r_i ($i = \overline{1, m}$) ელემენტი შეიძლება მიეკუთვნებოდეს \mathcal{S}' კლასის მხოლოდ ერთ სიმრავლეს.

განსაზღვრება 3. R სიმრავლის $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ დაფარვას, რომელიც ამავე დროს მისი ჩალაგებაც არის ეწოდება R სიმრავლის დაყოფა.

მაშასადამე $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ სიმრავლეთა კლასი არის R სიმრავლის დაყოფა, როდესაც R სიმრავლის ყოველი r_i ($i = \overline{1, m}$) ელემენტი მიეკუთვნება \mathcal{S}' კლასის მხოლოდ ერთ რომელიმე სიმრავლეს.

თუ \mathcal{S} სიმრავლის ყოველ S_j ($j = \overline{1, n}$) სიმრავლეს მივანიჭებთ გარკვეულ c_j ($j = \overline{1, n}$) (დადებით) ფასს, ასევე R და \mathcal{S} სიმრავლეების ელემენტებს შორის შემოვიღებთ $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ ინციდენციის მატრიცას:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & r_i \notin S_j \\ 1, & r_i \in S_j \end{cases} \quad (1)$$

მაშინ მინიმალური დაფარვის, ჩალაგების და დაყოფის ამოცანები შეგვიძლია შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბოთ:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min_{Ax \geq e} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min_{Ax \leq e} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min_{Ax = e} \quad (2)$$

სადაც $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ არის \mathcal{S}' დაფარვის მახასიათებელი ვექტორი:

$$x_j = \begin{cases} 0, & S_j \notin \mathcal{S}' \\ 1, & S_j \in \mathcal{S}' \end{cases} \quad (3)$$

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ და $e = (1, 1, \dots, 1)$ კი, შესაბამისად, ფასების და ერთეულოვანი ვექტორებია.

აქვე შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ ბევრ პრაქტიკულ ამოცანაში $c_j = 1$ ($j = \overline{1, n}$), ანუ ყველა სიმრავლეს ერთნაირი ფასი აქვს მინიჭებული, თუმცა ეს არ ამარტივებს ამოცანას.

განსაზღვრება 4. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ამონახსნის ფასი ეწოდება სიდიდეს:

$$C = \sum_{j=1}^n c_j x_j. \quad (4)$$

A მატრიცის ენაზე, მაგალითად, დაფარვის ამოცანა ნიშნავს მატრიცის სვეტებით მატრიცის სტრიქონების დაფარვას, ანუ ისეთი სვეტების ამორჩევას, რომ თითოეულ სტრიქონში ერთი ერთიანი მაინც ეწეროს. თუ მოვითხოვთ, რომ ამორჩეული სვეტებით შექმნილი ქვემატრიცის თითოეულ სტრიქონში ზუსტად ერთი ერთიანი გვხვდებოდეს, მაშინ დაყოფის ამოცანაზე ვსაუბრობთ. ზოგადად, დაფარვისა და დაყოფის ამოცანების გადაჭრის მეთოდები მსგავსია. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, თუ ერთ-ერთი მათგანისთვის ჩამოვყალიბებთ გარკვეულ მიდგომას, როგორც წესი, ის მცირე მოდიფიკაციით მარტივად გავრცელებადია მეორე ამოცანისთვისაც.

1.2. დაფარვისა და დაყოფის ამოცანის გამოყენებები

დაფარვის, დაყოფის და ჩალაგების ამოცანებზე დაიყვანება ისეთი პრაქტიკული გამოყენებების მქონე პრობლემები, როგორიცაა: საჰაერო ნავიგაციაში თვითმფრინავების ეკიპაჟების დაგეგმვა (Marsten & Shepardson, 1981; Ehr Gott & Ryan, 2002) - დღეს ყველა დიდი ავიაკომპანია იყენებს სხვადასხვა პროგრამულ უზრუნველყოფას, რომელშიც ნაწილობრივ ან სრულად ავტომატიზებულია ფრენების დაგეგმვა და ეკიპაჟების გრაფიკების შედგენა; მარშრუტიზაციის ამოცანები (Balinski & Quandt, 1964; Cordeau, Laporte, Savelsbergh, & Vigo, 2007), რომლებიც უზრუნველყოფენ ოპტიმალური მარშრუტების აგებას - აქტიურად გამოიყენება, მაგალითად, სადისტრიბუციო ქსელების მქონე კომპანიების მიერ; ობიექტების განთავსება (Daskin, 2013), როდესაც გარკვეული ფაქტორების გათვალისწინებით ხდება ობიექტების (ქარხნების, საწყობების, სასწრაფო თუ სახანძრო დახმარების ცენტრების და ა.შ.) ოპტიმალური განთავსება საჭირო ტერიტორიაზე; ტერიტორიების საამომრჩევლო ოლქებად დაყოფა (Garfinkel & Nemhauser, 1970; Bozkaya, Erkut, & Laporte, 2003), როდესაც გარკვეული კრიტერიუმების და შეზღუდვების გათვალისწინებით, ხდება გეოგრაფიული რეგიონის დაყოფა ოლქებად სხვადასხვა პოლიტიკური პროცესების (წინასაარჩევნო კამპანია, არჩევნები) წარსამართად; კომპიუტერული ვირუსების იდენტიფიკაცია, მათი საწინააღმდეგო პროგრამული უზრუნველყოფის (ანტივირუსების) შექმნა (Williamson & Shmoys, 2011); სამუშაოების განაწილება (Christofides, 1975), როდესაც სხვადასხვა კომპეტენციების მქონე პირებს შორის ხდება სამუშაოების ოპტიმალური განაწილება; დაფარვის, დაყოფის და ჩალაგების ამოცანები ასევე გვხვდება ისეთ სამეცნიერო მიმართულებებში, როგორიცაა მანქანური სწავლა, ინფორმაციის მოძიება, ინფორმაციის აღმოჩენა (Christofides, Mingozi, Toth, & Sandi, 1979; Koronacki, Raś, Wierzchoń, & Kacprzyk, 2010; Cormode, Karloff, & Wirth, 2010) და ა.შ.

1.3. დაფარვისა და დაყოფის ამოცანების გადაჭრის გზები

დაფარვის და დაყოფის ამოცანების გადაჭრის მეთოდები შეგვიძლია გავყოთ ორ ძირითად ჯგუფად - ზუსტი და მიახლოებითი მეთოდების ჯგუფებად (Balas & Padberg, 1976; Caprara, Toth, & Fischetti, 2000). ზუსტი მეთოდები პოულობენ ზუსტ, ანუ საუკეთესო ამონახსნებს, მაგრამ, ამოცანის სირთულიდან გამომდინარე, ამას ანდომებენ შედარებით დიდ დროს და ხარჯავენ მეტ გამოთვლით რესურსს. ყველაზე უარეს შემთხვევებში, შეიძლება დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლის სრული გადარჩევაც კი მოხდეს. მიახლოებითი მეთოდები კი, წინასწარ

განსაზღვრულ, ლოგიკურ მოსაზრებებზე დაყრდნობით, აანალიზებენ საძიებო სივრცის გარკვეულ, საინტერესო არეებს, და ხშირ შემთხვევაში, პოულობენ საუკეთესო (ზუსტ) ამონახსნთან მიახლოებულ ამონახსნებს. ამოცანის სპეციფიკიდან და სირთულიდან გამომდინარე, დაფარვის ზოგადი ამოცანების გადაჭრის მიახლოებითი მეთოდები სხვადასხვა ევრისტიკულ მიდგომებს ეფუძნება.

ზუსტ და მიახლოებით მეთოდებს შორის არჩევანი, როგორც წესი, კეთდება ამოცანის განზომილების და ხელმისაწვდომი გამოთვლითი რესურსის გათვალისწინებით. დღეს არსებული კომპიუტერული ტექნიკის გამოყენებით შესაძლებელია საკმაოდ დიდი განზომილებების მქონე დაფარვის ამოცანების ზუსტად ამოხსნა გონივრულ დროში. პრაქტიკული გამოყენებების მქონე ბევრ ამოცანაში გვხვდება სწორედ ამგვარი განზომილებები. თუმცა ასევე არსებობს ამოცანების დიდი ჯგუფი, რომელთაც ახასიათებთ დიდი განზომილებები და რომელთათვისაც ზუსტი მეთოდებით საუკეთესო ამონახსნის გონივრულ დროში პოვნა არარეალურია.

გამომდინარე იქიდან, რომ ჩვენს ნაშრომში ძირითადად განიხილება ამოცანები, რომლებშიც, ობიექტურთან ერთად, ხდება სუბიექტური ინფორმაციის გათვალისწინება და ამ ტიპის ინფორმაციის წყარო ხშირად ექსპერტთა მიერ დაწერილი შეფასებებია, მეტ ყურადღებას ვუთმობთ ზუსტ მეთოდებს, რადგან ამგვარი ამოცანების განზომილებებისთვის შესაძლებელია ზუსტი ამონახსნების გონივრულ დროში პოვნა. მითუმეტეს, რომ ჩვენ გთავაზობთ დაყოფა-დაფარვის ამოცანების ამოხსნის ზუსტ ალგორითმს, რომელიც გამოირჩევა კომპიუტერული რესურსების ეფექტურად გამოყენებით და სწრაფქმედებით.

ჩვენი ალგორითმის დეტალურ განხილვამდე, შევნიშნოთ, რომ ზუსტი ალგორითმების კლასიკური მიდგომა წარმოდგენილია ქრისტოფიდესის 1975 წლის ნაშრომში (Christofides, 1975). აღნიშნული მიდგომა ეფუძნება შტოების და საზღვრების მეთოდს, რომლის ძირითადი არსი იმაში მდგომარეობს, რომ საძიებო ხეში ოპტიმალური ამონახსნის ძიებისას, ამოცანის პირობების და შეზღუდვების გათვალისწინებით, შეიძლება ადრევე აღმოჩნდეს, რომ გარკვეული განშტოებების განხორციელებას, ანუ საძიებო ხის გარკვეულ ფრაგმენტებში ჩასვლას, აზრი არ აქვს, რადგან მასში ვეღარ ვიპოვით ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს და არის ალგორითმის მუშაობის წინა საფეხურებზე ნაპოვნ ამონახსნზე უკეთესი.

რაც შეეხება ჩვენს ალგორითმს, ის ეფუძნება დონალდ კნუტის 2000 წლის ნაშრომში (Knuth, 2000) წარმოდგენილ დინამიური დაპროგრამების ეფექტურ ტექნიკას და ე.წ. “ზუსტი დაფარვის” ალგორითმს. ამ ერთი შეხედვით მარტივი ტექნიკის გამოყენება საშუალებას იძლევა, ავაგოთ ძალიან ეფექტური დაბრუნებით ძიების (backtracking), სიღრმეში ძიების (depth-first search) ალგორითმები. გრაფიკული ინტერპრეტაციიდან გამომდინარე, დონალდ კნუტმა აღნიშნულ ტექნიკას “მოცეკვავე ბმულები” უწოდა.

განვიხილოთ მოცეკვავე ბმულების არსი. წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს ორად ბმული სია და x მიუთითებს მის რომელიმე ელემენტზე. ამ ელემენტის წინა და მომდევნო ელემენტებზე მიმთითებლები აღვნიშნოთ შესაბამისად $L[x]$ -ით და $R[x]$ -ით. მაშინ ოპერაციების შემდეგი მიმდევრობა:

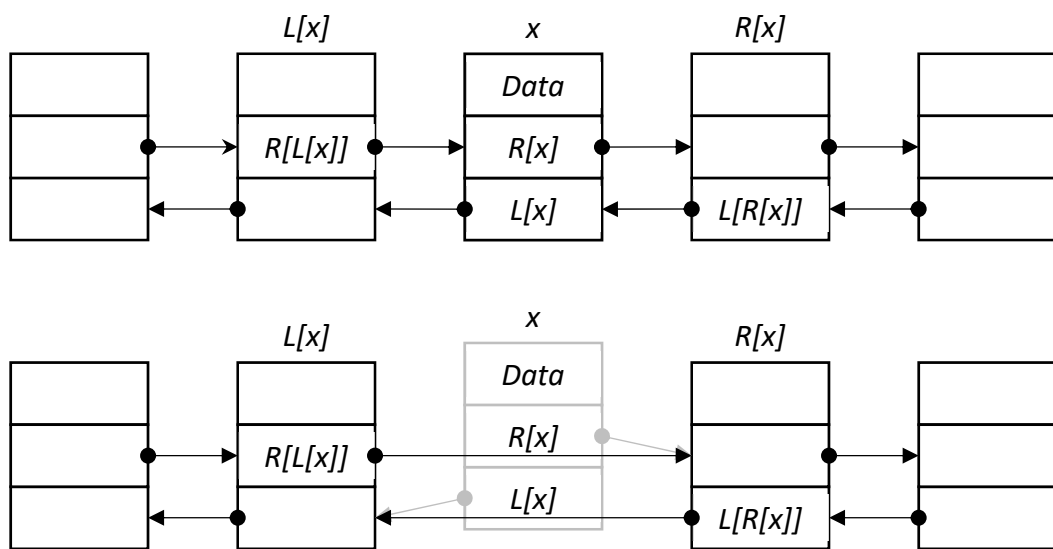
$$\begin{aligned} R[L[x]] &::= R[x]; \\ L[R[x]] &::= L[x]; \end{aligned} \tag{5}$$

ამოაგდებს x ელემენტს სიიდან. ხოლო

$$\begin{aligned} R[L[x]] &:= x; \\ L[R[x]] &:= x; \end{aligned} \tag{6}$$

ოპერაციები x ელემენტს აღადგენს სიაში (ჩასვამს ძველ ადგილზე). ტექნიკის გრაფიკული გამოსახულება მოცემულია ფიგურა 1-ზე.

განსაკუთრებით საინტერესოა (6) ოპერაციები, რადგან x ელემენტის სიიდან წაშლის შემდეგ, თითქოს $L[x]$ -სა და $R[x]$ -ს დაკარგული აქვთ ძველი სემანტიკური მნიშვნელობა და მოწესრიგებულმა პროგრამისტმა შეიძლება $null$ -იც კი მიანიჭოს მათ. მაგრამ თუ ასე არ მოვიქცევით, მოგვიანებით მარტივად შეგვეძლება x ელემენტის სიაში დაბრუნება, ანუ წინა მდგომარეობის აღდგენა. მსგავსი რამ კი ხშირად არის საჭირო დაბრუნებით ძიების (backtracking) ალგორითმებში. ასევე აღსანიშნავია, რომ (5) ოპერაციების შედეგების გაუქმებისთვის, ანუ მათ შესრულებამდე არსებული მდგომარეობის აღდგენისთვის მხოლოდ x -ის შენახვაა საკმარისი.



ფიგურა 1. “მოცეკვავე ბმულების” ტექნიკის სქემატური ილუსტრაცია

მოცეკვავე ბმულების ტექნიკის ალტერნატივაა საძიებო ხის მდგომარეობების სტეკის გამოყენება. ამ შემთხვევაში, სტეკში უნდა შევინახოთ მიმდინარე კვანძის მშობელი კვანძების შესაბამისი მდგომარეობები და უკან დაბრუნებისას (საძიებო ხეში ზემოთ მოძრაობისას), უნდა აღვადგინოთ საჭირო მდგომარეობა. მსგავსი მიდგომის გამოყენება დასაშვებია მარტივი, მცირე ზომის საძიებო ხის მქონე ამოცანებისთვის, მაგრამ ზოგად შემთხვევებში, ხეში ნავიგაციისას (ყოველ ახალ დონეზე გადასვლისას) მისი მდგომარეობის ასლის გაკეთება და შენახვა მოითხოვს დამატებით დროს და მეხსიერების რესურსებს.

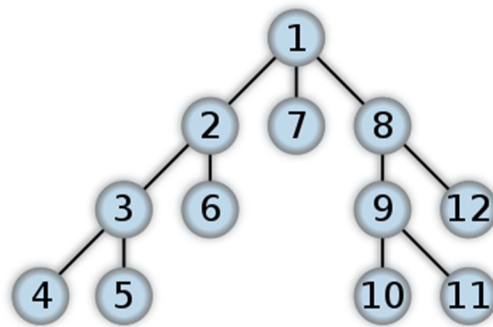
რომ შევაჯამოთ, თუ გარკვეული ამოცანის მონაცემთა სტრუქტურები აღიწერება ორად ბმული სიების გამოყენებით და თუ ამ ამოცანების გადაჭრის ალგორითმები (მაგალითად, სიღრმეში ძიება) საჭიროებენ ისეთ ოპერაციებს, რომლებიც ხშირად შლიან და აღადგენენ სიების ელემენტებს, (5)-(6) ტექნიკით სარგებლობა იქნება ძალიან ეფექტური როგორც ოპერატიული მეხსიერების გამოყენების, ასევე სწრაფქმედების თვალსაზრისით.

მოცეკვავე ბმულების ტექნიკის გამოყენების ერთ-ერთ მაგალითად, დონალდ კნუტი ასახელებს ე.წ. “ზუსტი დაფარვის” (exact cover) ამოცანას. მას ზუსტი დაფარვის ამოცანა განსაზღვრული აქვს, როგორც ჩვენ მიერ მატრიცების ენაზე განსაზღვრული დაყოფის ამოცანა ფასების გარეშე ($c_j = 1, j = \overline{1, n}$). ამოცანის NP-სისრულიდან გამომდინარე, მისი გადაჭრის

ბუნებრივ გზად შემოთავაზებულია დაბრუნებით ძიება (backtracking) და შესაბამისი მარტივი ალგორითმი, რომელსაც ავტორმა პირობითად უწოდა “ალგორითმი X”. ალგორითმი მუშაობს ცდის და შეცდომის (trial-and-error) მეთოდით:

ალგორითმი X	
01.	თუ A მატრიცა ცარიელია, ამოცანა გადაჭრილია;
02.	ალგორითმი წარმატებულად წყვეტს მუშაობას;
03.	სხვა შემთხვევაში, შევარჩიოთ სტრიქონი r (დეტერმინისტულად);
04.	შევარჩიოთ სვეტი c ისე, რომ $A[r, c] = 1$ (არადეტერმინისტულად);
05.	შევიტანოთ სვეტი c ნაწილობრივ (პოტენციურ) ამონახსნში;
06.	თითოეული i -სთვის, რომლისთვისაც $A[i, c] = 1$,
07.	სტრიქონი i წავშალოთ A მატრიციდან;
08.	თითოეული j -სთვის, რომლისთვისაც $A[i, j] = 1$,
09.	სვეტი j წავშალოთ A მატრიციდან;
10.	ალგორითმი რეკურსიულად ვამუშაოთ შემცირებულ A მატრიცაზე;

c სვეტის არადეტერმინისტულად შერჩევა ალგორითმის მიერ საკუთარი თავის რეკურსიულ გაშვებას ნიშნავს. რეკურსიული ალგორითმები ეშვება სხვადასხვა (შერჩეული) სვეტის მიხედვით შემცირებულ A მატრიცაზე. თუ სტრიქონი r მთლიანად ნულებისგან შედგება, ალგორითმის რეკურსიული გაშვება აღარ ხდება და ალგორითმი წარუმატებლად წყვეტს მუშაობას. რეკურსიული ქვეალგორითმები (ქვეამოცანები) წარმოქმნიან საძიებო ხეს, რომლის სათავეში საწყისი ამოცანაა და რომლის k -ური დონე შეესაბამება ქვეამოცანას, რომელიც წარმოშვა k -ურმა შერჩეულმა სვეტმა. ხის შემოვლა ხდება სიღრმეში ძიების მეთოდოლოგიით (იხ. ფიგურა 2).

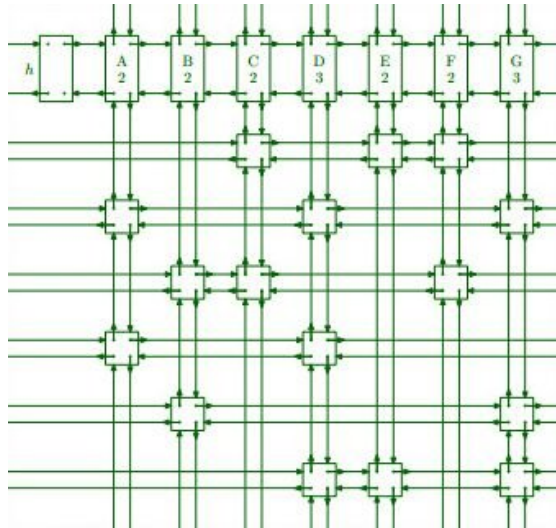


ფიგურა 2. ხეში სიღრმეში ძიების თანმიმდევრობა

r სტრიქონის შერჩევის ნებისმიერი წესი გვაპოვნინებს ამოცანის ყველა ამონახსნს, თუმცა ზოგი წესი უფრო ეფექტურად იმუშავებს, ვიდრე დანარჩენები, რადგან სვეტის შერჩევაზე არის დამოკიდებული საძიებო ხის სტრუქტურა, რომელიც აიგება ალგორითმის მუშაობისას. შესაბამისად, ერთ-ერთი ბუნებრივი და ამავე დროს ეფექტური მიდგომა არის, ყოველ ეტაპზე ავირჩიოთ ქვეპრობლემა, რომლისაც მივყავართ ყველაზე მცირე რაოდენობის განშტოებებამდე (Golomb & Baumart, 1965). A მატრიცის ენაზე კი ეს ნიშნავს, რომ ყოველ ეტაპზე უნდა ავირჩიოთ სტრიქონი, რომელიც ყველაზე მცირე რაოდენობის ერთიანებს შეიცავს A მატრიცის მიმდინარე ვერსიაში.

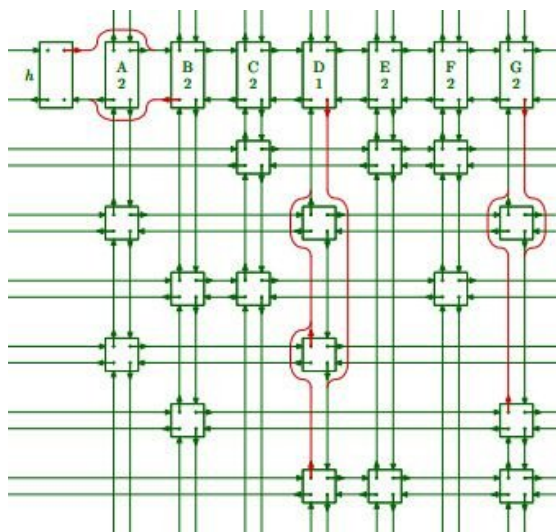
როგორ ვისარგებლოთ მოცეკვავე ბმულების ტექნიკით დაფარვის ამოცანების გადასაჭრელად? დონალდ კნუტი გვთავაზობს ოთხად ბმული მატრიცის გამოყენებას, რაც იმას

ნიშნავს, რომ A მატრიცის სტრიქონებიც და სვეტებიც შევინახოთ ორად ბმული ციკლური სიების სახით. დამატებითი ინფორმაციის შესანახად, როგორცაა, მაგალითად, სტრიქონში ან სვეტში ერთიანების რაოდენობა, ან დასახელება (იდენტიფიკაციის მიზნებისთვის), მონაცემთა სტრუქტურის მატრიცაში ასევე დამატებულია ე.წ. "სათაური" კვანძები. მატრიცის გრაფიკული წარმოდგენა მოცემულია ფიგურა 3-ზე (შენიშვნა: ნაშრომში დონალდ კნუტი აყალიბებს ზუსტი დაფარვის ამოცანას, როგორც სტრიქონებით სვეტების დაფარვას).



ფიგურა 3. ოთხად ბმული მატრიცა - მონაცემთა სტრუქტურა ზუსტი დაფარვის (დაყოფის) ამოცანისთვის

იმისათვის, რომ ალგორითმი X -ი ვამუშაოთ აგებულ მონაცემთა სტრუქტურაზე, საჭიროა, გვქონდეს მატრიციდან სტრიქონის და სვეტის წაშლის და აღდგენის ოპერაციები. სწორედ ამ დროს ვიყენებთ მოცეკვავე ბმულების (5)-(6) ტექნიკას. მატრიცის სვეტის ან სტრიქონის წაშლა მიმთითებლების გადამისამართებას ნიშნავს, რომლიც მიიღწევა (5) ოპერაციებით. ხოლო როდესაც აღმოჩნდება, რომ კონკრეტული მიმართულებით საძიებო ხის სიღრმეში ჩასვლას აზრი აღარ აქვს, ან მივაღწიეთ მაქსიმალურ დონეს, ხეში უკან დაბრუნება, ანუ წაშლილი სტრიქონებისა და სვეტების აღდგენა ხდება (6) ოპერაციებით (იხ. ფიგურა 4).



ფიგურა 4. მოცეკვავე ბმულების ტექნიკის გამოყენება ოთხად ბმულ მატრიცაში

აღწერილი მიდგომა საშუალებას გვაძლევს, რომ ოპერატიულ მეხსიერებაში ვიმუშაოთ ერთხელ შექმნილ მონაცემთა სტრუქტურასთან - ოთხად ბმულ მატრიცასთან - ისე, რომ საძიებო ხეში ნავიგაციის დროს, ყოველი განშტოებისას არ გვიწევდეს მატრიცის ასლის გაკეთება და შენახვა იმისთვის, რომ მომავალში შევძლოთ უკან დაბრუნება, ანუ მატრიცის წინა მდგომარეობის აღდენა.

დონალდ კნუტი გვთავაზობს ალგორითმ X -ის ფსევდოკოდს, რომლიც რეალიზებულია ზემოთ აღწერილი მონაცემთა სტრუქტურისთვის და იყენებს მოცეკვავე ბმულების ტექნიკას. ალგორითმ X -ის ამ ვერსიას ავტორი "DLX"-ს უწოდებს. ამავე ნაშრომში (Knuth, 2000) შესწავლილია DLX ალგორითმის ეფექტურობის საკითხები.

1.4. DLX ალგორითმის მოდიფიკაცია

იქიდან გამომდინარე, რომ ჩვენს ნაშრომში განხილული დაფარვა / დაყოფის ამოცანები არ გამოირჩევიან ძალიან დიდი განზომილებებით, რადგან ინფორმაციის ერთ-ერთ წყაროდ ადამიანის ან ადამიანთა ჯგუფის მიერ გაკეთებული შეფასებები განიხილება, მიზანშეწონილად მივიჩნით, რომ როდესაც კი ეს შესაძლებელია, ვიმოქმედოთ ზუსტი ალგორითმის გამოყენებით, რაც მოგვცემს ოპტიმალური ამონახსნის (და არა მისი მიახლოების) პოვნის გარანტიას. როდესაც ამოცანის განზომილებები დიდია და ზუსტი მეთოდების გამოყენება არაპრაქტიკული ხდება, გვიწევს მიახლოებით მეთოდებს მივმართოთ, მაგრამ, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ჩვენ მიერ შექმნილი ზუსტი ალგორითმის გამოყენება ასევე შესაძლებელია მიახლოებით მეთოდებშიც. ეფექტური ზუსტი ალგორითმის მისაღებად, დონალდ კნუტის მიერ შემოთავაზებულ DLX ალგორითმს და მონაცემთა სტრუქტურას გავუკეთეთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი მოდიფიკაცია (მოდიფიცირებულ ვერსიას პირობითად ვუწოდოთ "ალგორითმი MDLX"):

1. მონაცემთა სტრუქტურაში, ძირითად მატრიცაში, სვეტების სათაური-კვანძების (header node) გარდა შემოვიღეთ სტრიქონების სათაური-კვანძები. ამგვარად ოთხად ბმულ მატრიცაში გაჩნდა სტრიქონების სათაური სვეტი და სვეტების სათაური სტრიქონი. სათაური-კვანძები ინახავენ ინფორმაციას შესაბამის სვეტში ან სტრიქონში არსებული კვანძების (A მატრიცის ენაზე - ერთიანების) რაოდენობის, ასევე ყოველ S_j ($j = \overline{1, n}$) სიმრავლეების ფასების c_j ($j = \overline{1, n}$) შესახებ. სათაურ-კვანძებში ასევე დამატებულია გარკვეული ველები, რომლებიც ამარტივებს ამონახსნების ძიებას და მათ მომდევნო დამუშავებას (მაგალითად, დამფარავი სვეტების პოვნის შემდეგ შესაბამისი სიმრავლეების იდენტიფიკაციას). ამგვარი ველებია: A მატრიცის სტრიქონის თუ სვეტის ინდექსი, მიმთითებელი შესაბამის S_j ($j = \overline{1, n}$) სიმრავლეზე და ა.შ.

ტექნიკური თვალსაზრისით გათვალისწინებულია კიდევ ერთი შესაძლებლობა: ოთხადბმული მატრიცის ავტომატური გარდაქმნა ორგანზომილებიან მასივში, რაც ასევე ამარტივებს ხოლმე მის დამუშავებას.

2. ალგორითმ X -ით შესაძლებელია ყველა ზუსტი დაფარვის (ანუ დაყოფის) პოვნა. ამისთვის საჭიროა საძიებო ხის სრულად შემოვლა. თუმცა მინიმალური დაყოფის ამოცანების შემთხვევაში, შესაძლებელია ალგორითმის ოპტიმიზაცია. კონკრეტულად, თუ (პოტენციური) ამონახსნის აგების პროცესში აღმოჩნდა, რომ მისმა ფასმა (4) უკვე გადააჭარბა ალგორითმის მუშაობის წინა ეტაპებზე ნაპოვნი საუკეთესო ამონახსნის ფასს, აღნიშნული პოტენციური ამონახსნის ბოლომდე აგებას აზრი აღარ აქვს, რადგან

ის რომც აღმოჩნდეს ამონახსნი, მისი ფასი მეტი იქნება უკვე ნაპოვნი ამონახსნ(ებ)ის ფასზე და მოგვიწევს მისი გადაგდება. სწორედ ეს ფაქტორი გავითვალისწინეთ (იხ. სტრიქონი #10) ალგორითმ X-ში და მივიღეთ მისი მოდიფიცირებული ვერსია:

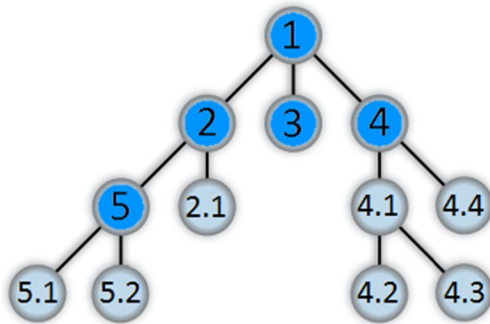
ალგორითმი MDLX - მინიმალური დაყოფა

01. თუ A მატრიცა ცარიელია, ამოცანა გადაჭრილია;
 02. თუ მიღებული ამონახსნის ფასი $<$ ოპტიმალური ამონახსნის ფასზე,
 03. ოპტიმალური ამონახსნების სიმრავლე ცარიელდება;
 04. ოპტიმალურ ამონახსნად ცხადდება მიღებული ამონახსნი;
 05. სხვა შემთხვევაში, თუ მიღებული ამონახსნის ფასი $=$ ოპტიმალური ამონახსნის ფასს,
 06. ოპტიმალური ამონახსნების სიმრავლეს ემატება მიღებული ამონახსნი;
 07. ალგორითმი წარმატებულად წყვეტს მუშაობას;
 08. სხვა შემთხვევაში, შევარჩიოთ სტრიქონი r (დეტერმინისტულად);
 09. შევარჩიოთ სვეტი c ისე, რომ $A[r, c] = 1$ (არადეტერმინისტულად);
 10. თუ პოტენციური ამონახსნის ფასი $+ c$ სვეტის ფასი \leq ოპტიმალური ამონახსნ(ებ)ის ფასზე,
 11. შევიტანოთ სვეტი c პოტენციურ ამონახსნში;
 12. თითოეული i -სთვის, რომლისთვისაც $A[i, c] = 1$,
 13. სტრიქონი i წავშალოთ A მატრიციდან;
 14. თითოეული j -სთვის, რომლისთვისაც $A[i, j] = 1$,
 15. სვეტი j წავშალოთ A მატრიციდან;
 16. ალგორითმი რეკურსიულად ვამუშაოთ შემცირებულ A მატრიცაზე;
-

რაც შეეხება #02-06 სტრიქონებს, აღნიშნული მოდიფიკაცია იმისთვის არის გაკეთებული, რომ ახალი ამონახსნის (ანუ ალგორითმის მუშაობისას გენერირებული ახალი დაყოფის) ფასის გათვალისწინებით, შეიძლება მოხდეს წინა ეტაპებზე ნაპოვნი ამონახსნების გადაყრა. ამავე სტრიქონებშია ჩადებული ლოგიკა, რომ თუ არსებობს ერთიდაიგივე ფასის მქონე რამდენიმე ოპტიმალური ამონახსნი, შევინახოთ ყველა მათგანი. ეს შემთხვევა შეესაბამება სიტუაციას, როდესაც სვეტების განსხვავებული სიმრავლეები წარმოადგენენ განსხვავებულ დაყოფებს და მათი ფასები იდენტურია.

3. დაყოფის ამოცანების გარდა, ბევრი პრაქტიკული გამოყენება აქვს დაფარვის ამოცანებსაც. ბევრი რეალური პრობლემა სწორედ დაფარვის ამოცანაზე დაიყვანება. აქედან გამომდინარე, შევიმუშავეთ ალგორითმის კიდევ ერთი მოდიფიკაცია, რომელიც იგივე მონაცემთა სტრუქტურაზე მუშაობს, მაგრამ ეძებს მინიმალურ დაფარვებს (დაყოფების ნაცვლად). თუ ალგორითმ MDLX-ში გავაქრობთ #14-15 სტრიქონებს, კონკრეტული სვეტით კონკრეტული სტრიქონის დაფარვისას არ წაიშლება ის სვეტები, რომლებიც ასევე ფარავენ აღნიშნულ სტრიქონს. შესაბამისად, მათი გამოყენება დასაშვებია იქნება ალგორითმის მომდევნო საფეხურებზე და შეიძლება მივიღოთ ამონახსნები, რომლებიც შეიცავენ ერთიდაიგივე სტრიქონის დამფარავ სვეტებს (თუმცა, რაც მთავარია, სვეტებით დაფარული იქნება ყველა სტრიქონი). უნდა აღინიშნოს, რომ მინიმალური დაფარვის ალგორითმში #14-15 სტრიქონების არარსებობა დიდ გავლენას ახდენს საძიებო ხის სტრუქტურაზე და, შესაბამისად, ალგორითმის სწრაფქმედებაზეც. ნათელია, რომ მინიმალური დაფარვის ალგორითმის მუშაობისას, A მატრიცა უფრო “წელა პატარავდება”, შესაბამისად, ხდება მეტი განშტოებები და მეტი გამოთვლები.

4. დღეს იშვიათად თუ მოიძებნება კომპიუტერი, რომლის პროცესორს ერთზე მეტი ბირთვი არ გააჩნია. ასევე პრობლემას აღარ წარმოადგენს რამდენიმე პროცესორის არსებობა თუნდაც შედარებით დაბალფასიან სერვერებში. ინტენსიური გამოთვლების წარმოებისას ასევე ხშირად გამოიყენება კომპიუტერების კლასტრები. ამიტომ გადაწყვეტეთ, რომ ალგორითმისთვის გაგვეკეთებინა კიდევ ერთი მოდიფიკაცია, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა, გამოთვლები გვეწარმოებინა პარალელურ რეჟიმში. მითუმეტეს, რომ ამის გაკეთება არც თუ ისე რთულია იმ ტიპის ალგორითმების შემთხვევაში, რა ტიპის ალგორითმსაც ჩვენ ვიყენებთ. მოუსი და ოზი (Maus & Aas, 1995) გვთავაზობენ რეკურსიული ალგორითმების პარალელიზაციის მარტივ ტექნიკას. სწორედ ამ ტექნიკას ეფუძნება ჩვენი მიდგომა. კონკრეტულად, საძიებო ხეში სიღრმეში ძიების დაწყებამდე ხდება სიგანეში ძიება (breadth-first search). როდესაც ხის კვანძების გარკვეული რაოდენობა დამუშავდება, სიგანეში ძიება წყდება და ამ კვანძების ქვედა შრეებში იწყება სიღრმეში ძიება პარალელურ რეჟიმში. სიგანეში ძიების დროს განხილული კვანძების რაოდენობა განისაზღვრება, მაგალითად, ხელმისაწვდომი პროცესორების რაოდენობით. მაგალითად, თუ პარალელური გამოთვლებისთვის ხელმისაწვდომია 5 პროცესორი, საძიებო ხის შემოვლა მოხდება ფიგურა 5-ზე მოცემული თანმიმდევრობით.



ფიგურა 5. პარალელური გამოთვლების წარმოების სქემა

მას შემდეგ, რაც პარალელური გამოთვლები დაამუშავებენ საძიებო ხის მათთვის გამოყოფილ ფრაგმენტებს (“ქვეხეებს”), ხდება მათ მიერ ნაკოვნი ამონახსნების შერწყმა, შედარება და საუკეთესოს არჩევა.

ცხადია, განხილული მარტივი მიდგომა ზოგადად არ იძლევა პარალელურ გამოთვლებს შორის სამუშაოების თანაბარი განაწილების გარანტიას. მიუხედავად ამისა, ტექნიკა ხშირ შემთხვევებში ამართლებს. ნებისმიერ, საკმაოდ ცუდ შემთხვევებშიც კი სახეზეა ალგორითმის მუშაობის დროითი მაჩვენებლების თუნდაც მცირე გაუმჯობესება. შეგვიძლია განვიხილოთ მრავალი იდეა, თუ როგორ გავაუმჯობესოთ პარალელურ გამოთვლებს შორის სამუშაოების გადანაწილება, თუმცა ჩვენი ამოცანებიდან გამომდინარე, მიღებული შედეგები საკმარისად მივიჩნით და პარალელური ალგორითმის დახვეწა სამომავლო სამუშაოებისთვის გადავდეთ.

აღწერილი MDLX ალგორითმი ჩვენთვის გახდა უნივერსალური ბაზის დაფარვისა და დაყოფის ამოცანების გადაჭრისთვის და, როგორც მომდევნო თავებში ვნახავთ, მას კიდევ რამდენიმე მოდიფიკაცია გაუკეთდა სხვადასხვა შესაძლებლობების მხარდასაჭერად.

დონალდ კნუტის მიერ შემოთავაზებული დაყოფის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი ერთ-ერთ საუკეთესო ალგორითმად ითვლება მეხსიერების ოპტიმალურად გამოყენების ხარჯზე მიღწეული სისწრაფის თვალსაზრისით. როგორც აღვნიშნეთ, ჩვენ მიერ შესრულებული მოდიფიკაციების გათვალისწინებით, მინიმალური დაყოფის ამოცანებისთვის ის კიდევ უფრო ეფექტური ხდება. ჩვენი ალგორითმის და ჩვეულებრივი პერსონალური კომპიუტერის გამოყენებით, ზუსტად შეგვიძლია ამოვხსნათ რამდენიმე ასეული ელემენტის რამდენიმე ათასი სიმრავლით დაფარვის ამოცანები (ექსპერიმენტული შედეგები მოცემულია თავში “პროგრამული უზრუნველყოფა”), რაც, ხშირ შემთხვევაში, სრულიად საკმარისია ჩვენ მიერ განხილული პრაქტიკული ამოცანებისთვის. ალგორითმის პარალელური ვერსიით კი შესაძლებელია კიდევ უფრო დიდი განზომილებების მქონე ამოცანების ზუსტად გადაჭრა. თუმცა არსებობს (მაგალითად, სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის მრავალპუნქტიანი, ძალიან დიდი ქსელის მქონე) ამოცანები, სადაც განზომილებები გაცილებით დიდია: დასაფარი ელემენტების რაოდენობა რამდენიმე ათასი, ხოლო დამფარავი სიმრავლეების რაოდენობა ათეულობით ათასი. მსგავს შემთხვევებში აუცილებელი ხდება მიახლოებითი მიდგომების და ალგორითმების გამოყენება (Caprara, Toth, & Fischetti, 2000).

აქვე უნდა აღინიშნოს ჩვენი ზუსტი ალგორითმის კიდევ ერთი დადებითი მხარე, რაც მას გამოყენებადს ხდის დიდი განზომილებების შემთხვევებშიც: მას შემდეგ, რაც ალგორითმს მივაწვდით შემავალ მონაცემებს და ის დაიწყებს მუშაობას, მისი შეჩერება შესაძლებელია ნებისმიერ დროს და ამ შემთხვევაში ის იძლევა მიმდინარე მომენტისთვის ნაპოვნ საუკეთესო ამონახსნებს. ეს ამონახსნები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მიახლოებითი ამონახსნები (თუმცა შეუძლებელია შეფასება, რამდენად ახლოს არიან ისინი ოპტიმალურ ამონახსნთან). აღნიშნული ამონახსნები ასევე შეგვიძლია გამოვიყენოთ მიახლოებითი, ევრისტიკული ალგორითმების შემავალ მონაცემებად, რადგან, როგორც წესი, ამ ალგორითმებს ჭირდებათ ე.წ. მაინციალიზირებული მონაცემები, საწყისი პოპულაციები, რომლებზე დაყრდნობითაც ხდება საძიებო სივრცეში ნავიგაცია (Beasley & Chu, 1996; Al-Sultan, Hussain, & Nizami, 1996). შედარებით კარგი მაინციალიზირებული მონაცემებით, ანუ საძიებო სივრცის კარგი საწყისი წერტილით დაწყება უკეთესი მიახლოებითი ამონახსნის პოვნის მეტ შანსს იძლევა. როგორც წესი, მაინციალიზირებული მონაცემების გენერირება ხდება შემთხვევითი პრინციპით. ალტერნატიული გზაა, დიდი განზომილებების შემთხვევაში, პირველ ეტაპზე, გარკვეული დროის განმავლობაში ვამუშაოთ ჩვენი ზუსტი ალგორითმი და ამ დროის მანძილზე მის მიერ ნაპოვნი საუკეთესო ამონახსნები ავიღოთ მომდევნო ეტაპის - მიახლოებითი ალგორითმით გაგრძელების შემავალ მონაცემებად.

თავი 2. არასანდოობის კრიტერიუმის ინჟინერია დაფარვისა და დაყოფის ამოცანებში

2.1. უზუსტობა და განუზღვრელობა

თუ დაფარვისა და დაყოფის ამოცანების გამოყენებებს თვალს გადავავლებთ, ნათელი გახდება, რომ პრაქტიკაში იშვიათად გვხვდება ისეთი პრობლემები, რომელთა შემავალი მონაცემები სრულყოფილია. უფრო ხშირად, საქმე გვაქვს არასრულ მონაცემებთან, ანუ ინფორმაციის ნაკლებობასთან. ინფორმაციის ნაკლებობის კომპენსირება კი ხშირად ხდება ექსპერტული მონაცემებით, როდესაც ინფორმაციის გამდიდრება ხდება გარკვეული ცოდნისა და გამოცდილების გათვალისწინებით. ექსპერტულ მონაცემებს, თავის მხრივ, ყოველთვის ახლავს გარკვეული უზუსტობა და განუზღვრელობა.

ინფორმაციის უზუსტობა შეიძლება განპირობებული იყოს, მაგალითად, მისი აღწერის არამკაფიოობით. განუზღვრელობა კი - ინფორმაციის წყაროს არასარწმუნოობით, არასანდოობით.

დუბუა და პრადი თავიანთ ნაშრომში (Dubois & Prade, 1988) ინფორმაციულ ელემენტს უწოდებენ ოთხეულს: (ობიექტი, ატრიბუტი, მნიშვნელობა, სარწმუნოობა / სანდოობა / უტყუარობა). “ატრიბუტი” შეესაბამება ფუნქციას, რომელიც “ობიექტს” ანიჭებს მნიშვნელობას. “მნიშვნელობა” არის ატრიბუტის შესაბამისი უნივერსალური სიმრავლის (დომენის) ელემენტი. “სარწმუნოობა” კი არის ინფორმაციული ელემენტის სანდოობის მაჩვენებელი. მაგალითად:

- ალბათ, გიორგის სიმაღლე 1.80 მეტრს აღემატება
(გიორგი, სიმაღლე, > 1.80 მ, ალბათ)
- ხვალ, 0.5 ალბათობით, 2 მილიმეტრი ნალექი მოვა
(ნალექი, რაოდენობა, 2 მმ, ალბათობა = 0.5)

ამ კონტექსტში მკაფიოდ შეგვიძლია განვასხვავოთ უზუსტობა და განუზღვრელობა: უზუსტობა დაკავშირებულია ინფორმაციის შინაარსთან, ანუ ინფორმაციული ელემენტის ოთხეულის “მნიშვნელობა” კომპონენტთან, ხოლო განუზღვრელობა - მის ჭეშმარიტებასთან, რეალობასთან შესაბამისობასთან, ანუ ინფორმაციული ელემენტის ოთხეულის “სარწმუნოობა” კომპონენტთან.

მარტივად შეგვიძლია მოვიყვანოთ ერთდროულად არაზუსტი და განუზღვრელობის შემცველი ინფორმაციის მაგალითი:

- ხვალ დიდი წვიმაა მოსალოდნელი
(წვიმა, რაოდენობა, დიდი, მოსალოდნელი)

“დიდი” არაზუსტი, არამკაფიო მნიშვნელობაა, ისევე როგორც 100%-იან განსაზღვრულობას არ გულისხმობს სიტყვა “მოსალოდნელი”.

ასევე უნდა აღინიშნოს ზოგჯერ უზუსტობისა და განუზღვრელობის ბუნებრივი შეუთავსებლობა, რაც იმაში გამოიხატება, რომ ხშირად, ინფორმაციის სიზუსტის ზრდა იწვევს სარწმუნოობის შემცირებას, ანუ განუზღვრელობის ზრდას. მაგალითად, თუ ექსპერტს ვთხოვთ, რომ მნიშვნელობა “დიდი” დააზუსტოს, ის შეასუსტებს სანდოობის დონეს “მოსალოდნელი”-დან, ვთქვათ, “ნავარაუდევ”-მდე: ხვალ 10 მმ წვიმაა ნავარაუდევ.

უზუსტობა და განუზღვრელობა მხოლოდ ინფორმაციის ნაკლებობასთან არ არის დაკავშირებული. ზოგჯერ გარკვეული უზუსტობის და განუზღვრელობის დაშვება ამარტივებს

ინფორმაციის აღწერას, მაგრამ ამავე დროს ინარჩუნებს ძირითად არსს. მაგალითად, უმჯობესია მგზავრისთვის მიმართულების მიცემა კვარტლების და შენობების მიხედვით და არა მეტრების და სანტიმეტრების მითითებით. გარკვეული ხარისხის არამკაფიოობა ბუნებრივი ენის მახასიათებელია, რადგან ადმიანისთვის უფრო კომფორტულია არა 100%-იანი სიზუსტით საუბარი. მაგალითად, ჩვენ ვამბობთ, რომ მზიანი ამინდია, მიუხედავად იმისა, რომ შეიძლება ღრუბლის საფარი 0%-ს არ უდრიდეს.

კლირი და ფოლგერი თავიანთ ნაშრომში (Klir & Folger, 1988) საუბრობენ ინფორმაციის სიჭარბეზე, როგორც სისტემების ძირითად სირთულეზე. თანამედროვე მსოფლიოში ჩვენთვის ხელმისაწვდომი ხდება ძალიან დიდი რაოდენობის ინფორმაცია და ვაცნობიერებთ, რომ არსებობს გარკვეული (თუნდაც მზარდი) საზღვრები, რომლის ფარგლებშიც შეგვიძლია ინფორმაციის დამუშავება კონკრეტული გადაწყვეტილებების მიღებისას.

სისტემის სირთულე ასევე დაკავშირებულია ინფორმაციის ნაკლებობასთან. ბუნებრივია, რომ მით უფრო რთული გვეჩვენება საგანი, რაც უფრო ნაკლებ ინფორმაციას ვფლობთ მის შესახებ. მაშასადამე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ სირთულის აღქმა შედგება ორი კომპონენტისგან: რამდენი ვიცით (ან რამდენად კარგად შეგვიძლია აღვწეროთ ჩვენი ცოდნა) და რამდენი არ ვიცით (ან რა რაოდენობის გაურკვევლობასთან გვაქვს საქმე).

მაგალითისთვის შეგვიძლია განვიხილოთ მანქანის მართვა, როგორც გარკვეული სირთულის შემცველი ამოცანა. შეიძლება ვთქვათ, რომ მექანიკური გადაცემათა კოლოფის მქონე მანქანის მართვა უფრო რთულია, ვიდრე ავტომატური გადაცემათა კოლოფის მქონე მანქანის. ამის ერთ-ერთი მიზეზი ის არის, რომ მექანიკური გადაცემათა კოლოფის მქონე მანქანის სამართავად მეტი ინფორმაციის ქონაა საჭირო (მაგალითად, მძღოლმა უნდა იცოდეს ძრავის ბრუნთა რიცხვის და კონუსის გამოყენების წესების შესახებ). ამავე დროს მანქანის მართვის სირთულე ასევე განპირობებულია მართვის პროცესში არსებული განუზღვრელობით. მაგალითად, წინასწარ ვერ ვიტყვით, როდის მოგვიწევს დამუხრუჭება ან კურსის ცვლილება გზაზე არსებული დაბრკოლების აცილების მიზნით. სირთულე იზრდება განუზღვრელობის ზრდასთან ერთად. მაგალითად, მანქანის მართვა უფრო რთულია გადატვირთულ ან მძღოლისთვის უცნობ გზებზე. მაშასადამე, აღქმის თვალსაზრისით, სისტემის თუ ამოცანის სირთულე იზრდება ორივე შემთხვევაში: მაშინაც, როდესაც მეტი ინფორმაციას ვფლობთ (ანუ მეტი ინფორმაცია არის დასამუშავებელი) და მაშინაც, როდესაც ინფორმაციის დანაკლისთან გვაქვს საქმე.

სისტემის სირთულის ანუ კომპლექსურობის გამარტივება ხდება გარკვეული კომპრომისის ძიების გზით: რა რაოდენობის ინფორმაციის ქონას დავჯერდებით და რა რაოდენობის განუზღვრელობას დავუშვებთ. შესაძლებელია დასაშვები განუზღვრელობა გავზარდოთ გარკვეული რაოდენობის ზუსტი ინფორმაციის შედარებით არამკაფიო ინფორმაციით ჩანაცვლებით, მაგრამ საბოლოო ჯამში მივიღოთ ჩვენთვის საკმარისი მოცულობის, ცხადი შინაარსის მქონე აღწერა.

განვმარტოთ უზუსტობა (არამკაფიოობა) და განუზღვრელობა მათემატიკურად.

2.1.1. არამკაფიო სიმრავლეები

კვლავ განვიხილოთ ამინდის მაგალითი და დავსვათ კითხვა: ღრუბლის საფარის რამდენ პროცენტამდე არსებობის შემთხვევაში მივიჩნიოთ, რომ მზიანი ამინდია? შეგვიძლია

შევთანხმდეთ, რომ თუ ცაზე შეინიშნება 20%-მდე ღრუბლის საფარი, მაშინ დღე მზიანია. ამავე შეთანხმების მიხედვით, 21% ღრუბლის საფარის არსებობის შემთხვევაში, ჩვენ ვეღარ ვამბობთ, რომ მზიანი დღეა, რაც არ შეესაბამება ჩვენს აღქმას. მეორეს მხრივ, თუ შევთანხმდებით, რომ 1% ღრუბლის საფარი არაფერს წყვეტს, 21%, 22%, ..., 100%-იან ღრუბლის საფარის არსებობის შემთხვევაშიც ჩვენ მზიან ამინდს გამოვაცხადებთ, რაც ასევე მიუღებელია. მსგავს სიტუაციაში ვიქნებით მანამ, სანამ არ გავიაზრებთ, რომ არ არსებობს ორი (მკაფიო) სიმრავლე - მზიანი და ღრუბლიანი დღეების და შეუძლებელია ყოველი კონკრეტული დღე მივაკუთვნოთ მათგან მხოლოდ ერთს. ჩვენს აღქმაში ამ ორ სიმრავლეს შორის საზღვარი არამკაფიოა და ნებისმიერი კონკრეტული დღე, ანუ უნივერსალური (დღეების) სიმრავლის ელემენტი შეიძლება გარკვეული ხარისხით მიეკუთვნებოდეს ერთდროულად როგორც მზიან, ასევე ღრუბლიან დღეთა სიმრავლეს. სწორედ ეს არის არამკაფიო სიმრავლის (ფაზი-სიმრავლის) ძირითადი იდეა.

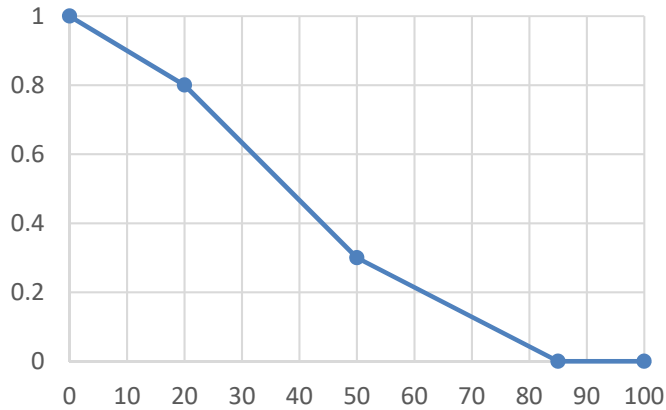
კლასიკური (მკაფიო, ანუ მკაფიო საზღვრების მქონე) სიმრავლე განსაზღვრულია იმგვარად, რომ მისი მახასიათებელი ფუნქცია უნივერსალური X სიმრავლის ყოველ ელემენტს მკაცრად მიაკუთვნებს ან არ მიაკუთვნებს ამ სიმრავლეს, ანუ ავლებს მკაფიო საზღვარს სიმრავლის ელემენტებსა და არაელემენტებს შორის. ფორმალურად, X უნივერსალური სიმრავლის რაიმე A ქვესიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია $\mu_A: X \rightarrow \{0; 1\}$ შემდეგნაირად განიშარტება:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

თუმცა ყოველდღიურ ცხოვრებაში, ხშირად ვიყენებთ ისეთ ტერმინებს და ვასახელებთ ისეთ სიმრავლეებს (ჯგუფებს, კატეგორიებს), რომელთა საზღვრები ასეთი მკაფიო არ არის. მაგალითად, ღრუბლიანი დღეები, ცივი დღეები, მაღალი ადამიანები, ძვირი სახლები, გამძლე მანქანები, სწრაფი ცხოველები და ა.შ. ამ სიმრავლეების საზღვრები არამკაფიოა, მაგრამ ჩვენთვის ამგვარი ბუნდოვანება მისაღებია, უფრო მეტიც, ხშირად უფრო კომფორტულია სწორედ მსგავსი სიმრავლეების ენაზე საუბარი. გვირჩევნია, მკაცრი მახასიათებელი ფუნქციისგან განსხვავებით, უნივერსალური სიმრავლის თითოეულ ელემენტს მივაწეროთ განსახილველ არამკაფიო სიმრავლესთან შესაბამისობის გარკვეული მაჩვენებელი, დონე, მიკუთვნების ხარისხი. თუ, ამ ხარისხს შევუსაბამებთ რიცხვებს 0-სა (მიკუთვნების მინიმალური ხარისხი) და 1-ს (მიკუთვნების მაქსიმალური ხარისხი) შორის, მაშინ არამკაფიო სიმრავლე შეგვიძლია დავახასიათოთ მიკუთვნების ფუნქციით (membership function), რომელიც მახასიათებელი ფუნქციის განზოგადებას წარმოადგენს:

$$\mu_A: X \rightarrow [0, 1].$$

მაშასადამე, არამკაფიო სიმრავლის მიკუთვნების ფუნქცია უნივერსალური X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეუსაბამებს გარკვეულ რიცხვს $[0, 1]$ ჩაკეტილი ინტერვალიდან. მაგალითად, 0% ღრუბლის საფარიან დღეს შეგვიძლია შევუსაბამოთ რიცხვი 1, ანუ ცალსახად მივაკუთვნოთ მზიანი დღეების სიმრავლეს, 20% ღრუბლის საფარიან დღეს შეგვიძლია შევუსაბამოთ 0.8 მიკუთვნების ხარისხი, 50% ღრუბლის საფარიან დღეს - 0.3 მიკუთვნების ხარისხი და დღეებს, როდესაც ღრუბლის საფარი 85%-ს აღემატება, შეგვიძლია შევუსაბამოთ რიცხვი 0, ანუ არ მივაკუთვნოთ მზიანი დღეების არამკაფიო სიმრავლეს (იხ. ფიგურა 6).



ფიგურა 6. მზიანი დღეების არამკაფიო სიმრავლის მიკუთვნების ფუნქციის გრაფიკი

შევნიშნოთ, რომ კლასიკური, მკაფიო სიმრავლე შეგვიძლია განვიხილოთ არამკაფიო სიმრავლის კერძო შემთხვევად, როდესაც მიკუთვნების ფუნქცია იღებს მხოლოდ ორ მნიშვნელობას (0-ს და 1-ს).

არამკაფიო სიმრავლეების ძირითადი ცნებები

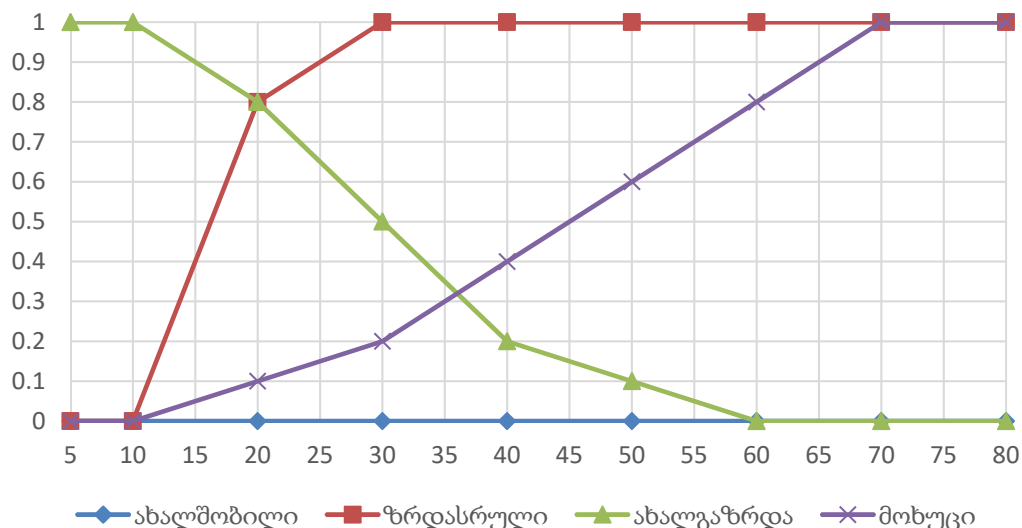
არამკაფიო სიმრავლეთან დაკავშირებული ძირითადი ცნებები და განსაზღვრებები მოცემულია კლირის და ფოლგერის კლასიკური ნაშრომიდან (Klir & Folger, 1988). თუმცა მათ განხილვამდე ჯერ განვიხილოთ ამავე ნაშრომში წარმოდგენილი მაგალითი. დავუშვათ, უნივერსალური მკაფიო სიმრავლის როლში გვაქვს ადამიანების წლოვანებების (ასაკის განსხვავებული მნიშვნელობების) შემდეგი სიმრავლე:

$$X = \{5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$$

და ოთხი არამკაფიო სიმრავლე, ანუ X -ის არამკაფიო ქვესიმრავლეთა $\mathcal{F}(X)$ სიმრავლის ოთხი წარმომადგენელი: “ახალშობილი”, “ზრდასრული”, “ახალგაზრდა”, “მოხუცი”. მათი მიკუთვნების ფუნქციის მნიშვნელობები მოცემულია ცხრილი 1-ში.

ასაკი	ახალშობილი	ზრდასრული	ახალგაზრდა	მოხუცი
5	0	0	1	0
10	0	0	1	0
20	0	0.8	0.8	0.1
30	0	1	0.5	0.2
40	0	1	0.2	0.4
50	0	1	0.1	0.6
60	0	1	0	0.8
70	0	1	0	1
80	0	1	0	1

ცხრილი 1. არამკაფიო სიმრავლეების მაგალითი



ფიგურა 7. ცხრილი 1-ში მოცემული არამკაფიო სიმრავლეების მიკუთვნების ფუნქციების გრაფიკები

“ახალშობილი” წარმოადგენს ცარიელი არამკაფიო სიმრავლის მაგალითს.

განსაზღვრება 5. არამკაფიო A სიმრავლის *პროექცია* (support) უნივერსალურ X სიმრავლეზე არის მკაფიო სიმრავლე, რომელიც შეიცავს X სიმრავლის იმ ელემენტებს, რომელთა შესაბამისი მიკუთვნების ფუნქციის მნიშვნელობები არანულოვანია A -ში:

$$\text{supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

მაგალითად, $\text{supp}(\text{ახალგაზრდა}) = \{5, 10, 20, 30, 40, 50\}$.

განსაზღვრება 6. არამკაფიო სიმრავლის *სიმაღლე* ეწოდება ამ სიმრავლის ელემენტების მიკუთვნების ხარისხებს შორის უდიდეს მნიშვნელობას.

განსაზღვრება 7. არამკაფიო სიმრავლეს ეწოდება *ნორმირებული*, როდესაც მის ერთ ელემენტს მაინც შეესაბამება მიკუთვნების მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობა.

მაგალითად, როდესაც მიკუთვნების ფუნქცია მნიშვნელობებს იღებს $[0, 1]$ ინტერვალიდან, არამკაფიო სიმრავლე ნორმირებულია, თუ მისი რომელიმე, თუნდაც ერთი ელემენტის მიკუთვნების დონე 1-ის ტოლია.

განსაზღვრება 8. არამკაფიო A სიმრავლის α -კვეთა ეწოდება მკაფიო A_α სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს X სიმრავლის იმ ელემენტებს, რომელთა შესაბამისი მიკუთვნების ფუნქციის მნიშვნელობები A -ში მეტია ან ტოლია α -ზე:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

მაგალითად, $\text{ახალგაზრდა}_{0.8} = \{5, 10, 20\}$. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი არამკაფიო სიმრავლის ყველა α -კვეთათა სიმრავლე წარმოადგენს უნივერსალური X სიმრავლის ჩადგმული მკაფიო სიმრავლეების კლასს.

როდესაც უნივერსალური სიმრავლე არის ნამდვილი რიცხვების ყველა n -ეულის სიმრავლე n -განზომილებიან ევკლიდეს \mathbb{R}^n სივრცეში, შეგვიძლია განვაზოგადოთ სიმრავლის ამოზნექილობის ცნება არამკაფიო სიმრავლეებისთვის.

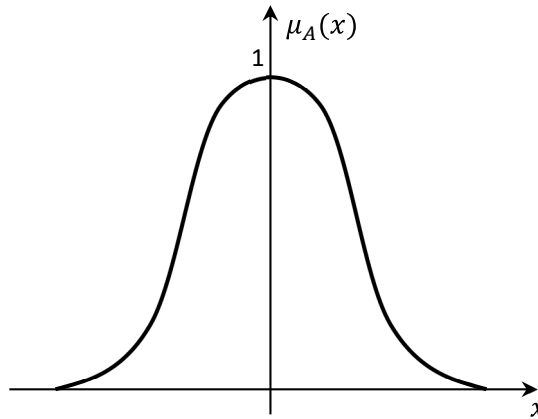
განსაზღვრება 9. არამკაფიო სიმრავლე არის *ამოზნექილი*, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი ყოველი α -კვეთა ამოზნექილი სიმრავლეა. შეგვიძლია ასევე ვთქვათ, რომ არამკაფიო A სიმრავლე ამოზნექილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\mu_A(\lambda \mathbf{r} + (1 - \lambda) \mathbf{s}) \geq \min[\mu_A(\mathbf{r}), \mu_A(\mathbf{s})],$$

სადაც $r, s \in \mathbb{R}^n$ და $\lambda \in [0, 1]$.

განსაზღვრება 10. ნამდვილ რიცხვთა \mathbb{R} სიმრავლეზე განსაზღვრულ ამოზნექილ და ნორმირებულ არამკაფიო სიმრავლეს, რომლის მიკუთვნების ფუნქცია უწყვეტია, ეწოდება *არამკაფიო რიცხვი*.

მაშასადამე, არამკაფიო რიცხვი არის არამკაფიო სიმრავლე, რომელიც სხვადასხვა მიკუთვნების ხარისხით შეიცავს ნამდვილ რიცხვებს გარკვეული ინტერვალიდან. ფიგურა 8-ზე მოცემულია არამკაფიო რიცხვის მაგალითი.

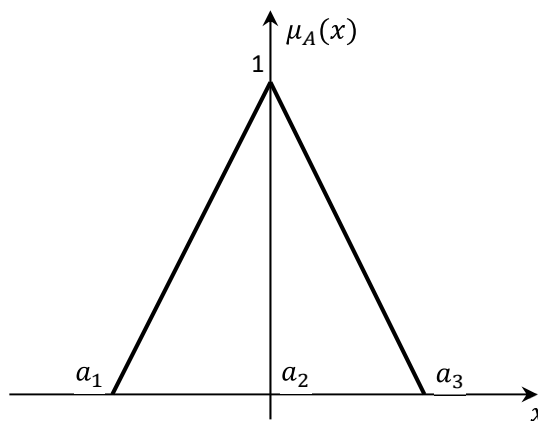


ფიგურა 8. არამკაფიო რიცხვის მიკუთვნების ფუნქციის მაგალითი

ლიტერატურაში ხშირად გვხვდება ე.წ. “სამკუთხა არამკაფიო რიცხვები” $A = (a_1, a_2, a_3)$, რომელთა მიკუთვნების ფუნქციები მოიცემა ფორმულით:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 < x \leq a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & a_2 < x \leq a_3 \\ 0 & x > a_3 \end{cases} \quad (7)$$

ხოლო მიკუთვნების ფუნქციებს აქვთ შემდეგი სახე:



ფიგურა 9. სამკუთხა არამკაფიო რიცხვის მიკუთვნების ფუნქციის მაგალითი

მკაფიო სიმრავლეებისთვის განსაზღვრული ოპერაციები შეგვიძლია განვაზოგადოთ არამკაფიო სიმრავლეებისთვის. წარმოდგენის შესაქმნელად, ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ

საბაზისო ოპერაციებს. სხვადასხვა ოპერაციების დეტალური აღწერა შეიძლება მოძიებულ-იქნას ლიტერატურაში (Klir & Folger, 1988).

განსაზღვრება 11. არამკაფიო A სიმრავლეს ეწოდება არამკაფიო B სიმრავლის ქვესიმრავლე და აღინიშნება $A \subseteq B$ ჩანაწერით, თუ $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X$.

მაგალითად, ცხრილი 1-ში მოცემული არამკაფიო სიმრავლეებისთვის, “მოხუცი” არის “ზრდასრულის” ქვესიმრავლე.

განსაზღვრება 12. არამკაფიო A და B სიმრავლეებს ეწოდება ტოლი, და აღინიშნება $A = B$ ჩანაწერით, თუ $\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$. არამკაფიო სიმრავლეები არ არის ტოლი (აღინიშნება $A \neq B$), როდესაც $\exists x \in X, \mu_A(x) \neq \mu_B(x)$.

განსაზღვრება 13. არამკაფიო A სიმრავლეს ეწოდება არამკაფიო B სიმრავლის საკუთრივი ქვესიმრავლე და აღინიშნება $A \subset B$ ჩანაწერით, თუ $A \subseteq B$ და $A \neq B$.

ცხრილი 1-ში მოცემული მაგალითისთვის, “მოხუცი” არის “ზრდასრული” არამკაფიო სიმრავლის სწორედ საკუთრივი ქვესიმრავლე.

განსაზღვრება 14. როდესაც მიკუთვნების ფუნქცია მნიშვნელობებს იღებს $[0, 1]$ ჩაკეტილი ინტერვალიდან, არამკაფიო A სიმრავლის დამატება აღინიშნება \bar{A} -ით და განისაზღვრება შემდეგი მიკუთვნების ფუნქციით:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X.$$

მაგალითად, ცხრილი 1-ში მოცემული არამკაფიო სიმრავლის “მოხუცი” დამატება არის არამკაფიო სიმრავლე “არა მოხუცი”, რომლის მიკუთვნების ფუნქციის მნიშვნელობები მოცემულია ცხრილი 2-ის მეორე სვეტში.

ასაკი	არა მოხუცი	მოხუცი	ახალგაზრდა
5	1	0	1
10	1	0	1
20	0.9	0.1	0.8
30	0.8	0.2	0.5
40	0.6	0.4	0.2
50	0.4	0.6	0.1
60	0.2	0.8	0
70	0	1	0
80	0	1	0

ცხრილი 2. არამკაფიო სიმრავლის დამატების მაგალითი

შევნიშნოთ, რომ მოცემული მაგალითისთვის, არამკაფიო სიმრავლე “არა მოხუცი” არ ემთხვევა “ახალგაზრდა” არამკაფიო სიმრავლეს.

განსაზღვრება 15. ორი არამკაფიო A და B სიმრავლის გაერთიანება $A \cup B$ განისაზღვრება შემდეგი მიკუთვნების ფუნქციით:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)], \forall x \in X.$$

ცხადია, როგორც მოსალოდნელი იყო, A და B არამკაფიო სიმრავლეები $A \cup B$ არამკაფიო სიმრავლის ქვესიმრავლეები არიან.

განსაზღვრება 16. ორი არამკაფიო A და B სიმრავლის თანაკვეთა $A \cap B$ განისაზღვრება შემდეგი მიკუთვნების ფუნქციით:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)], \forall x \in X.$$

ასევე ცხადია, რომ $A \cap B$ არამკაფიო სიმრავლე A და B არამკაფიო სიმრავლეების ქვესიმრავლეა.

არამკაფიო სიმრავლეების გაერთიანებისა და თანაკვეთის მაგალითები მოცემულია ცხრილი 3-ში.

ასაკი	ახალგაზრდა	მოხუცი	ახალგაზრდა \cup მოხუცი	ახალგაზრდა \cap მოხუცი
5	1	0	1	0
10	1	0	1	0
20	0.8	0.1	0.8	0.1
30	0.5	0.2	0.5	0.2
40	0.2	0.4	0.4	0.2
50	0.1	0.6	0.6	0.1
60	0	0.8	0.8	0
70	0	1	1	0
80	0	1	1	0

ცხრილი 3. არამკაფიო სიმრავლეების გაერთიანებისა და თანაკვეთის მაგალითები

არამკაფიო გაერთიანების, თანაკვეთისა და დამატების ოპერაციები წარმოადგენენ მათი მკაფიო შესატყვისების განზოგადებას, რადგან როდესაც მიკუთვნების ფუნქცია იღებს მხოლოდ ორ მნიშვნელობას, 0-ს და 1-ს, მათი განსაზღვრება იძლევა იმავე შედეგებს, რასაც მკაფიო სიმრავლეების შესაბამისი ოპერაციები.

2.1.2. მონოტონური (არამკაფიო) ზომები

განუზღვრელობის არსის გააზრების მიზნით განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი: გვინდა კონკრეტული ადამიანის ასაკი შევავსოთ მისი გარეგნობის მიხედვით. დავუშვათ, განვიხილავთ ასაკთა შემდეგ ინტერვალებს: [11, 20], [21, 30], [31, 40], ანუ ვიცით, რომ აღნიშნული პიროვნების ასაკი ნამდვილად 11-დან 40 წლამდე დიაპაზონშია, მაგრამ არ გვაქვს რაიმე იმგვარი უტყუარი მტკიცებულება, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა, დანამდვილებით გვეთქვა, ჩამოთვლილთაგან კონკრეტულად რომელ ინტერვალს მიეკუთვნება პიროვნების ასაკი. მნიშვნელოვანია შევნიშნოთ, რომ ინტერვალები მკაფიო სიმრავლეებია და არავითარი არამკაფიოობა არ არის დაკავშირებული მათ საზღვრებთან.

ჩვენი შეხედულების მიხედვით, შეგვიძლია თითოეულ ინტერვალს შევუსაბამოთ რაიმე რიცხვი (მაგალითად, 0-სა და 1-ს შორის), რომელიც ასახავს ჩვენს რწმენას, რომ აღნიშნული პიროვნების ასაკი ვარდება ამ ინტერვალში. ყველაზე დიდი რიცხვი დავუწეროთ იმ ინტერვალს (მკაფიო სიმრავლეს), რომელსაც, ჩვენი აზრით, მიეკუთვნება პიროვნების ასაკი. სიდიდით მომდევნო რიცხვი დავუწეროთ იმ ინტერვალს, რომელსაც ასევე შეიძლება მიეკუთვნებოდეს პიროვნების ასაკი იმ შემთხვევაში, თუ ჩვენი ძირითადი მოსაზრება მცდარია და ა.შ. იდეალურ შემთხვევაში, ანუ უტყუარი ინფორმაციის არსებობის პირობებში, 1-ს დავუწერდით ერთ-ერთ ინტერვალს, ხოლო დანარჩენებს - 0-ს.

განხილული მაგალითი შევადაროთ მაგალითს, როდესაც ზუსტად ვიცოდით პიროვნების ასაკი და ამ პიროვნებას ვაკუთვნებდით სხვადასხვა არამკაფიო სიმრავლეს ("ახალშობილი",

“ზრდასრული”, “ახალგაზრდა”, “მოხუცი”), მიკუთვნების სხვადასხვა ხარისხით. ახლა განხილულ მაგალითში სიმრავლეები, რომელთაგან ერთ-ერთსაც გვინდა მივაკუთვნოთ პიროვნება სრულიად მკაფიოა, მაგრამ არასრულია ის ინფორმაცია, რომელიც მოგვცემდა ჩამოთვლილთაგან ერთი კონკრეტული ინტერვალისთვის პიროვნების ასაკის დანამდვილებით მიკუთვნების საშუალებას. სწორედ ეს არის განუზღვრელობის არსი და ის ხშირად აღიწერება მონოტონური (არამკაფიო) ზომების გამოყენებით, რადგან განუზღვრელობის შემცველი, სუბიექტური ინფორმაციის აღწერა კლასიკური ზომებით არაბუნებრივია - სუბიექტური შეფასებები არ ავლენენ კლასიკური ზომებისთვის დამახასიათებელ ადიციურობის თვისებას.

განვიხილოთ X უნივერსალური (მკაფიო) სიმრავლე და g ფუნქცია, რომელიც X -ის ყოველ (მკაფიო) ქვესიმრავლეს შეუსაბამებს რიცხვს $[0, 1]$ ინტერვალიდან:

$$g: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1].$$

$\forall A \in \mathcal{P}(X)$ -ისთვის, $g(A)$ ასახავს მტკიცებულების ხარისხს, ან ჩვენს რწმენას, რომ X -ის მოცემული ელემენტი მიეკუთვნება A სიმრავლეს.

შენიშნოთ, რომ g ფუნქცია განსაზღვრულია $\mathcal{P}(X)$ -ზე და არა X -ზე და განვიხილავთ მკაფიო სიმრავლეებს. არამკაფიო სიმრავლის მიკუთვნების ფუნქცია μ კი განსაზღვრულია X -ზე.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი. დავუშვათ ექიმი სინჯავს პაციენტს, რომელსაც აღენიშნება სიმპტომები, რომლებიც დამახასიათებელია შემდეგი დაავადებებისთვის: გაციება, გრიპი, პნევმონია, ბრონქიტი. თუ სიმპტომები ცალსახად არ იძლევა კონკრეტული დიაგნოზის დასმის საშუალებას, შეგვიძლია დაავადებებს შევუსაბამოთ რიცხვები ჩვენი ექვის შესაბამისად. მაგალითად,

გაციება	გრიპი	პნევმონია	ბრონქიტი
0.85	0.50	0.30	0.45

ეს რიცხვები ასახავს იმ შემთხვევას, როდესაც ექიმის მოსაზრებით პაციენტი უბრალოდ გაციებულია, თუმცა მხოლოდ ფიზიკური გასინჯვით მის მიერ მოპოვებული ინფორმაცია არ არის საკმარისი უფრო ზუსტი დიაგნოზის დასასმელად, დანარჩენი სამი დაავადების გამოსარიცხად.

ასევე საინტერესოა ფიზიკური გაზომვების (სიგრძის, წონის და ა.შ.) მაგალითი. ამ შემთხვევაშიც სრულიად მკაფიო საზღვრები აქვს იმ კლასებს, რომელთაგან ერთ-ერთს გვინდა რომ მივაკუთვნოთ გასაზომი ობიექტი, სასურველი სიზუსტის გათვალისწინებით. ჩვეულებრივ, საზომი ხელსაწყოს მიერ გაზომვადი დიაპაზონი მოცემულია გარკვეული $[a, b]$ ინტერვალის სახით და ეს ინტერვალი დაყოფილია მკაფიო თანაუკვეთ ქვეინტერვალებად: $[a, b_1), [b_1, b_2), [b_2, b_3), \dots, [b_k, b]$. მაშინ, თეორიულად, ნებისმიერი ობიექტი შეგვიძლია ცალსახად მივაკუთვნოთ ჩამოთვლილი ქვეინტერვალებიდან ერთ-ერთს. თუმცა პრაქტიკულ სიტუაციებში გაზომვის ცდომილება ყოველთვის აჩენს კითხვის ნიშნებს იმ შემთხვევებში, როდესაც გაზომვის შედეგი ახლოს არის b_1, b_2, \dots, b_k საზღვრებთან: რომელ მკაფიო სიმრავლეს მიეკუთვნება ობიექტი - $[b_{i-1}, b_i)$ -ს თუ $[b_i, b_{i+1})$ -ს? $i = 1, \dots, k; b_0 = a, b_{k+1} = b$.

იმისათვის, რომ ზემოთ განხილული g ფუნქცია იყოს არამკაფიო ზომა, ის უნდა აკმაყოფილებდეს გარკვეულ პირობებს. დიდი ხნის განმავლობაში, ეს პირობები ალბათობის თეორიის (ალბათური ზომის) ძირითადი აქსიომები იყო, თუმცა, როგორც პრაქტიკა გვიჩვენებს, ალბათური ზომა ყოველთვის ადეკვატურად არ ასახავს განუზღვრელობას და ბევრ პრაქტიკულ

სიტუაციაში მისი აქსიომები ზედმეტად მკაცრია. ამიტომ ხშირად გამოიყენება არა ალბათური, არამედ არამკაფიო ზომები, რომლებიც განისაზღვრება უფრო სუსტი პირობებით, ნაკლები მოთხოვნების მქონე აქსიომებით.

აქვე დავაზუსტოთ არამკაფიო ზომის სახელის წარმომავლობა და მისი კავშირი მონოტონურ ზომასთან. 1970-იან წლებში ცნობილმა იაპონელმა მკვლევარმა მ. სუჯენომ თავის ნაშრომებში (Sugeno, 1974; Sugeno, 1977), კლასიკური (მკაფიო) სიმრავლეების არამკაფიო სიმრავლეებამდე განზოგადების ანალოგიით, განაზოგადა კლასიკური (ადიციური) ზომები არაკლასიკურ (არაადიციურ) ზომებამდე. აღნიშნული ანალოგიის შესაბამისად, არაკლასიკური (არაადიციური) ზომისთვის მან შემოგვთავაზა სახელწოდება “არამკაფიო ზომა”. მომდევნო წლებში ეს სახელწოდება არაერთი მკვლევარის მიერ იქნა გამოყენებული და ახლაც ხშირად გამოიყენება, თუმცა ტერმინი ცოტა დამაბნეველია, რადგან არამკაფიო ზომის განსაზღვრისას, რეალურად, საქმე არ გვაქვს არამკაფიოობასთან, ან არამკაფიო სიმრავლეებთან. არამკაფიო ზომა არის მკაფიო სიმრავლეებზე განსაზღვრული, გარკვეული თვისებების მქონე ფუნქცია, რომელიც მნიშვნელობებს იღებს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან. ამიტომ უანგი და კლირი 2009 წელს გამოქვეყნებულ ნაშრომში (Wang & Klir, 2009) გვთავაზობენ, “არამკაფიო ზომის” ნაცვლად გამოვიყენოთ ტერმინი “მონოტონური ზომა”. სიტყვა “მონოტონური” იმიტომ შეირჩა, რომ კლასიკური ზომებისგან განსხვავებით, არამკაფიო ზომების აქსიომატიკაში ადიციურობის მოთხოვნა შესუსტებულია და ჩანაცვლებულია (სიმრავლის ჩართულობის მიმართ) მონოტონურობის პირობით.

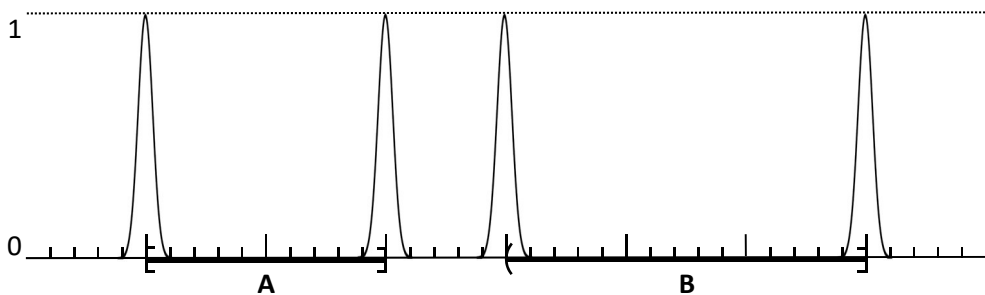
კლასიკური (ადიციური) ზომები სათავეებს იღებენ უძველესი დროიდან, როდესაც დაიწყო სხვადასხვა ობიექტების სიგრძის, ფართობის, თუ მოცულობის გაზომვა, ანუ ამ ობიექტების ზომებისთვის გარკვეული რიცხვების შესაბამება. გაზომვის პროცესი დაკავშირებული იყო გასაზომი ობიექტის და საზომი ეტალონის შედარებასთან, თუმცა მალე ცხადი გახდა, რომ გაზომვა არც ისეთი ტრივიალური პროცესია, როგორც ეს ერთი შეხედვით ჩანს. მაგალითისთვის შეგვიძლია დავასახელოთ იმ კვადრატის დიაგონალის სიგრძის გაზომვის ამოცანა, რომლის გვერდები საზომი ერთეულის ტოლია.

მე-19 საუკუნის მეორე ნახევრიდან ინტეგრალური აღრიცხვის მნიშვნელოვანმა განვითარებამ ახალი შინაარსი შესძინა “გაზომვას” და წარმოშვა ზომათა თეორია. იქმნებოდა უფროდაუფრო რთული გაზომვების ინსტრუმენტები, ხდებოდა სხვადასხვა რთული ფუნქციის “გამოგონება” და შესწავლა (მაგალითად, ფუნქციები, რომლებიც ყველგან წყვეტილია; ფუნქციები, რომლებიც უწყვეტია, მაგრამ არცერთ წერტილში არის დიფერენცირებადი და ა.შ.). ასევე განიხილებოდა ისეთი საკითხები, როგორც არის, თუ რა იქნებოდა იმ ინტერვალის ზომა, რომელიც მიიღება $[0, 1]$ ინტერვალისთვის სასაზღვრო წერტილების (0-ის და 1-ის) მოშორებით; ან ამავე ინტერვალისთვის ყველა რაციონალური რიცხვის მოშორებით და ა.შ. მსგავს საკითხებზე მუშაობდნენ ისეთი დიდი მეცნიერები, როგორებიც იყვნენ ბოლცანო (1781 - 1848), რიმანი (1826 - 1866), ბორელი (1871 - 1956), ლებეგი (1875 - 1941), კოლმოგოროვი (1903 - 1987) და სხვები.

მრავალმა პრაქტიკულმა ამოცანამ თუ თეორიამ საკამათო გახადა კლასიკური ზომის ადიციურობის თვისება და კითხვის ნიშნის ქვეშ დააყენა მისი ბუნებრიობა. ბევრ შემთხვევაში, ადიციურობა ზედმეტად მკაცრი შეზღუდვა აღმოჩნდა. ადიციურობა ახასიათებს გაზომვებს, თუ ეს გაზომვები ხდება იდეალურ, უშეცდომო პირობებში, მაგრამ ის ადეკვატურობას კარგავს რეალურ სიტუაციებში წარმოებული გაზომვების დროს, როდესაც გარდაუვალია გაზომვისას

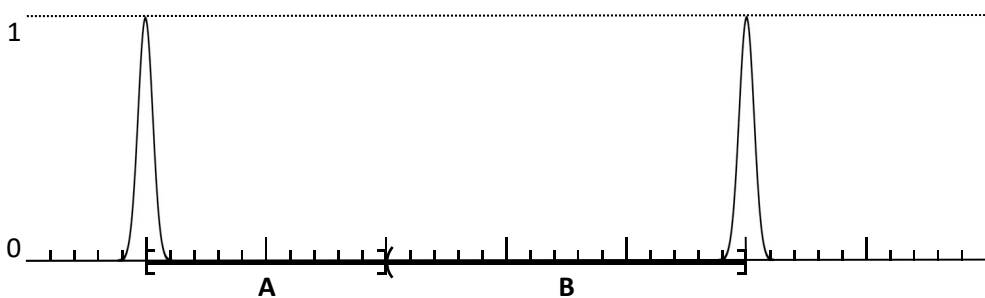
დაშვებული ცდომილებები. უფრო მეტიც, ზოგიერთი ტიპის გაზომვები, მაგალითად, სუბიექტური შეფასებები და განუმეორებადი ექსპერიმენტები, არსობრივად არაადიციურია.

ადიციური ზომების გამოყენების არაზუნებრიობა იქნა ასევე ნაჩვენები ვაერთლის 1987 წლის ნაშრომში (Viertl, 1987), რომელშიც განხილულია სწორედ გაზომვების მაგალითი. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, პრაქტიკულ სიტუაციებში ყოველთვის გვაქვს გაზომვის ცდომილება და ის ყოველთვის აჩენს კითხვის ნიშნებს იმ შემთხვევებში, როდესაც გაზომვის შედეგი ახლოს არის ჩვენთვის საინტერესო ინტერვალის საზღვრებთან. თუ ჩვენს დაკვირვებასთან (გაზომვასთან) დაკავშირებული განუზღვრელობის მახასიათებელ ფუნქციას გრაფიკულად გამოვსახავთ, მისი მნიშვნელობა ერთს მიუახლოვდება ხდომილების საზღვრებთან (იხ. ფიგურა 7, განხილულია ერთგანზომილებიანი ხდომილებების შემთხვევა).



ფიგურა 10. განუზღვრელობის მახასიათებელი ფუნქციის მნიშვნელობა მკაფიო A და B ხდომილებებისთვის

თუ A და B ხდომილებები თანაუკვეთია, მაგრამ მოსაზღვრე, $A \cup B$ ხდომილებასთან დაკავშირებული განუზღვრელობის მახასიათებელი ფუნქციის მნიშვნელობას ექნება ფიგურა 11-ზე გამოსახული გრაფიკის სახე.



ფიგურა 11. განუზღვრელობის მახასიათებელი ფუნქციის მნიშვნელობა მკაფიო $A \cup B$ ხდომილებისთვის

მაშასადამე, $A \cup B$ ხდომილებასთან დაკავშირებული განუზღვრელობა ნაკლებია ცალკე A და B ხდომილებებთან დაკავშირებული განუზღვრელობების ჯამზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ, ამ შემთხვევაში, განუზღვრელობის მახასიათებელი ფუნქცია არაადიციურია.

კლასიკური ზომათა თეორიის პირველი მნიშვნელოვანი ალტერნატივა შემოგვთავაზა ფრანგმა მათემატიკოსმა, გუსტავ შოკემ, რომელმაც საკუთარ ნაშრომში (Choquet, 1954) განვითარებულ თეორიას “ტევადობების თეორია” (Theory of Capacities) უწოდა. მისი თეორია ეფუძნება განსხვავებული ტიპის მქონე არაადიციური ზომების უსასრულო ოჯახს, რომელიც დალაგებულია ზომების ზოგადობის თვალსაზრისით. შოკემ ასევე ჩამოაყალიბა მის მიერ შემოთავაზებული ზომების შესაბამისი ინტეგრალური აღრიცხვა, რომელშიც გამოყენებული

ინტეგრალები დღეს “შოკეს ინტეგრალების” სახელით მოიხსენიება. შოკეს ტევადობებს (ზომებს) და ინტეგრალებს ქვემოთ დეტალურად განვიხილავთ.

მაგალითების განხილვის შემდეგ, ახლა უკვე შეგვიძლია, მონოტონური ზომები მათემატიკურადაც განვმარტოთ და ვნახოთ, რომ მათი საშუალებით შესაძლებელია განუზღვრელობის ძალიან ბუნებრივად აღწერა. ზომებთან დაკავშირებული განსაზღვრებები მოცემულია უანგის და კლირის (Wang & Klir, 2009), კლირის და ფოლგერის (Klir & Folger, 1988), დუბუას და პრადის (Dubois & Prade, 1988), ზადეს (Zadeh, 1978) ნაშრომებიდან.

განვიხილოთ არაცარიელი X სიმრავლე, X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა არაცარიელი \mathbb{C} კლასი და \mathbb{C} -ზე განსაზღვრული არაუარყოფითი, ნამდვილი მნიშვნელობების მქონე g ფუნქცია:

$$g: \mathbb{C} \rightarrow [0; +\infty). \quad (1)$$

შენიშვნა: მეტი სიცხადისთვის, სიმრავლეთა კლასზე განსაზღვრულ ფუნქციებს ნაშრომში სიმრავლური ფუნქციების (set functions) სახელით მოვიხსენიებთ.

განსაზღვრება 17. სიმრავლურ g ფუნქციას ეწოდება ზოგადი ზომა (X, \mathbb{C}) -ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც:

$$1. g(\emptyset) = 0, \text{ თუ } \emptyset \in \mathbb{C};$$

როგორც წესი, \mathbb{C} არის X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა გარკვეული მათემატიკური სტრუქტურის მქონე კლასი, მაგალითად, რგოლი, ალგებრა, σ -ალგებრა და ა.შ.

მაშასადამე, ერთადერთი მოთხოვნა, რომელიც განზოგადებულ ზომათა თეორიაში ზოგადი ზომის მიმართ არსებობს, არის ცარიელ სიმრავლეზე “განულება”. ცხადია, ეს ძალიან სუსტი მოთხოვნაა და ხშირად საჭირო ხდება დამატებითი მოთხოვნების შემოღება.

განსაზღვრება 18. (X, \mathbb{F}) წყვილს, სადაც \mathbb{F} არის σ -რგოლი (ან σ -ალგებრა), ეწოდება ზომადი სივრცე (measurable space), \mathbb{F} -ის სიმრავლეებს კი ზომადი სიმრავლეები. ხოლო (X, \mathbb{F}, g) სამეულს, სადაც g ზოგადი ზომაა, ეწოდება ზოგადი ზომადი სივრცე (general measure space).

(X, \mathbb{C}) -ს ან (X, \mathbb{F}) -ს უწოდებენ სასრულს, თვლადს ან არათვლადს, როდესაც X არის შესაბამისად სასრული, თვლადი ან არათვლადი.

ზოგადი ზომისთვის სიმრავლეთა ჩართვის მიმართ მონოტონურობის მოთხოვნის დამატებით მივიღებთ ზომათა საკმაოდ ფართო კლასს, რომელიც გამოირჩევა პრაქტიკული გამოყენებების სიუხვით და რომელიც მოიცავს ყველა სხვა ზომას, გარდა ზოგადი ზომისა, როგორც კერძო შემთხვევას.

განსაზღვრება 19. სიმრავლურ g ფუნქციას ეწოდება მონოტონური ზომა (X, \mathbb{C}) -ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნებს:

$$1. g(\emptyset) = 0, \text{ თუ } \emptyset \in \mathbb{C};$$

$$2. \forall A, B \in \mathbb{C}, A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B);$$

ხშირად მოსახერხებელია ე.წ. ნორმირებული მონოტონური ზომების გამოყენება. მონოტონურ g ზომას (X, \mathbb{C}) -ზე ეწოდება ნორმირებული, თუ $X \in \mathbb{C}$ და $g(X) = 1$. მაშასადამე, თუ $\emptyset \in \mathbb{C}$ და $X \in \mathbb{C}$ შეგვიძლია შემოვიღოთ განსაზღვრება:

განსაზღვრება 20. სიმრავლურ g ფუნქციას ეწოდება ნორმირებული მონოტონური ზომა (X, \mathbb{C}) -ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნებს:

$$1. g(\emptyset) = 0, \text{ და } g(X) = 1 \text{ [სასაზღვრო მოთხოვნები];}$$

$$2. \forall A, B \in \mathbb{C}, A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B) \text{ [მონოტონურობა];}$$

როგორც აღვნიშნეთ, ხშირად, სხვადასხვა ლიტერატურაში მონოტონურ ზომებს არამკაფიო ზომებს უწოდებენ, თუმცა იმის ხაზგასასმელად, რომ მონოტონურ ზომები ზოგადად არ არიან

დაკავშირებული არამკაფიო სიმრავლეებთან, ბოლო დროს მკვიდრდება ტერმინი “მონოტონური ზომები”.

მრავალ პრაქტიკულ ამოცანაში გამოიყენება მონოტონური ზომები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგი სამი პირობიდან ერთს მაინც:

განსაზღვრება 21. g მონოტონურ ზომას ეწოდება ქვემოდან ნახევრადუწყვეტი, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნას:

$$\{E_n\} \subset \mathbb{C}, E_1 \subset E_2 \subset \dots, \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim_n g(E_n) = g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

განსაზღვრება 22. g მონოტონურ ზომას ეწოდება ზემოდან ნახევრადუწყვეტი, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნას:

$$\{E_n\} \subset \mathbb{C}, E_1 \supset E_2 \supset \dots, g(E_1) < \infty, \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim_n g(E_n) = g\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

განსაზღვრება 23. g მონოტონურ ზომას ეწოდება უწყვეტი, თუ ის აკმაყოფილებს ორივე მოთხოვნას (ქვემოდან ნახევრადუწყვეტობა, ზემოდან ნახევრადუწყვეტობა) ერთდროულად.

ქვემოდან ნახევრადუწყვეტ და ზემოდან ნახევრადუწყვეტ ზომებს, ზოგჯერ ქვემოდან უწყვეტ და ზემოდან უწყვეტ ზომებს უწოდებენ.

განსაზღვრება 24. თუ განვიხილავთ g ნორმირებულ მონოტონურ ზომას (X, \mathbb{C}) -ზე, სადაც \emptyset და X მიეკუთვნებიან \mathbb{C} -ს და \mathbb{C} არის სიმრავლის დამატების ოპერაციის მიმართ ჩაკეტილი, შეიძლება განიმარტოს ე.წ. დუალური მონოტონური ზომა:

$$g'(A) = 1 - g(\overline{A}), \forall A \in \mathbb{C}.$$

ნათელია, რომ მონოტონური და მისი დუალური ზომები შეიცავენ ერთიდაიგივე ინფორმაციას, უბრალოდ, როგორც ამბობენ, მათში ეს ინფორმაცია კოდირებულია განსხვავებულად. ასევე მარტივი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი ადიციური ზომის დუალური ზომა თვითონ ეს ადიციური ზომაა, რაც იმას ნიშნავს, რომ ადიციური ზომები ავტოდუალურია.

განსაზღვრება 25. g მონოტონურ ზომას ეწოდება სუპერადიციური, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნას:

$$g(A \cup B) \geq g(A) + g(B),$$

როდესაც $A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C}, A \cup B \in \mathbb{C}$ და $A \cap B = \emptyset$.

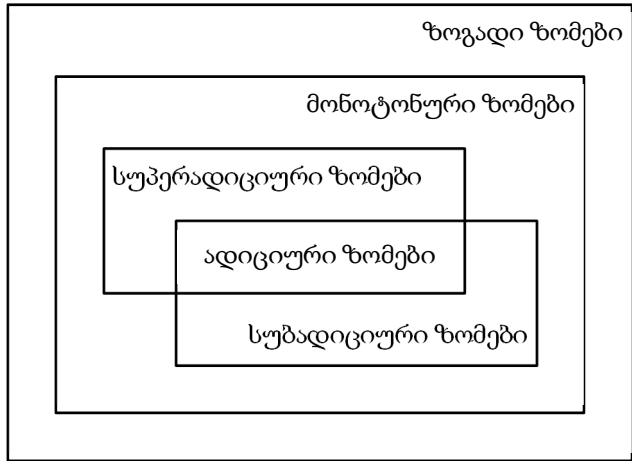
განსაზღვრება 26. g მონოტონურ ზომას ეწოდება სუბადიციური, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნას:

$$g(A \cup B) \leq g(A) + g(B),$$

როდესაც $A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{C}$ და $A \cup B \in \mathbb{C}$.

მნიშვნელოვანია აღვნიშნოთ, რომ ადიციური ზომებისგან განსხვავებით, სუპერადიციურ და სუბადიციურ ზომებს შეუძლიათ კარგი და ცუდი კოოპერაციის ასახვა. კონკრეტულად, სუპერადიციური ზომით შეიძლება გამოიხატოს გაზომილი მახასიათებლის თვალსაზრისით სიმრავლეთა თავსებადობა, სინერგია. ისევე როგორც, სუბადიციურ ზომას შეუძლია ასახოს სიმრავლეთა შეუთავსებლობის, წინააღმდეგობრიობის ეფექტი. ადიციური ზომების გამოყენება კი მიზანშეწონილია იმ შემთხვევებში, როდესაც სიმრავლეები დამოუკიდებელია გაზომილი მახასიათებლის თვალსაზრისით.

განხილული ზომები სქემატურად გამოსახულია ფიგურა 12-ზე.



ფიგურა 12. განზოგადებული ზომების ურთიერთმიმართება

შევნიშნოთ, რომ განზოგადებულ ზომათა თეორიაში, ზოგად ზომებთან ერთად, ასევე განიხილება ე.წ. ნიშნიანი ზოგადი ზომები (Wang & Klir, 2009), რომელთაც, ზოგადი ზომების ანალოგიურად, ცარიელ სიმრავლეზე “განულება” მოეთხოვებათ, მაგრამ შეუძლიათ უარყოფითი მნიშვნელობების მიღებაც ($g: \mathbb{C} \rightarrow (-\infty; +\infty)$). თუმცა მსგავსი ზომები პრაქტიკულ ამოცანებში შედარებით იშვიათად გამოიყენება და ამიტომ ჩვენ მათ არ განვიხილავთ.

განვიხილოთ ჩვენი თემისთვის საინტერესო რამდენიმე ზომა, რომელიც ზოგადობის თვალსაზრისით მოთავსებულია ადიციურ ზომებსა და ზოგად ზომებს შორის და ფართოდ არის გავრცელებული ლიტერატურაში. მათი გავრცელება კი განპირობებულია მრავალი პრაქტიკული გამოყენებით.

შოკეს ტევადობები

განზოგადებულ ზომათა თეორიაში ფუნდამენტურ ზომებად ხშირად განიხილება შოკეს ტევადობები. შოკეს სხვადასხვა რიგის ტევადობები წარმოადგენს ზომათა კლასს, რომელშიც ზომები შეგვიძლია დავალაგოთ გარკვეული თანმიმდევრობით მათი ზოგადობის და ინტერპრეტაციის გათვალისწინებით. სხვადასხვა ზომები მათი თვისებებით ხშირად დარდება სწორედ შოკეს სხვადასხვა რიგის ტევადობებს.

განსაზღვრება 27. კონკრეტული $k \geq 2$ მთელი რიცხვისთვის, შოკეს k რიგის ტევადობა ზომად (X, \mathbb{F}) სივრცეზე ეწოდება g მონოტონურ ზომას, თუ \mathbb{F} -ის ნებისმიერი k ცალი ქვესიმრავლისთვის სრულდება უტოლობები:

$$g\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \geq \sum_{\substack{K \subseteq N_k \\ K \neq \emptyset}} (-1)^{|K|+1} g\left(\bigcap_{i \in K} A_i\right),$$

სადაც $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$.

განსაზღვრებაში არ მოითხოვება, რომ A_i სიმრავლეები იყოს განსხვავებული, აქედან გამომდინარე, შოკეს k რიგის ტევადობა ასევე არის $k' = k - 1, k - 2, \dots, 2$ რიგის ტევადობა. თუმცა შოკეს k რიგის ტევადობა შეიძლება არ იყოს უფრო მაღალი რიგის ($k + 1, k + 2$ და ა.შ.) ტევადობა. მაშასადამე შოკეს მე-2 რიგის ტევადობები არის ყველაზე ზოგადი ტევადობები და \mathbb{F} -ის ნებისმიერი სიმრავლეთა წყვილისთვის აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$g(A_1 \cup A_2) \geq g(A_1) + g(A_2) - g(A_1 \cap A_2).$$

ყველაზე ნაკლებად ზოგადი შოკეს ტევადობები კი არის ∞ რიგის ტევადობები (რომლებსაც ასევე სრულად მონოტონურ ზომებს უწოდებენ ხოლმე), რომლებიც ნებისმიერი $k \geq 2$ მთელი რიცხვისთვის და \mathbb{F} -ის ყველა k ცალი ქვესიმრავლისთვის აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$g(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \geq \sum_i g(A_i) - \sum_{i < j} g(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k+1} g(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k).$$

მარტივი შესამჩნევია, რომ შოკეს მე-2 რიგის ტევადობები აკმაყოფილებენ სუბადიციური ზომების პირობებს (როდესაც $A_1 \cap A_2 = \emptyset$), პლუს დამატებით უტოლობებს (როდესაც $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$). მაშასადამე შოკეს მე-2 რიგის, ყველაზე ზოგადი ტევადობები სუბადიციური ზომების ქვეკლასი გამოდის.

განსაზღვრება 28. კონკრეტული $k \geq 2$ მთელი რიცხვისთვის, შოკეს k რიგის ალტერნატიული ტევადობა ზომად (X, \mathbb{F}) სივრცეზე ეწოდება g მონოტონურ ზომას, თუ \mathbb{F} -ის ნებისმიერი k ცალი ქვესიმრავლისთვის სრულდება უტოლობები:

$$g\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \leq \sum_{\substack{K \subseteq N_k \\ K \neq \emptyset}} (-1)^{|K|+1} g\left(\bigcup_{i \in K} A_i\right),$$

სადაც $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$.

შოკეს მე-2 რიგის ტევადობების ანალოგიურად, მე-2 რიგის ალტერნატიული ტევადობები წარმოადგენენ ყველაზე ზოგად ალტერნატიულ ტევადობებს და \mathbb{F} -ის ნებისმიერი სიმრავლეთა წყვილისთვის აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$g(A_1 \cap A_2) \leq g(A_1) + g(A_2) - g(A_1 \cup A_2).$$

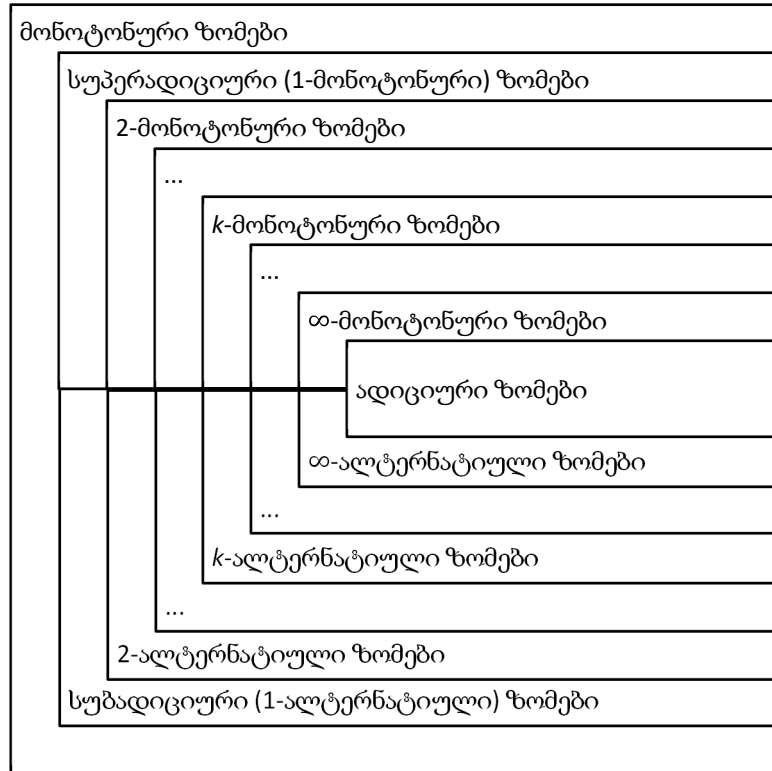
ასევე შოკეს ∞ რიგის ალტერნატიული ტევადობები, რომლებიც ნებისმიერი $k \geq 2$ მთელი რიცხვისთვის და \mathbb{F} -ის ყველა k ცალი ქვესიმრავლისთვის აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$g(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \leq \sum_i g(A_i) - \sum_{i < j} g(A_i \cup A_j) + \dots + (-1)^{k+1} g(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k),$$

წარმოადგენენ ყველაზე ნაკლებად ზოგად ტევადობებს.

შოკეს მე-2 რიგის ალტერნატიული ტევადობები აკმაყოფილებენ სუბადიციური ზომების პირობებს (როდესაც $A_1 \cap A_2 = \emptyset$), პლუს დამატებით უტოლობებს (როდესაც $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$). მაშასადამე შოკეს მე-2 რიგის, ყველაზე ზოგადი ალტერნატიული ტევადობები სუბადიციური ზომების ქვეკლასი გამოდის.

ლიტერატურაში შოკეს k რიგის ტევადობები მოხსენიებულია ხოლმე როგორც k -მონოტონური ზომები, k რიგის ალტერნატიული ტევადობები კი - როგორც k -ალტერნატიული ზომები. ასევე გვხვდება ტერმინები: შოკეს k რიგის ქვედა და ზედა ტევადობები, სადაც “ქვედა” - k რიგის ტევადობებს, ხოლო “ზედა” - k რიგის ალტერნატიულ ტევადობებს შეესაბამება. მონოტონურ ზომებს, რომლებიც არ არიან 2-მონოტონური ზომები, 1-მონოტონურ ზომებს უწოდებენ ხოლმე. განხილული ზომები სქემატურად გამოსახულია ფიგურა 13-ზე.



ფიგურა 13. k -მონოტონური და k -ალტერნატიული ზომების ურთიერთმიმართება

მარტივი საჩვენებელია, რომ თუ ზომად (X, \mathbb{F}) სივრცეზე g არის ნორმირებული k -მონოტონური ზომა, მაშინ მისი დუალური ზომა არის ნორმირებული k -ალტერნატიული ზომა (X, \mathbb{F}) -ზე.

სანდოობის (Belief) და დასაჯერობის (Plausibility) ზომები

განსაზღვრება 29. სანდოობის ზომა არის სიმრავლური ფუნქცია

$$Bel: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1],$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

1. $Bel(\emptyset) = 0, Bel(X) = 1;$
2. $Bel(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \geq \sum_i Bel(A_i) - \sum_{i < j} Bel(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} Bel(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$, სადაც $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ არის $\mathcal{P}(X)$ -ის ნებისმიერი სასრული ქვეკლასი;
3. Bel არის ზემოდან უწყვეტი;

$A \in \mathcal{P}(X)$ სიმრავლისთვის $Bel(A)$ ინტერპრეტირდება, როგორც სანდოობის ხარისხი (არსებულ მტკიცებულებაზე დაყრდნობით) იმისა, რომ X -ის მოცემული ელემენტი მიეკუთვნება A სიმრავლეს.

როდესაც A_1, A_2, \dots, A_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია ($A_i \cap A_j = \emptyset, i, j \in \mathbb{N}_n, i \neq j$), მე-2 პირობიდან გამომდინარეობს, რომ სიმრავლეების გაერთიანებასთან ასოცირებული სანდოობის ზომა (ხარისხი) ნაკლები არ უნდა იყოს თითოეულ სიმრავლესთან ასოცირებულ სანდოობის ზომათა ჯამზე.

განსაზღვრებიდან გამომდინარე, სანდოობის ზომები ∞ -მონოტონურია. ასევე მარტივი საჩვენებელია, რომ სანდოობის ზომები მონოტონური და სუპერადიციური ზომებია.

თუ დავუშვებთ, რომ $A_1 = A$ და $A_2 = \bar{A}$, მივიღებთ სანდოობის ზომის ფუნდამენტურ თვისებას:

$$Bel(A) + Bel(\bar{A}) \leq 1.$$

სანდოობის ზომასთან ასოცირებულია დასაჯერობის ზომა, რომელიც შემდეგნაირად განიმარტება:

$$Pl(A) = 1 - Bel(\bar{A}), \quad \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

ანალოგიურად,

$$Bel(A) = 1 - Pl(\bar{A}).$$

მაშასადამე სანდოობის და დასაჯერობის ზომები ურთიერთდუალურია.

დასაჯერობის ზომა შეიძლება განიმარტოს სანდოობის ზომისაგან დამოუკიდებლადაც:

განსაზღვრება 30. დასაჯერობის ზომა არის სიმრავლური ფუნქცია

$$Pl: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1],$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

1. $Pl(\emptyset) = 0, Pl(X) = 1;$
2. $Pl(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \leq \sum_i Pl(A_i) - \sum_{i < j} Pl(A_i \cup A_j) + \dots + (-1)^{n+1} Pl(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n),$
სადაც $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ არის $\mathcal{P}(X)$ -ის ნებისმიერი სასრული ქვეკლასი;
3. Pl არის ქვემოდან უწყვეტი;

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ დასაჯერობის ზომა σ -ალტერნატიული ზომაა. ასევე მარტივი საჩვენებელია, რომ სანდოობის ზომები მონოტონური და სუბადიციური ზომებია.

თუ კვლავ დავუშვებთ, რომ $n = 2, A_1 = A$ და $A_2 = \bar{A}$, მივიღებთ დასაჯერობის ზომის მნიშვნელოვან თვისებას:

$$Pl(A) + Pl(\bar{A}) \geq 1.$$

სანდოობის და დასაჯერობის ზომები ასევე შეიძლება განიმარტოს ერთი მნიშვნელოვანი ფუნქციის საშუალებით.

განსაზღვრება 31. სიმრავლურ ფუნქციას

$$m: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$$

ეწოდება *საბაზისო ალბათური განაწილება* (basic probability assignment), თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. $m(\emptyset) = 0;$
2. $\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} m(A) = 1;$

$m(A)$ ასახავს მტკიცებულების ხარისხს, ან ჩვენს რწმენას, რომ X -ის მოცემული ელემენტი მიეკუთვნება A სიმრავლეს და არა მის რომელიმე კონკრეტულ ქვესიმრავლეს.

მაგალითად, თუ x არის პიროვნების ასაკი და X არის ყველა შესაძლო ასაკთა სიმრავლე (ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის შესაბამისი ქვესიმრავლე), $m(A)$ შეიძლება ასახავდეს მტკიცებულების ხარისხს, რომ ეს კონკრეტული პიროვნება თინეიჯერია (თუ $A = \{13, 14, \dots, 19\}$), მაგრამ უფრო მეტად ვერ ვაზუსტებთ მის ასაკს.

შევნიშნოთ, რომ საბაზისო ალბათური განაწილება არ არის ალბათური განაწილება: ალბათური განაწილების ფუნქციები განისაზღვრება X -ზე, მაშინ, როდესაც საბაზისო ალბათური განაწილება განსაზღვრულია $\mathcal{P}(X)$ -ზე. გაუგებრობების თავიდან აცილების მიზნით, ზოგჯერ საბაზისო ალბათურ განაწილებას *საბაზისო განაწილებას* უწოდებენ.

ასევე შევნიშნოთ, რომ:

1. $m(X) = 1$ არ მოითხოვება;
2. $A \subset B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$ არ მოითხოვება;
3. ასევე არ მოითხოვება რაიმე სახის კავშირი $m(A)$ -სა და $m(\bar{A})$ -ს შორის;

მაშასადამე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ საბაზისო განაწილებები არ წარმოადგენენ მონოტონურ ზომებს.

საბაზისო განაწილების საშუალებით შეგვიძლია განვმარტოთ სანდოობისა და დასაჯერობის ზომები:

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad (8)$$

და

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad (9)$$

ნებისმიერი $A \in \mathcal{P}(X)$ -სთვის.

მტკიცდება, რომ სანდოობისა და დასაჯერობის ზომების ჩვენ მიერ განხილული და ეს უკანასკნელი განსაზღვრებები ურთიერთექვივალენტურია (Wang & Klir, 2009).

სანდოობის ზომის საბაზისო განაწილებით განსაზღვრის არსი შემდეგია: თუ $m(A)$ ასახავს მტკიცებულების ხარისხს, ან ჩვენს რწმენას, რომ X -ის განსახილველი ელემენტი მიეკუთვნება სახელდობრ A სიმრავლეს და არა მის რომელიმე ქვესიმრავლეს, $Bel(A)$ წარმოადგენს ჯამურ მტკიცებულებას, ან რწმენას, რომ განსახილველი ელემენტი მიეკუთვნება A სიმრავლეს ან მის რომელიმე ქვესიმრავლეს.

დასაჯერობის ზომის არსი კი განსხვავებულია: ის წარმოადგენს არა მხოლოდ ჯამურ მტკიცებულებას, ან რწმენას, რომ განსახილველი ელემენტი მიეკუთვნება A სიმრავლეს ან მის რომელიმე ქვესიმრავლეს, არამედ კიდევ დამატებით მტკიცებულებას ან რწმენას, რომელიც დაკავშირებულია A -სთან თანაკვეთის მქონე სიმრავლევებთან. შესაბამისად, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ -სთვის

$$Bel(A) \leq Pl(A).$$

განსაზღვრება 32. ისეთ სიმრავლეებს $A \in \mathcal{P}(X)$, რომელთათვისაც $m(A) > 0$ ეწოდებათ m -ის ფოკალური ელემენტები.

ფოკალური ელემენტები არის X -ის ქვესიმრავლეები, რომლებზეც ფოკუსირებულია ჩვენს ხელთ არსებული ინფორმაცია, ანუ ხელმისაწვდომი მტკიცებულებები. როდესაც X სიმრავლე სასრულია, m შეგვიძლია სრულად დავახასიათოთ მისი ფოკალური A ელემენტებით და შესაბამისი $m(A)$ მნიშვნელობებით.

განსაზღვრება 33. წყვილს (\mathcal{F}, m) , სადაც \mathcal{F} -ით აღნიშნულია ფოკალური ელემენტების სიმრავლე (კლასი), ეწოდება *მონაცემთა ტანი* (body of evidence).

საბაზისო განაწილების ტერმინებში სრული უცოდინრობა (total ignorance) გამოისახება, როგორც $m(X) = 1$ და $m(A) = 0, \forall A \neq X$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ვიცით, განსახილველი ელემენტი მიეკუთვნება უნივერსალურ სიმრავლეს, მაგრამ არ გვაქვს არანაირი ინფორმაცია, რომ ის მიეკუთვნება X -ის რომელიმე კონკრეტულ ქვესიმრავლეს. განსაზღვრებიდან გამომდინარე, სანდოობის ზომის ენაზე, სრული უცოდინრობა ანალოგიურად ჩაიწერება: $Bel(X) = 1$ და $Bel(A) = 0, \forall A \neq X$, ხოლო დასაჯერობის ენაზე განსხვავებულად: $Pl(\emptyset) = 0$ და $Pl(A) = 1, \forall A \neq \emptyset$.

თუ მოცემულია Bel (ან Pl) ზომა, შესაბამისი საბაზისო განაწილების გამოთვლა შესაძლებელია ფორმულით:

$$m(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A-B|} Bel(B)$$

ნებისმიერი $A \in \mathcal{P}(X)$ -ისთვის, სადაც $|A - B|$ აღნიშნავს $A - B$ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობას. აღნიშნული ფორმულის მართებულობა ნაჩვენებია უანგის და კლირის 2009 წლის ნაშრომში (Wang & Klir, 2009).

ალბათური ზომები

განსაზღვრება 34. თუ სანდოობის ზომის პირობებში მე-2 პირობას ჩავანაცვლებთ უფრო მკაცრი პირობით:

$$Bel(A \cup B) = Bel(A) + Bel(B), \quad \forall A, B, A \cap B = \emptyset,$$

მივიღებთ კლასიკურ ალბათურ (ალბათობის) ზომას.

აღსანიშნავია მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც მარტივად მტკიცდება (Klir & Folger, 1988) და რომელიც ასახავს კავშირს სანდოობის, დასაჯერობის და ალბათობის ზომებს შორის.

თეორემა. სასრული X სიმრავლის შემთხვევაში, $(X, \mathcal{P}(X))$ -ზე განსაზღვრული სანდოობის Bel ზომა არის ალბათური ზომა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მისი შესაბამისი საბაზისო განაწილება m მოიცემა $m(\{x\}) = Bel(\{x\})$ ფორმულით და $m(A) = 0$, X -ის ნებისმიერი არაერთელემენტური ქვესიმრავლისთვის (ანუ, როგორც იტყვიან, m ფოკუსირებულია ერთელემენტურ სიმრავლეებზე).

განსაზღვრება 35. აღნიშნული თეორემის თანახმად, სასრულ სიმრავლეებზე განსაზღვრული ალბათური ზომები შეიძლება დავახასიათოთ ფუნქციით:

$$p: X \rightarrow [0, 1],$$

სადაც $p(x) = m(\{x\})$. ამ ფუნქციას ალბათური განაწილების ფუნქცია ეწოდება, $\{p(x) | x \in X\}$ სიმრავლეს კი ალბათური განაწილება X -ზე.

როდესაც საბაზისო განაწილება ფოკუსირებულია ერთელემენტურ სიმრავლეებზე, როგორც ეს ხდება ალბათური ზომების შემთხვევაში, მაშინ (8)-(9) ფორმულების მარჯვენა მხარეები ერთმანეთს ემთხვევა და

$$Bel(A) = Pl(A) = \sum_{x \in A} m(\{x\}) = \sum_{x \in A} p(x)$$

ნებისმიერი $A \in \mathcal{P}(X)$ -სთვის.

მაშასადამე სანდოობის და დასაჯერობის ზომები ერთმანეთს ემთხვევა ალბათობის ზომის აქსიომების შემთხვევაში და ამ დროს შესაბამისი საბაზისო განაწილება ფოკუსირებულია ერთელემენტურ სიმრავლეებზე.

ალბათურ ზომას ხშირად აღნიშნავენ P სიმბოლოთი. მაშინ:

$$P(A) = \sum_{x \in A} p(x)$$

ნებისმიერი $A \in \mathcal{P}(X)$ -სთვის.

ალბათური ზომების ენაზე, სრული უცოდინრობა მოიცემა ალბათობის თანაბარი განაწილებით:

$$p(x) = \frac{1}{|X|} (= m(\{x\})).$$

აღნიშნული პირდაპირ გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ ალბათური ზომების შესაბამისი საბაზისო განაწილებები ფოკუსირებულია ერთელემენტურ სიმრავლეებზე.

აუცილებლობის (Necessity) და შესაძლებლობის (Possibility) ზომები

როდესაც უნივერსალური სიმრავლის A_1, A_2, \dots, A_n ქვესიმრავლები შეგვიძლია დავალაგოთ ისე, რომ ყოველი მათგანი წარმოადგენდეს მომდევნოს ქვესიმრავლეს $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$, ამ სიმრავლებს ჩალაგებულს უწოდებენ.

განსაზღვრება 36. როდესაც (\mathcal{F}, m) მონაცემთა ტანში ფოკალური ელემენტები ჩალაგებულია, შესაბამის სანდობის (Bel) და დასაჯერობის (Pl) ზომებს კონსონანტური ეწოდება.

სახელი ასახავს ფაქტს, რომ ჩალაგებულ ფოკალურ ელემენტებთან ასოცირებული ინფორმაცია (მტკიცებულებები) კონფლიქტში არ მოდის ერთმანეთთან, ანუ ჩალაგებული ფოკალური ელემენტები არადისონანსურია ინფორმაციული თვალსაზრისით.

მარტივი საჩვენებელია (Klir & Folger, 1988), რომ როდესაც ფოკალური ელემენტები ჩალაგებულია, სანდობის (Bel) და დასაჯერობის (Pl) ზომები იზღუდებიან, იღებენ სპეციფიკურ ფორმას და მათთვის სრულდება პირობები:

$$Bel(A \cap B) = \min[Bel(A), Bel(B)], \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X);$$
$$Pl(A \cup B) = \max[Pl(A), Pl(B)], \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X);$$

განსაზღვრება 37. კონსონანტურ სანდობის და დასაჯერობის ზომებს შესაბამისად ეწოდება აუცილებლობის (*necessity*) და შესაძლებლობის (*possibility*) ზომები. აუცილებლობის ზომა აღვნიშნოთ ν სიმბოლოთი, ხოლო შესაძლებლობის ზომა - π -ით. მაშინ $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$:

$$\nu(A \cap B) = \min[\nu(A), \nu(B)];$$
$$\pi(A \cup B) = \max[\pi(A), \pi(B)];$$

ხშირად, აუცილებლობის და შესაძლებლობის ზომები სწორედ ამ ტოლობებით განიმარტება, ხოლო შემდეგ მტკიცდება, რომ ეს ზომები განსაზღვრულია ჩალაგებული ფოკალური ელემენტებისთვის.

ცხადია, რომ

$$\nu(A) = 1 - \pi(\bar{A}), \quad \forall A \in \mathcal{P}(X),$$

ამიტომ ნებისმიერი თვისება, რომელზეც ვიმსჯელებთ შესაძლებლობის ზომისთვის, შეგვიძლია “ვთარგმნოთ” აუცილებლობის ზომისთვისაც და პირიქით. რადგან შესაძლებლობის ზომები უფრო ფართოდ გამოიყენება პრაქტიკაში, ჩვენ აქცენტს სწორედ მათზე გავაკეთებთ.

ინდუქციით მტკიცდება, რომ როგორც ალბათური ზომა შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ალბათობის განაწილების ფუნქციით, ასევე შეიძლება შესაძლებლობის ზომის წარმოდგენა სპეციფიკური ფუნქციით:

$(X, \mathcal{P}(X))$ -ზე განსაზღვრული ნებისმიერი შესაძლებლობის ზომა π შეიძლება უნიკალურად წარმოდგენილ იქნას შესაძლებლობის განაწილების ფუნქციის საშუალებით

$$r: X \rightarrow [0, 1],$$

შემდეგი ფორმულით:

$$\pi(A) = \max_{x \in A} r(x)$$

ნებისმიერი $A \in \mathcal{P}(X)$ -სთვის.

განსაზღვრება 38. თუ განვიხილავთ $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ უნივერსალურ სიმრავლეს და მასზე განსაზღვრულ შესაძლებლობის განაწილების r ფუნქციას, მაშინ $\pi = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ -ს, სადაც $r_i = r(x_i), \forall x \in X$, ეწოდება r ფუნქციასთან ასოცირებული შესაძლებლობითი განაწილება.

კვლავ განვიხილოთ $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ უნივერსალური სიმრავლე, $(X, \mathcal{P}(X))$ -ზე განსაზღვრული შესაძლებლობის ზომა π და მასთან ასოცირებული საბაზისო განაწილება m .

შესაძლებლობის ზომის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, m -ის ფოკალური ელემენტები ჩალაგებულია. ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ, რომ ეს ფოკალური ელემენტები არის ყველა ან ზოგიერთი სიმრავლე შემდეგი ჩალაგებული ქვესიმრავლეებიდან:

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n (= X),$$

სადაც $A_i = \{x_1, \dots, x_i\}$, $i \in \mathbb{N}_n$. მაშასადამე $m(A) = 0, \forall A \neq A_i (i \in \mathbb{N}_n)$ და $\sum_{i=1}^n m(A_i) = 1$, თუმცა არ მოითხოვება, რომ $m(A_i) \neq 0, \forall i \in \mathbb{N}_n$.

განსაზღვრება 39. წინა მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი შესაძლებლობის ზომა შეიძლება უნიკალურად აღიწეროს n -ეულით $\mathbb{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, სადაც $m_i = m(A_i)$, $i \in \mathbb{N}_n$. ცხადია, რომ $\sum_{i=1}^n m_i = 1$ და $m_i \in [0, 1], i \in \mathbb{N}_n$. \mathbb{m} -ს ეწოდება ძირითადი განაწილება (basic distribution).

რადგან ყოველი შესაძლებლობის ზომა შეიძლება უნიკალურად აღიწეროს როგორც შესაძლებლობითი განაწილებით (r), ასევე ძირითადი განაწილებით (\mathbb{m}), უნდა არსებობდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა r -სა და \mathbb{m} -ს შორის. მართლაც:

$$r_i = r(x_i) = \pi(\{x_i\}) = Pl(\{x_i\}) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) = \sum_{k=i}^n m(A_k) = \sum_{k=i}^n m_k,$$

$x_i \in X, i \in \mathbb{N}_n$.

თუ ამ განტოლებებს ამოვხსნით m_i -ების მიმართ, მივიღებთ:

$$m_i = r_i - r_{i+1},$$

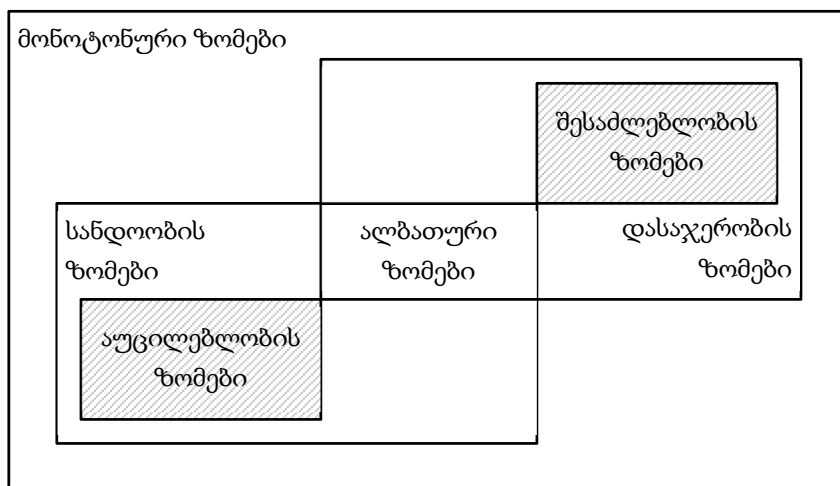
სადაც $i \in \mathbb{N}_n$ და $r_{n+1} \equiv 0$.

ცხადია, რომ $r_1 = 1$ ნებისმიერი შესაძლებლობითი განაწილებისთვის, ასე რომ n სიგრძის მქონე უმცირესი შესაძლებლობითი განაწილება არის $r = (1, 0, 0, \dots, 0)$, შესაბამისი ძირითადი განაწილებაა $\mathbb{m} = (1, 0, 0, \dots, 0)$. ეს შესაძლებლობითი განაწილება შეესაბამება იდეალური მტკიცებულების (perfect evidence) სიტუაციას, რომელშიც არ არსებობს განუზღვრელობა.

უდიდესი შესაძლებლობითი განაწილება კი არის $r = (1, 1, 1, \dots, 1)$, შესაბამისი ძირითადი განაწილებაა $\mathbb{m} = (0, 0, 0, \dots, 1)$. ეს შესაძლებლობითი განაწილება ასახავს სრული უცოდინრობის სიტუაციას.

ზოგადად, რაც უფრო დიდია შესაძლებლობითი განაწილება, მით ნაკლებია სიცხადე (მტკიცებულებები) და დიდია განუზღვრელობა.

განხილული ზომები სქემატურად გამოსახულია ფიგურა 14-ზე.



ფიგურა 14. მნიშვნელოვანი მონოტონური ზომების ურთიერთმიმართება

შესაძლებლობის ზომაზე დაყრდნობით, ზადემ ჩამოაყალიბა შესაძლებლობის თეორია (Zadeh, 1978), რომელიც მოგვიანებით განავითარეს დუბუამ და პრადმა (Dubois & Prade, 1988). შესაძლებლობის თეორია განიხილავს ცვლადის არა ალბათურ, არამედ ე.წ. შესაძლო მნიშვნელობებს, რაც, ალბათობასთან შედარებით, ბუნებრივ ენაზე გაკეთებული განცხადებების, მათში არსებული ინფორმაციის აღწერის უფრო მოქნილ საშუალებას წარმოადგენს. თუ შესაძლებლობის ზომას შევადარებთ ალბათობის ზომას, შეიძლება ითქვას, რომ ალბათობისგან განსხვავებით, შესაძლებლობის ზომით ინფორმაციის აღწერა ექსპერტს აძლევს მეტ თავისუფლების ხარისხს. მისთვის აუცილებელი არ არის გარკვეული სტატისტიკური მონაცემების, წარსულის გამოცდილების, ჩატარებული ექსპერიმენტების შედეგების გათვალისწინება. ის უბრალოდ შეიძლება აღნიშნავდეს ექსპერტის რწმენას, რომ რაიმე ხდომილება შესაძლებელია (ან შეუძლებელია) განხორციელდეს. მაგალითად, თუ განვიხილავთ წინადადებას: “გიორგის სიმაღლე 1.60 მეტრს აღემატება”, ის შეიცავს ინფორმაციას, რომ გიორგის სიმაღლე შეიძლება იყოს ნებისმიერი $h > 1.60$ და შეუძლებელია იყოს $h \leq 1.60$ (შესაძლებლობა = 0). დამატებით, შეგვიძლია შემოვიღოთ $h > 1.60$ სიმაღლეების შესაბამისი ხარისხები - შესაძლებლობითი გრადაცია. მაგალითად, გიორგის სიმაღლისთვის $h = 1.80$ შესაძლებლობის დონე შეიძლება იყოს უფრო მეტი, ვიდრე $h = 1.90$ -ის. ასე შეგვიძლია განვსაზღვროთ შესაძლებლობითი განაწილება, მაგრამ არა ალბათური.

შესაძლებლობის და ალბათობის თეორიების საინტერესო შედარებაა წარმოდგენილი აგარვალის და ნაიალის ნაშრომში (Agarwal & Nayal, 2015), რომელშიც ნათლად არის ასახული მსგავსებები და განსხვავებები ამ თეორიებს შორის. შესაძლებლობის თეორიის მეტი მოქნილობის წარმოჩინებისთვის შევადაროთ შესაძლებლობის და ალბათობის თეორიების ძირითადი მათემატიკური მახასიათებლები:

ალბათობის თეორია	შესაძლებლობის თეორია
მონაცემთა ტანი შედგება ერთეულემენტისანი სიმრავლეებისგან	მონაცემთა ტანი შედგება ჩალაგებული სიმრავლეებისგან
ალბათობის ზომა ადიციურია: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $\forall A, B, \quad A \cap B = \emptyset$	შესაძლებლობის (და აუცილებლობის) ზომა ემორჩილება მაქსიმუმის (მინიმუმის) წესებს: $\pi(A \cup B) = \max[\pi(A), \pi(B)]$
ალბათობის ზომა ცალსახად შეიძლება წარმოდგინდეს ალბათური განაწილების ფუნქციით $p: X \rightarrow [0, 1]$ $P(A) = \sum_{x \in A} p(x)$	შესაძლებლობის ზომა ცალსახად შეიძლება წარმოდგინდეს შესაძლებლობის განაწილების ფუნქციით $r: X \rightarrow [0, 1]$ $\pi(A) = \max_{x \in A} r(x)$
ნორმირება გულისხმობს: $\sum_{x \in X} p(x) = 1$	ნორმირება გულისხმობს: $\max_{x \in X} r(x) = 1$
სრული უცოდინრობა მოიცემა, როგორც: $p(x) = \frac{1}{ X }$	სრული უცოდინრობა მოიცემა, როგორც: $r(x) = 1$ $\forall x \in X$
$P(A) + P(\bar{A}) = 1$	$\pi(A) + \pi(\bar{A}) \geq 1, \nu(A) + \nu(\bar{A}) \leq 1$ $\max[\pi(A), \pi(\bar{A})] = 1, \min[\nu(A), \nu(\bar{A})] = 0$

რომ შევაჯამოთ, ალბათობის და შესაძლებლობის თეორიები კონცეპტუალურად განსხვავდებიან. ალბათობა ფუნდამენტურად არის მოვლენის სიხშირის ზომა, მაშინ როდესაც, შესაძლებლობა ზომავს მოვლენის შინაარსს. აქედან გამომდინარე, ალბათობის თეორია კარგი ინსტრუმენტია იმგვარი განუზღვრელობის აღსაწერად, როდესაც ცნობილია სიხშირეები, ანუ როდესაც მტკიცებულება ეფუძნება დამოუკიდებელი ექსპერიმენტების საკმარისად გრძელ სერიას. შესაძლებლობის თეორია კი კარგი ინსტრუმენტია იმგვარი განუზღვრელობის ფორმალიზებისთვის, როდესაც არასრული ინფორმაცია მოცემულია არამკაფიო აღწერებით და განცხადებებით. საექსპერტო ცოდნის ინჟინერია კი სწორედ მსგავსი ინფორმაციის დამუშავებას გულისხმობს, ამიტომ შესაძლებლობის ზომას ჩვენ ხშირად ვიყენებთ ნაშრომში მოცემული ამოცანების გადასაჭრელად.

2.1.3. “არამკაფიო” ინტეგრალები

როგორც აღვნიშნეთ, მონოტონური ზომები, მეტი თავისუფლების ხარისხის ხარჯზე, საშუალებას იძლევა, უფრო ბუნებრივად აღვწეროთ მონაცემები და მაქსიმალურად შევიწარმოოთ ინფორმაცია, რომელიც კოდირებულია ადამიანების მიერ გაკეთებულ სუბიექტურ შეფასებებში. ზემოთ განხილული მათემატიკური ინსტრუმენტები - არამკაფიო სიმრავლეები და განზოგადებული ზომები - ამგვარ ინფორმაციასთან დაკავშირებული უზუსტობისა და განუზღვრელობის ფორმალიზებისთვის გამოიყენება. მაგრამ ხშირად მხოლოდ ინფორმაციის აღწერა საკმარისი არ არის და რეალურ ამოცანებში მთავარი პრობლემა არსებულ ინფორმაციაზე დაყრდნობით გადაწყვეტილებების მიღებაა. სწორედ ამისთვის, განზოგადებულ სიმრავლეებთან და ზომებთან ერთად საჭირო გახდა განზოგადებული ინტეგრალური აღრიცხვის ჩამოყალიბება. ინტეგრალები, რომლებიც შეიქმნა არამკაფიო და განუზღვრელ გარემოში სამუშაოდ, ბევრნაირია - როგორც ზოგადი და უნივერსალური, ასევე კონკრეტულ ამოცანებზე მორგებული და სპეციფიკური. ჩვენ განვიხილავთ ინტეგრალებს, რომლებიც ყველაზე ხშირად გამოიყენება პრაქტიკულ ამოცანებში.

მონოტონური (არამკაფიო) ზომების მსგავსად, იგივე მიზეზით, ინტეგრალებს, რომლებიც შეიქმნა და გამოიყენებოდა არამკაფიო ინფორმაციის დასამუშავებლად, “არამკაფიო ინტეგრალებს” უწოდებდნენ. ეს ტერმინი დღესაც გამოიყენება, თუმცა, ალბათ, მთლად კორექტული არ არის, რადგან გარკვეულ დაბნეულობას წარმოშობს ხოლმე - მათ პირდაპირი კავშირი არ აქვთ არამკაფიო სიმრავლეებთან. ჩვენს ნაშრომში იშვიათად გამოვიყენებთ ტერმინს “არამკაფიო ინტეგრალი” და უფრო ხშირად ვისარგებლებთ კონკრეტული სახელებით კონკრეტულ ინტეგრალზე საუბრისას. ამ ინტეგრალების ოჯახის აღსაწერად ზოგჯერ ასევე გამოვიყენებთ ტერმინს “განზოგადებული ინტეგრალები”.

ინფორმაციის დამუშავების ამოცანებში, ინტეგრალები ძირითადად გამოიყენება სხვადასხვა წყაროდან მიღებული სხვადასხვაგვარი ინფორმაციის აგრეგირებისთვის; ამასთან, შეიძლება არსებობდეს განსხვავებული დაშვებები ინფორმაციის წყაროების ურთიერთ-დამოკიდებულებების შესახებ. განზოგადებული ინტეგრალების საშუალებით შესაძლებელია როგორც იმგვარი სიტუაციების მოდელირება, როდესაც ინფორმაციის წყაროები ურთიერთ-დამოუკიდებელია, ასევე იმგვარი სიტუაციებისა, რომლებშიც წყაროები ურთიერთ-დამოუკიდებელი არ არის. ინფორმაციის წყაროების წონა თუ გარკვეულ პირობებთან შესაბამისობა აღიწერება სხვადასხვა (ძირითადად, მონოტონური) ზომების გამოყენებით.

როგორც ქვემოთ ვნახავთ, განზოგადებული ინტეგრალების გამოყენება ძალიან ეფექტურად შეიძლება ბევრ პრაქტიკულ ამოცანაში, თუმცა კომპიუტერული მეცნიერებების ბევრი თანამედროვე მიმართულება კვლავ იყენებს კლასიკურ მათემატიკურ აპარატს - კლასიკურ ზომებს და ინტეგრალს. ამის ერთ-ერთი მიზეზი ალბათ ის არის, რომ განზოგადებულ ინტეგრალებით მუშაობა უფრო რთულია, რადგან: ა) შედარებით რთულია მათი ინტერპრეტაცია, ბ) ისინი გამოიყენება სიმრავლურ ფუნქციებთან ერთად, რაც იმას ნიშნავს, რომ ხარისხობრივად იზრდება დასამუშავებელი მონაცემების მოცულობა. ჩვენს ნაშრომში შევეცდებით მაქსიმალურად მარტივად, პრაქტიკულ ამოცანებზე დაყრდნობით ჩამოვაყალიბოთ განზოგადებული ინტეგრალის ინტერპრეტაცია, ავხსნათ მათი შინაარსი და შემოვთავაზოთ არაზუსტი და განუზღვრელობის შემცველი ინფორმაციის დამუშავების ეფექტური მოდელი.

ინტეგრალთან დაკავშირებული განსაზღვრებები მოცემულია შოკეტს (Choquet, 1954), სუჯენოს (Sugeno, 1974), უანგის და კლირის (Wang & Klir, 2009) ნაშრომებიდან.

ლებეგის ინტეგრალი

განვიხილოთ (X, \mathbb{F}, g) ზომადი სივრცე, სადაც X არაცარიელი სიმრავლეა, $\mathbb{F} - X$ -ის ქვესიმრავლეების σ -ალგებრაა, ხოლო $g: \mathbb{F} \rightarrow [0, \infty)$ კლასიკური ზომაა, რომელიც არის არაუარყოფითი და σ -ადიციური და ერთი $A \in \mathbb{F}$ -ისთვის მაინც $g(A) < \infty$. X -ს ვუწოდოთ უნივერსალური სიმრავლე, რომელიც შეიძლება არ იყოს სასრული. ასევე ვიგულისხმობთ, რომ g არის σ -სასრული, რაც იმას ნიშნავს, რომ არსებობს $\{A_i\} \subset \mathbb{F}$, ისეთი, რომ $g(A_i) < \infty, i = 1, 2, \dots$ და $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X$.

განსაზღვრება 40. $s: X \rightarrow (-\infty, \infty)$ ფუნქციას ეწოდება მარტივი ფუნქცია, თუ მას აქვს $\sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}$ სახე, სადაც a_i ნამდვილი მუდმივი რიცხვია, $A_i \in \mathbb{F}$ და χ_{A_i} არის A_i -ის მახასიათებელი ფუნქცია, $i = 1, 2, \dots, m$.

განსაზღვრება 41. თუ (X, \mathbb{F}_X) და (Y, \mathbb{F}_Y) ზომადი სივრცეებია, $f: X \rightarrow Y$ ფუნქციას ეწოდება ზომადი ფუნქცია, როდესაც ნებისმიერი $A \in \mathbb{F}_Y$ სიმრავლის წინასახე f ფუნქციის მიმართ ეკუთვნის \mathbb{F}_X -ს. ანუ $f^{-1}(A) \equiv \{x \in X \mid f(x) \in A\} \in \mathbb{F}_X, \forall A \in \mathbb{F}_Y$.

განსაზღვრება 42. განვიხილოთ f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქცია X სიმრავლეზე. f ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი g ზომის მიმართ X სიმრავლეზე განიმარტება, როგორც

$$\int f dg = \lim_{j \rightarrow \infty} \int s_j dg = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_j} a_{ji} g(A_{ji}),$$

სადაც თითოეული $s_j = \sum_{i=1}^{m_j} a_{ji} \chi_{A_{ji}}$ მარტივი ფუნქციაა და $\{s_j\}$ არაკლებადი მიმდევრობაა, რომლისთვისაც $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = f$.

ასევე შეგვიძლია განვმარტოთ f ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი g ზომის მიმართ ნებისმიერ A ზომად სიმრავლეზე (აღინიშნება, როგორც $\int_A f dg$), თუ ზედა განსაზღვრებაში A_{ji} -ს შევცვლით $A_{ji} \cap A$ -ით.

თუ f ფუნქცია არ არის მაინცდამაინც არაუარყოფითი, ლებეგის ინტეგრალი მისთვის განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\int f dg = \int f^+ dg - \int f^- dg,$$

სადაც:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

და

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & f(x) \leq 0 \\ 0 & f(x) > 0 \end{cases}$$

თუ განვიხილავთ $I = [a, b]$ ინტერვალზე ბორელის ველის მიმართ ზომად ნებისმიერ f ფუნქციას ნამდვილ რიცხვთა მნიშვნელობებით, თუ არსებობს რიმანის ინტეგრალი $\int_a^b f(x) dx$, მაშინ შესაბამისი ლებეგის ინტეგრალიც არსებობს და $\int_I f dg = \int_a^b f(x) dx$, სადაც g ლებეგის ზომაა. მაშასადამე, ლებეგის ინტეგრალი არის რიმანის ინტეგრალის განზოგადება.

როდესაც g ზომა სასრულია, ლებეგის ინტეგრალი შეიძლება ასევე განიმარტოს შემდეგნაირად:

$$\int f dg = \int_{-\infty}^0 [g(F_\alpha) - g(X)] d\alpha + \int_0^\infty g(F_\alpha) d\alpha,$$

სადაც $F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$. როდესაც $f > 0$, ვიღებთ ფორმულას

$$\int f dg = \int_0^\infty g(F_\alpha) d\alpha,$$

რომელსაც ლებეგის ინტეგრალის რიმანის ინტეგრალად გარდაქმნის (ტრანსფორმაციის) თეორემა ეწოდება. კონკრეტულ შემთხვევაში, როდესაც X ნამდვილ რიცხვთა ღერძია, ორივე ინტეგრალი წარმოადგენს f ფუნქციის გრაფიკსა და x -ღერძს შორის მოთავსებული არის ფართობს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც X სიმრავლე სასრულია. დავუშვათ, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. \mathbb{F} -ის როლში კი ავიღოთ $\mathcal{P}(X)$. თუ $g(\{x_i\})$ -ს აღვნიშნავთ w_i -ით ($i = 1, 2, \dots$), მივიღებთ:

$$\int f dg = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

რადგან $f = \sum_{i=1}^n f(x_i) \chi_{\{x_i\}}$ მარტივი ფუნქციაა. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში, ლებეგის ინტეგრალი გამოდის $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ -ის შეწონილი ჯამი (w_i წონებია, არა მაინცდამაინც ერთეულოვანი ინტერვალიდან). როდესაც $0 \leq w_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ და $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, საქმე გვაქვს შეწონილ საშუალოსთან.

განვიხილოთ ერთი მარტივი და, ამავე დროს, საინტერესო მაგალითი, უანგის და კლირის ნაშრომიდან (Wang & Klir, 2009):

დავუშვათ, საწარმო ქირაობს სამ თანამშრომელს (x_1, x_2, x_3) გარკვეული პროდუქციის საწარმოებლად. თითოეულ მათგანს დამოუკიდებლად შეუძლია აწარმოოს შესაბამისად 5, 6 და 7 პროდუქტი დღეში. კვირის განმავლობაში კი ეს თანამშრომლები მუშაობენ შესაბამისად 6, 3 და 4 დღე (იხ. ცხრილი 4).

თანამშრომელი	წარმადობა (პროდუქტების რაოდენობა)	სამუშაო დღეების რაოდენობა კვირაში
x_1	5	6
x_2	6	3
x_3	7	4

ცხრილი 4. საწარმოს თანამშრომლების მაგალითი

აღნიშნული მაგალითისთვის ვიგულისხმობთ, რომ $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ და

$$f(x) = \begin{cases} 6, & x = x_1 \\ 3, & x = x_2 \\ 4, & x = x_3 \end{cases}$$

ჩავთვალოთ, რომ თანამშრომლები ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად მუშაობენ. მაშინ $g(\{x_1\}) = 5$, $g(\{x_2\}) = 6$ და $g(\{x_3\}) = 7$. კვირის განმავლობაში მათ მიერ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა იქნება:

$$\int f dg = \sum_{i=1}^3 g(\{x_i\}) \cdot f(x_i) = 5 \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 76.$$

შეწონილი ჯამი წარმოადგენს აგრეგაციის უმარტივეს ტექნიკას ინფორმაციის სინთეზისთვის. აღწერილი მაგალითიც შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ინფორმაციის სინთეზის ამოცანა, სადაც $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ წარმოადგენს ინფორმაციის წყაროებს, $f(x_i)$ წარმოადგენს x_i წყაროდან მიღებული ინფორმაციის რიცხობრივ შეფასებას, ხოლო $g(\{x_i\})$ წარმოადგენს x_i წყაროს მნიშვნელობას (ინფორმაციის წონას). აღწერილი მოდელი წრფივია და მისი გამოყენება აზრიანია მაშინ, როდესაც ინფორმაციის წყაროები ურთიერთდამოუკიდებელია. სწორედ მსგავს შემთხვევასთან გვეკონდა საქმე განხილულ მაგალითში, რომელშიც სამი თანამშრომელი ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად მუშაობდა.

შოკეს ინტეგრალი

განვიხილოთ (X, \mathbb{F}, g) მონოტონური ზომადი სივრცე, სადაც X არაცარიელი სიმრავლეა, \mathbb{F} – σ -ალგებრაა, ხოლო $g: \mathbb{F} \rightarrow [0, \infty)$ მონოტონური ზომაა. დავუშვათ, რომ $A \in \mathbb{F}$ და f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა (X, \mathbb{F}) -ზე.

განსაზღვრება 43. არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციის შოკეს ინტეგრალი მონოტონური g ზომის მიმართ ზომად A სიმრავლეზე აღინიშნება, როგორც $(C) \int_A f dg$ და განიმარტება ფორმულით:

$$(C) \int_A f dg = \int_0^\infty g(F_\alpha \cap A) d\alpha,$$

სადაც $F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0, \infty)$. როდესაც $A = X$, $(C) \int_X f dg$ -ის ნაცვლად პირდაპირ წერენ ხოლმე $(C) \int f dg$ -ს.

კერძო შემთხვევაში, როდესაც მონოტონური ზომა σ -ადიციურია, შოკეს ინტეგრალი ემთხვევა ლებეგის ინტეგრალს. ასე რომ, შოკეს ინტეგრალი წარმოადგენს ლებეგის ინტეგრალის განზოგადებას.

ნამდვილ რიცხვთა მნიშვნელობებიანი ზომადი f ფუნქციისთვის შოკეს ინტეგრალი განიმარტება შემდეგი ფორმულით:

$$(C) \int f dg = \int_{-\infty}^0 [g(F_\alpha) - g(X)] d\alpha + \int_0^\infty g(F_\alpha) d\alpha.$$

როდესაც X სიმრავლე სასრულია (დავუშვათ, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$), შოკეს ინტეგრალის გამოთვლისთვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ შედარებით მარტივი ფორმულა:

$$(C) \int f dg = \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - f(x_{i-1}^*)] g(\{x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*\}), \quad (10)$$

სადაც $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ არის $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ -ის ისეთი გადანაცვლება (პერმუტაცია), რომლისთვისაც $f(x_1^*) \leq f(x_2^*) \leq \dots \leq f(x_n^*)$

და $f(x_0^*) \equiv 0$.

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $A_i \equiv \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\}$ და $A_i^* \equiv \{x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*\}$. მაშინ (10) ფორმულა შემოკლებით შეგვიძლია შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$(C) \int f dg = \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - f(x_{i-1}^*)] g(A_i^*). \quad (11)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (11) ფორმულა ასევე შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$(C) \int f dg = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) [g(A_i^*) - g(A_{i+1}^*)], \quad (12)$$

სადაც $A_{n+1}^* \equiv \emptyset$ ($g(A_{n+1}^*) \equiv 0$).

დავუბრუნდეთ საწარმოს თანამშრომლების მაგალითს, რომელიც განვიხილეთ ლეხეგის ინტეგრალისთვის. აღნიშნულ მაგალითში x_1, x_2 და x_3 თანამშრომლები ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად მუშაობდნენ შესაბამისად 6, 3 და 4 დღის განმავლობაში (იხ. ცხრილი 4). თუმცა, რეალურ სიტუაციებში, როდესაც ერთ ორგანიზაციაში, ერთ ჯგუფში თანამშრომლები ერთად მუშაობენ, უნდა გავითვალისწინოთ მათი თანამშრომლობის შედეგად მიღებული ეფექტი. ზოგ შემთხვევაში, თანამშრომლობის ეფექტი დადებითია (მაგალითად, ორი თანამშრომელი ერთად მუშაობის შემთხვევაში აწარმოებს უფრო მეტ პროდუქციას, ვიდრე იგივე თანამშრომლები დამოუკიდებლად მუშაობის შემთხვევაში აწარმოებდნენ ჯამურად), ზოგიერთ შემთხვევაში - უარყოფითი. აღვნიშნოთ x_1 და x_2 თანამშრომლების ერთობლივი მუშაობის ეფექტი (წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა) $g(\{x_1, x_2\})$ -ით. ანალოგიურად, $g(\{x_2, x_3\})$ იქნება x_2 და x_3 თანამშრომლების, ხოლო $g(\{x_1, x_3\})$ - x_1 და x_3 თანამშრომლების ერთობლივი მუშაობის ეფექტი. $g(X)$ კი იქნება სამივე თანამშრომლის ერთობლივი მუშაობის ეფექტი (იხ. ცხრილი 5).

თანამშრომლები	წარმადობა (პროდუქტების რაოდენობა)
x_1	5
x_2	6
x_3	7
x_1, x_2	14
x_2, x_3	9
x_1, x_3	13
x_1, x_2, x_3	17

ცხრილი 5. საწარმოს თანამშრომლების მაგალითი - თანამშრომლობის ეფექტის გათვალისწინებით

ცხრილი 5-ის მეორე სვეტში მოცემულია g ზომის მნიშვნელობები და $g(\emptyset) = 0$. ამ შემთხვევაში კი g ზომა ზოგადი ზომაა, ის არაადიციურია. მაგალითად, $g(\{x_1, x_2\}) > g(\{x_1\}) + g(\{x_2\})$. ეს უტოლობა ნიშნავს, რომ x_1 და x_2 თანამშრომლები კარგად თანამშრომლობენ, მუშაობისას კარგად “ეწყობიან” ერთმანეთს. მაშასადამე, g ზომის არაადიციურობა საშუალებას გვაძლევს, აღვწეროთ თანამშრომლობის ეფექტი, რაც ხშირად უფრო ობიექტურად და ზუსტად აღწერს რეალურ სიტუაციებს. განხილულ მაგალითშიც, სამი ადამიანის ერთობლივად მუშაობის შედეგად მათ მიერ ჯამურად წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა დამოკიდებულია მათი თანამშრომლობის ეფექტზე. თუ თანამშრომლობა ნულოვანია, მაშინ ვუბრუნდებით წინა მაგალითს და ადიციურ ზომებს.

დავუშვათ, რომ სამივე თანამშრომელი ერთ დღეს იწყებს მუშაობას და თითოეული მუშაობს ცხრილი 4-ში მითითებული დღეების განმავლობაში, რაც იმას ნიშნავს, რომ სამივე თანამშრომელი ერთად მუშაობს პირველი 3 დღის განმავლობაში, შემდეგ x_1 და x_3 თანამშრომლები აგრძელებენ ერთად მუშაობას კიდევ 1 დღე და ბოლოს, x_1 მარტო აგრძელებს მუშაობს კიდევ 2 დღე. შესაბამისად, ერთი კვირის განმავლობაში, ამ რეჟიმში მუშაობის შედეგად წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა უნდა იყოს:

$$3 \cdot 17 + 1 \cdot 13 + 2 \cdot 5 = 74.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ პერსონალის ინდივიდუალურ და თანამშრომლობის ეფექტებს აღვწერთ ზოგადი g ზომით, ხოლო მათ მიერ ნამუშევარი დღეების რაოდენობას თანამშრომლების $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული სიმრავლური f ფუნქციით, ჯამურად წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა ზუსტად დაემთხვევა f ფუნქციის შოკეს ინტეგრალს g ზომის მიმართ. მართლაც, რადგან $f(x_1) = 6$, $f(x_2) = 3$ და $f(x_3) = 4$, ე.ი. $x_1^* = x_2$, $x_2^* = x_3$ და $x_3^* = x_1$. შოკეს ინტეგრალის მნიშვნელობა იქნება:

$$\begin{aligned} (C) \int f dg &= \sum_{i=1}^3 [f(x_i^*) - f(x_{i-1}^*)] g(\{x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*\}) = \\ &= [f(x_1^*) - f(x_0^*)] \cdot g(X) + [f(x_2^*) - f(x_1^*)] \cdot g(\{x_2^*, x_3^*\}) + [f(x_3^*) - f(x_2^*)] \cdot g(\{x_3^*\}) = \\ &= [f(x_2) - 0] \cdot g(X) + [f(x_3) - f(x_2)] \cdot g(\{x_3, x_1\}) + [f(x_1) - f(x_3)] \cdot g(\{x_1\}) = \\ &= (3 - 0) \cdot 17 + (4 - 3) \cdot 13 + (6 - 4) \cdot 5 = 74. \end{aligned}$$

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი: რელაციურ მონაცემთა ბაზაში, ცხრილში ატრიბუტების (სვეტების) რაოდენობა ყოველთვის სასრულია. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ -ით აღვნიშნოთ ატრიბუტების სიმრავლე. $(X, \mathcal{P}(X))$ ზომადი სივრცეა. x_1, x_2, \dots, x_n -ის თითოეული ჩანაწერი (დაკვირვება) აღვნიშნოთ $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ -ით, სადაც f არის X -ზე განსაზღვრული ნამდვილ რიცხვთა მნიშვნელობების მქონე ფუნქცია. $\mathcal{P}(X)$ -ზე განსაზღვრული მონოტონური g ზომა შეგვიძლია გამოვიყენოთ გარკვეული ცნების მიმართ ატრიბუტების ერთობლივი, ისევე როგორც ინდივიდუალური შესაბამისობის, წონის აღსაწერად. აღნიშნული ცნების მიმართ f -ის ჯამური კონტრიბუციის გამოსათვლელად საჭიროა აგრეგაციის ინსტრუმენტი. g ზომის არაადიციურობის გამო შეუძლებელია გავრცელებული აგრეგაციის ინსტრუმენტის - ლებეგის ინტეგრალის გამოყენება. სწორედ მსგავს სიტუაციებშია ეფექტური მისი ჩანაცვლება შოკეს ინტეგრალით.

სუჯენოს ინტეგრალი

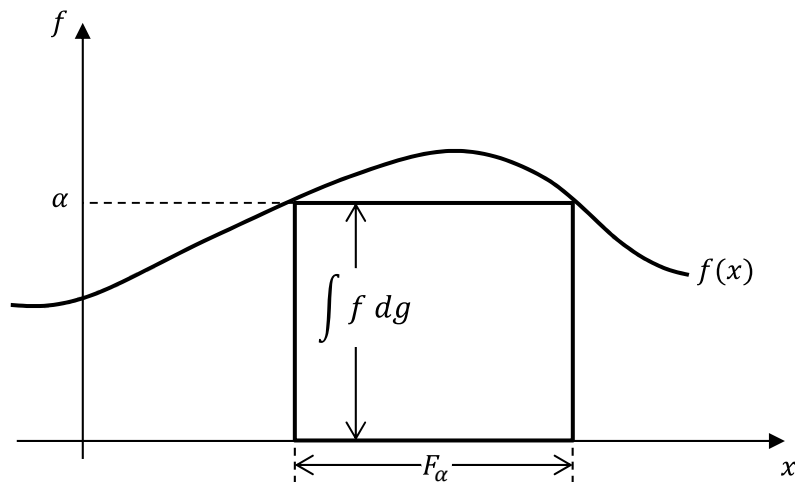
განვიხილოთ (X, \mathbb{F}, g) ზომადი სივრცე, სადაც $X \in \mathbb{F}$, $g: \mathbb{F} \rightarrow [0, \infty)$ უწყვეტი მონოტონური ზომაა. დავუშვათ, რომ f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა (X, \mathbb{F}) -ზე.

განსაზღვრება 44. $\forall A \in \mathbb{F}$ სიმრავლისთვის, f ფუნქციის სუჯენოს ინტეგრალი A -ზე g ზომის მიმართ აღინიშნება, როგორც $\int_A f dg$ და განიმარტება შემდეგი ფორმულით:

$$\int_A f dg = \sup_{\alpha \in [0, \infty)} [\alpha \wedge g(A \cap F_\alpha)],$$

სადაც $F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0, \infty)$. F_α -ს f ფუნქციის α -დონის სიმრავლეს უწოდებენ. როდესაც $A = X$, სუჯენოს ინტეგრალი აღინიშნება, როგორც $\int f dg$.

თუ $X = (-\infty, \infty)$, \mathbb{F} ბორელის სივრცეა, g ლებეგის ზომაა და $f: X \rightarrow [0, \infty)$ უნიმოდალური უწყვეტი ფუნქციაა, რაც იმას ნიშნავს, რომ f ფუნქცია მაქსიმუმს ერთადერთ წერტილში აღწევს და არ არსებობს სხვა ლოკალური მაქსიმუმები, $\int f dg$ სუჯენოს ინტეგრალის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია არის $f(x)$ -ის რკალსა და x ღერძს შორის მოთავსებული უდიდესი კვადრატის გვერდის ზომა (იხ. ფიგურა 15).



ფიგურა 15. სუჯენოს ინტეგრალის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

კონტრმაგალითებით ადვილი საჩვენებელია, რომ სუჯენოს ინტეგრალს არ გააჩნია ლებეგის ინტეგრალისთვის დამახასიათებელი რამდენიმე მნიშვნელოვანი თვისება. მაგალითად, სუჯენოს ინტეგრალისთვის, ზოგადად:

$$\int_A (f_1 + f_2) dg \neq \int_A f_1 dg + \int_A f_2 dg,$$

$$\int_A af dg \neq a \int_A f dg,$$

სადაც a ნებისმიერი დადებითი კონსტანტაა.

განსაზღვრება 45. განვიხილოთ (X, \mathbb{F}, g) მონოტონური ზომადი სივრცე. f ფუნქციას ეწოდება სუჯენოს თვალსაზრისით ინტეგრებადი (g ზომის მიმართ), თუ $\int f dg < \infty$.

როდესაც X სიმრავლე სასრულია (დავუშვათ, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$), სუჯენოს ინტეგრალის გამოთვლისთვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ შედარებით მარტივი ფორმულა:

$$\int f dg = \bigvee_{i=1}^n [f(x_i^*) \wedge g(\{x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*\})],$$

სადაც $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ არის $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ -ის ისეთი გადანაცვლება (პერმუტაცია), რომლისთვისაც $f(x_1^*) \leq f(x_2^*) \leq \dots \leq f(x_n^*)$.

სუჯენოს და შოკეს ინტეგრალების ფორმულების შედარებით, ადვილი შესამჩნევია, რომ სუჯენოს ინტეგრალი მიიღება შოკეს ინტეგრალში ნამრავლისა და ჯამის ოპერაციების შესაბამისად მინიმუმისა და მაქსიმუმის ოპერატორებით ჩანაცვლებით.

სუჯენოს ინტეგრალისთვისაც განვიხილოთ ერთი თვალსაჩინო და ამავე დროს მარტივი მაგალითი: დავუშვათ, ჩვენი მიზანია, შევაფასოთ კერძი. ვიგულისხმობთ, რომ კერძის ხარისხს განსაზღვრავს შემდეგი ფაქტორები: გემო, სუნი და ვიზუალური მხარე. ჩამოთვლილი ფაქტორები აღვნიშნოთ შესაბამისად T , S და A სიმბოლოებით. მაშასადამე, $X = \{T, S, A\}$. შემოვიღოთ სიმრავლური ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრავს ფაქტორების მნიშვნელობას, როგორც ცალ-ცალკე, ასევე ერთობლივად:

$$\begin{aligned} g(\{T\}) &= 0.7, g(\{S\}) = 0.1, g(\{A\}) = 0, \\ g(\{T, S\}) &= 0.9, g(\{T, A\}) = 0.8, g(\{S, A\}) = 0.3, \\ g(X) &= 1, g(\emptyset) = 0. \end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, ფაქტორების მნიშვნელობის განმსაზღვრელი ფუნქცია, რომელიც ინტუიციურად ახლოს უნდა იყოს ჩვენს აზროვნებასთან, არაა დიციურია (მაგალითად, $g(\{T, S\}) \neq g(\{T\}) + g(\{S\})$).

როდესაც ექსპერტებს ვთხოვთ, $[0, 1]$ ინტერვალური სკალით შეაფასონ კონკრეტული კერძი, ისინი თითოეული ფაქტორისთვის მოგვცემენ $f(T)$, $f(S)$ და $f(A)$ შეფასებებს ($\equiv f(x_i), i = \overline{1, 3}$). ამის შემდეგ, ძალიან ბუნებრივი ხდება, რომ სუჯენოს ინტეგრალი გამოვიყენოთ $f(x_i)$ ქულებით და ფაქტორების მნიშვნელობის განმსაზღვრელი g ზომით მოცემული ინფორმაციის სინთეზისთვის.

მაგალითად, თუ კონკრეტული კერძისთვის მივიღეთ ექსპერტული შეფასებები: $f(T) = 0.9$, $f(S) = 0.6$ და $g(A) = 0.8$, სუჯენოს ინტეგრალის გამოყენებით მივიღებთ მოცემული კერძის შემდეგ შეფასებას:

$$\begin{aligned} \int f dg &= \bigvee_{i=1}^n [f(x_i^*) \wedge g(\{x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*\})] = \\ &= [0.6 \wedge g(F_{0.6})] \vee [0.8 \wedge g(F_{0.8})] \vee [0.9 \wedge g(F_{0.9})] = \\ &= [0.6 \wedge g(X)] \vee [0.8 \wedge g(\{T, A\})] \vee [0.9 \wedge g(\{T\})] = \\ &= 0.6 \vee (0.8 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 0.7) = 0.8. \end{aligned}$$

თუ სხვა კერძებსაც განვიხილავთ, მათთვის გვექნება ხარისხის შემდეგი შეფასებები:

$$f(T) = 1, f(S) = 0, f(A) = 0: \int f dg = 0.7;$$

$$f(T) = 1, f(S) = 1, f(A) = 0: \int f dg = 0.9;$$

$$f(T) = 1, f(S) = 1, f(A) = 1: \int f dg = 1;$$

ექსპერტთა მიერ ფაქტორების შეფასებისთვის $[0, 1]$ სკალის, ხოლო კერძის ჯამური ხარისხის განსაზღვრისთვის სუჯენოს მინიმალური ტიპის ინტეგრალის გამოყენება უზრუნველყოფს იმას, რომ $g(F), F \subseteq X$ წარმოადგენს ხარისხის იმ მაქსიმალურ შეფასებას (ქულას), რომელიც კერძმა შეიძლება მიიღოს მხოლოდ F ფაქტორზე დაყრდნობით.

პრაქტიკული ამოცანების მოთხოვნებიდან გამომდინარე, ჩვენ ხშირად განვიხილავთ შემთხვევებს, როდესაც X სიმრავლე სასრულია, ხოლო g ზომა ნორმირებული. მართლაც, როდესაც ვსაუბრობთ კომპიუტერულ სისტემებზე, მონაცემები ყოველთვის დისკრეტული და სასრულია, შესაბამისად, სასრული X სიმრავლეების განხილვა ლოგიკურია, რადგან, როგორც ვნახეთ, X სიმრავლის სასრულობა ხშირად ამარტივებს გამოთვლებს.

შოკეს და სუჯენოს ინტეგრალები ხშირად ერთად განიხილება ლიტერატურაში და მოიხსენიება, როგორც არამკაფიო ინტეგრალები (Grabisch, Murofushii, & Sugeno, 2000). ორივე ინტეგრალი შეიძლება გამოვიყენოთ ინფორმაციის აგრეგირებისთვის ისეთ სიტუაციებში, როდესაც ინფორმაციის წყაროები არა მაინცდამაინც ურთიერთდამოუკიდებელია. თუმცა აღნიშნულ ინტეგრალებს შორის არსებობს გარკვეული განსხვავებები, რომელთა გათვალისწინება აუცილებელია სხვადასხვა ამოცანებში მათი გამოყენებისას. შოკეს ინტეგრალი წარმოადგენს შეწონილი არითმეტიკული საშუალოს განზოგადებას (იხ. ფორმულა (12)). რაც შეეხება სუჯენოს ინტეგრალს, ნამრავლის და ჯამის ოპერაციების ნაცვლად ის იყენებს მინიმუმს და მაქსიმუმს და წარმოადგენს შეწონილი მინიმუმისა და მაქსიმუმის (Dubois & Prade, 1986) განზოგადებას. სუჯენოს ინტეგრალის საინტერესო ანალიზია მოცემული ტორას და ნარუკავას 2006 წლის ნაშრომში (Torra & Narukawa, 2006), რომელშიც ავტორები მიიჩნევენ, რომ რადგან სუჯენოს ინტეგრალი მინიმუმის ოპერატორს იყენებს f ფუნქციის და g ზომის მნიშვნელობების მიმართ, $f(x)$ და $g(A)$ ($x \in X, A \subseteq X$), ორივე უნდა წარმოადგენდნენ ერთიდაიგივე დომენს, მათი მნიშვნელობები შესადარი რომ იყოს. სუჯენოს და შოკეს ინტეგრალების საინტერესო ანალიზი და შედარებაა ასევე მოცემული კამპოსის და ბოლანოსის 1992 წლის ნაშრომში (Campos & Bolanos, 1992), სადაც სასრული X სიმრავლე და ნორმირებული g ზომა განიხილება. ავტორები აღნიშნავენ, რომ ერთ-ერთი განსხვავება სუჯენოს და შოკეს ინტეგრალებს შორის არის ის, რომ სუჯენოს ინტეგრალი აზრს კარგავს, როდესაც საინტეგრო ფუნქციის მნიშვნელობები $[0, 1]$ ინტერვალის გარეთაა, მაშინ, როდესაც შოკეს ინტეგრალს აზრი აქვს ნებისმიერი (არაუარყოფითი) ფუნქციისთვის.

ბოლო წლებში შეიქმნა შოკეს და სუჯენოს ინტეგრალების მრავალი განზოგადება და, მათზე დაყრდნობით, აგრეგირების მრავალი ოპერატორი, რომელთა გამოყენებით აიგება მრავალ-ატრიბუტული, ჯგუფური გადაწყვეტილებების მიღების არამკაფიო მოდელები. ხშირად ამ მოდელებში შეინიშნება ფაქტორებს შორის ურთიერთდამოკიდებულებები, გარკვეული კორელაციები. როგორც ზემოთაც აღვნიშნეთ, ინფორმაციის აგრეგირების ადიციური ოპერატორები (ძირითადად ადიციური ინტეგრალური წარმოდგენები) ვერ უზრუნველყოფენ ამ დამოკიდებულების გათვალისწინებას გადაწყვეტილების მიღების, ოპტიმალური ალტერნატივის არჩევის პროცესში. მონოტონური ზომების და აგრეგირების განზოგადებული ოპერატორების გამოყენებით კი შესაძლებელია ფაქტორების ურთიერთქმედების ხარისხების გათვალისწინება. აღნიშნულ ინსტრუმენტებზე დაყრდნობით, საექსპერტო ცოდნის წარმოდგენის, ანალიზისა და სინთეზის პრობლემატიკა განხილულია გაჩეჩილადის და სირბილადის ნაშრომების სერიაში (Sirbiladze & Gachechiladze, 2005; Sirbiladze, 2005-2007). ექსტრემალური არამკაფიო პროცესების იდენტიფიკაციის, ფილტრაციისა და ოპტიმალური მართვის ამოცანები და მათი გამოყენების საინტერესო ასპექტები გაერთიანებულია სირბილადის მონოგრაფიაში (Sirbiladze, 2013).

2.2. არასანდოობის კრიტერიუმი მინიმალური ფაზი-დაფარვის და დაყოფის ამოცანებში

2.2.1. ფაზი-დაფარვის ამოცანა

განვიხილოთ სასრული $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ სიმრავლე და მისი არამკაფიო ქვესიმრავლეთა კლასი $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_n\}$. \tilde{S}_j ($j = \overline{1, n}$) სიმრავლეების მიკუთვნების ფუნქციები აღვნიშნოთ $\mu_{\tilde{S}_j}$ -ით, ხოლო თითოეული \tilde{S}_j სიმრავლისთვის r_i ელემენტის მიკუთვნების ხარისხები (compatibility levels) $\mu_{ij} \equiv \mu_{\tilde{S}_j}(r_i)$ -ით, $r_i \in R$, $j = \overline{1, n}$. $\mu_{\tilde{S}_j}(r_i) > 0$ ნიშნავს, რომ r_i ელემენტს ფარავს \tilde{S}_j არამკაფიო სიმრავლე გარკვეული, თუნდაც მცირე μ_{ij} დადებითი დონით. განვსაზღვროთ ფაზი-დაფარვა ზიმერმანის (Zimmermann, 1991) მიხედვით:

განსაზღვრება 46. $\tilde{\mathcal{F}}' \subset \tilde{\mathcal{F}}$ სიმრავლეთა კლასს ეწოდება R სიმრავლის ფაზი-დაფარვა, თუ R სიმრავლის ყოველი r_i ($i = \overline{1, m}$) ელემენტი მიეკუთვნება $\tilde{\mathcal{F}}'$ კლასის რომელიმე \tilde{S}_j ($j = \overline{1, p}$) არამკაფიო სიმრავლეს (ერთს მაინც) და სრულდება პირობა $\mu_{\tilde{S}_j}(r_i) > \alpha$, სადაც α ($0 < \alpha \leq 1$) არის მინიმალური მიკუთვნების დონე.

ისევე როგორც ხშირად მოსახერხებელია მკაფიო სიმრავლეების ნაცვლად არამკაფიო სიმრავლეების გამოყენება პრაქტიკული ამოცანების უფრო მაღალი სიზუსტით ამოსახსნელად, ასევე ხშირად უფრო ბუნებრივ შედეგებს იძლევა კლასიკური დაფარვის ამოცანების ნაცვლად ფაზი-დაფარვის ამოცანების განხილვა, რადგან ჩვენთვის საინტერესო ელემენტის ამა თუ იმ სიმრავლით დაფარვა პრაქტიკულ ამოცანებში იშვიათად არის ცალსახა (კი ან არა - სრულად ფარავს ან საერთოდ არ ფარავს). მაგალითისთვის განვიხილოთ ქრისტოფიდეს (Christofides, 1975) მიერ წარმოდგენილი კლასიკური პრობლემა, რომელსაც ზოგჯერ მთარგმნელების ამოცანის სახელით მოიხსენიებენ. წარმოვიდგინოთ, რომ კომპანიას სურს დაიქირავოს მთარგმნელები, რომლებიც სხვადასხვა ენიდან თარგმნიან ქართულ ენაზე. თითოეული კანდიდატი ფლობს კომპანიისთვის საჭირო ენების გარკვეულ ნაწილს (სხვადასხვა ენას, ცოდნის სხვადასხვა ხარისხით) და ითხოვს განსაზღვრულ ხელფასს. კანდიდატის მიერ ამა თუ იმ ენის ცოდნა შეგვიძლია გამოვსახოთ გარკვეული ქულით, დავუშვათ, $[0, 1]$ ინტერვალიდან. თუ კომპანიას ჭირდება, რომ შეეძლოს ყველა მისთვის საინტერესო ენიდან ქართულ ენაზე თარგმნა გარკვეული მინიმალური $\alpha \in (0, 1]$ დონით მაინც, მაშინ საქმე გვექონია სწორედ ფაზი-დაფარვის ამოცანასთან.

თუ მინიმალური დაფარვის ამოცანის ანალოგიურად, ფაზი-დაფარვის ამოცანაში $\tilde{\mathcal{F}}$ სიმრავლეთა კლასის ყოველ \tilde{S}_j ($j = \overline{1, n}$) სიმრავლეს შევუსაბამებთ გარკვეულ c_j ($j = \overline{1, n}$) (დადებით) ფასს, მაშინ შეგვიძლია ვისაუბროთ მინიმალური ფაზი-დაფარვის ამოცანაზე, რაც გულისხმობს R სიმრავლის ელემენტების გარკვეული მინიმალური α დონით დაფარვას და ამავე დროს ჯამური ფასის მინიმიზაციას.

თუ R და $\tilde{\mathcal{F}}$ სიმრავლეების ელემენტებს შორის შემოვიღებთ $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ ინციდენციის მატრიცას შემდეგი პრინციპით:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \mu_{\tilde{S}_j}(r_i) \leq \alpha \\ 1, & \mu_{\tilde{S}_j}(r_i) > \alpha \end{cases} \quad (13)$$

მაშინ მინიმალური ფაზი-დაფარვის ამოცანა შეგვიძლია შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბოთ:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (14)$$

$Ax \geq e$

სადაც $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ არის $\tilde{\mathcal{F}}'$ დაფარვის მახასიათებელი ვექტორი:

$$x_j = \begin{cases} 0, & \tilde{\xi}_j \notin \tilde{\mathcal{F}}' \\ 1, & \tilde{\xi}_j \in \tilde{\mathcal{F}}' \end{cases} \quad (15)$$

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ და $e = (1, 1, \dots, 1)$ კი, შესაბამისად, ფასების და ერთეულოვანი ვექტორებია.

შენიშვნა: ანალოგიურად განიმარტება მინიმალური ფაზი-ჩალაგებისა და ფაზი-დაყოფის ამოცანები.

მთარგმნელების შერჩევის მაგალითში c_j ($j = \overline{1, n}$) ფასებს შეიძლება წარმოადგენდეს კანდიდატების მიერ მოთხოვნილი ხელფასები. თუ კომპანიის ინტერესებში შედის მთარგმნელობითი საქმიანობის განხორციელება მინიმალური დანახარჯებით, მაშინ ის შეეცდება თანამშრომლებად აიყვანოს კანდიდატები, რომელთა ჯამური ხელფასი მინიმალური იქნება. თუ ამავე დროს კომპანია ცდილობს, რომ თარგმანის ხარისხი რაც შეიძლება მაღალი იყოს და თუ ვიგულისხმებთ, რომ კონკრეტული ენ(ებ)ის მცოდნე კანდიდატი ითხოვს უფრო მაღალ ანაზღაურებას, ვიდრე იმავე ენ(ებ)ის შედარებით დაბალი დონით მცოდნე კანდიდატი, მარტივად შევამჩნევთ, რომ საქმე გვაქვს ორ ურთიერთსაწინააღმდეგო მოთხოვნასთან: ერთის მხრივ მაღალი დონის პროფესიონალების აყვანა და მეორეს მხრივ მინიმალური ჯამური საფასურის გადახდა.

კანდიდატების ცოდნის მახასიათებელი ფუნქცია

ოპტიმალური ამონახსნის ძიებისას გასაგებია, როგორ უნდა მოხდეს ფასების გათვალისწინება - თითოეულ კანდიდატს შეესაბამება c_j ($j = \overline{1, n}$) ფასი და ამ კანდიდატის შერჩევა, ანუ დასაქირავებელი თანამშრომლების სიაში ჩასმა, საჭირო სახელფასო ბიუჯეტის c_j -ით გაზრდას ნიშნავს. რაც შეეხება თარგმანის ხარისხს, აქ შედარებით რთულად არის საქმე, რადგან თითოეული კანდიდატი არ ხასიათდება რაიმე ერთი რიცხვით, რომელიც ასახავს მისი ცოდნის თუ პროფესიონალიზმის დონეს. ასევე გასაანალიზებელია, რა გავლენას მოახდენს კონკრეტული კანდიდატის დაქირავება მთარგმნელობითი საქმიანობის ჯამურ ხარისხზე. ჩნდება ბუნებრივი მოთხოვნა, c_j ($j = \overline{1, n}$) ფასების ანალოგიურად, თითოეული კანდიდატისთვის არსებობდეს მისი ცოდნის ამსახველი რაიმე რიცხვითი მახასიათებელი, რომელიც კონკრეტული კანდიდატისთვის გააერთიანებს სხვადასხვა ენის ცოდნის შესახებ ინფორმაციას. ჩვენს 2011 წლის ნაშრომში (Sirbiladze, Sikharulidze, Ghvaberidze, & Matsaberidze, 2011) ამგვარ მახასიათებელს “სანდოობა” (“არასანდოობა”, “misbelief”) ვუწოდეთ და გამოვიყენეთ დისკრიმინაციული ანალიზის მიდგომა (Norris, Pilsworth, & Baldwin, 1987). შენიშვნა: წინამდებარე ნაშრომის გადასახედიდან, ტერმინი “არასანდოობა” ოდნავ დამაბნეველია, მას არაფერი აქვს საერთო სანდოობის (*Bel*) ზომასთან. შედეგად, კანდიდატების სიმრავლეზე მივიღეთ რიცხვითი განაწილება, რომელიც ასახავს ინფორმაციას არა მარტო ინდივიდუალური კანდიდატის ცოდნის შესახებ, არამედ ასევე ითვალისწინებს “ფარდობით ცოდნას”, ანუ მოცემული კანდიდატის ცოდნას სხვა კანდიდატების ცოდნასთან შედარებით.

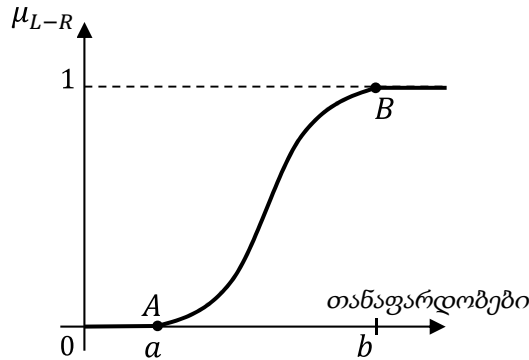
მოკლედ ჩამოვყალიბოთ აღნიშნული მიდგომის არსი: გამოითვლება ე.წ. დადებითი და უარყოფითი დისკრიმინაციების მატრიცები - $\|p_{ij}\|_{m \times n}$ და $\|n_{ij}\|_{m \times n}$, სადაც p_{ij} წარმოადგენს

აკუმულირებულ რწმენას, სანდოობას იმისა, რომ i -ური ენა ყველაზე უკეთ იცის j -ურმა კანდიდატმა (\tilde{S}_j ქვესიმრავლე ყველა \tilde{S}_k ($k = \overline{1, n}; k \neq j$) ქვესიმრავლეზე უკეთ ფარავს r_i ელემენტს), ხოლო n_{ij} წარმოადგენს აკუმულირებულ რწმენას, სანდოობას იმისა, რომ i -ური ენა სხვა კანდიდატებთან შედარებით ყველაზე ნაკლებად იცის j -ურმა კანდიდატმა (\tilde{S}_j ქვესიმრავლე r_i ელემენტს ფარავს ყველა სხვა \tilde{S}_k ($k = \overline{1, n}; k \neq j$) ქვესიმრავლეზე უარესად). დადებითი და უარყოფითი დისკრიმინაციების მატრიცები შემდეგნაირად გამოითვლება:

$$p_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \mu_{L-R} \left(\frac{\mu_{ij}}{\mu_{ik}} \right), \quad (16)$$

$$n_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \mu_{L-R} \left(\frac{\mu_{ik}}{\mu_{ij}} \right), \quad (17)$$

სადაც $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, L - R$ (*Large - Ratio*) კი არამკაფიო სიმრავლეა არაკლებადი მიკუთვნების ფუნქციით $\mu_{L-R}: R_0^+ \rightarrow [0, 1]$, რომელიც არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვებს, რომლებიც თანაფარდობებს წარმოადგენენ, ასახავს $[0, 1]$ ინტერვალში (იხ. ფიგურა 16).



ფიგურა 16. μ_{L-R} მიკუთვნების ფუნქციის მაგალითი

დავუშვათ, რომ R სიმრავლეზე ასევე მოცემული გვაქვს წონების განაწილება, რომელიც შეიძლება ასახავდეს აპრიორულ ინფორმაციას r_i ($i = \overline{1, m}$) ელემენტის წონის შესახებ (ჩვენს შემთხვევაში, იმის შესახებ, თუ რომელი ენის დაფარვა უფრო მნიშვნელოვანია). წონების ჯამი 1-ის ტოლია:

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_m \\ w_1 & w_2 & \dots & w_m \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1.$$

განვსაზღვროთ ორი სიდიდე შემდეგნაირად:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^m w_i p_{ij}, \quad (19)$$

$$\nu_j = \sum_{i=1}^m w_i n_{ij}, \quad (20)$$

$j = \overline{1, n}$. აღნიშნულ სიდიდეებს ვუწოდოთ შეწონილი საშუალო დადებითი და უარყოფითი დისკრიმინაციის ზომები შესაბამისად.

ასევე განვიხილოთ ორი არამკაფიო სიმრავლე *Small* და *Large*, რომელთა მიკუთვნების ფუნქციები განსზღვრულია $[0, 1]$ ინტერვალზე. $\mu_{Small}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ არაზრდადია, ხოლო $\mu_{Large}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ არაკლებადი.

და ბოლოს, $\tilde{\mathcal{S}} = \{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_n\}$ სიმრავლეთა კლასზე განვსაზღვროთ არასანდოობის განაწილება, რომელიც ითვალისწინებს როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი დისკრიმინაციის მაჩვენებლებს:

$$\delta_j = \tau \mu_{Small}(\pi_j) + (1 - \tau) \mu_{Large}(v_j), \quad (21)$$

$j = \overline{1, n}$; სადაც τ დადებითი და უარყოფითი დისკრიმინაციების შეწონვის პარამეტრია ($0 < \tau < 1$).

ცხადია, შეგვიძლია, w_i ($i = \overline{1, m}$) წონები თანაბარი ავიღოთ ($w_i = 1/m$), ასევე შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $\tau = 1/2$.

მაშასადამე, მივიღეთ $\tilde{\mathcal{S}} = \{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_n\}$ სიმრავლეთა კლასზე განსაზღვრული განაწილება

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_1 & \tilde{S}_2 & \dots & \tilde{S}_n \\ \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_n \end{pmatrix}, \quad (22)$$

რომელშიც δ_j ($j = \overline{1, n}$) ასახავს იმ გადაწყვეტილების მიმართ არასანდოობას, რომ \tilde{S}_j უნდა შედიოდეს ოპტიმალურ დაფარვაში.

კანდიდატების მიერ სამუშაოს შესრულების ეფექტურობის ზომა

ამოცანას კიდევ უფრო ართულებს ის, რომ სინამდვილეში არც კონკრეტული კანდიდატის მიერ შესრულებული სამუშაოს და არც კომპანიის მთარგმნელობითი საქმიანობის ჯამური ხარისხი არ არის დამოკიდებული მხოლოდ კანდიდატების პროფესიულ ცოდნაზე (რაც ასახულია μ_{ij} რიცხვებში და შემდეგ აკუმულირებულია δ_j სიდიდეებში). რეალურ სიტუაციებში, კანდიდატების შერჩევისას ასევე აუცილებელია ისეთი ფაქტორების გათვალისწინება, როგორცაა, მაგალითად, კანდიდატის უნარ-ჩვევები, მისი კომუნიკაბელურობა, გუნდურად მუშაობის შესაძლებლობა, საქმისადმი დამოკიდებულება, პასუხისმგებლობის გრძნობა და ა.შ. ამგვარი შეფასებები, როგორც წესი, კეთდება დამკირავებელი ორგანიზაციის ადამიანური რესურსების მართვის განყოფილების მიერ ჩატარებული გასაუბრებების თუ (ფსიქოლოგიური) ტესტების შედეგად. საუბარია კანდიდატის სწორედ ისეთ მახასიათებელზე, რომელიც, ზემოთ განხილული საწარმოს მაგალითის ანალოგიურად, ასახავდა კანდიდატის წარმადობას, მისი მუშაობის ეფექტურობას. ამგვარ მახასიათებლად ადვილია ზომის გამოყენება კი ნიშნავს, რომ არ გავითვალისწინებთ კანდიდატების თანამშრომლობას, გუნდში მუშაობის ეფექტს, რაც რეალურ სიტუაციებში ხშირად მნიშვნელოვანი გასათვალისწინებელი ფაქტორია. ამიტომ მართებულად მიგვაჩნია არაადიციური, კონკრეტულად, მონოტონური ზომების გამოყენება.

ზომა განსაზღვრულია დასაშვებ დამფარავ სიმრავლეებზე და ის ფაქტიურად წარმოადგენს გარკვეულ აპრიორულ ინფორმაციას მათ შესახებ:

$$g: \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow [0, 1],$$

სადაც $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{S}})$ არის $\tilde{\mathcal{S}}$ -ის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი.

ჩვენს 2011 წლის ნაშრომში (Sirbiladze, Sikharulidze, Ghvaberidze, & Matsaberidze, 2011) განხილულ მაგალითში მონოტონურ ზომად შესაძლებლობის ზომა ავირჩიეთ, თუმცა დასაშვებია სხვა მონოტონური ზომების გამოყენებაც. ანუ, როგორც იტყვიან, ჩვენ ამოცანა გადავწყვიტეთ შესაძლებლობით გარემოში, როდესაც მონოტონურ ზომაზე არ გვექონდა წინასწარი ინფორმაცია. შესაძლებლობის ზომის არჩევის ერთ-ერთ მიზეზს წარმოადგენს ის ფაქტი, რომ ზომის, როგორც სიმრავლური ფუნქციის მნიშვნელობების აღდგენა მარტივია შესაძლებლობითი განაწილებიდან,

რომელსაც ექსპერტები გვაძლევენ. ზოგადად, ცალკე მიმართულებად შეგვიძლია განვიხილოთ ზომის იდენტიფიკაციისა და აღდგენის ამოცანები (Sirbiladze, 2013), თუმცა ეს საკითხები სცდება ჩვენი ნაშრომის ძირითად თემას.

მას შემდეგ, რაც განვსაზღვრეთ კანდიდატების ცოდნის მახასიათებელი δ ფუნქცია (რომელიც არასრული ინფორმაციის უზუსტობის პოლუსს შეესაბამება) და შევარჩიეთ კანდიდატების მიერ სამუშაოს შესრულების ეფექტურობის g ზომა (რომელიც არასრული ინფორმაციის განუზღვრელობის პოლუსს წარმოადგენს), საბოლოოდ, $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{F}}_2, \dots, \tilde{\mathcal{F}}_n\}$ სიმრავლეთა კლასი შეგვიძლია დავახასიათოთ შოკეს ან სუჯენოს ინტეგრალით, რომელიც აგრეგირებას გაუკეთებს δ ფუნქციაში და g ზომაში არსებულ ინფორმაციას. მაგალითისთვის განვიხილოთ შოკეს ინტეგრალის შემთხვევა.

დავალაგოთ $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{F}}_2, \dots, \tilde{\mathcal{F}}_n\}$ სიმრავლეები იმგვარად, რომ δ ფუნქციის მნიშვნელობები არაკლებადი სახით დალაგდნენ:

$$\delta(\tilde{\mathcal{F}}_1^*) \leq \delta(\tilde{\mathcal{F}}_2^*) \leq \dots \leq \delta(\tilde{\mathcal{F}}_n^*). \quad (23)$$

ასევე შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\tilde{\mathcal{F}}_j^* \equiv \{\tilde{\mathcal{F}}_j^*, \tilde{\mathcal{F}}_{j+1}^*, \dots, \tilde{\mathcal{F}}_n^*\}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (24)$$

მაშინ:

$$(C) \int \delta dg = \sum_{j=1}^n [\delta(\tilde{\mathcal{F}}_j^*) - \delta(\tilde{\mathcal{F}}_{j-1}^*)] g(\tilde{\mathcal{F}}_j^*), \quad (25)$$

სადაც $\delta(\tilde{\mathcal{F}}_0^*) \equiv 0$.

ან თუ გამოვიყენებთ შოკეს ინტეგრალის ალტერნატიულ (12) ფორმულას:

$$(C) \int \delta dg = \sum_{j=1}^n \delta(\tilde{\mathcal{F}}_j^*) [g(\tilde{\mathcal{F}}_j^*) - g(\tilde{\mathcal{F}}_{j+1}^*)], \quad (26)$$

სადაც $\tilde{\mathcal{F}}_{n+1}^* \equiv \emptyset$.

რა ინფორმაციას შეიცავს განხილული შოკეს ინტეგრალი? რადგან δ_j ($j = \overline{1, n}$) ასახავს იმ გადაწყვეტილების მიმართ არასანდოობას, რომ $\tilde{\mathcal{F}}_j$ შედიოდეს ოპტიმალურ დაფარვაში, (25) ან (26) შოკეს ინტეგრალი განსაზღვრავს კანდიდატთა სრული $\tilde{\mathcal{F}}$ სიმრავლის ჯამურ არასანდოობას, შერჩეული g ზომის გათვალისწინებით.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, შოკეს ინტეგრალი წარმოადგენს შეწონილი არითმეტიკული საშუალოს განზოგადებას და მართლაც, ამ შემთხვევაშიც, $g(\tilde{\mathcal{F}}_j^*) - g(\tilde{\mathcal{F}}_{j+1}^*)$ სხვაობებიც შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც $\delta(\tilde{\mathcal{F}}_j^*)$ მნიშვნელობების წონები.

ქვემოთ წარმოგიდგენთ არასანდოობის კრიტერიუმის აგების ორ მსგავს, მაგრამ განსხვავებულ მეთოდს. ორივე მეთოდი შოკეს ინტეგრალს ეფუძნება, თუმცა შერჩეული დაფარვის (კანდიდატების ჯგუფის) ჯამური არასანდოობის შესაფასებლად, პირველი მეთოდი მთელ $\tilde{\mathcal{F}}$ სიმრავლეთა კლასზე განსაზღვრული შოკეს ინტეგრალური ჯამიდან ტოვებს მხოლოდ იმ შესაკრებებს, რომელთა შესაბამისი $\tilde{\mathcal{F}}_j \in \tilde{\mathcal{F}}$, $j = \overline{1, n}$ სიმრავლეებიც მონაწილეობს დაფარვაში, ხოლო მეორე მეთოდი შოკეს ინტეგრალს განიხილავს არა მთელ $\tilde{\mathcal{F}}$ სიმრავლეთა კლასზე, არამედ უშუალოდ შერჩეულ $\tilde{\mathcal{F}}' \subset \tilde{\mathcal{F}}$ დაფარვაზე. წარმოგიდგენთ ორივე მეთოდს დეტალურად.

2.2.2. არასანდოობის შეფასების წონებზე დაფუძნებული მეთოდი

თუ განვიხილავთ კონკრეტულ დაფარვას $\tilde{\mathcal{F}}' \subset \tilde{\mathcal{F}}$, ანუ $\tilde{\mathcal{F}}'$ სიმრავლეთა კლასს, რომელიც სრულად ფარავს R სიმრავლის ელემენტებს, ის შეგვიძლია დავახასიათოთ (26) ჯამის იმ წევრებით, რომლებიც შეესაბამება $\tilde{\mathcal{F}}'$ -ის ელემენტებს. მაშასადამე (26) სრული ჯამიდან დავტოვოთ მხოლოდ ის $\delta(\tilde{\mathcal{F}}_j^*)[g(\tilde{\mathcal{F}}_j^*) - g(\tilde{\mathcal{F}}_{j+1}^*)]$ შესაკრებები, რომელთათვისაც სრულდება პირობა $\tilde{\mathcal{F}}_j^* \in \tilde{\mathcal{F}}'$.

თუ $\tilde{\mathcal{F}}'$ დაფარვას დავახასიათებთ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ვექტორით, სადაც

$$x_j = \begin{cases} 0, & \tilde{\mathcal{F}}_j \notin \tilde{\mathcal{F}}' \\ 1, & \tilde{\mathcal{F}}_j \in \tilde{\mathcal{F}}' \end{cases}$$

$j = \overline{1, n}$, (26) შოკეს ინტეგრალზე დაყრდნობით შეგვიძლია განვსაზღვროთ სიდიდე:

$$MB^*(\tilde{\mathcal{F}}') = \sum_{j=1}^n \delta(\tilde{\mathcal{F}}_j^*) [g(\tilde{\mathcal{F}}_j^*) - g(\tilde{\mathcal{F}}_{j+1}^*)] x_j^*, \quad (27)$$

სადაც $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ არის x ვექტორის ისეთი გადანაცვლება, რომელიც შეესაბამება $\delta(\tilde{\mathcal{F}}_j^*)$ სიდიდეების (23) გადანაცვლებას.

თუ $x_j^* = 1, j = \overline{1, n}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ კომპანიამ დაიქირავა ყველა კანდიდატი (სრული $\tilde{\mathcal{F}}$ სიმრავლე), მაშინ (27) ჯამი დაემთხვევა (26) შოკეს ინტეგრალს, რომელიც ასახავს ყველა კანდიდატის ჯამურ არასანდოობას. მაგრამ, ცხადია, რომ რეალურ სიტუაციებში კომპანია შეეცდება ჯამურად გასაცემი ხელფასის მინიმიზაციას და დაიქირავებს მხოლოდ იმ კანდიდატებს, რომელთა გაერთიანებული ცოდნა დაფარავს ყველა ენას (გარკვეული ხარისხით). მაშასადამე კონკრეტული $\tilde{\mathcal{F}}' \subset \tilde{\mathcal{F}}$ დაფარვისთვის, $x_j^* = 0$ გარკვეული j -ებისთვის და (27) ჯამიდან გაქრება შესაბამისი შესაკრებები, რაც შინაარსობრივად იმას ნიშნავს, რომ ზოგადად, ჯამური არასანდოობა შემცირდება. მაშასადამე, ფასის მინიმიზაციის გარდა, ამ თვალსაზრისითაც მნიშვნელოვანია კანდიდატების ოპტიმალური სიმრავლის შერჩევა.

გასათვალისწინებელია ერთი ფაქტორი: შოკეს ინტეგრალისგან განსხვავებით, (27) გამოსახულება ზოგადად დამოკიდებულია ფუნქციის (23) მნიშვნელობების გადანაცვლებაზე. მაშასადამე, თუ განვიხილავთ σ_1 და σ_2 გადანაცვლებებს, რომელთათვისაც δ ფუნქციის მნიშვნელობები არაკლებადობით ლაგდება:

$$\delta(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma_1(1)}) \leq \delta(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma_1(2)}) \leq \dots \leq \delta(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma_1(n)}), \quad (28)$$

$$\delta(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma_2(1)}) \leq \delta(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma_2(2)}) \leq \dots \leq \delta(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma_2(n)}), \quad (29)$$

ერთიდაიგივე $\tilde{\mathcal{F}}' \subset \tilde{\mathcal{F}}$ დაფარვის შერჩევის შემთხვევაში, (27) გამოსახულებამ შეიძლება მიიღოს სხვადასხვა მნიშვნელობები, რაც გამოწვეული იქნება შოკეს (26) ინტეგრალურ ჯამში სხვადასხვა (ზოგადად განსხვავებული მნიშვნელობების მქონე) შესაკრებების განულებით.

ამიტომ, თუ P_σ^δ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ ყველა ისეთი $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ გადანაცვლებების სიმრავლეს, რომელთათვისაც δ ფუნქციის $\delta_{\sigma(j)} = \delta(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma(j)})$, $j = \overline{1, n}$, მნიშვნელობები არაკლებადობით ლაგდება, კონკრეტული $\tilde{\mathcal{F}}' \subset \tilde{\mathcal{F}}$ დაფარვისთვის არასანდოობის მაჩვენებელი შეგვიძლია ცალსახად განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$MB(\tilde{\mathcal{F}}') = \bigvee_{\sigma \in P_\sigma^\delta} \left[\sum_{j=1}^n \delta(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma(j)}) [g(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma(j)}) - g(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma(j+1)})] x_{\sigma(j)} \right]. \quad (30)$$

ყველა დასაშვები დაფარვის მიმართ $MB(\tilde{\mathcal{F}}')$ სიდიდის მინიმიზაცია წარმოშობს ახალ კრიტერიუმს - დაფარვის არასანდოობის მინიმიზაციას.

მაშასადამე, მთარგმნელების ამოცანისთვის საბოლოოდ ვიღებთ ბიკრიტერიულ პრობლემას:

$$f_1 = \sum_{j=1}^n c_{\sigma(j)} x_{\sigma(j)} \rightarrow \min \quad (31)$$

(ჯამური ფასის მინიმიზაცია)

$$f_2 = \bigvee_{\sigma \in P_\sigma^\delta} \left[\sum_{j=1}^n \delta(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma(j)}) [g(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma(j)}) - g(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma(j+1)})] x_{\sigma(j)} \right] \rightarrow \min \quad (32)$$

(არასანდოობის მინიმიზაცია)

პირობით, რომ $Ax \geq e$, სადაც $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ არის $\tilde{\mathcal{F}}$ დაფარვის მახასიათებელი ვექტორი:

$$x_j = \begin{cases} 0, & \tilde{\mathcal{F}}_j \notin \tilde{\mathcal{F}}' \\ 1, & \tilde{\mathcal{F}}_j \in \tilde{\mathcal{F}}' \end{cases}$$

$\tilde{\mathcal{F}}_j \equiv \{\tilde{\mathcal{F}}_j, \tilde{\mathcal{F}}_{j+1}, \dots, \tilde{\mathcal{F}}_n\}$; $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ და $e = (1, 1, \dots, 1)$ კი, შესაბამისად, ფასების და ერთეულოვანი ვექტორებია.

2.2.3. არასანდოობის შოკეს ინტეგრალით შეფასების მეთოდი

განვიხილოთ არასანდოობის შეფასების წონებზე დაფუძნებული მეთოდის ალტერნატიული მეთოდი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს ავგოთ განსხვავებული მეორე მიზნის ფუნქცია f_2 . ალტერნატიულ მეთოდში, კონკრეტული $\tilde{\mathcal{F}}' \subset \tilde{\mathcal{F}}$ დაფარვის არასანდოობას ვაფასებთ $\tilde{\mathcal{F}}'$ სიმრავლეზე აღებული შოკეს ინტეგრალით:

$$(C) \int_{\tilde{\mathcal{F}}'} \delta dg = \sum_{j=1}^{|\tilde{\mathcal{F}}'|} \delta(\tilde{\mathcal{F}}_j^*) [g(\tilde{\mathcal{F}}_j^*) - g(\tilde{\mathcal{F}}_{j+1}^*)], \quad (33)$$

სადაც $\tilde{\mathcal{F}}_{n+1}^* \equiv \emptyset$, $|\tilde{\mathcal{F}}'|$ არის $\tilde{\mathcal{F}}'$ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა, $\tilde{\mathcal{F}}_j^* = \{\tilde{\mathcal{F}}_j^*, \tilde{\mathcal{F}}_{j+1}^*, \dots, \tilde{\mathcal{F}}_{|\tilde{\mathcal{F}}'|}^*\}$ სიმრავლეები კი შეესაბამებიან $\tilde{\mathcal{F}}'$ სიმრავლის ელემენტების იმ გადანაცვლებას, რომელიც არაკლებადობით ალაგებს δ ფუნქციის მნიშვნელობებს:

$$\delta(\tilde{\mathcal{F}}_1^*) \leq \delta(\tilde{\mathcal{F}}_2^*) \leq \dots \leq \delta(\tilde{\mathcal{F}}_{|\tilde{\mathcal{F}}'|}^*). \quad (34)$$

რადგან (33) შოკეს ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული (34) კონკრეტულ გადანაცვლებაზე (მთავარია, რომ δ ფუნქციის მნიშვნელობები არაკლებადობით ლაგდებოდნენ), (30) გამოსახულებისგან განსხვავებით, მაქსიმუმის აღება საჭირო აღარ არის და მეორე მიზნის ფუნქცია შეგვიძლია პირდაპირ განვსაზღვროთ, როგორც (33) შოკეს ინტეგრალი. მაშასადამე, მთარგმნელების ამოცანისთვის ვიღებთ ბიკრიტერიულ პრობლემას:

$$f_1 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad (35)$$

(ჯამური ფასის მინიმიზაცია)

$$f_2 = \sum_{j=1}^{|\mathcal{S}'|} \delta(\tilde{S}_j^*) [g(\tilde{S}_j^*) - g(\tilde{S}_{j+1}^*)] \rightarrow \min \quad (36)$$

(არასანდოობის მინიმიზაცია)

პირობით, რომ $Ax \geq e$, სადაც $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ არის \tilde{S}' დაფარვის მახასიათებელი ვექტორი:

$$x_j = \begin{cases} 0, & \tilde{S}_j \notin \tilde{S}' \\ 1, & \tilde{S}_j \in \tilde{S}' \end{cases}$$

$\tilde{S}_j \equiv \{\tilde{S}_j, \tilde{S}_{j+1}, \dots, \tilde{S}_n\}$; $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ და $e = (1, 1, \dots, 1)$ კი, შესაბამისად, ფასების და ერთეულოვანი ვექტორებია.

2.3. საილუსტრაციო მაგალითი

თვალსაჩინოებისთვის განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი. დავუშვათ, კომპანია ეწევა მთარგმნელობით საქმიანობას ინგლისური, გერმანული, ფრანგული, ბერძნული, იტალიური, ესპანური, პოლონური, პორტუგალიური, იაპონური და ჩინური ენებიდან ქართულად. დავუშვათ, რომ კომპანიის ვაკანსიას გამოეხმაურა 16 კანდიდატი (პირობითი სახელებით: K_1, K_2, \dots, K_{16}). კანდიდატების ცოდნის და მათ მიერ მოთხოვნილი ხელფასების შესახებ ინფორმაცია წარმოდგენილია ცხრილი 6-ში.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}	K_{16}
ხელფასი	3100	1000	3500	4000	3200	4500	900	1600	800	1700	2500	3500	4500	4600	2500	3400
შესაძლებლობა	0.70	0.20	0.10	0.30	0.20	0.40	0.10	0.45	0.40	0.20	0.25	0.85	0.10	0.90	0.85	0.65
ინგლისური	0.8	0.2	0	0.7	0.9	0.4	0.8	0.9	0.3	0.4	0.2	0.5	0.8	0.5	0.9	0.6
გერმანული	0.9	0.8	0.6	0.4	0	0.7	0	0	0	0.2	0.3	0.9	0	0.9	0	0.5
ფრანგული	0.7	0.7	0	0	0	0.9	0	0.4	0	0.1	0	0.8	0	0.7	0	0
ბერძნული	0	0	0	0.8	0	0.6	0.7	0	0	0	0	0.6	0.7	0	0.7	0
იტალიური	0	0	0	0	0.9	0	0	0.8	0.7	0	0.2	0.6	0.4	0.6	0	0.5
ესპანური	0.3	0	0.8	0.1	0	0.3	0	0	0.4	0.8	0.3	0.4	0.7	0	0	0.8
პოლონური	0	0.1	0.8	0.7	0	0	0.1	0	0.9	0	0	0	0.4	0.6	0	0.6
პორტუგალიური	0.6	0	0.7	0	0.8	0	0	0.2	0	0.9	0	0	0	0.8	0.7	0.9
იაპონური	0	0	0	0.9	0.7	0.4	0	0	0	0	0.9	0.4	0.9	0	0.9	0
ჩინური	0	0	0.6	0	0.7	0.8	0	0	0	0	0.8	0.2	0.5	0.9	0.5	0

ცხრილი 6. საილუსტრაციო მაგალითი #1 - მთარგმნელების შერჩევის ამოცანა

ცხრილი 6-ში მოცემული მთავარი მატრიცის ელემენტები ასახავს კანდიდატის მიერ ამა თუ იმ ენის ცოდნის ხარისხს (0 - სრული უცოდინრობა, 1 - სრულყოფილი ცოდნა). კანდიდატების ცოდნა შეიძლება შეფასდეს ექსპერტების მიერ ჩატარებული გამოცდებით, ან ენის ტესტებით. ცხრილის მეორე სტრიქონში მოცემულია კანდიდატების მიერ მოთხოვნილი ანაზღაურებები, რომელთა გადახდაც კომპანიას მოუწევს მოცემული კანდიდატის დაქირავების შემთხვევაში. ცხრილის მესამე სტრიქონში მოცემულია კანდიდატების დაქირავების შესაძლებლობის დონეები, რომლებსაც კვლავ ექსპერტები წერენ, მაგალითად, ადამიანური რესურსების მართვის განყოფილებიდან და რომლებიც ასახავს ისეთ ფაქტორებს როგორცაა, მაგალითად, კანდიდატის

უნარ-ჩვევები, მისი კომუნიკაბელურობა, გუნდურად მუშაობის შესაძლებლობა, საქმისადმი დამოკიდებულება, პასუხისმგებლობის გრძნობა და ა.შ.

პირველ რიგში, დამქირავებელი ორგანიზაცია ადგენს ენის ცოდნის მინიმალურ დასაშვებ დონეს, რომელზე დაბალი მაჩვენებლის შემთხვევაში, კომპანია თვლის, რომ მოცემულმა კანდიდატმა არ იცის მოცემული ენა. ჩვენს მაგალითში მივიჩნით, რომ ენის ცოდნის მინიმალური დასაშვები დონე არის 0.5. ითვლება, რომ კანდიდატმა იცის ენა, თუ მისი ცოდნის ხარისხი 0.5-ზე მეტი მაჩვენებლით არის შეფასებული. ცხრილი 7-ში მოცემულია 0.5 კვების შედეგად მიღებული ცოდნის მატრიცა. მასში თითოეული უჯრა ორ ნაწილად არის გაყოფილი. უჯრის ქვედა მარჯვენა ნაწილში მოცემულია კონკრეტული კანდიდატის ცოდნა კონკრეტული ენისთვის (თუ ეს ცოდნა აჭარბებს 0.5 მინიმალურ დონეს), ხოლო უჯრის ზედა მარცხენა ნაწილში მოცემულია რიცხვი 0 ან 1, რომლიც “კი” ან “არა”-ს ენაზე აღნიშნავს იცის თუ არა მოცემულმა კანდიდატმა მოცემული ენა, ანუ იფარება თუ არა კონკრეტული ენა, კონკრეტული კანდიდატის დაქირავების შემთხვევაში.

1 0.8	0 0	0 0	1 0.7	1 0.9	0 0	1 0.8	1 0.9	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0.8	0 0	1 0.9	1 0.6
1 0.9	1 0.8	1 0.6	0 0	0 0	1 0.7	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0.9	0 0	1 0.9	0 0
1 0.7	1 0.7	0 0	0 0	0 0	1 0.9	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0.8	0 0	1 0.7	0 0
0 0	0 0	0 0	1 0.8	0 0	1 0.6	1 0.7	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0.6	1 0.7	0 0	1 0.7
0 0	0 0	0 0	0 0	1 0.9	0 0	0 0	1 0.8	1 0.7	0 0	0 0	1 0.6	0 0	1 0.6	0 0	0 0
0 0	0 0	1 0.8	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0.8	0 0	0 0	1 0.7	0 0	0 0	1 0.8
0 0	0 0	1 0.8	1 0.7	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0.9	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0.6	0 0
1 0.6	0 0	1 0.7	0 0	1 0.8	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0.9	0 0	0 0	0 0	1 0.8	1 0.9
0 0	0 0	0 0	1 0.9	1 0.7	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0.9	0 0	1 0.9	0 0	0 0
0 0	0 0	1 0.6	0 0	1 0.7	1 0.8	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0.8	0 0	0 0	1 0.9	0 0

ცხრილი 7. საილუსტრაციო მაგალითი #1 - კანდიდატების ცოდნის მატრიცა

როგორც ზემოთ აღვწერეთ, ამოცანის ამოხსნა უნდა დავიწყოთ დისკრიმინაციული ანალიზით კანდიდატთა სიმრავლეზე არასანდოობის განაწილების გამოსათვლელად, რისთვისაც დაგვჭირდება μ_{L-R} , μ_{Large} და μ_{Small} ფუნქციები. მათ როლში განვიხილოთ შემდეგი ფუნქციები (მთავარია, ფუნქციები აკმაყოფილებდეს ზემოთ მოცემულ მოთხოვნებს, ამოცანის ამონახსნი არ არის დამოკიდებული კონკრეტული ფუნქციის შერჩევაზე):

$$\mu_{L-R}(x) = \frac{x}{x+2}, \quad x \geq 0;$$

$$\mu_{Large}(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\mu_{Small}(x) = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

თუ $w_i = 1/m$ ($i = \overline{1, m}$) თანაბარ წონებს და τ -ს როლში $\tau = 0.5$ -ს ავიღებთ, დისკრიმინაციული ანალიზის გამოყენებით, მივიღებთ არასანდოობის შემდეგ განაწილებას:

$\delta_1 = 0.475158$	$\delta_9 = 0.578377$
$\delta_2 = 0.580470$	$\delta_{10} = 0.578116$
$\delta_3 = 0.423950$	$\delta_{11} = 0.579181$
$\delta_4 = 0.473111$	$\delta_{12} = 0.474130$
$\delta_5 = 0.418326$	$\delta_{13} = 0.473198$
$\delta_6 = 0.473789$	$\delta_{14} = 0.366804$
$\delta_7 = 0.579643$	$\delta_{15} = 0.472124$
$\delta_8 = 0.577639$	$\delta_{16} = 0.475984$

(32) გამოსახულების კოეფიციენტების გამოსათვლელად საჭიროა, რომ ვიპოვოთ გადანაცვლება, რომელიც არაკლებადობით ალაგებს არასანდოობის δ_j ($j = \overline{1, 16}$) მნიშვნელობებს. ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში, ასეთი გადანაცვლება ერთია:

$$\sigma = (14, 5, 3, 15, 4, 13, 6, 12, 1, 16, 8, 10, 9, 11, 7, 2).$$

საბოლოოდ, (32) გამოსახულებაში $\delta(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma(j)})[g(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma(j)}) - g(\tilde{\mathcal{F}}_{\sigma(j+1)})]$ ($j = \overline{1, 16}$) კოეფიციენტებს ექნებათ შემდეგი სახე: 0.018340, 0, 0, 0, 0, 0, 0.071120, 0.023758, 0.095197, 0.028882, 0, 0.086756, 0.028959, 0, 0.116094. თუ მათ კვლავ საწყისი მიმდევრობით (x_1, x_2, \dots, x_{16} -ის მიხედვით) დავალაგებთ, გვექნება: 0.023758, 0.116094, 0, 0, 0, 0, 0.028882, 0.086756, 0, 0.028959, 0.071120, 0, 0.018340, 0, 0.095197.

მაშასადამე მივიღეთ ორი მიზნის ფუნქცია:

$$f_1 = 3100 \cdot x_1 + 1000 \cdot x_2 + 3500 \cdot x_3 + 4000 \cdot x_4 + 3200 \cdot x_5 + 4500 \cdot x_6 + 900 \cdot x_7 + 1600 \cdot x_8 + 800 \cdot x_9 + 1700 \cdot x_{10} + 2500 \cdot x_{11} + 3500 \cdot x_{12} + 4500 \cdot x_{13} + 4600 \cdot x_{14} + 2500 \cdot x_{15} + 3400 \cdot x_{16};$$

$$f_2 = 0.023758 \cdot x_1 + 0.116094 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0.028882 \cdot x_8 + 0.086756 \cdot x_9 + 0 \cdot x_{10} + 0.028959 \cdot x_{11} + 0.071120 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{13} + 0.018340 \cdot x_{14} + 0 \cdot x_{15} + 0.095197 \cdot x_{16};$$

თუ ამოცანას ამოვხსნით მხოლოდ პირველი მიზნის ფუნქციის მიმართ (ჯამური ფასის მინიმიზაცია), მივიღებთ შემდეგ ოპტიმალურ ამონახსნს:

$$K_2, K_7, K_9, K_{10}, K_{11};$$

ამ ამონახსნის ჯამური ფასია 6900 (არასანდოობა 0.231810).

თუ ამოცანას ამოვხსნით მხოლოდ მეორე მიზნის ფუნქციის მიმართ (არასანდოობის მინიმიზაცია), მივიღებთ შემდეგ ოპტიმალურ ამონახსნს:

$$K_{13}, K_{14};$$

ამ ამონახსნის ჯამური ფასია 9100, არასანდოობა 0.018340.

აღნიშნული ორი ამონახსნის გარდა არსებობს კიდევ ერთი ამონახსნი (დაყოფა) - K_{11}, K_{12}, K_{16} , რომლის ჯამური ფასია 9400, ხოლო არასანდოობა 0.195275. ეს ამონახსნი არ არის ოპტიმალური არც პირველი და არც მეორე მიზნის ფუნქციების მიმართ, თუმცა სანდოობის მაჩვენებელი უკეთესი აქვს პირველ ($K_2, K_7, K_9, K_{10}, K_{11}$) ამონახსნთან შედარებით.

ახლა შევეცადოთ, მთარგმნელების ამოცანა ამოვხსნათ ორივე მიზნის ფუნქციის მიმართ ერთდროულად, ანუ ამოვხსნათ როგორც ორკრიტერიუმის ოპტიმიზაციის ამოცანა. ორკრიტერიუმის ამოცანების ამოხსნის საკითხებს ჩვენ დეტალურად ქვემოთ შევეხებით, მეორე პრაქტიკული (სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის) ამოცანის განხილვისას. მთარგმნელების ამოცანისთვის კი სკალარიზაციის მეთოდს (Ehrgott, 2005) დავჯერდეთ, რომლის თანახმადაც ორკრიტერიუმის ამოცანა იცვლება სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანით: $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2$

მიზნის ფუნქციით, სადაც $\lambda \in [0; 1]$. სკალარიზაციის მეთოდის გამოყენებისას, სკალარიზებულ მიზნის ფუნქციაში აუცილებელია კრიტერიუმების ნორმირება. ანუ მეთოდის გამოყენებისთვის, შეწონილი ჯამით ახალი მიზნის ფუნქციის აგებამდე აუცილებელია ყველა მიზნის ფუნქციის ნორმირება და საერთო (უგანზომილებო) სკალაში მოქცევა. ამისთვის შეიძლება f_1 და f_2 მიზნის ფუნქციები შესაბამისად გავყოთ მათივე ოპტიმალურ მნიშვნელობებზე. შედეგად მივიღებთ უგანზომილებო \bar{f}_1 და \bar{f}_2 მიზნის ფუნქციებს:

$$\bar{f}_i = \frac{f_i}{f_i^*}, \quad i = 1, 2;$$

სადაც f_i^* წარმოადგენს i -ური მიზნის ფუნქციის ოპტიმალურ მნიშვნელობას ($f_i^* = \min f_i, i = 1, 2$).

ჩვენ მიერ განხილულ კონკრეტულ მაგალითში, $f_1^* = 6900$ და $f_2^* = 0.018340$. შესაბამისად:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 = & 0.449275 \cdot x_1 + 0.144928 \cdot x_2 + 0.507246 \cdot x_3 + 0.579710 \cdot x_4 + 0.579710 \cdot x_5 + \\ & + 0.652174 \cdot x_6 + 0.130435 \cdot x_7 + 0.231884 \cdot x_8 + 0.115942 \cdot x_9 + 0.159420 \cdot x_{10} + \\ & + 0.173913 \cdot x_{11} + 0.507246 \cdot x_{12} + 0.652174 \cdot x_{13} + 0.666667 \cdot x_{14} + 0.362319 \cdot x_{15} + \\ & + 0.492754 \cdot x_{16}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_2 = & 1.295399 \cdot x_1 + 6.330027 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + \\ & + 1.574789 \cdot x_8 + 4.730400 \cdot x_9 + 0 \cdot x_{10} + 1.578994 \cdot x_{11} + 3.877794 \cdot x_{12} + \\ & + 0 \cdot x_{13} + 1 \cdot x_{14} + 0 \cdot x_{15} + 5.190606 \cdot x_{16}; \end{aligned}$$

თუ λ -ს როლში 0.5-ს ავიღებთ, $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2$ სკალირებულ მიზნის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} f_s = & 0.872337 \cdot x_1 + 3.237477 \cdot x_2 + 0.253623 \cdot x_3 + 0.289855 \cdot x_4 + 0.231884 \cdot x_5 + \\ & + 0.326087 \cdot x_6 + 0.065217 \cdot x_7 + 0.903336 \cdot x_8 + 2.423171 \cdot x_9 + 0.123188 \cdot x_{10} + \\ & + 0.970657 \cdot x_{11} + 2.192520 \cdot x_{12} + 0.326087 \cdot x_{13} + 0.833333 \cdot x_{14} + 0.181159 \cdot x_{15} + \\ & + 2.841680 \cdot x_{16}; \end{aligned}$$

სკალირებული მიზნის ფუნქციით ამოცანის ამონახსნის შემთხვევაში ვიღებთ შემდეგ ოპტიმალურ ამონახსნს (მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა 1.159420):

$$K_{13}, K_{14};$$

როგორც ვხედავთ, ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში, $\lambda = 0.5$ პარამეტრით სკალირებული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი დაემთხვა მეორე მიზნის ფუნქციის მიმართ (არასანდოობის მინიმუზაცია) ამოხსნის შემთხვევაში ნაპოვნ ოპტიმალურ ამონახსნს, რომლის ჯამური ფასი არ არის პირველი მიზნის ფუნქციის მიმართ ოპტიმალური, თუმცა, მესამე ამონახსნთან შედარებით, ჯამური ფასის უკეთესი მაჩვენებელი აქვს. მაშასადამე, შეიძლება ითქვას, რომ არასანდოობის ფაქტორის 0.5 წონით გათვალისწინებამ მხოლოდ ჯამური ფასის მინიმუზაციით ნაპოვნი ამონახსნი ჩაგვინაცვლა სხვა ამონახსნით, რომელსაც ჯამური ფასის თვალსაზრისით შუალედური მაჩვენებელი აქვს, სანდოობის თვალსაზრისით კი საუკეთესოა. შესაბამისად, სწორედ ეს ამონახსნია ის ოპტიმალური ამონახსნი, რომელიც უზრუნველყოფს ჯამური ხელფასის და არასანდოობის შეძლებისდაგვარად ერთდროულად მინიმუზაციას.

შევნიშნოთ, რომ მთარგმნელების ამოცანის გადაჭრის დროს რამდენჯერმე გამოვიყენეთ ჩვენი MDLX ალგორითმი: სწორედ მისი საშუალებით ვიპოვეთ ოპტიმალური ამონახსნები ცალკე პირველი და მეორე მიზნის ფუნქციების მიმართ. აღსანიშნავია, რომ გამოვიყენეთ ჩვენი ალგორითმის ის ვერსია, რომელიც პოულობს დაყოფებს (და არა დაფარვებს). ეს გაკეთდა იმ მოსაზრებაზე დაყრდნობით, რომ კომპანიას არ ესაჭიროება ერთი ენის ერთ მცოდნეზე მეტი თანამშრომელი. ცხადია, შესაძლებელია ამ პირობის შერბილება და, დაყოფის ნაცვლად, დაფარვის ამოცანის გადაჭრა (იხ. ქვემოთ). ჩვენივე ალგორითმის გამოყენებით ვიპოვეთ ყველა

დაყოფა (სწორედ ასე შეგვექმნა წარმოდგენა მესამე ამონახსნის შესახებ). და ბოლოს, ჩვენივე ალგორითმით ამოვხსენით სკალირებული ამოცანა. ამოცანის პატარა განზომილებებიდან გამომდინარე საჭირო არ გახდა ჩვენი ალგორითმის პარალელური ვერსიის გამოყენება, რადგან ჩვეულებრივი (არაპარალელური) ვერსიაც კი ამონახსნებს რამდენიმე მილიწამში იძლევა (Intel(R) Core(TM) i7 CPU 860 @ 2.80 GHz, 4 GB RAM).

თუ მთარგმნელების ზემოთ განხილული მაგალითის ამოხსნას დაყოფის ნაცვლად დაფარვის მეთოდით შევეცდებით, ანუ დავუშვებთ, რომ კომპანიამ შესაძლოა ერთდროულად დაიქირავოს ერთიდაიგივე ენის მცოდნე რამდენიმე კანდიდატი, პირველი მიზნის ფუნქციის მიმართ ნაპოვნი ოპტიმალური ამონახსნი არ შეიცვლება და ალგორითმი კვლავ $K_2, K_7, K_9, K_{10}, K_{11}$ ამონახსნს გამოაცხადებს ოპტიმალურ დაფარვად, რაც იმას ნიშნავს, რომ ჩვენი კონკრეტული მაგალითისთვის არ მოიძებნება არცერთი დაფარვა, რომელსაც უკეთესი ჯამური ფასი ექნება, ვიდრე $K_2, K_7, K_9, K_{10}, K_{11}$ დაფარვას, რომელიც, ამავე დროს, დაყოფაც არის. თუმცა, ცხადია, ეს ყოველთვის ასე არ არის: მაგალითად, თუ მთარგმნელების ამოცანაში K_2, K_7, K_9 კანდიდატები 1700 ერთეულის ოდენობის ხელფასს მოითხოვენ, პირველი მიზნის ფუნქციის მიმართ დაყოფის გზით წასვლა მოგვცემს K_{13}, K_{14} ოპტიმალურ ამონახსნს (ჯამური ფასი - 9100), ხოლო იმავე მიზნის ფუნქციის მიმართ მინიმალური დაფარვის ძიება მოგვცემს განსხვავებულ, K_{10}, K_{14}, K_{15} ოპტიმალურ ამონახსნს (ჯამური ფასი - 8800). შევნიშნოთ, რომ ორივე ამონახსნის არასანდოობის მაჩვენებელი ერთნაირია - 0.018340, ამიტომ, დიდი ალბათობით, კომპანია K_{10}, K_{14}, K_{15} კანდიდატების აყვანას გადაწყვეტს.

თუ მთარგმნელების ამოცანის ზემოთ განხილულ მაგალითს ამოვხსნით (35)-(36) მიზნის ფუნქციებისთვის (ანუ ვისარგებლებთ არასანდოობის შოკეს ინტეგრალით შეფასების მეთოდით), მივიღებთ, რომ განხილული სამი ამონახსნიდან (დაყოფიდან), $K_2, K_7, K_9, K_{10}, K_{11}$ საუკეთესოა როგორც პირველი, ასევე მეორე მიზნის ფუნქციის თვალსაზრისით:

ამონახსნი	ჯამური ფასი	არასანდოობა
$K_2, K_7, K_9, K_{10}, K_{11}$	6900	0.231810
K_{13}, K_{14}	9100	0.340763
K_{11}, K_{12}, K_{16}	9400	0.430015

ანუ $K_2, K_7, K_9, K_{10}, K_{11}$ წარმოადგენს პარეტო ოპტიმალურ ამონახსნს (მრავალ-კრიტერიუმიანი ამოცანების პარეტო ოპტიმალური ამონახსნების შესახებ დეტალურად იხ. ქვემოთ).

თუ შევადარებთ არასანდოობის შეფასების განხილულ ორ მეთოდს (წონებზე დაფუძნებულს და შოკეს ინტეგრალით შეფასების), სხვადასხვა მაგალითებზე ჩვენი დაკვირვებით, ზოგადად ვერ ვიტყვით, რომ ერთი სჯობს მეორეს, ან პირიქით. ორივე მიდგომა აგრეგირებას უკეთებს და ითვალისწინებს არასრული ინფორმაციის უზუსტობისა და განუზღვრელობის პოლუსებს, უბრალოდ, აგრეგირებისას იყენებენ განსხვავებულ წონებს.

მთარგმნელების შერჩევის ამოცანა, ფაქტიურად წარმოადგენს მნიშვნელოვანი პრაქტიკული გამოყენების მქონე ამოცანების მთელ კლასს. მთარგმნელობითი საქმიანობის

ნაცვლად შეგვიძლია განვიხილოთ ნებისმიერი სახის სამუშაო, რომლის შესრულებაც მოითხოვება. მაგალითად, განვიხილოთ სახლის აშენების პროექტი. სახლის აშენებას ჭირდება გარკვეული სამუშაოების შესრულება (მაგალითად, საძირკვლის მომზადება, კედლების აშენება, გადახურვა, ელექტრობის გაყვანა და ა.შ.). თითოეული სამუშაოს შესრულება შემსრულებლისგან მოითხოვს გარკვეულ ცოდნას (კომპეტენციას), კვალიფიკაციას და უნარ-ჩვევებს. სამუშაოს შემსრულებლები ითხოვენ კონკრეტულ ანაზღაურებას მათი კვალიფიკაციიდან გამომდინარე. ამოცანა მდგომარეობს მინიმალური დანახარჯით სახლის აშენებაში, ანუ სამუშაოების შემსრულებლების ისეთი ჯგუფის შედგენაში, რომ დაიფაროს სახლის ასაშენებლად საჭირო ყველა სამუშაო და თან ჯგუფისთვის გადასახდელი ჯამური ანაზღაურება იყოს მინიმალური. აღნიშნული წარმოადგენს სახლის აშენების ამოცანის დასმას კლასიკური მინიმალური დაფარვის (ან დაყოფის, თუ ერთ სამუშაოს ერთი შემსრულებელი ჰყავს) ამოცანის სახით. მაგრამ პრაქტიკაში, სახლის აშენების დროს, მინიმალური დანახარჯების გარდა, და ხშირად უფრო მეტადაც, მნიშვნელოვანია გავითვალისწინოთ შესრულებული სამუშაოების ხარისხი, უსაფრთხოება, გუნდის შეთანხმებული მოქმედება და სამუშაოების დროულად შესრულება. ეს არის მაჩვენებლები, რომელთა მისაღწევად აუცილებელია სამუშაოს შემსრულებლების ცოდნისა და უნარ-ჩვევების, მათი გუნდურად მოქმედების შესაძლებლობების გათვალისწინება. სწორედ ეს ფაქტორები აჩენს უზუსტობას და განუზღვრელობას განხილული ტიპის ამოცანებში და, პრაქტიკაში გამოყენებადი, მართლაც ოპტიმალური ამონახსნების მისაღებად, კლასიკურ მიზნის ფუნქციასთან ერთად, საჭირო ხდება დამატებითი მიზნის ფუნქციების განხილვა, შესრულებული სამუშაოების სანდოობის მაქსიმიზაციისთვის.

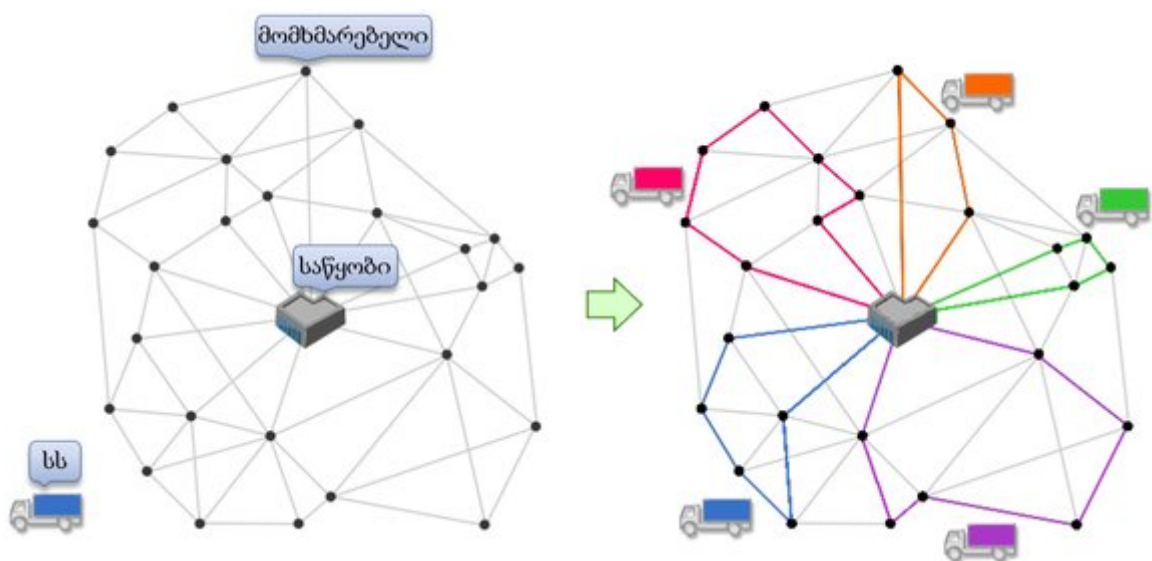
ჩვენი აზრით, არამკაფიო სიმრავლეები და მონოტონური ზომები წარმოადგენენ უზუსტობისა და განუზღვრელობის აღწერის ერთ-ერთ ყველაზე მოქნილ და უნივერსალურ ინსტრუმენტებს. სხვადასხვა აგრეგირების ინსტრუმენტების, მაგალითად, როგორცაა შოკესა და სუჯენოს ინტეგრალები, გამოყენებით კი შესაძლებელია არასრული ინფორმაციის ამ ორი პოლუსის - უზუსტობისა და განუზღვრელობის კომბინირება და სხვადასხვა ამოცანაში ეფექტურად გათვალისწინება.

თავი 3. სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანა და მისი განზოგადება განუზღვრულ გარემოში

ნაშრომის თემის და ფაზი-დაფარვის ამოცანებში საექსპერტო ცოდნის ინჟინერიის შემოთავაზებული მეთოდების (framework-ის) სადემონსტრაციოდ, განვიხილოთ კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა, რომელიც ფართოდ გავრცელებულია მისი პრაქტიკული გამოყენებების სიუხვიდან გამომდინარე. ეს გახლავთ სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანა. ამოცანის არსი მდგომარეობს გარკვეული თვალსაზრისით ოპტიმალური მარშრუტების შერჩევაში. დეტალურად ჩამოვყალიბოთ სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანა კლასიკური სახით.

3.1. სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანები

სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანა (Vehicle Routing Problem - VRP) არის კომბინატორული ოპტიმიზაციის პრობლემა, რომლის მიზანია, სატრანსპორტო საშუალებებისთვის (სს) შეარჩიოს მარშრუტების ოპტიმალური სიმრავლე. სატრანსპორტო საშუალებები აღნიშნულ მარშრუტებს იყენებენ მომხმარებლებისთვის სხვადასხვა ტვირთის მისაწოდებლად. სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანა წარმოადგენს კომივოიაჟერის ცნობილი ამოცანის (Travelling Salesman Problem - TSP) განზოგადებას, შესაბამისად, ის NP-რთულია. სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანა პირველად ჩამოყალიბეს დანციგმა და რემზერმა 1959 წლის ნაშრომში (Dantzig & Ramser, 1959), ცენტრალური საცავიდან საწვავშიდი მანქანებით ბენზინგასამართ სადგურებისთვის საწვავის ოპტიმალურად მიწოდების პრობლემისთვის. მათ ასევე შემოგვთავაზეს ჩამოყალიბებული ამოცანის გადაჭრის ალგორითმული მიდგომა, რომელიც, მოგვიანებით გააუმჯობესეს კლარკმა და რაითმა (Clarke & Wright, 1964). დღემდე, ხშირად სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანა სწორედ მსგავს კონტექსტში განიხილება: საჭიროა ცენტრალურ საწყობში განთავსებული ტვირთის მიწოდება მომხმარებლებისთვის, რომლებმაც დააფიქსირეს აღნიშნული ტვირთის გარკვეული ოდენობის მოთხოვნა (იხ. ფიგურა 17).



ფიგურა 17. სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანა

ამოცანის მიზანია, საოპერაციო შეზღუდვების გათვალისწინებით, მომხმარებლების დაკმაყოფილება და ტრანსპორტირების ჯამური ხარჯის მინიმიზაცია. ხარჯი შეიძლება გამოსახული იყოს ტრანსპორტირებისას ჯამურად გავლილ მანძილში, დახარჯულ დროში ან თანხაში, ან სხვა ერთეულებში.

არსებობს სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანის ბევრი განსხვავებული ვარიანტი და ფორმულირება (Toth & Vigo, 2002). მაგალითად, ზოგიერთ ამოცანაში შეიძლება გვექონდეს ერთზე მეტი საწყობი, რომლიდანაც ხდება ტვირთის დარიგება; შეიძლება გასათვალისწინებელი გვექონდეს ე.წ. “დროითი ფანჯრები”, რაც იმას ნიშნავს, რომ დანიშნულების პუნქტებს (მომხმარებლებს) შეიძლება დადგენილი ჰქონდეთ დროის ინტერვალები (ფანჯრები), რომელშიც უნდა მოხდეს ტვირთის მიწოდება; ხშირად, ამოცანაში ასევე გასათვალისწინებელია თითოეული სატრანსპორტო საშუალების მაქსიმალური ტვირთამწეობა; ზოგიერთ ამოცანაში მოითხოვება არა მარტო ტვირთის მიწოდება, არამედ აკრეფა-მიწოდება; ზოგიერთ ამოცანაში აუცილებელია მომხმარებლებთან ვიზიტების გარკვეული თანმიმდევრობის დაცვა და ა.შ. ზოგჯერ შეუძლებელია ყველა მომხმარებლის მოთხოვნის დაკმაყოფილება. მსგავს შემთხვევებში, შეიძლება ხდებოდეს მომხმარებლებისთვის მისაწოდებელი ან მათგან წამოსადები ტვირთის რაოდენობის შემცირება (არასრულად მომსახურება), ან ზოგიერთი მომხმარებლის მოთხოვნის საერთოდ ვერ დაკმაყოფილება. ამგვარ ამოცანებში, როგორც წესი, გვხვდება მომხმარებლებთან ასოცირებული პრიორიტეტები, ან მათი არასრულფასოვანი მომსახურებით გამოწვეული ჯარიმები.

სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანებში ასევე გვხვდება სხვადასხვა სახის მიზნის ფუნქციები (Toth & Vigo, 2002): ტრანსპორტირების ჯამური ხარჯის მინიმიზაცია, მომხმარებლების მომსახურებისთვის საჭირო სატრანსპორტო საშუალებების რაოდენობის მინიმიზაცია, მომხმარებლების არასრულფასოვანი მომსახურებით გამოწვეული ჯარიმების ჯამური მოცულობის მინიმიზაცია და ა.შ.

სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის პრაქტიკულ ამოცანებში ასევე ხშირად გვხვდება ერთდროულად რამდენიმე მიზნის ფუნქცია (Jozefowiez, Semet, & Talbi, 2008). ასეთ ამოცანებს მრავალკრიტერიუმიან სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანებს უწოდებენ (Jozefowiez, Semet, & Talbi, 2008). როგორც წესი, მიზნის ფუნქციები ურთიერთსაწინააღმდეგოა და საჭირო ხდება კომპრომისული, გარკვეული თვალსაზრისით ოპტიმალური ამონახსნების ძიება, რაზეც დეტალურად ქვემოთ ვისაუბრებთ.

3.1.1. უზუსტობა და განუზღვრელობა სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანებში

მაინც სად არის სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის განხილულ ამოცანებში უზუსტობა ან განუზღვრელობა? წლების წინ, ამოცანის პირველად ჩამოყალიბების დროს, ალბათ, მართლაც არ იყო მნიშვნელოვანი გარკვეული ცდომილებების ან განსაკუთრებული შემთხვევების გათვალისწინება, მაგრამ თანამედროვე სამყაროში, როდესაც ჩვეულებრივ სიტუაციებშიც კი, ხშირად გზები გადატვირთულია, ან საქმე გვაქვს ისეთ განსაკუთრებულ შემთხვევებთან, როგორც არის, მაგალითად, სხვადასხვა სტიქიური უბედურებების შედეგად, ან სხვა მიზეზით დაზიანებული გზები, მეტეოროლოგიური პირობების გამო შეფერხებული მოძრაობა (მაგალითად, თოვლიანი და მოყინული გზები) და ა.შ., შეუძლებელია აღნიშნული ფაქტორების

გათვალისწინების გარეშე ამოცანის ოპტიმალურად გადაჭრა. სწორედ აღნიშნული ფაქტორები წარმოშობენ უზუსტობას და განუზღვრელობას. უზუსტობა აისახება, მაგალითად, გადაადგილების დროის არამკაფიოობაში: თუ თავისუფალი და დაუზიანებელი გზების პირობებში შეგვიძლია მეტ-ნაკლებად ზუსტად გავთვალოთ მასზე გადაადგილებისთვის საჭირო დრო, გადატვირთული გზების, გზებზე საცობების არსებობის შემთხვევაში, გადაადგილების დრო ხდება არაზუსტი, არამკაფიო და მისი დახასიათება ერთი ზუსტი რიცხვით აცდენილია რეალობას. რაც შეეხება განუზღვრელობას, ის აისახება, მაგალითად, გადაადგილების შესაძლებლობის შესახებ ინფორმაციის ნაკლებობაში. მაგალითად, თუ მეტეოროლოგიური პირობების გამო გზებზე გადაადგილება გართულებულია და ნებისმიერ დროს მოსალოდნელია გზის ჩაკეტვა, ან უბრალოდ არ გვაქვს ინფორმაცია გზის მდგომარეობის შესახებ და არსებობს შანსი, რომ სატრანსპორტო საშუალებას გზა დაზიანებული დახვდეს, საჭირო ხდება გზების დახასიათება ისეთი სიდიდით, რომელიც ასახავს ინფორმაციის სისრულეს ან დანაკლისს, ჩვენს რწმენას, თუ რამდენად განხორციელებადია კონკრეტული გადაადგილება (მარშრუტი) მოცემული მომენტისთვის არსებულ ექსტრემალურ სიტუაციაში.

აღსანიშნავია, რომ არსებობს ლიტერატურა, რომელშიც განხილულია სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანების უზუსტობის პოლუსი, მაგრამ ძნელად თუ მოიძებნება ნაშრომები, რომლებშიც, უზუსტობის პოლუსთან ერთად, ასევე განხილულია განუზღვრელობის პოლუსი აღნიშნული ამოცანებისთვის. სხვადასხვა ნაშრომში უზუსტობის პოლუსი სხვადასხვანაირად არის წარმოდგენილი. ძირითადად, ის დაკავშირებულია ამოცანის გარკვეული პარამეტრების არამკაფიოობასთან. მაგალითად, გადაადგილების ან/და მომსახურების (მომხმარებელთან შეყოვნების) დროის არამკაფიოობასთან (Tang, Cheng, Zhang, & Zhong, 2007; Hong & Xu, 2008; Hong & Xu, 2008; Ghannadpour, Noori, Tavakkoli-Moghaddam, & Ghoseiri, 2014), მომხმარებელთა მოთხოვნების არამკაფიოობასთან (Teodorović & Kikuchi, 1991; Teodorović & Lučić, 2007) და ა.შ. ასეთ ამოცანებს სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ფაზი-ამოცანებს (Fuzzy Vehicle Routing Problem - FVRP) უწოდებენ (Brito, Moreno, & Verdegay, 2009; Brito, et al., 2008).

ჩვენი აზრით კი სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის პრაქტიკულ ამოცანებში არსებულ არამკაფიოობას მხოლოდ უზუსტობის სახე არ აქვს. ამ ამოცანებში, უზუსტობის გარდა, ხშირად გვხვდება ინფორმაციის არასრულყოფილების მეორე პოლუსი - განუზღვრელობა (ამ ორ ცნებას შორის განსხვავება ზემოთ განვმარტეთ). თუ ამოცანის ამონახსნების ძიებისას მაქსიმალურად გამოვიყენებთ ჩვენს ხელთ არსებულ ინფორმაციას და გავითვალისწინებთ ამ ინფორმაციის ორივე ტიპის ბუნებას, მივიღებთ ამონახსნებს, რომლებიც უფრო კარგად ასახავს რეალობას, მაშასადამე, ვიპოვით უფრო ოპტიმალურ ამონახსნებს.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის პრაქტიკული ამოცანები ხშირად მრავალკრიტერიუმიანია. ეს განსაკუთრებით ეხება ე.წ. სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ფაზი-ამოცანებს (Gupta, Singh, & Pandey, 2010; Ghannadpour, Noori, Tavakkoli-Moghaddam, & Ghoseiri, 2014), რადგან მსგავს ამოცანებში, გარდა იმისა, რომ ვცდილობთ ჯამური ხარჯის (მაგალითად, გავლილი მანძილის, მოხმარებული საწვავის, დახარჯული დროის) მინიმიზაციას, ასევე ვცდილობთ ინფორმაციის ნაკლებობით გამოწვეული არამკაფიოობის და განუზღვრელობის მინიმიზაციას, ანუ ჩვენ მიერ ნაპოვნი ამონახსნების სანდოობის მაქსიმიზაციას.

ჩვენ განვიხილავთ სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანებს ექსტრემალურ გარემოში, როდესაც გზებზე გადაადგილება გართულებულია, მაგალითად, საცობების, მოყინული გზების,

სხვადასხვა ტიპის დაზიანებების და ა.შ. გამო და ვაპირებთ, რომ გავითვალისწინოთ ინფორმაციის დანაკლისით, ან სუბიექტური შეფასებების არსებობით შექმნილი რეალობის ორივე პოლუსი - როგორც უზუსტობა, ასევე განუზღვრელობა.

3.2. სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანა განუზღვრელ გარემოში

სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანაში, რომელსაც ჩვენ განვიხილავთ გვაქვს ერთი საწყობი, რომლიდანაც მომხმარებლებს მიეწოდებათ ერთგვაროვანი ტვირთები; მომხმარებლების მოთხოვნები წინასწარ ცნობილია; განვიხილავთ ერთგვაროვან სატრანსპორტო საშუალებებს, რომელთა მაქსიმალური ტვირთამწეობა და ერთი მარშრუტის ფარგლებში გავლადი მაქსიმალური მანძილი ასევე ცნობილია; თითოეულ მომხმარებელთან (ტვირთის მიწოდების მიზნით) მიდის მხოლოდ ერთი სატრანსპორტო საშუალება და სრულად ხდება ყველა მომხმარებლის მოთხოვნის დაკმაყოფილება.

დავუშვათ, მოცემულია მომხმარებლების და საწყობის შესაბამისი გეოგრაფიული პუნქტები $I = \{1, 2, \dots, n + 1\}$, სადაც პუნქტი ნომრით $n + 1$ შეესაბამება საწყობს. სატრანსპორტო საშუალებების გამოყენებით, საწყობიდან ხდება მომხმარებლების მომარაგება ერთგვაროვანი ტვირთებით. მომხმარებლებთან ვიზიტის შემდეგ, თითოეული სატრანსპორტო საშუალება ბრუნდება საწყობში. ცნობილია სატრანსპორტო საშუალებების მაქსიმალური ტვირთამწეობა Q და მაქსიმალური მანძილი D , რომლის დაფარვაც მას შეუძლია ერთი მარშრუტის ფარგლებში. ასევე ცნობილია მომხმარებლების მოთხოვნები $P_i \in \mathbb{R}$, $0 < P_i < Q$, $i = 1, 2, \dots, n$. იგულისხმება, რომ თითოეული მომხმარებლის მიერ მოთხოვნილი ტვირთის მოცულობა გაცილებით ნაკლებია სატრანსპორტო საშუალებების მაქსიმალურ ტვირთამწეობაზე (საწინააღმდეგო შემთხვევაში, თუ, მაგალითად, სატრანსპორტო საშუალება ერთზე მეტი მომხმარებლის მომარაგებას ვერ ახერხებს ერთი რეისის ფარგლებში, აღნიშნული ამოცანის განხილვა ნაკლებად საინტერესოა). საჭიროა მოთხოვნილი რაოდენობის ტვირთის მიწოდება თითოეული მომხმარებლისთვის იმგვარად, რომ ტრანსპორტირების ჯამური ხარჯი - სატრანსპორტო საშუალებ(ებ)ის მიერ ჯამურად გავლილი მანძილი იყოს მინიმალური.

აღნიშნული ფორმულირება ყველაზე ახლოს არის სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის კლასიკურ ამოცანასთან. ცხადია, ჩვენ მიერ განხილული ამოცანაც შეიძლება გავაფართოვოთ სხვადასხვა დამატებითი პირობებით, როგორცაა დროითი ფანჯრები, მრავალი საწყობი და ა.შ., თუმცა გადავწყვიტეთ, რომ რადგან სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანები არ არის ჩვენი ნაშრომის მთავარი თემა, საექსპერტო ცოდნის ინჟინერიაზე ფოკუსის არ დაკარგვის მიზნით, განგვეხილა სწორედ ზემოთ აღწერილი ტიპის მარშრუტიზაციის ამოცანა და ის განგვეზოგადებინა ე.წ. ექსტრემალური პირობებისთვის. მისი კიდევ უფრო მეტად განზოგადება კი შესაძლებელია ისევე, როგორც ხდება კლასიკური სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანების განზოგადება სხვადასხვა ტიპის ამოცანებამდე.

როგორც აღვნიშნეთ, ჩვენ განვიხილავთ სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანებს რეალურ გარემოში, როდესაც შეიძლება გზებზე არსებობდეს სხვადასხვა სახის შეფერხება. აღნიშნულმა შეფერხებებმა შეიძლება გამოიწვიოს ტრანსპორტირების ხარჯების გაზრდა, თუ, მაგალითად, ავირჩევთ მაღალი რისკის შემცველ მარშრუტს და მასზე მოძრაობისას გაირკვევა, რომ მარშრუტის რომელიღაც მონაკვეთზე გადაადგილება შეუძლებელია. შედეგად შეიძლება მოგვიხდეს სატრანსპორტო საშუალების უკან დაბრუნება (საწყობამდე, ან რომელიმე შუალედურ

პუნქტამდე) და ალტერნატიული მარშრუტის არჩევა. გზებზე არსებულმა შეფერხებებმა ასევე შეიძლება გამოიწვიოს მომხმარებლებისთვის ტვირთის მიწოდების დაგვიანება, რაც მნიშვნელოვანი პრობლემაა დროითი ფანჯრების მქონე სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანებში. ტვირთის დროული მიწოდება ასევე განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ამოცანებში, რომელთა ფარგლებში ხდება, მაგალითად, ჰუმანიტარული ტვირთის დარიგება. ამიტომ, მანძილთან ერთად, ხშირად მნიშვნელოვანია დროის ფაქტორის განხილვა და გამომდინარე იქიდან, რომ გზებზე გადაადგილების დროის ზუსტი შეფასება შეუძლებელია (მითუმეტეს შეფერხებების არსებობის პირობებში), ლოგიკურია განვიხილოთ არამკაფიო, ფაზი-დრო, ანუ დროის მიახლოებითი შეფასებები, რაც ზემოთ დასმულ ამოცანაში უზუსტობის ფაქტორის შემოტანას ნიშნავს.

თუ i -ური პუნქტიდან j -ურ პუნქტამდე გადაადგილების მიახლოებით დროს \tilde{t}_{ij} -ით ($i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$) აღვნიშნავთ, ის შეგვიძლია წარმოვადგინოთ სამკუთხა არამკაფიო რიცხვის სახით $\tilde{t}_{ij} = (\tilde{t}_{ij}^{(1)}, \tilde{t}_{ij}^{(2)}, \tilde{t}_{ij}^{(3)})$, რომლის მიკუთვნების ფუნქცია განისაზღვრება ფორმულა (7)-ით. იდეალურ შემთხვევაში, პუნქტებს (მომხმარებლებს) შორის გადაადგილების დრო ზუსტი იქნებოდა და მას ერთი, მკაფიო რიცხვით აღვწერდით, მაგრამ რეალურ სიტუაციებში, გადაადგილების დრო არასდროს არის ზუსტი, ამიტომ მისი აღწერა არამკაფიო რიცხვების გამოყენებით უფრო ლოგიკურია. მაგალითად, თუ რომელიმე ორ პუნქტს შორის გადაადგილებას დაახლოებით 25 წუთი ჭირდება და ცდომილება ± 5 წუთია, ის შეიძლება აღვწეროთ (20, 25, 30) სამკუთხა არამკაფიო რიცხვით. უფრო მეტიც, გზებზე სხვადასხვა შეფერხებების არსებობის პირობებში, ცდომილება, ანუ მოსალოდნელი დროიდან გადახრა შეიძლება კიდევ უფრო გაიზარდოს (არა მაინცდამაინც სიმეტრიულად). მსგავს შემთხვევებში, იგივე ორ პუნქტს შორის გადაადგილების დრო ექსპერტმა შეიძლება ჩაწეროს, როგორც (20, 25, 35).

აქვე დავაზუსტოთ, რომ არ არის აუცილებელი, ყოველი ამოცანის ფარგლებში, მთელი სატრანსპორტო ქსელის დროითი მონაცემები გადაიხედოს და თავიდან ჩაიწეროს ექსპერტთა ჩართულობით. ექსპერტ(ებ)ის დახმარებით, შეიძლება კორექტირება გავუკეთოთ მხოლოდ იმ გზების მონაცემებს, რომლებზეც შეფერხებები აღინიშნება. ქსელის დანარჩენ უბნებზე გადაადგილების დროები კი შეგვიძლია, დავტოვოთ უცვლელი.

თუ $M_k = \{n + 1, i_1^k, i_2^k, \dots, i_{l_k}^k, n + 1\}$, $i_j^k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j = 1, 2, \dots, l_k$; $1 \leq l_k \leq n$, არის ჩაკეტილი მარშრუტი, ანუ მარშრუტი, რომელიც იწყება და მთავრდება საწყობში, მაშინ ამ მარშრუტზე გადაადგილების დრო შეგვიძლია გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$\tilde{t}(M_k) = \tilde{t}_{n+1, i_1^k} + \sum_{j=1}^{l_k-1} \tilde{t}_{i_j^k, i_{j+1}^k} + \tilde{t}_{i_{l_k}^k, n+1}. \quad (37)$$

შევნიშნოთ, რომ სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ბევრ პრაქტიკულ ამოცანაში, ჯამური მანძილის მინიმიზაციის კრიტერიუმი შეიძლება ჩავანაცვლოთ ფორმულა (37)-ის გამოყენებით დათვლილი ჯამური დროის მინიმიზაციით. ასევე განიხილება ამოცანები, როდესაც სატრანსპორტო საშუალების გადაადგილების მაქსიმუმის შეზღუდვა მოცემულია არა სიგრძის, არამედ დროის ერთეულებში, რადგან გზებზე შეფერხებების არსებობის შემთხვევაში, სატრანსპორტო საშუალება ნელა გადაადგილდება და პატარა მანძილის გავლას დიდ დროს ანდომებს, მაგრამ ამ დროს მისი ძრავი მუშა მდგომარეობაშია და საწვავიც იხარჯება, ასე რომ ზოგჯერ უმჯობესია დავაწესოთ შეზღუდვა არა გავლილ მანძილზე, არამედ გადაადგილების დროზე. დროითი შეზღუდვის შემოღების კიდევ ერთ არგუმენტად შეიძლება გამოდგეს

სატრანსპორტო საშუალების მძღოლის ფიზიკური შესაძლებლობები (დასვენების საჭიროება). თუმცა ჩვენს ამოცანაში არ ვაპირებთ, რომ ჯამური მანძილის მინიმიზაციის კრიტერიუმი ჩავანაცვლოთ ჯამური მიახლოებითი დროის მინიმიზაციის კრიტერიუმით. ჩვენ მიერ შემოთავაზებულ მიდგომაში, გადაადგილების დროის არამკაფიოება გამოიყენება, როგორც (ზუსტი) ინფორმაციის ნაკლებობის მხოლოდ ერთი - უზუსტობის პოლუსი, რომელიც, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, განიხილება მეორე - განუზღვრელობის პოლუსთან კომბინაციაში, უფრო სრულყოფილი მიზნის ფუნქციის ასაგებად. ახლა სწორედ სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ჩვენი ამოცანის განუზღვრელობის პოლუსის განხილვაზე გადავიდეთ.

გზებზე არსებულმა საგანგებო სიტუაციებმა შეიძლება უარყოფითი გავლენა იქონიოს არა მხოლოდ გადაადგილების მოსალოდნელ დროზე, არამედ უშუალოდ გადაადგილების შესაძლებლობაზეც. გზების ნაწილი შეიძლება ჩაიკეტოს, მაგალითად, დაზიანებების, დიდთოვლობის ან სხვა მიზეზების გამო. ამ თვალსაზრისით, ზოგიერთი გზა უფრო ნაკლებ რისკიანია, ვიდრე სხვები. მაგალითად, დიდთოვლობის გამო უფრო დიდი შანსია, რომ დაიკეტოს გზა, რომელიც უღელტეხილს შეიცავს, ვიდრე მისი ალტერნატიული გზა (ასეთის არსებობის შემთხვევაში), რომელიც უფრო გრძელია, მაგრამ არ შეიცავს უღელტეხილს.

თუ გზებზე არსებული ვითარების შესახებ წინასწარ ვფლობთ სრულყოფილ ინფორმაციას, შეიძლება ეს ინფორმაცია გამოვიყენოთ დასაშვები მარშრუტების სიის კორექტირებისთვის და შეძლებისდაგვარად თავი ავარიდოთ შეფერხებების შემცველ გზებს, მაგრამ გზებზე არსებული ვითარება რეალურ ამოცანებში იშვიათად არის სტატიკური. გარკვეული ტიპის ამოცანები კი თავიდანვე გულისხმობს, რომ არ გაგვაჩნია სრულყოფილი ინფორმაცია გზებზე არსებული ვითარების შესახებ (მაგალითად, თუ საჭიროა ჰუმანიტარული ტვირთის ოპერატიულად მიწოდება გარკვეული მოვლენების შედეგად დაზარალებული რეგიონის პუნქტებისთვის). ასე რომ, ლოგიკურია, ინფორმაციის ამ ტიპის არასრულყოფილების აღსაწერად განვიხილოთ მისი განუზღვრელობის პოლუსი.

მაშასადამე, i -ური პუნქტიდან j -ურ პუნქტამდე გადაადგილების მიახლოებითი \tilde{t}_{ij} დროის (რომელიც უზუსტობის პოლუსს წარმოადგენს) გარდა, ჩვენ განვიხილავთ აღნიშნულ პუნქტებს შორის (ვერ) გადაადგილების შესაძლებლობას, რისთვისაც ლოგიკურია ზემოთ განხილული შესაძლებლობის ზომის (Pos) გამოყენება. π_{ij} -ით, $0 \leq \pi_{ij} \leq 1, i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ აღვნიშნოთ იმის შესაძლებლობა, რომ შეფერხების გამო ვერ მოვახერხებთ i -ური პუნქტიდან j -ურ პუნქტამდე გადაადგილებას. ამ შემთხვევაშიც, არჩევანი არაადიციურ, მონოტონურ ზომებზე შევაჩერეთ, რადგან გზებზე არსებული თუ მოსალოდნელი შეფერხებების შეფასების წყაროს, ხშირად ექსპერტთა მიერ მოწოდებული ინფორმაცია, სუბიექტური შეფასებები წარმოადგენს, რაც, როგორც ზემოთ არაერთხელ აღვნიშნეთ, აღწერის გარკვეულ თავისუფლების ხარისხს, გარკვეულ უზუსტობასა და განუზღვრელობას გულისხმობს. არაადიციური ზომების გამოყენება ასევე მიზანშეწონილია იმიტომ, რომ სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანებში დასაშვები მარშრუტების (რომელთაგანაც ოპტიმალური ამონახსნი უნდა შეირჩეს) გენერირება ხშირად ხდება სხვადასხვა ევრისტიკული მიდგომებით, რომლებიც წარმოქმნიან მომხმარებლების შემოვლის კორელაციურ მიმდევრობებს (დეტალურად იხ. ქვემოთ).

გზებზე შექმნილი განსაკუთრებული სიტუაციების არსებობის შემთხვევაში, i -ური პუნქტიდან j -ურ პუნქტამდე გადაადგილების მიახლოებითი \tilde{t}_{ij} დროების ანალოგიურად, ექსპერტთა აქტივობა მოითხოვება სატრანსპორტო ქსელის მხოლოდ იმ უბნებისთვის, სადაც შეფერხებები შეინიშნება, ან არ ვფლობთ სრულყოფილ ინფორმაციას არსებული ან შესაძლო

შეფერხებების შესახებ. მაშასადამე, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\pi_{ij} = 0, i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$, გარდა იმ გზებისა, სადაც საჭიროდ ჩაითვლება გადაადგილების შესაძლებლობის კორექტირება ექსპერტთა ჩართულობით (შეფერხების შედეგად ვერ გადაადგილების შესაძლებლობის რიცხვითი მაჩვენებლის გაზრდა 0-დან 1-ისკენ). მაგალითისთვის, თუ ექსპერტი ფლობს ინფორმაციას, რომ i და j პუნქტებს შორის არსებულ გზაზე მცირე შეფერხებაა, ვერ გადაადგილების შესაძლებლობის π_{ij} მაჩვენებელი მან შეიძლება გაზარდოს 0-დან 0.2-მდე.

საბოლოოდ, შეფერხებების შედეგად ვერ გადაადგილების შესაძლებლობების მატრიცას გაუყუეთოთ ნორმირება: მისი ელემენტები გავეოთ $\pi_{max} \equiv \max\{\pi_{ij}\}, i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ რიცხვზე (იმისთვის, რომ დავაკმაყოფილოთ პირობა: $Pos(X) = \max_{x \in X}\{\pi_x\} = 1$).

3.2.1. მარშრუტების განხორციელებადობის კრიტერიუმის აგება

გზებზე არსებული მდგომარეობით გამოწვეული უზუსტობის და განუზღვრელობის განხილული მახასიათებლების სინთეზით, სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ჩვენი ამოცანისთვის ავგოთ ახალი კრიტერიუმი - მეორე მიზნის ფუნქცია - გადაადგილების განხორციელების მაქსიმიზაცია, ანუ გზებზე დროულად გადაადგილების შესაძლებლობების ჯამური მაჩვენებლის მაქსიმიზაცია. აღნიშნული კრიტერიუმი უპირატესობას ანიჭებს იმ მარშრუტებს, რომელთა განხორციელება უფრო რეალურია სხვა მარშრუტებთან შედარებით.

მაშასადამე გზებზე არსებულ სხვადასხვა შემაფერხებელ სიტუაციებს ვახასიათებთ ორი მაჩვენებლით: გადაადგილების არამკაფიო დრო და გადაადგილების ვერ განხორციელების შესაძლებლობა. პირველი მათგანი ექსპერტული შეფასებებით მოცემული ინფორმაციის უზუსტობის პოლუსს წარმოადგენს, მეორე მათგანი კი - განუზღვრელობისას. აღვნიშნოთ გადაადგილების დროების სამკუთხა არამკაფიო რიცხვების მატრიცა $\tilde{T} = \{\tilde{t}_{ij}\}$ -ით, ხოლო ვერ გადაადგილების შესაძლებლობების მატრიცა $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ -ით, $i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$.

როგორც ცნობილია, სამკუთხა არამკაფიო რიცხვი შეიძლება დავახასიათოთ შესაძლებლობითი საშუალოთი და შესაძლებლობითი სტანდარტული გადახრით (Carlsson & Fullér, 2001). თუ მოცემულია სამკუთხა არამკაფიო რიცხვი $A = (a_1, a_2, a_3)$, მისი შესაძლებლობითი საშუალო გამოითვლება ფორმულით:

$$E^{(Pos)}(A) = a_2 + \frac{a_3 - 2a_2 + a_1}{6}; \quad (38)$$

ხოლო შესაძლებლობითი სტანდარტული გადახრა - ფორმულით:

$$\sigma^{(Pos)}(A) = \sqrt{Var^{(Pos)}(A)} = \frac{\sqrt{(a_3 - a_2)^2 + (a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)(a_2 - a_1)}}{3\sqrt{2}}; \quad (39)$$

მაშასადამე, i -ური პუნქტიდან j -ურ პუნქტამდე გადაადგილების მიახლოებითი \tilde{t}_{ij} დრო შეგვიძლია დავახასიათოთ $E^{(Pos)}(\tilde{t}_{ij})$ და $\sigma^{(Pos)}(\tilde{t}_{ij})$ სიდიდეებით. მათგან პირველი იძლევა სამკუთხა არამკაფიო რიცხვის ერთი რიცხვით დახასიათების საშუალებას, ხოლო მეორე გვიჩვენებს თუ რამდენად დიდია გადახრა სამკუთხა არამკაფიო რიცხვის მოდალური მნიშვნელობიდან (მარცხენა და მარჯვენა რიცხვების გადახრა ცენტრალური რიცხვიდან). ლოგიკურია, დავუშვათ, რომ რაც უფრო დიდია გადახრა, მით მეტია გადაადგილებასთან დაკავშირებული არამკაფიოობა. მაგალითად, ექსპერტი დაწერს სამკუთხა არამკაფიო რიცხვს, რომლის მარცხენა და მარჯვენა მნიშვნელობები დიდად დაშორებულია მოდალური მნიშვნელობიდან, როდესაც გზაზე მოსალოდნელია საცობები და სხვადასხვა ტიპის

შეფერხებები. მაგრამ ასევე მნიშვნელოვანია, თუ რა მასშტაბის არის გადახრა მოდალურ მნიშვნელობასთან შედარებით. მაგალითად, თუ შევადარებთ ორ სამკუთხა არამკაფიო რიცხვს: $\tilde{x}_{i_1j_1} = (15, 20, 25)$ -ს და $\tilde{x}_{i_2j_2} = (95, 100, 105)$ -ს, ცხადია, რომ პირველ რიცხვთან უფრო მეტი არამკაფიოობა არის დაკავშირებული, ვიდრე მეორესთან, იმის მიუხედავად, რომ მოდალური მნიშვნელობიდან გადახრა ორივე რიცხვის შემთხვევაში ერთნაირია. გადახრის მასშტაბის შესაფასებლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ვარიაციის კოეფიციენტი:

$$CV^{(Pos)}(A) = \frac{\sigma^{(Pos)}(A)}{E^{(Pos)}(A)}; \quad (40)$$

გამოთვლების გამარტივების მიზნით, i -ური პუნქტიდან j -ურ პუნქტამდე გადაადგილების დროსთან დაკავშირებული არამკაფიოობის აღსაწერად, $CV^{(Pos)}(\tilde{x}_{ij})$ -ის ნაცვლად, ასევე შეიძლება გამოვიყენოთ შედარებით მარტივი ფორმულა:

$$V(\tilde{x}_{ij}) = \frac{\tilde{x}_{ij}^{(3)} - \tilde{x}_{ij}^{(1)}}{\tilde{x}_{ij}^{(2)}}; \quad (41)$$

საბოლოოდ, i -ური პუნქტიდან j -ურ პუნქტამდე გადაადგილების მიახლოებითი დროის (40) (ან (41)) მახასიათებელი მოვსჯით $[0; 1]$ ინტერვალში. ამისთვის, $CV^{(Pos)}(\tilde{x}_{ij})$ ელემენტები გავყოთ მათ მაქსიმუმზე $CV_{Max}^{(Pos)} \equiv \max\{CV^{(Pos)}(\tilde{x}_{ij})\}, i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$.

მაშასადამე, i -ური პუნქტიდან j -ურ პუნქტამდე გადაადგილების დროსთან დაკავშირებული არამკაფიოობა საბოლოოდ გამოვსახეთ ერთ სიდიდეში, რომელიც მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\delta_{ij} = \frac{CV^{(Pos)}(\tilde{x}_{ij})}{CV_{Max}^{(Pos)}}; \quad (42)$$

$i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$.

განვიხილოთ ჩაკეტილი მარშრუტი $M = \{n + 1, i_1, i_2, \dots, i_k, n + 1\}$ და მისი რკალები (გზები) დავნომროთ შემდეგი პრინციპით:

1	2	...	$k + 1$
$n + 1 \rightarrow i_1$	$i_1 \rightarrow i_2$...	$i_k \rightarrow n + 1$

M ჩაკეტილი მარშრუტის რკალები არის ქვესიმრავლე უნივერსალური სიმრავლისა, რომელიც წარმოადგენს პუნქტებს შორის არსებული გზების სიმრავლეს.

M ჩაკეტილი მარშრუტისთვის განვიხილოთ მისი რკალების შესაბამისი δ_{ij} და π_{ij} სიდიდეები, სადაც δ_{ij} სიდიდეები განისაზღვრება ფორმულა (42)-ით, ხოლო π_{ij} სიდიდეები პუნქტებს შორის გზებზე შეფერხებების არსებობის, ანუ პუნქტებს შორის ვერ გადაადგილების (ნორმირებული) შესაძლებლობითი განაწილებაა:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k + 1 \\ \delta_1 = \delta_{n+1, i_1} & \delta_2 = \delta_{i_1, i_2} & \dots & \delta_{k+1} = \delta_{i_k, n+1} \\ \pi_1 = \pi_{n+1, i_1} & \pi_2 = \pi_{i_1, i_2} & \dots & \pi_{k+1} = \pi_{i_k, n+1} \end{pmatrix}.$$

სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ჩვენი ამოცანისთვის ახლა უკვე შეგვიძლია ავაგოთ მეორე მიზნის ფუნქცია, რომელიც სინთეზს გაუკეთებს გზებზე არსებული შეფერხებებით გამოწვეულ უზუსტობასა და განუზღვრელობას, ანუ δ_{ij} და π_{ij} სიდიდეებს. ამ მიზნით, მთარგმნელების ამოცანის მსგავსად, ამ შემთხვევაშიც ვიყენებთ შოკეს ინტეგრალს (Choquet, 1954),

როგორც უზუსტობისა და განუზღვრელობის პოლუსების აგრეგაციის ერთ-ერთ საუკეთესო ოპერატორს (Kandel, 1978). როგორც ზემოთ ვნახეთ, შოკეს ინტეგრალს შეუძლია გაითვალისწინოს სიმრავლის ელემენტებს შორის არსებული დამოკიდებულებები, ჩვენს შემთხვევაში, ჩაკეტილ მარშრუტში შემავალ მომხმარებელთა შორის არსებული კორელაციები.

შევნიშნოთ, რომ M ჩაკეტილი მარშრუტის განხორციელება იმდენად რეალურია, რამდენადაც მცირეა როგორც δ_{ij} , ასევე π_{ij} სიდიდეები.

M ჩაკეტილი მარშრუტის ვერ განხორციელების (განუხორციელებადობის) მაჩვენებელი აღვნიშნოთ $F(M)$ -ით და განვმარტოთ, როგორც $\delta = \{\delta_{ij}\}$ ფუნქციის შოკეს ინტეგრალი $\pi = \{\pi_{ij}\}$ შესაძლებლობითი განაწილების შესაბამისი შესაძლებლობის ზომის (აღვნიშნოთ g_π -ით) მიმართ, M ჩაკეტილი მარშრუტის რკალების სიმრავლეზე:

$$\begin{aligned} F(M) &= (C) \int_{A(M)} \delta dg_\pi = \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \delta_i^* [Pos(A_i^*(M)) - Pos(A_{i+1}^*(M))] = \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \delta_i^* [\max_{l=\overline{i,k+1}} \{\pi_l^*\} - \max_{l=\overline{i+1,k+1}} \{\pi_l^*\}], \end{aligned} \quad (43)$$

სადაც $A(M) = \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$ წარმოადგენს M ჩაკეტილი მარშრუტის რკალების სიმრავლეს, $A^*(M) = \{a_1^*, a_2^*, \dots, a_{k+1}^*\}$ არის $A(M)$ სიმრავლის ელემენტების იმგვარი გადანაცვლება, რომელიც არაკლებადობით ალაგებს δ ფუნქციის $\delta_i^* \equiv \delta(a_i^*)$ მნიშვნელობებს, $A_i^*(M) \equiv \{a_i^*, a_{i+1}^*, \dots, a_{k+1}^*\}$, $A_{k+2}^*(M) \equiv \emptyset$, $\max_{l=\overline{k+2,k+1}} \{\pi_l^*\} \equiv 0$.

განვიხილოთ ყველა დასაშვებ ჩაკეტილ მარშრუტთა სიმრავლე $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$. მისი ნებისმიერი $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ ქვესიმრავლე შეგვიძლია დავახასიათოთ $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ბულის ვექტორით:

$$x_j = \begin{cases} 0, & M_j \notin \mathcal{M}' \\ 1, & M_j \in \mathcal{M}' \end{cases}$$

$j = 1, 2, \dots, m$.

\mathcal{M}' მარშრუტების ვერ განხორციელების ჯამური მახასიათებელი განვმარტოთ, როგორც:

$$F(\mathcal{M}') = \max_{j=1,m} \{F(M_j) \cdot x_j\}. \quad (44)$$

მაშასადამე, \mathcal{M}' მარშრუტების ვერ განხორციელების ჯამური მახასიათებელი განიმარტება როგორც მასში შემავალი M_j , $j = 1, 2, \dots, m$; მარშრუტების ვერ განხორციელების მახასიათებლების მაქსიმუმი.

ცხადია, \mathcal{M}' მარშრუტების ჯამური მანძილი შეგვიძლია დავთვალოთ ფორმულით:

$$D(\mathcal{M}') = \sum_{j=1}^m D(M_j)x_j, \quad (45)$$

სადაც $D(M_j)$ წარმოადგენს $M_j = \{n+1, i_1^j, i_2^j, \dots, i_{l_j}^j, n+1\}$, $i_s^j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $s = 1, 2, \dots, l_j$; $1 \leq l_j \leq n$, ჩაკეტილი მარშრუტის სიგრძეს:

$$D(M_j) = d_{n+1, i_1^j} + \sum_{s=1}^{l_j-1} d_{i_s^j, i_{s+1}^j} + d_{i_{l_j}^j, n+1}, \quad (46)$$

d_{ij} კი მანძილია i -ური პუნქტიდან j -ურ პუნქტამდე.

ახლა შეგვიძლია საბოლოო სახით ჩამოვყალიბოთ სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ჩვენი ამოცანა, როგორც დაყოფის ბიკრიტერიული ამოცანა:

$$f_1 = \sum_{j=1}^m D(M_j)x_j \rightarrow \min \quad (47)$$

(ჯამური მანძილის მინიმიზაცია)

$$f_2 = \max_{j=1, \dots, m} \{F(M_j)x_j\} \rightarrow \min \quad (48)$$

(ვერ განხორციელების მინიმიზაცია, ანუ განხორციელებადობის მაქსიმიზაცია)

პირობებით:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (49)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

სადაც $a_{ij} = 1$, როდესაც i -ური მომხმარებელი მიეკუთვნება M_j მარშრუტს, საწინააღმდეგო შემთხვევაში კი $a_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$;

$$D(M_j) \leq D;$$

$$Q(M_j) \equiv \sum_{s=1}^{l_j} P_s \leq Q; \quad (50)$$

$$j = 1, 2, \dots, m;$$

აღსანიშნავია, რომ სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანის დაყვანა დაყოფის ამოცანაზე სიახლეს არ წარმოადგენს და მსგავსი მიდგომა ხშირად გვხვდება სამეცნიერო ლიტერატურაში (Ananiashvili, Gvaberidze, Machaidze, & Tsintsadze, 1986; Renaud, Boctor, & Laporte, 1996; Baldacci, Christofides, & Mingozzi, 2008; Ropke & Cordeau, 2009).

3.2.2. სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის აგებული ამოცანის ამოხსნა

სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანების სირთულიდან, მათი ხანგრძლივი ისტორიიდან და პრაქტიკული გამოყენების სიმრავლიდან გამომდინარე, სხვადასხვა მკვლევართა მიერ დროთა განმავლობაში შეიქმნა არაერთი მეთოდი, რომელიც აღნიშნული ამოცანების მიახლოებით თუ ზუსტად გადაჭრის საშუალებას იძლევა (Cordeau, Laporte, Savelsbergh, & Vigo, 2007). ზუსტი მეთოდები, ძირითადად, შტოების და საზღვრების მიდგომას ეფუძნება და გამოიყენება შედარებით პატარა ზომის სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანების ამოსახსნელად. პრაქტიკამ აჩვენა, რომ ზოგადად, სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანები გაცილებით რთული ამოსახსნელია, ვიდრე კომივოიაჟერის ამოცანა. თუ რამდენიმე ასეული პუნქტის შემცველი კომივოიაჟერის ამოცანის გადაჭრა დღეს პრობლემას აღარ წარმოადგენს, სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანების ამოხსნის საუკეთესო ზუსტი მეთოდები იშვიათად თუ ართმევენ თავს პრაქტიკულ პრობლემებს, რომლებშიც დაახლოებით ასი პუნქტი (მომხმარებელი) გვხვდება. ამიტომ, თანამედროვე სისტემები, რომლებიც შექმნილია სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის პრობლემების გადასაჭრელად, უფრო ხშირად ეფუძნება ევრისტიკულ მიდგომებს და აგენერირებენ ოპტიმალურთან მეტ-ნაკლებად მიახლოებულ ამონახსნებს.

სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანების ევრისტიკული ალგორითმები ზოგადად შეგვიძლია დავყოთ ორ ძირითად ჯგუფად: კლასიკური ევრისტიკული ალგორითმები,

რომლებიც 1960 - 1990 წლებში შეიქმნა-განვითარდა და მეტავერისტიკული ალგორითმები, რომლებიც, ძირითადად, 2000-იანი წლებიდან ვითარდება (Laporte, Gendreau, Potvin, & Semet, 2000; Laporte, 2009).

დღეს მარშრუტების აგების და გაუმჯობესების ხშირად გამოყენებადი პროცედურები ძირითადად პირველ კლასს მიეკუთვნებიან. ეს ალგორითმები ამონახსნის ძიების პროცესში ყველა დასაშვები ამონახსნის შედარებით მცირე ნაწილს განიხილავენ, მაგრამ გამოირჩევიან სწრაფქმედებით და ხშირად იძლევიან საკმაოდ კარგი ხარისხის ამონახსნებს. ასევე მარტივია მათი გაფართოება რეალურ ამოცანებში არსებული შეზღუდვების გათვალისწინებით. ამიტომ ეს ალგორითმები ხშირად გამოიყენება გავრცელებულ კომერციულ სისტემებში.

მეტავერისტიკული ალგორითმებში კი ხდება დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლიდან გარკვეული კრიტერიუმით შერჩეული არეების დეტალური ძიება. ჩვეულებრივ, ამ მიდგომით მიღებული ამონახსნების ხარისხი გაცილებით აღემატება კლასიკური ევრისტიკული ალგორითმებით მიღებული ამონახსნების ხარისხს, თუმცა დროის თვალსაზრისით მეტ დანახარჯებს მოითხოვენ. გარდა ამისა, როგორც წესი, ეფექტური ძიების ლოგიკა ამოცანის ტიპზეა დამოკიდებული და მისი გაფართოება დამატებითი შეზღუდვების გათვალისწინებით არც ისე მარტივია. შინაარსობრივად, მეტავერისტიკული ალგორითმები კლასიკური ევრისტიკული ალგორითმების გაუმჯობესების პროცედურების დახვეწას ახდენენ.

მრავალკრიტერიუმისანი სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანების ალგორითმები ასევე კლასიფიცირდება იმის მიხედვით, თუ როგორ ხდება ამონახსნის ძიებისას მიზნის ფუნქციების სინთეზი. ამ ჭრილში, მრავალკრიტერიუმისანი სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანების გადაჭრის მეთოდები შეიძლება დავაჯგუფოთ სამ ძირითად კატეგორიად (Jozefowicz, Semet, & Talbi, 2008): 1. სკალარული მეთოდები, 2. პარეტო-მეთოდები და 3. მეთოდები, რომლებიც არ მიეკუთვნება არც სკალარულ და არც პარეტო მეთოდებს. სკალარული მეთოდები, წრფივი შეწონვის ანალოგიური მათემატიკური გარდაქმნებით, აერთიანებს მიზნის ფუნქციებს და შემდეგ განიხილავს ერთკრიტერიუმისანი ამოცანას. პარეტო-მეთოდები პარეტო-დომინირების ცნების გამოყენებით ადარებს და აფასებს ამონახსნებს. მეთოდების მესამე ჯგუფში კი მიზნის ფუნქციები ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად განიხილება სხვადასხვა (ძირითადად, მეტავერისტიკული) ტექნიკების გამოყენებით.

სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის გადაჭრის ჩვენ მიერ დამუშავებული მეთოდი, პირველი კლასიფიკაციით, კლასიკური ევრისტიკების ოჯახს მიეკუთვნება, მეორე (მრავალკრიტერიუმისანი მეთოდების) კლასიფიკაციით კი - პარეტო-მეთოდებს. ჩვენს მიდგომაში შეგვიძლია გამოვყოთ ამონახსნების ძიების ორი ფაზა: რადგან ყველა შესაძლო მარშრუტის გენერირება შეუძლებელია მათი ძალიან დიდი რაოდენობიდან გამომდინარე, პირველ ფაზაში, გარკვეულ ევრისტიკულ მოსაზრებებზე დაყრდნობით, ვაგენერირებთ ე.წ. "იმედის მომცემ" მარშრუტებს (Ananiashvili, Gvaberidze, Machaidze, & Tsintsadze, 1986), რომლებიც უნდა იყვნენ დასაშვები მარშრუტების კარგი წარმომადგენლები, რადგან ამონახსნების აგება და მათგან ოპტიმალურის შერჩევა სწორედ მათგან მოხდება. მეორე ფაზაში კი ხდება დაყოფის ორკრიტერიუმისანი (47)-(48) ამოცანის გადაჭრა, ანუ აგებული მარშრუტების გამოყენებით, ყველა მომხმარებელთან ვიზიტი და მათთვის ტვირთის მიწოდება. მსგავს მიდგომას არც თუ ისე იშვიათად ვხვდებით სამეცნიერო ლიტერატურაში (Renaud, Boctor, & Laporte, 1996; Ropke & Cordeau, 2009).

დასაშვები მარშრუტების გენერირება

ცხადია, დასაშვები (იმედის მომცემი) მარშრუტების გენერირება სხვადასხვანაირად შეიძლება მოხდეს. აქ წარმოდგენილია ერთ-ერთი შესაძლო ვარიანტი, რომელიც მომხმარებელთა ადგილმდებარეობების და მათი მოთხოვნების ანალიზს ეფუძნება. თითოეული დასაშვები მარშრუტი ფორმირდება n -განზომილებიანი ბინარული ვექტორის სახით, რომლის i -ური კომპონენტი 1-ის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ეს მარშრუტი მოიცავს i -ურ მომხმარებელს.

დასაშვები მარშრუტების სიმრავლის აგება ორ ეტაპიანია:

ეტაპი #1. ინდივიდუალური მარშრუტების აგება

1. თითოეული $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ მომხმარებლისთვის აიგება ე.წ. “ინდივიდუალური მარშრუტი”, რომელიც, i -ურ მომხმარებელთან ერთად, შეიძლება მოიცავდეს:
 - a. მომხმარებლებს, რომლებიც ახლოს არიან განთავსებულნი i -ურ მომხმარებელთან ან საწყობთან;
 - b. მომხმარებლებს, რომლებიც განთავსებულნი არიან უმოკლეს გზაზე საწყობიდან i -ურ მომხმარებლამდე;

მარშრუტისთვის ახალი პუნქტების (მომხმარებლების) დამატება ხდება მანამ, სანამ არ დაირღვევა (50) შეზღუდვებიდან ერთ-ერთი მაინც;

ეტაპი #2. დასაშვები მარშრუტების სიმრავლის გაფართოება

1. გაფართოება #1. თუ არ ირღვევა (50) შეზღუდვები, დასაშვები მარშრუტების სიმრავლეს ემატება შემდეგი სახის მარშრუტები:
 - a. $(n + 1, i, n + 1)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;
 - b. $(n + 1, i, j, n + 1)$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$;
2. გაფართოება #2. დასაშვები მარშრუტების სიმრავლეს ემატება შემდეგი სახის მარშრუტები:
 - a. თითოეულ დასაშვებ მარშრუტში, გარდა $(n + 1, i, n + 1)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ტიპის მარშრუტებისა, ყველაზე დიდი მოთხოვნის მქონე მომხმარებლის შესაბამისი პუნქტი იცვლება მისი უახლოესი მეზობელი მომხმარებლების შესაბამისი პუნქტებით, ისე რომ არ დავარღვიოთ (50) შეზღუდვები;

შენიშვნა 1. რადგან დასაშვები მარშრუტების გენერირების დროს, სხვადასხვა ეტაპსა და საფეხურზე შეიძლება მოხდეს ერთიდაიგივე მარშრუტის აგება, მას შემდეგ, რაც ახალი დასაშვები მარშრუტი აიგება, ხდება მისი შედარება უკვე გენერირებულ მარშრუტებთან და, დამთხვევის შემთხვევაში, ხდება მისი გადაგდება.

შენიშვნა 2. თითოეული გენერირებული დასაშვები მარშრუტისთვის ხდება კომპიოიაჟერის ამოცანის ამოხსნა იმისთვის, რომ ვიპოვოთ მარშრუტში შემავალი პუნქტების ოპტიმალურად შემოვლის გზა. როგორც ცნობილია, კომპიოიაჟერის ამოცანა NP-რთულია, მაგრამ, პრაქტიკულ ამოცანებში, თითოეულ დასაშვებ მარშრუტში შემავალი პუნქტების რაოდენობა დიდი არ არის და თანამედროვე ტექნიკით და გამოთვლითი სიმძლავრეებით კომპიოიაჟერის ამგვარი ამოცანის სწრაფად ამოხსნა პრობლემას არ წარმოადგენს.

შენიშვნა 3. გაფართოება (1.a) იძლევა მინიმუმ ერთი დაყოფის არსებობის გარანტიას. მამასადამე, დაყოფის ამოცანის დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელი არ იქნება.

დასაშვები მარშრუტების გენერირება ხდება მანამ, სანამ მათი რაოდენობა არ გადააჭარბებს გარკვეულ, წინასწარ დაწესებულ ლიმიტს. პრაქტიკა აჩვენებს, რომ რეალური ამოცანებისთვის

ლიმიტის როლში $5n$ -ის აღება უკვე საკმარისია კარგი ამონახსნების მისაღებად (სადაც n მომხმარებელთა რაოდენობაა), თუმცა, თანამედროვე კომპიუტერული შესაძლებლობების გათვალისწინებით, შეგვიძლია გაცილებით დიდი ზღვარი დავაწესოთ და მეტი დასაშვები მარშრუტი დავაგენერიროთ.

დაყოფის ორკრიტერიუმისანი ამოცანის ამოხსნა ϵ -შეზღუდვათა მეთოდით

მთარგმნელების ამოცანის გადასაჭრელად ჩვენ გამოვიყენეთ შეწონილი ჯამით სკალარიზაციის (წრფივი ნახვევის) მეთოდი, რომლის ფარგლებშიც, ზოგადად, რამდენიმე მიზნის ფუნქციის წრფივი სკალარიზაციის გზით, მრავალკრიტერიუმისანი ოპტიმიზაციის ამოცანა დაიყვანება სხვადასხვა ერთკრიტერიუმისან ქვეამოცანებზე. მაგალითად, ორკრიტერიუმისანი ამოცანის შემთხვევაში, ვხსნით $\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2$, $\lambda \in [0, 1]$ ტიპის მიზნის ფუნქციის მქონე ქვეამოცანებს (λ -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის). აღნიშნული მიდგომა მარტივია, მაგრამ მას აქვს გარკვეული ნაკლოვანებები:

1. ზოგადად, შეწონილი ჯამით სკალარიზაციის მეთოდი არ იძლევა სრული პარეტო-ფრონტის (განსაზღვრება იხ. ქვემოთ) გენერირების გარანტიას (თუმცა ასევე უნდა აღინიშნოს, რომ ხშირად, პრაქტიკულ ამოცანებში, პარეტო-ოპტიმალური ამონახსნების რაოდენობა დიდია და არ არის აუცილებელი ყველა მათგანის გენერირება);
2. λ -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის მეთოდმა შეიძლება დააგენერიროს ერთიდაიგივე ამონახსნი, რაც მიდგომის არაეფექტურობაზე მიუთითებს (გამოთვლითი სიმძლავრეების ხარჯვის თვალსაზრისით);
3. მეთოდის გამოყენებისთვის, შეწონილი ჯამით ახალი მიზნის ფუნქციის აგებამდე აუცილებელია ყველა მიზნის ფუნქციის ნორმირება და საერთო (უგანზომილებო) სკალაში მოქცევა;

ყოველივე ზემოთაღნიშნულის გათვალისწინებით, მარშრუტიზაციის მრავალკრიტერიუმისანი ამოცანების გადასაჭრელად ჩვენ არჩევანი შევაჩერეთ ϵ -შეზღუდვათა ცნობილ მეთოდზე, რომელიც ერთ-ერთ საუკეთესო მიდგომად ითვლება (Bérubé, Gendreau, & Potvin, 2009) მსგავსი ამოცანებისთვის და მასზე დაფუძნებით შეექმენით ჩვენი ალგორითმის კიდევ რამდენიმე მოდიფიკაცია, რომელთაც ქვემოთ განვიხილავთ. აღნიშნული მეთოდი მრავალკრიტერიუმისანი ამოცანისთვის აგენერირებს ერთკრიტერიუმისან ამოცანებს ე.წ. " ϵ -შეზღუდვებით", ერთ-ერთი მიზნის ფუნქციის გარდა ყველა დანარჩენის შეზღუდვებში გადატანის გზით. აღნიშნული შეზღუდვების ზედა საზღვარი განისაზღვრება ϵ -ვექტორით, რომლის ვარირებით, თეორიულად, შესაძლებელია სრული პარეტო-ფრონტის გენერირება. თუმცა პრაქტიკაში, გენერირებული ქვეამოცანების დიდი რაოდენობის და ϵ -ვექტორით ვარირების ეფექტური სქემის განსაზღვრის სირთულეებიდან გამომდინარე, ზოგჯერ სრული პარეტო-ფრონტის გენერირება მაინც ვერ ხერხდება და საჭირო ხდება ევრისტიკული მიდგომების გამოყენება (Bérubé, Gendreau, & Potvin, 2009). მაგრამ, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, კონკრეტულად ჩვენ მიერ განხილული ტიპის ამოცანების შემთხვევაში, უფრო ზუსტად, ბიკრიტერიალური ოპტიმიზაციის ამოცანებისთვის, ϵ -შეზღუდვათა მეთოდს შეუძლია სრული პარეტო-ფრონტის გენერირება.

მრავალკრიტერიუმისანი ოპტიმიზაციის ამოცანების ამოსახსნელად ϵ -შეზღუდვათა მეთოდის გამოყენება, ზოგადად, ახალი არ არის. მაგალითისთვის შეგვიძლია დავასახელოთ ერგოტის და რაიანის 2000 წლის ნაშრომი (Ehrgott & Ryan, 2000). მავროტასის 2009 წლის ნაშრომში (Mavrotas, 2009) ავტორი წარმოგვიდგენს ϵ -შეზღუდვათა მეთოდის ეფექტურ იმპლემენტაციას

მრავალკრიტერიუმისანი ამოცანებისთვის და ასევე განიხილავს მეთოდებს, თუ როგორ შეგვიძლია გამოვიყენოთ სუსტად ეფექტური ამონახსნების გენერირების შემთხვევები. ჩვენ ε -შეზღუდვათა მეთოდი გამოვიყენეთ დაყოფის ორკრიტერიუმისანი ამოცანის გადაჭრისთვის, რაც, ჩვენი აზრით, სიახლეს წარმოადგენს აღნიშნული მეთოდის ამ მიმართულებით დაკონკრეტების და შესაბამისი სპეციფიკის გათვალისწინების თვალსაზრისით.

შემოვიღოთ რამდენიმე განსაზღვრება ერგოტის ნაშრომის (Ehrgott, 2005) მიხედვით და აღწეროთ ε -შეზღუდვათა მეთოდი დეტალურად. მრავალკრიტერიუმისანი ოპტიმიზაციის ამოცანებში (როგორც ვნახეთ, ხშირად, ფაზი-დაფარვის ამოცანები ბუნებრივად მრავალკრიტერიუმისანია) იშვიათად არის შესაძლებელი ისეთი ამონახსნ(ებ)ის პოვნა, რომელიც ერთდროულად ყველა მიზნის ფუნქციას ანიჭებს ოპტიმალურ (მაგალითად, მინიმალურ) მნიშვნელობას. ამიტომ, როგორც წესი, გვიწევს გარკვეული აზრით კომპრომისული ამონახსნ(ებ)ის პოვნა.

განვიხილოთ ორკრიტერიუმისანი მინიმიზაციის პრობლემა:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \rightarrow \min \\ x \in X,$$

სადაც X არის დაყოფის ამოცანის დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე, ანუ ისეთი x -ების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ (49) პირობებს.

განსაზღვრება 47. $x^* \in X$ წერტილს ეწოდება *პარეტო-ოპტიმალური (ეფექტური) ამონახსნი*, თუ არ არსებობს $x' \in X$ ისეთი, რომლისთვისაც $f_i(x') \leq f_i(x^*)$, $i = 1, 2$; და ერთი უტოლობა მაინც მკაცრია.

$P(X)$ -ით აღვნიშნოთ ყველა პარეტო-ოპტიმალურ ამონახსნთა სიმრავლე. Y -ით კი - კრიტერიალური სივრცე - X -ის სახე f ფუნქციის მიმართ $f: X \rightarrow R^2$.

განსაზღვრება 48. კრიტერიალური სივრცის $f^* = (f_1(x^*), f_2(x^*))$, $x^* \in P(X)$ წერტილს ეწოდება *არადომინირებული*. ყველა არადომინირებულ წერტილთა სიმრავლეს ეწოდება *პარეტო-ფრონტი* $P(Y) \equiv f(P(X))$.

განსაზღვრება 49. $x^* \in X$ ელემენტს ეწოდება *სუსტად ეფექტური ამონახსნი*, თუ არ არსებობს $x' \in X$, რომლისთვისაც $f_i(x') < f_i(x^*)$, $i = 1, 2$.

$S(X)$ -ით აღვნიშნოთ სუსტად ეფექტური ამონახსნების სიმრავლე. ცხადია, რომ $P(X) \subseteq S(X)$.

დეტალურად განვიხილოთ ε -შეზღუდვათა მეთოდი ჩვენი ამოცანისთვის. ბიკრიტერიალური ოპტიმიზაციის (მინიმიზაციის) პრობლემისთვის, მეთოდის არსი მდგომარეობს ორიდან ერთ-ერთი მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციაში მაშინ, როდესაც მეორე მიზნის ფუნქცია გადატანილია შეზღუდვებში, გარკვეული ε -პარამეტრით. ε -პარამეტრის ვარირებით და შედეგად მიღებული ქვეამოცანების ამოხსნით, ზოგადად ხდება სუსტად ეფექტური ამონახსნების გენერირება და თუ გენერირებული ამონახსნი ერთადერთია, მისი ეფექტურობა (პარეტო-ოპტიმალურობა) გარანტირებულია (Ehrgott, 2005; Bérubé, Gendreau, & Potvin, 2009). იმის მიხედვით, თუ რომელ მიზნის ფუნქციას გადავიტანთ შეზღუდვებში, შესაძლებელია მივიღოთ შემდეგი ქვეამოცანები:

$$f_i(x) \rightarrow \min \\ f_j(x) \leq \varepsilon_j \\ i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \quad x \in X;$$

ეს ქვეამოცანები აღვნიშნოთ $P_i(\varepsilon_j)$ -ით. მაშასადამე, ბიკრიტერიალური ამოცანისთვის გვაქვს ორი ქვეამოცანა: $P_1(\varepsilon_2)$ და $P_2(\varepsilon_1)$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ სამართლიანია შემდეგი ორი წინადადება:

წინადადება 1. თუ x^* წარმოადგენს $P_i(\varepsilon_j)$ ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს და ის ერთადერთია, მაშინ $x^* \in P(X)$.

მართლაც, თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს, რომ x^* წარმოადგენს $P_i(\varepsilon_j)$ ამოცანის ერთადერთ ოპტიმალურ ამონახსნს და $x^* \notin P(X)$, მაშინ არსებობს $x' \in X$ ისეთი, რომ სრულდება შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთი:

ა) $f_i(x') < f_i(x^*)$ და $f_j(x') < f_j(x^*)$;

ბ) $f_i(x') = f_i(x^*)$ და $f_j(x') < f_j(x^*)$;

გ) $f_i(x') < f_i(x^*)$ და $f_j(x') = f_j(x^*)$;

მაგრამ (ა) და (გ) პირობები ეწინააღმდეგება იმ ფაქტს, რომ x^* წარმოადგენს $P_i(\varepsilon_j)$ ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს, (ბ) პირობა კი იმ ფაქტს, რომ x^* ამონახსნი ერთადერთია.

როგორც შედეგი, ასევე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ:

წინადადება 2. თუ x^* წარმოადგენს $P_i(\varepsilon_j)$ ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს, მაშინ $x^* \in S(X)$.

ახლა კი განვიხილოთ ეფექტური ალგორითმი, რომელიც მთელრიცხვა მნიშვნელობებიანი მიზნის ფუნქციის მქონე ბიკრიტერიალური ამოცანებისთვის აგენერირებს პარეტო-ფრონტს. აღნიშნული ალგორითმით ხდება ε -შეზღუდვათა ამოცანების მიმდევრობის ამოხსნა, როდესაც ε -ის მნიშვნელობა მცირდება Δ კონსტანტით. მთელრიცხვა მნიშვნელობებიანი მიზნის ფუნქციის მქონე ამოცანების შემთხვევაში, $\Delta = 1$ კონსტანტური მნიშვნელობით მოქმედება იძლევა იმის გარანტიას, რომ არცერთი ამონახსნის გამოტოვება არ მოხდება. ალგორითმის კორექტულობა ნაჩვენებია ბერუბეს 2009 წლის ნაშრომში (Bérubé, Gendreau, & Potvin, 2009). აქვე შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში, თუ მიზნის ფუნქციას არ აქვს მთელრიცხვა მნიშვნელობები, შეგვიძლია 10^k ტიპის მამრავლის გამოყენებით ის ვაქციოთ ამგვარ მიზნის ფუნქციად.

ალგორითმის აღწერისთვის დაგვჭირდება კრიტერიალური სივრცის ორი მნიშვნელოვანი წერტილის განსაზღვრა. ამ წერტილებს იდეალური (f^I) და ნადირ (f^N) წერტილები ეწოდებათ:

განსაზღვრება 50. კრიტერიალური სივრცის $f^I = (f_1^I, f_2^I)$ წერტილს ეწოდება იდეალური წერტილი, თუ $f_1^I = \min_{f \in Y} f_1$ და $f_2^I = \min_{f \in Y} f_2$.

განსაზღვრება 51. კრიტერიალური სივრცის $f^N = (f_1^N, f_2^N)$ წერტილს ეწოდება ნადირ წერტილი, თუ $f_1^N = \min_{f \in Y} \{f_1 : f_2 = f_2^I\}$ and $f_2^N = \min_{f \in Y} \{f_2 : f_1 = f_1^I\}$.

იდეალური და ნადირ წერტილები განსაზღვრავენ ეფექტური ამონახსნების მნიშვნელობების ქვედა და ზედა ზღვარს შესაბამისად. განვიხილოთ ε -შეზღუდვათა ალგორითმი და მისი გრაფიკული ინტერპრეტაცია (იხ. ფიგურა 18).

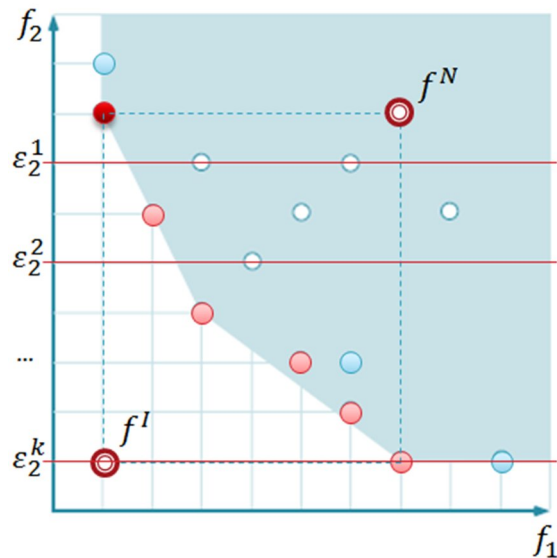
ალგორითმი. ϵ -შეზღუდვათა მეთოდი მთელირიცხვა მნიშვნელობებიანი მიზნის ფუნქციების მქონე ბიკრიტერიული ოპტიმიზაციის ამოცანებისთვის

01. ვიპოვოთ იდეალური და ნადირ წერტილები;
02. $i = 1, j = 2$ ან $i = 2, j = 1$;
03. $P(Y) = \{(f_i^l, f_j^N)\}$ და $\epsilon_j = f_j^N - \Delta$ ($\Delta = 1$);
04. სანამ $\epsilon_j \geq f_j^l$:
05. ამოვხსნათ ქვეამოცანა $P_i(\epsilon_j)$ შტოების და საზღვრების მეთოდით;
06. ოპტიმალური ამონახსნის მნიშვნელობა (f_i^*, f_j^*) დავამატოთ $P(Y)$ -ში;
07. $\epsilon_j = f_j^* - \Delta$;
08. საჭიროების შემთხვევაში $P(Y)$ -დან ამოვყაროთ დომინირებული წერტილები;

ალგორითმში ბოლო საფეხურის არსებობა საჭიროა, რადგან $P_i(\epsilon_j)$ ქვეამოცანისთვის შეიძლება არსებობდეს რამდენიმე ამონახსნი, j -ური მიზნის ფუნქციის განსხვავებული მნიშვნელობებით (იხ. ფიგურა 18). დომინირებული (სუსტად ეფექტური) ამონახსნების გაფილტრვის ორი ზოგადი მიდგომა არსებობს:

1. მას შემდეგ, რაც ალგორითმი დაასრულებს მუშაობას, გადავყაროთ სუსტად ეფექტური ამონახსნები და დავიტოვოთ პარეტო-ფრონტი;
2. ალგორითმის ყოველ იტერაციაზე ამოვხსნათ ორივე ქვეამოცანა $P_1(\epsilon_2)$ და $P_2(\epsilon_1)$. ჩენკონგის და ჰეიმის ნაშრომში (Chankong & Haimes, 1983) ნაჩვენებია, რომ ამ შემთხვევაში გენერირდება პარეტო-ოპტიმალური ამონახსნები.

მიუხედავად იმისა, რომ მეორე მიდგომა იძლევა სრული პარეტო ფრონტის გენერირების საშუალებას, როგორც წესი, მას მეტი გამოთვლები ჭირდება და ხშირად უპირატესობას პირველ მიდგომას ანიჭებენ.



ფიგურა 18. ϵ -შეზღუდვათა მეთოდის გრაფიკული ინტერპრეტაცია

გამომდინარე იქიდან, რომ ერთკრიტერიული ოპტიმიზაციის პრობლემების გადასაჭრელად ჩვენ ვიყენებთ შტოების და საზღვრების ტიპის ალგორითმს, ϵ -შეზღუდვათა მეთოდი იდეალურად ერგება მას, რადგან შტოების და საზღვრების პროცედურისთვის ახალი შეზღუდვის დამატება პრობლემას არ წარმოადგენს და ეს საძიებო ხეს ხშირად ამცირებს კიდევ.

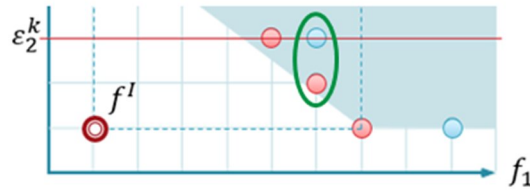
ε-შეზღუდვათა მეთოდზე დაყრდნობით, ჩვენს ალგორითმს გავუკეთეთ კიდევ რამდენიმე მოდიფიკაცია, რომელთა საშუალებით შესაძლებელია დაყოფა-დაფარვის მთელრიცხვა ბიკრიტერიული ამოცანებისთვის სრული პარეტო ფრონტის გენერირება (მოდიფიკაციების ნუმერაცია გრძელდება):

5. ალგორითმში ჩავდეთ მრავალკრიტერიუმიანობის მხარდაჭერა. კონკრეტულად, დავუშვით, რომ შეიძლება არსებობდეს ერთზე მეტი მიზნის ფუნქცია. თითოეულ მიზნის ფუნქციას კი შეესაბამება თავისი კოეფიციენტები. აქედან გამომდინარე, მივიღეთ გადაწყვეტილება, რომ თითოეული $S_j (j = \overline{1, n})$ სიმრავლისთვის შეგვესაბამებინა არა ერთი რიცხვი ($c_j, j = \overline{1, n}$ ფასი), არამედ რიცხვების მასივი (დინამიური სია, შეუზღუდავი ზომით). სწორედ ეს რიცხვები სხვადასხვა $S_j (j = \overline{1, n})$ სიმრავლისთვის წარმოადგენენ მიზნის ფუნქციების კოეფიციენტებს. სიის ელემენტების რაოდენობა მიზნის ფუნქციების რაოდენობის ტოლია, რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ, მაგალითად, ორი მიზნის ფუნქცია გვაქვს, თითოეულ $S_j (j = \overline{1, n})$ სიმრავლეს შეესაბამება ორელემენტოვანი სია, რომლის პირველი ელემენტი წარმოადგენს პირველი მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტს, ხოლო მეორე ელემენტი - მეორისას.
6. ასევე განვაზოგადეთ მიზნის ფუნქციებთან დაკავშირებული მიდგომა: თუ აქამდე ვგულისხმობდით, რომ მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა მიიღებოდა ამონახსნის შესაბამისი S_j სიმრავლეების ფასების შეკრებით, ახლა, მიზნის ფუნქციის აბსტრაგირების გზით, შევქმენით საშუალება, კონკრეტული ამოცანისთვის განისაზღვროს მიზნის ფუნქცია, როგორც $S_j (j = \overline{1, n})$ სიმრავლეებთან ასოცირებული რიცხვების (კოეფიციენტების) გარკვეული მათემატიკური ფუნქცია (არა მაინცდამაინც ჯამი). მიზნის ფუნქციის აბსტრაგირება მიიღწევა დაპროგრამების ენების ისეთი კონსტრუქციებით, როგორცაა ინტერფეისები ან დელეგატები. მაგალითისთვის, მიზნის ფუნქცია შეიძლება იყოს $S_j (j = \overline{1, n})$ სიმრავლეებთან ასოცირებული რიცხვების მაქსიმუმი ან მინიმუმი.
7. ამგვარად, არქიტექტურული თვალსაზრისით ჩვენი მონაცემთა სტრუქტურები გათვლილია მრავალკრიტერიუმიან პრობლემებზე სამუშაოდ. რაც შეეხება უშუალოდ ალგორითმს, რომელიც აღნიშნულ მონაცემთა სტრუქტურებს ეფუძნება, განვიხილოთ კიდევ ერთი მოდიფიკაცია კონკრეტულად ორკრიტერიუმიანი პრობლემების გადასაჭრელად. აღნიშნული მოდიფიკაცია აღწერილია ε-შეზღუდვათა მეთოდის ტერმინებში, როდესაც $i = 1, j = 2$.

ალგორითმი ε-MDLX - ორკრიტერიუმიანი მინიმალური დაყოფა ფილტრაციით

01. ვიპოვოთ f_1^I ;
 02. f_1^I -ის გამოყენებით ვიპოვოთ f_2^N ;
 03. ვიპოვოთ f_2^I ;
 04. $P(Y) = \{(f_1^I, f_2^N)\}$
 05. $\varepsilon_2 = f_2^N - \Delta (\Delta = 1)$;
 06. სანამ $\varepsilon_2 \geq f_2^I$;
 07. ამოვხსნათ ქვეამოცანა $P_1(\varepsilon_2)$;
 08. ოპტიმალური ამონახსნის მნიშვნელობა (f_1^*, f_2^*) დავამატოთ $P(Y)$ -ში;
 09. $\varepsilon_2 = f_2^* - \Delta$;
-

#01 სტრიქონისთვის დაგჭირდება ჩვენივე ალგორითმის ერთკრიტერიუმიანი ვერსიის გამოყენება პირველი მიზნის ფუნქციის მიმართ. შედეგად შეიძლება ვიპოვოთ რამდენიმე ამონახსნი (პირველი მიზნის ფუნქციის მიმართ ერთიდაიგივე, ხოლო მეორე მიზნის ფუნქციის მიმართ განსხვავებული მნიშვნელობებით - იხ. ფიგურა 19);



ფიგურა 19. სუსტად ეფექტური წერტილები ϵ -შეზღუდვათა მეთოდით მუშაობისას

#02 სტრიქონთან დაკავშირებით შევნიშნოთ, რომ f_1^N არ გვჭირდება, რადგან ϵ -შეზღუდვათა მეთოდში ციკლი მუშაობს f_2^N -დან f_2^I -მდე. რაც შეეხება f_2^N -ს, მისი მნიშვნელობის საპოვნელად, წინა საფეხურზე ნაპოვნი ამონახსნებიდან უნდა ავირჩიოთ ის წერტილი, რომელიც მინიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს მეორე მიზნის ფუნქციას. სწორედ ეს მნიშვნელობა იქნება f_2^N ;

#03 სტრიქონისთვის დაგჭირდება ჩვენივე ალგორითმის ერთკრიტერიუმიანი ვერსიის გამოყენება მეორე მიზნის ფუნქციის მიმართ;

#07 სტრიქონისთვის კი დაგჭირდება ჩვენივე ალგორითმის ერთკრიტერიუმიანი ვერსიის გამოყენება პირველი მიზნის ფუნქციის მიმართ, ამჯერად უკვე ეფსილონის (ϵ_2) გათვალისწინებით. ამ შემთხვევაშიც, შედეგად შეიძლება ვიპოვოთ რამდენიმე ამონახსნი და უნდა დავიტოვოთ ის, რომელიც მინიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს მეორე მიზნის ფუნქციას. სწორედ ეს ამონახსნი იქნება ოპტიმალური.

8. რაც შეეხება #07 სტრიქონში ϵ -ის გათვალისწინებას, აქ იგულისხმება ჩვენი ალგორითმის კიდევ ერთი მოდიფიკაცია, რომლის ფარგლებშიც, ერთი მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციის პარალელურად ხდება სხვა პირობების გათვალისწინება და ამ პირობის დარღვევის შემთხვევაში, ხდება პოტენციური ამონახსნის უგულვებელყოფა. ϵ -შეზღუდვათა მეთოდის შემთხვევაში, აღნიშნულ პირობად განიხილება მეორე მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობის ϵ_2 -ზე ნაკლებობა.
9. ალგორითმის განმარტებებიდან ჩანს, რომ ჩვენ მცირე მოდიფიკაცია გავუკეთეთ თვითონ ϵ -შეზღუდვათა მეთოდსაც, კერძოდ, მასში ჩავდეთ სუსტად ეფექტური ამონახსნების ფილტრაცია (იხ. განმარტებები #02 და #07 სტრიქონებთან დაკავშირებით: როდესაც ერთი მიზნის ფუნქციის ოპტიმიზაციისას ვპოულობთ რამდენიმე ამონახსნს, ერთმანეთს ვადარებთ მეორე მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობებს და ვიტოვებთ იმ ამონახსნ(ებ)ს, რომლებიც უკეთეს მნიშვნელობას ანიჭებენ ამ უკანასკნელს). აქედან გამომდინარე, ჩვენს ალგორითმში ϵ -შეზღუდვათა მეთოდის განხილული ალგორითმის #08 სტრიქონის შენარჩუნება საჭირო აღარ არის.

საბოლოოდ, მივიღეთ ეფექტური ალგორითმი ϵ -MDLX, რომელიც საშუალებას იძლევა, ϵ -შეზღუდვათა მეთოდის გამოყენებით სუსტად ამოვხსნათ დაყოფა-დაფარვის ბიკრიტერიული ამოცანები, ანუ ამ ამოცანებისთვის დავაგენეროთ სრული პარეტო ფრონტი. დასაშვები

მარშრუტების გენერირების შემდეგ, სწორედ ϵ -MDLX ალგორითმის გამოყენებით ხდება სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ჩვენ მიერ აგებული (47)-(50) ამოცანის ამოხსნა.

3.3. საილუსტრაციო მაგალითი

მთარგმნელების ამოცანის ანალოგიურად, განვიხილოთ სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანის საილუსტრაციო მაგალითი. აღნიშნული მაგალითის დეტალურად განხილვა ემსახურება ჩვენ მიერ შემოთავაზებული მეთოდის შესაძლებლობების დემონსტრირებას. რეალური საჭიროებებიდან წამოსული სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანები ხშირად უფრო დიდი განზომილებების მქონეა, თუმცა, ამ შემთხვევაში, ჩვენი მიზანი ალგორითმის სწრაფქმედების შეფასება არ არის. ჩვენ მიერ შემოთავაზებული MDLX ალგორითმის ეფექტურობაზე ოდნავ ქვემოთ ვისაუბრებთ.

იქიდან გამომდინარე, რომ სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანები არ კარგავენ აქტუალურობას, მათთვის შექმნილი და ინტერნეტში თავისუფლად ხელმისაწვდომია სატესტო მონაცემთა ბაზები, რომელთა გამოყენებით მეცნიერები წარმოაჩენენ ხოლმე მათ მიერ შემოთავაზებული მეთოდის თუ ალგორითმის ეფექტურობას. ჩვენც გადავწყვიტეთ, საილუსტრაციო მაგალითის ბაზისად სწორედ ერთ-ერთი ასეთი ამოცანა (Augerat, et al., 1998) შეგვერჩია. კონკრეტულად, განვიხილავთ ქსელს 18 მომხმარებლით და ერთი საწყობით.

აქვე შევნიშნოთ, რომ სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ფართოდ გავრცელებული სატესტო მაგალითების უმრავლესობა არის ა) სიმეტრიული და ბ) სრული გზებით (ანუ გრაფთა თეორიის ენაზე, სატრანსპორტო ქსელი მოცემულია სული გრაფის სახით). სიმეტრიულობა ნიშნავს, რომ ნებისმიერ ორ პუნქტს შორის არსებული გზა არ არის დამოკიდებული მიმართულებაზე, ანუ იმაზე, თუ რომელია ამ პუნქტებიდან საწყისი და რომელი საბოლოო წერტილი - ორივე შემთხვევაში ერთი მანძილი (და დრო) განიხილება, ანუ მანძილების მატრიცა დიაგონალის მიმართ სიმეტრიულია. გზების სისრულე კი ნიშნავს, რომ მოცემულია ნებისმიერ ორ პუნქტს შორის მანძილი, თუნდაც ამ პუნქტებს შორის არ არსებობდეს პირდაპირი გზა და მათ შორის გადაადგილება მხოლოდ სხვა პუნქტების გავლით იყოს შესაძლებელი. ასეთია, ჩვენ მიერ საილუსტრაციოდ შერჩეული მაგალითიც, თუმცა უნდა აღინიშნოს, რომ არც ჩვენ მიერ შემოთავაზებული მეთოდი და არც ჩვენ მიერ შექმნილი ალგორითმი არ მოითხოვს სატრანსპორტო ქსელის სიმეტრიულობას ან გზების სისრულეს.

ბაზისად აღებული მაგალითისთვის, რომელიც სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის კლასიკურ ამოცანას წარმოადგენს ტვირთამწეობის შეზღუდვით (CVRP), დავაგენერირეთ პუნქტებს შორის გადაადგილების მიახლოებითი დროების (სამკუთხა არამკაფიო რიცხვების), ასევე პუნქტებს შორის ვერ გადაადგილების შესაძლებლობების მატრიცა. პუნქტებს შორის გადაადგილების მიახლოებითი დროების მატრიცის გენერირება მოხდა პუნქტებს შორის არსებულ მანძილებზე დაყრდნობით, თუმცა პუნქტების თითოეული წყვილისთვის შემთხვევითი პრინციპით დაგენერირდა მანძილისა და მისი გავლისთვის საჭირო დროის (სამკუთხა არამკაფიო რიცხვის მოდალური მნიშვნელობის) პროპორციულობის კოეფიციენტი, ასევე შემთხვევითი პრინციპით დაგენერირდა უზუსტობა - სამკუთხა არამკაფიო რიცხვის მარცხენა და მარჯვენა რიცხვების გადახრა ცენტრალური რიცხვიდან. რაც შეეხება პუნქტებს შორის ვერ გადაადგილების, ანუ შეფერხების არსებობის შესაძლებლობების მატრიცას, მისი გენერირება სრულად შემთხვევითი პრინციპით მოხდა.

საილუსტრაციო მაგალითში მომხმარებელთა შესაბამისი პუნქტები დანომრილია 1-დან 18-ის ჩათვლით, ხოლო საწყობის შესაბამისი პუნქტის ნომერია 19. ცხრილი 8-ში მოცემულია მომხმარებელთა მოთხოვნები. ცნობილია სატრანსპორტო საშუალებების მაქსიმალური ტვირთამწეობა $Q = 100$ და ერთი მარშრუტის ფარგლებში გავლადი მაქსიმალური მანძილი $D = 200$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	30	16	23	11	31	15	28	14	8	7	14	19	11	26	17	6	15

ცხრილი 8. საილუსტრაციო მაგალითი #2 - მომხმარებელთა მოთხოვნები

ცხრილი 9 წარმოადგენს მანძილების (სიმეტრიულ) $\|d_{ij}\|_{n+1 \times n+1}$ მატრიცას.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2	15.00								
3	19.21	21.21							
4	11.66	26.17	21.10						
5	24.21	10.44	31.00	35.81					
6	12.08	7.28	25.08	23.71	12.81				
7	18.60	3.61	23.00	29.70	8.00	10.00			
8	20.88	17.00	7.81	26.31	25.50	22.67	17.72		
9	26.93	13.04	24.17	36.89	13.45	20.02	10.05	16.76	
10	7.07	15.65	12.21	12.08	26.00	16.00	18.87	15.03	25.00
11	18.87	33.30	25.32	7.21	43.01	30.89	36.80	31.62	43.60
12	16.16	24.74	9.49	13.00	35.17	26.02	27.51	16.64	31.40
13	32.65	18.36	37.48	44.20	8.49	21.26	15.23	31.02	15.52
14	17.00	28.64	15.81	9.22	39.00	28.44	31.76	22.83	36.80
15	30.61	15.62	32.28	41.73	9.00	20.62	12.04	25.32	9.06
16	27.31	23.85	10.05	31.02	31.62	29.73	24.17	7.07	21.00
17	31.06	29.53	12.08	32.76	37.64	35.00	30.08	12.53	27.02
18	18.79	8.94	29.83	30.41	7.28	6.71	9.22	25.94	18.38
19	13.89	19.24	32.56	22.02	23.09	12.04	22.02	32.45	32.06

	10	11	12	13	14	15	16	17	18
11	18.60								
12	10.05	16.03							
13	34.00	51.40	42.72						
14	13.00	10.05	6.32	46.96					
15	30.61	48.80	38.47	6.71	43.27				
16	20.88	35.36	19.42	36.22	25.71	30.02			
17	24.19	36.01	20.10	42.30	26.00	36.06	6.08		
18	22.20	37.59	32.06	15.26	34.93	16.12	32.76	38.47	
19	20.81	28.16	29.97	30.87	29.83	31.78	39.41	43.93	15.81

ცხრილი 9. საილუსტრაციო მაგალითი #2 - პუნქტებს შორის მანძილების მატრიცა

ცხრილი 10-ში მოცემულია პუნქტებს შორის გადაადგილების მიახლოებითი დროების $\|\tilde{\xi}_{ij}\|_{n+1 \times n+1}$ მატრიცა.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2	(12;16;20)								
3	(11;19;27)	(21;28;35)							
4	(10;13;16)	(29;37;45)	(15;24;33)						
5	(17;31;45)	(10;15;20)	(20;36;52)	(34;51;68)					
6	(13;16;19)	(5;8;11)	(21;35;49)	(21;27;33)	(9;14;19)				
7	(18;23;28)	(2;3;4)	(15;26;37)	(25;40;55)	(5;8;11)	(7;13;19)			
8	(13;25;37)	(11;20;29)	(7;9;11)	(28;38;48)	(21;37;53)	(21;30;39)	(11;18;25)		
9	(31;38;45)	(8;14;20)	(21;34;47)	(27;41;55)	(11;16;21)	(15;27;39)	(7;12;17)	(16;19;22)	
10	(5;7;9)	(13;17;21)	(10;14;18)	(14;17;20)	(15;28;41)	(11;16;21)	(17;22;27)	(9;15;21)	(17;30;43)
11	(17;21;25)	(37;47;57)	(24;36;48)	(6;7;8)	(40;53;66)	(30;37;44)	(21;41;61)	(25;43;61)	(35;51;67)
12	(15;23;31)	(21;28;35)	(10;12;14)	(8;15;22)	(38;48;58)	(20;34;48)	(22;36;50)	(13;19;25)	(20;37;54)
13	(22;33;44)	(18;24;30)	(28;45;62)	(33;49;65)	(8;11;14)	(23;28;33)	(14;18;22)	(26;42;58)	(11;16;21)
14	(16;23;30)	(22;34;46)	(10;16;22)	(8;13;18)	(21;41;61)	(25;41;57)	(25;45;65)	(19;24;29)	(25;38;51)
15	(23;33;43)	(12;21;30)	(37;47;57)	(39;60;81)	(7;9;11)	(14;22;30)	(10;15;20)	(21;29;37)	(11;13;15)
16	(16;29;42)	(20;30;40)	(9;12;15)	(27;39;51)	(34;47;60)	(26;34;42)	(21;31;41)	(5;8;11)	(22;31;40)
17	(24;35;46)	(22;38;54)	(8;14;20)	(30;38;46)	(24;43;62)	(20;39;58)	(32;42;52)	(11;14;17)	(16;27;38)
18	(19;27;35)	(7;10;13)	(24;30;36)	(29;43;57)	(6;8;10)	(6;8;10)	(6;10;14)	(27;35;43)	(13;19;25)
19	(13;17;21)	(14;22;30)	(30;38;46)	(17;30;43)	(23;28;33)	(13;17;21)	(26;32;38)	(38;48;58)	(27;40;53)

	10	11	12	13	14	15	16	17	18
11	(16;20;24)								
12	(8;13;18)	(10;18;26)							
13	(31;43;55)	(47;69;91)	(30;45;60)						
14	(12;17;22)	(6;10;14)	(5;7;9)	(46;59;72)					
15	(25;32;39)	(32;53;74)	(24;44;64)	(6;9;12)	(46;60;74)				
16	(18;22;26)	(23;39;55)	(12;22;32)	(37;52;67)	(17;25;33)	(30;40;50)			
17	(20;26;32)	(19;36;53)	(20;29;38)	(39;57;75)	(14;26;38)	(29;38;47)	(5;7;9)		
18	(19;23;27)	(40;53;66)	(31;43;55)	(9;16;23)	(22;43;64)	(15;21;27)	(32;48;64)	(38;47;56)	
19	(20;29;38)	(29;38;47)	(19;32;45)	(24;33;42)	(24;29;34)	(25;40;55)	(37;55;73)	(34;44;54)	(12;22;32)

ცხრილი 10. საილუსტრაციო მაგალითი #2 - პუნქტებს შორის გადაადგილების მიახლოებითი დროების მატრიცა

და ბოლოს, ცხრილი 11-ში მოცემულია გზებზე არსებული შეფერხებების გამო პუნქტებს შორის ვერ გადაადგილების შესაძლებლობების $\|\pi_{ij}\|_{n+1 \times n+1}$ მატრიცა.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1																		
2	0.9																	
3	0.7	0.9																
4	0.3	1	0.2															
5	0.2	0.3	0.5	0.7														
6	0.8	0.8	0	0.5	0.7													
7	0.3	0.6	0	1	0.6	0.7												
8	0.2	0.4	0.7	0.1	0.8	0.7	0.2											
9	0.2	0.4	0	0.2	0.4	0	0	0.5										
10	0.9	0.6	0.9	0	0.9	0.8	0.7	1	0.8									
11	0.5	0.7	0	0.5	1	0.9	0.1	0.1	0.5	0.4								
12	1	0.2	0	0.3	0.2	0.7	0.4	0.9	0.1	0.6	0.4							
13	0.9	0.7	0.1	0.4	0.2	0.7	0.2	0.3	0.8	0.8	0.1	0.8						
14	0.9	0.2	0	0.4	0.7	0.2	0.2	0.8	0.5	0.7	0.7	0.7	0.5					
15	0.4	1	0	0.1	0.2	0.6	0.5	0.4	0.7	0.3	0.6	0.3	0.7	0.3				
16	0.4	0.4	0.2	0.2	1	0.1	0.8	0.2	0.1	0.2	0.2	0.5	0.7	0.2	0.3			
17	0.3	0.5	0.1	0.6	0.4	0.7	0.2	0.8	0	0.7	0.9	0.1	0.6	0.4	1	0.2		
18	0.8	0.4	0.4	0.4	0.6	1	0	0.9	0.3	0.5	0.3	0.1	0.5	0.2	0.1	0.8	0.3	
19	0.4	0.5	0.7	0.9	0.2	0.7	0.7	0.3	0.5	0.1	0.2	0.4	0.2	0.4	0.3	0.7	1	0.3

ცხრილი 11. საილუსტრაციო მაგალითი #2 - პუნქტებს შორის ვერ გადაადგილების შესაძლებლობების მატრიცა

ზემოთ განხილული ალგორითმის გამოყენებით, მოცემული მაგალითისთვის დავაგენერირეთ $5n = 5 \cdot 18 = 90$ ცალი დასაშვები (იმედის მომცემი) მარშრუტი, სადაც n მომხმარებელთა რაოდენობაა. დასაშვებ მარშრუტებს შევუსაბამოთ აღნიშვნები $PR_1, PR_2, \dots, PR_{90}$. აღნიშნული 90 ცალი დასაშვები მარშრუტი გვამღევს 2767 ცალ განსხვავებულ დაყოფას, ანუ სატრანსპორტო საშუალებებით მომხმარებელთა სხვადასხვანაირად შემოვლის სქემას. თითოეულ სქემას შეესაბამება მიზნის ფუნქციების საკუთარი მაჩვენებლები.

პირველ რიგში, ამოცანა ამოვხსნათ ცალ-ცალკე, თითოეული მიზნის ფუნქციის მიმართ, როგორც ერთკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანები.

თუ ამოცანას ამოვხსნით მხოლოდ პირველი მიზნის ფუნქციის (f_1 - ჯამური მანძილის მინიმიზაცია) მიმართ, მივიღებთ 1 ოპტიმალურ ამონახსნს, რომელიც S_{D1} -ით აღვნიშნოთ:

ამონახსნი	ჩაკეტილი მარშრუტები	ჯამური მანძილი	ვერ განხორციელების მაჩვენებელი
S_{D1}	$PR_1: 19 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 3 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_6: 19 \rightarrow 18 \rightarrow 5 \rightarrow 13 \rightarrow 15 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 19$ $PR_{61}: 19 \rightarrow 4 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{68}: 19 \rightarrow 1 \rightarrow 19$	288	0.798571

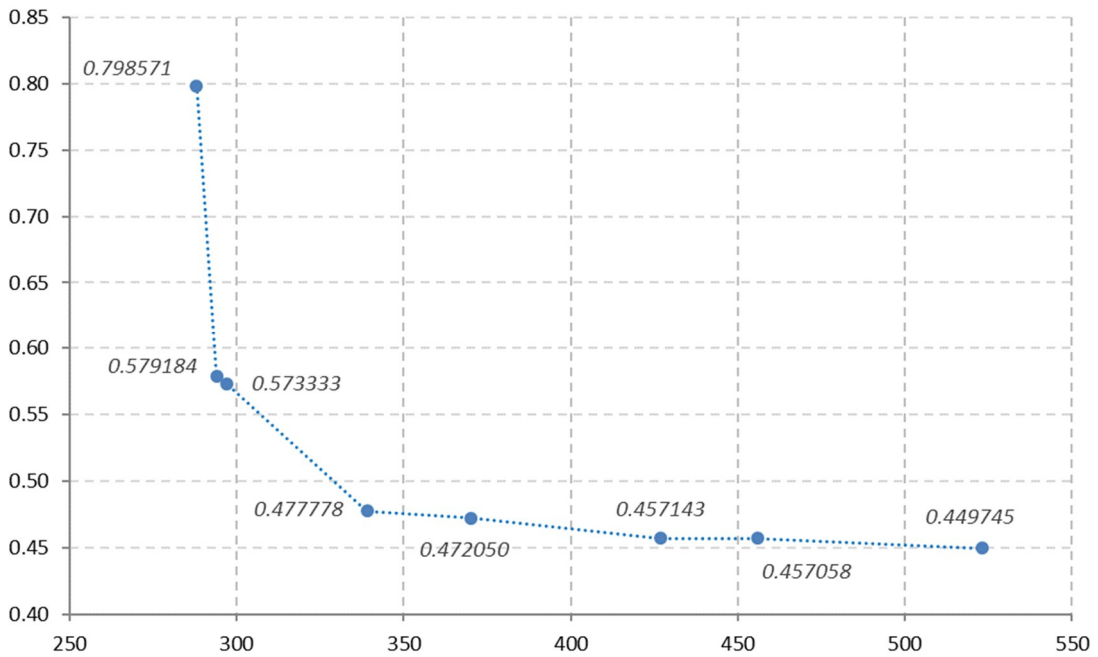
თუ ამოცანას ამოვხსნით მხოლოდ მეორე მიზნის ფუნქციის (f_2 - განხორციელებადობის მაქსიმიზაცია) მიმართ, მივიღებთ 6 ოპტიმალურ ამონახსნს, რომლებსაც შევუსაბამოთ $S_{F1}, S_{F2}, \dots, S_{F6}$ აღნიშვნები:

ამონახსნი	ჩაკეტილი მარშრუტები	ჯამური მანძილი	ვერ განხორციელების მაჩვენებელი
S_{F1}	$PR_{15}: 19 \rightarrow 15 \rightarrow 9 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_{17}: 19 \rightarrow 7 \rightarrow 13 \rightarrow 19$ $PR_{32}: 19 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 19$ $PR_{34}: 19 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{82}: 19 \rightarrow 14 \rightarrow 19$ $PR_{83}: 19 \rightarrow 12 \rightarrow 19$ $PR_{84}: 19 \rightarrow 18 \rightarrow 19$ $PR_{86}: 19 \rightarrow 3 \rightarrow 19$	523	0.449745
S_{F2}	$PR_{13}: 19 \rightarrow 13 \rightarrow 19$ $PR_{15}: 19 \rightarrow 15 \rightarrow 9 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_{32}: 19 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 19$ $PR_{34}: 19 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{82}: 19 \rightarrow 14 \rightarrow 19$ $PR_{83}: 19 \rightarrow 12 \rightarrow 19$ $PR_{84}: 19 \rightarrow 18 \rightarrow 19$ $PR_{85}: 19 \rightarrow 7 \rightarrow 19$ $PR_{86}: 19 \rightarrow 3 \rightarrow 19$	561	0.449745
S_{F3}	$PR_{13}: 19 \rightarrow 13 \rightarrow 19$ $PR_{15}: 19 \rightarrow 15 \rightarrow 9 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_{34}: 19 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{39}: 19 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 19$ $PR_{74}: 19 \rightarrow 5 \rightarrow 18 \rightarrow 19$ $PR_{79}: 19 \rightarrow 11 \rightarrow 19$ $PR_{82}: 19 \rightarrow 14 \rightarrow 19$ $PR_{83}: 19 \rightarrow 12 \rightarrow 19$ $PR_{86}: 19 \rightarrow 3 \rightarrow 19$	565	0.449745
S_{F4}	$PR_{15}: 19 \rightarrow 15 \rightarrow 9 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_{34}: 19 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{58}: 19 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 13 \rightarrow 19$ $PR_{74}: 19 \rightarrow 5 \rightarrow 18 \rightarrow 19$ $PR_{79}: 19 \rightarrow 11 \rightarrow 19$ $PR_{82}: 19 \rightarrow 14 \rightarrow 19$ $PR_{83}: 19 \rightarrow 12 \rightarrow 19$ $PR_{85}: 19 \rightarrow 7 \rightarrow 19$ $PR_{86}: 19 \rightarrow 3 \rightarrow 19$	571	0.449745
S_{F5}	$PR_{13}: 19 \rightarrow 13 \rightarrow 19$ $PR_{15}: 19 \rightarrow 15 \rightarrow 9 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_{34}: 19 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{39}: 19 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 19$ $PR_{79}: 19 \rightarrow 11 \rightarrow 19$ $PR_{81}: 19 \rightarrow 5 \rightarrow 19$ $PR_{82}: 19 \rightarrow 14 \rightarrow 19$ $PR_{83}: 19 \rightarrow 12 \rightarrow 19$ $PR_{84}: 19 \rightarrow 18 \rightarrow 19$ $PR_{86}: 19 \rightarrow 3 \rightarrow 19$	597	0.449745
S_{F6}	$PR_{15}: 19 \rightarrow 15 \rightarrow 9 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_{34}: 19 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{58}: 19 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 13 \rightarrow 19$ $PR_{79}: 19 \rightarrow 11 \rightarrow 19$ $PR_{81}: 19 \rightarrow 5 \rightarrow 19$ $PR_{82}: 19 \rightarrow 14 \rightarrow 19$ $PR_{83}: 19 \rightarrow 12 \rightarrow 19$ $PR_{84}: 19 \rightarrow 18 \rightarrow 19$ $PR_{85}: 19 \rightarrow 7 \rightarrow 19$ $PR_{86}: 19 \rightarrow 3 \rightarrow 19$	603	0.449745

თუ ამოცანას ამოვხსნით, როგორ ბიკრიტერიულ ოპტიმიზაციის პრობლემას, მივიღებთ 8 პარეტო-ოპტიმალურ ამონახსნს, რომლებსაც შევუსაბამოთ $S_{DF1}, S_{DF2}, \dots, S_{DF8}$ აღნიშვნები:

ამონახსნი	ჩაკეტილი მარშრუტები	ჯამური მანძილი	ვერ განხორციელების მაჩვენებელი
$S_{DF1} = S_{D1}$	$PR_1: 19 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 3 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_6: 19 \rightarrow 18 \rightarrow 5 \rightarrow 13 \rightarrow 15 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 19$ $PR_{61}: 19 \rightarrow 4 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{68}: 19 \rightarrow 1 \rightarrow 19$	288	0.798571
S_{DF2}	$PR_1: 19 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 3 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_{34}: 19 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{39}: 19 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 19$ $PR_{49}: 19 \rightarrow 9 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 18 \rightarrow 19$	294	0.579184
S_{DF3}	$PR_7: 19 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 14 \rightarrow 11 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 19$ $PR_{23}: 19 \rightarrow 3 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 19$ $PR_{34}: 19 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{49}: 19 \rightarrow 9 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 18 \rightarrow 19$	297	0.573333
S_{DF4}	$PR_{18}: 19 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 3 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_{32}: 19 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 19$ $PR_{34}: 19 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{66}: 19 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 19$ $PR_{84}: 19 \rightarrow 18 \rightarrow 19$	339	0.477778
S_{DF5}	$PR_{12}: 19 \rightarrow 5 \rightarrow 15 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 19$ $PR_{18}: 19 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 3 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_{51}: 19 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 10 \rightarrow 13 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{79}: 19 \rightarrow 11 \rightarrow 19$ $PR_{84}: 19 \rightarrow 18 \rightarrow 19$	370	0.472050
S_{DF6}	$PR_{18}: 19 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 3 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_{35}: 19 \rightarrow 9 \rightarrow 19$ $PR_{50}: 19 \rightarrow 5 \rightarrow 15 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 19$ $PR_{51}: 19 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 10 \rightarrow 13 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{79}: 19 \rightarrow 11 \rightarrow 19$ $PR_{84}: 19 \rightarrow 18 \rightarrow 19$	427	0.457143
S_{DF7}	$PR_{17}: 19 \rightarrow 7 \rightarrow 13 \rightarrow 19$ $PR_{18}: 19 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 3 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_{30}: 19 \rightarrow 15 \rightarrow 19$ $PR_{32}: 19 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 19$ $PR_{34}: 19 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{35}: 19 \rightarrow 9 \rightarrow 19$ $PR_{84}: 19 \rightarrow 18 \rightarrow 19$	456	0.457058
$S_{DF8} = S_{F1}$	$PR_{15}: 19 \rightarrow 15 \rightarrow 9 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_{17}: 19 \rightarrow 7 \rightarrow 13 \rightarrow 19$ $PR_{32}: 19 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 19$ $PR_{34}: 19 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{82}: 19 \rightarrow 14 \rightarrow 19$ $PR_{83}: 19 \rightarrow 12 \rightarrow 19$ $PR_{84}: 19 \rightarrow 18 \rightarrow 19$ $PR_{86}: 19 \rightarrow 3 \rightarrow 19$	523	0.449745

ფიგურა 20-ზე მოცემულია პარეტო ფრონტის გრაფიკული გამოსახულება.



ფიგურა 20. საილუსტრაციო მაგალითი #2 - პარეტო ფრონტი

განხილული საილუსტრაციო მაგალითი ცხადჰყოფს, რომ რეალურ ამოცანებში, როდესაც გზებზე გადაადგილების დრო პროგნოზირებადია მხოლოდ გარკვეული სიზუსტით, გზებზე მოსალოდნელია შეფერხებები და მნიშვნელოვანია მომხმარებლებისთვის ტვირთის დროული მიწოდება, აუცილებელია ექსპერტების მიერ მოცემული ან სხვა წყაროდან მიღებული სუბიექტური ინფორმაციის გათვალისწინება და კლასიკური მათემატიკური მოდელების საიმედოობის გაზრდა. როგორც განხილული მაგალითის პარეტო-ამონახსნების ცხრილიდან ჩანს, მხოლოდ ჯამური მანძილის მინიმიზაციის შემთხვევაში ვიღებთ S_{DF1} ამონახსნს, რომლის ვერ განხორციელების მაჩვენებელი 0.80-ია. ეს მაჩვენებელი იმდენად ახლოს არის 1-თან, რომ საეჭვოა მისი რეალურად განხორციელება (დაბალია განხორციელების სარწმუნოება). ამავე დროს, S_{DF2} ამონახსნი ძალიან მცირედით ზრდის ჯამურ მანძილს (288-დან 294-მდე) და მისი ვერ განხორციელების მაჩვენებელი 0.58-ია, რაც იმას ნიშნავს, რომ მისი განხორციელება გაცილებით რეალურია. ჯამური მანძილის გაზრდის ხარჯზე შესაძლებელია მარშრუტების ვერ განხორციელების მაჩვენებლის კიდევ უფრო შემცირება (ანუ განხორციელებადობის მაჩვენებლის გაზრდა). მაგალითად, S_{DF4} ამონახსნის ჯამური მანძილი 339-ია, ხოლო მისი ვერ განხორციელების მაჩვენებელია 0.48. მოსალოდნელია, რომ გადაწყვეტილების მიმღები პირი აირჩევს იმგვარ კომპრომისულ ამონახსნს, რომლის განხორციელება რეალური იქნება. უფრო მეტიც, თუ მომხმარებლებისთვის ტვირთების გარანტირებულად და დროულად მიწოდება კრიტიკულად მნიშვნელოვანია, გადაწყვეტილების მიმღებმა პირმა შეიძლება აირჩიოს ამონახსნი, რომლის განხორციელებადობის მაჩვენებელი მაქსიმალურია (განხილული მაგალითის შემთხვევაში ამგვარი ამონახსნია S_{DF8}), მიუხედავად იმისა, რომ მისი განხორციელება სხვა ამონახსნებზე ძვირი დაჯდება.

მოდელის დახვეწა

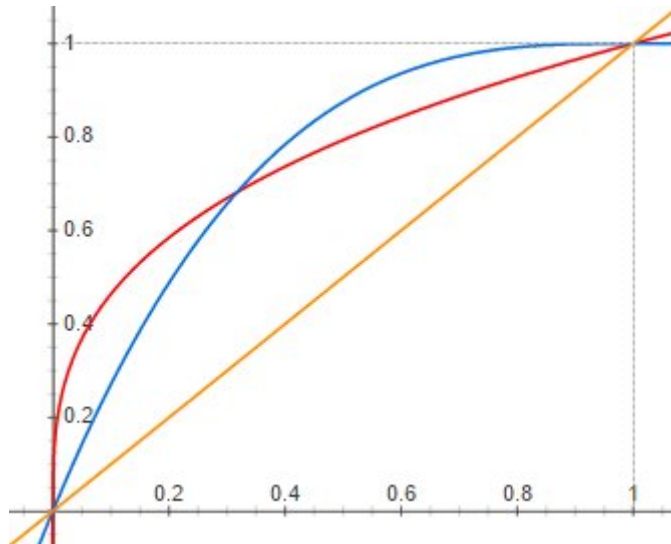
როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მარშრუტის (ვერ) განხორციელებადობის მაჩვენებელი ახდენს არასრული ინფორმაციის ორი პოლუსის - უზუსტობისა და განუზღვრელობის სინთეზს.

უზუსტობის პოლუსი ეფუძნება პუნქტებს შორის გზებზე გადაადგილების მიახლოებით დროებს და ითვალისწინებს უზუსტობის, მოსალოდნელი გადახრის ზომას (δ_{ij}). განუზღვრელობის პოლუსი კი ასახავს პუნქტებს შორის გზებზე შეფერხების არსებობის შესაძლებლობებს (π_{ij}). მაშასადამე, მარშრუტის (ვერ) განხორციელებადობის მაჩვენებელი დამოკიდებულია ორივე პარამეტრზე - $\delta_{ij}, \pi_{ij}, i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$.

როგორც ზემოთ მოცემული მსჯელობით, ასევე განხილულ საილუსტრაციო მაგალითზე დაკვირვებით, შეიძლება დავასკვნათ, რომ შესაძლებელია ერთმა მარშრუტმა, რომლის გზებზე მოსალოდნელია შეფერხებები, "აჯობოს" მეორე მარშრუტს, რომლის გზებზეც ნაკლებად მოსალოდნელია შეფერხებები, იმის გამო, რომ პირველი მარშრუტის გზებზე გადაადგილების დროებთან დაკავშირებულია ნაკლები უზუსტობა. უხეშად რომ ვთქვათ, δ_{ij} სიდიდეების სიმცირემ შეიძლება "გადაწონოს" π_{ij} სიდიდეების მაღალი მაჩვენებლები. სწორედ ამას ნიშნავს განხილული ორი პარამეტრის სინთეზი.

ისმის კითხვა: შეიძლება თუ არა, რომ მოდელი იმგვარად განზოგადდეს, რომ არასრული ინფორმაციის პოლუსებს - უზუსტობასა და განუზღვრელობას განსხვავებული წონები მივანიჭოთ კონკრეტული ამოცანის საჭიროებებიდან გამომდინარე? პასუხი დადებითია. დავუშვათ, ჩვენთვის მნიშვნელოვანია, რომ გზებზე გადაადგილების შესაძლებლობა იყოს მაღალი და თუ გადაადგილების განხორციელების შანსი დიდია, შედარებით ნაკლებ მნიშვნელობას ვანიჭებთ იმ ფაქტს, რამდენად დიდი იქნება გადახრა გადაადგილებისთვის საჭირო მოსალოდნელი დროდან. მაშასადამე გვსურს, რომ მარშრუტის (ვერ) განხორციელებადობის მაჩვენებელი მეტად იყოს დამოკიდებული გზებზე დაზიანებების არსებობა / არარსებობაზე, ვიდრე გზებზე არსებული შეფერხებებით გამოწვეულ დროით ცდომილებებზე (დაგვიანებაზე). ამისთვის საკმარისია $\delta_{ij}, i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ (42) სიდიდეებს მოვდოთ ფუნქცია, რომელიც გაზრდის (ან შეამცირებს) მათ რიცხვით მნიშვნელობებს. ჩვენი მოთხოვნიდან გამომდინარე, რადგან გვსურს, რომ მარშრუტის ვერ განხორციელებადობის მაჩვენებელი ნაკლებად იყოს დამოკიდებული გადაადგილების დროის უზუსტობაზე, საჭიროა, გამოვიყენოთ ფუნქცია, რომელიც გაზრდის $\delta_{ij}, i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ სიდიდეებს, ამრიგად მათი რიცხვითი მნიშვნელობების სიმცირე ნაკლებად "გადაწონის" გზებზე ვერ გადაადგილების მაღალ შესაძლებლობებს.

ფუნქცია, რომელიც გაამლიერებს ან შეასუსტებს $\delta_{ij}, i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ სიდიდეების გავლენას მარშრუტის განხორციელებადობის მაჩვენებელზე, მრავალნაირად შეგვიძლია განვსაზღვროთ (იხ. ფიგურა 21). შეგვიძლია მეტი აქცენტი გავაკეთოთ 0-ის მახლობლობაში არსებულ δ_{ij} სიდიდეებზე და მათი მნიშვნელობები უფრო გაგზარდოთ, შედარებით უცვლელი კი 1-ის მახლობლობაში არსებული δ_{ij} სიდიდეები დავტოვოთ (შესაბამისი ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია წითელი ფერით). ან პირიქით - აქცენტი 1-ის მახლობლობაში არსებულ δ_{ij} სიდიდეებზე გავაკეთოთ (შესაბამისი ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია ლურჯი ფერით). ცხადია, ასევე შესაძლებელია თანაბარი აქცენტების გაკეთებაც.



ფიგურა 21. გამაძლიერებელი ფუნქციების მაგალითები

ფიგურა 21-ზე წითლად მოცემულია $f(x) = \sqrt[3]{x}$, ხოლო ლურჯად $f(x) = 1 - (1 - x)^3$ ფუნქციის გრაფიკი. ხარისხის მაჩვენებლის ცვლილებით შესაძლებელია გრაფიკზე მოცემული წირების ფორმის ცვლილება.

თუ ჩვენ მიერ განხილული საილუსტრაციო მაგალითისთვის გამოვიყენებთ $f(x) = \sqrt[5]{x}$ ფუნქციას δ_{ij} სიდიდეების მიმართ, ანუ პუნქტებს შორის გადაადგილების მიახლოებითი დროის უზუსტობის მაჩვენებლად δ_{ij} სიდიდეების ნაცვლად გამოვიყენებთ $\delta'_{ij} = \sqrt[5]{\delta_{ij}}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ სიდიდეებს, რაც იმას ნიშნავს, რომ შევასუსტებთ უზუსტობის გავლენას მარშრუტის ვერ განხორციელების მაჩვენებელზე, მივიღებთ შემდეგ პარეტო-ოპტიმალურ ამონახსნებს:

ამონახსნი	ჩაკეტილი მარშრუტები	ჯამური მანძილი	ვერ განხორციელების მაჩვენებელი
S_{DF1}	$PR_1, PR_6, PR_{61}, PR_{68}$	288	0.878733
S_{DF2}	$PR_1, PR_{34}, PR_{39}, PR_{49}$	294	0.673940
S_{DF3}	$PR_7, PR_{23}, PR_{34}, PR_{49}$	297	0.672605
S_{DF4}	$PR_{18}, PR_{32}, PR_{34}, PR_{66}, PR_{84}$	339	0.648520
S_{DF5}	$PR_{13}, PR_{18}, PR_{24}, PR_{39}, PR_{79}$	373	0.644533
S_{DF6}	$PR_{17}, PR_{18}, PR_{30}, PR_{32}, PR_{34}, PR_{35}, PR_{84}$	456	0.641441

როგორც ვხედავთ, ნაწილობრივ შეიცვალა პარეტო-ოპტიმალური ამონახსნები - ამოვარდა 3 ცალი ამონახსნი და დაემატა 1 ახალი. აღნიშნული სწორედ იმით არის გამოწვეული, რომ მეტი წონა მიენიჭა პუნქტებს შორის გადაადგილების მაღალ შესაძლებლობას და ამიტომ შეირჩა ის მარშრუტები, რომლებიც ამ თვალსაზრისით ჯობნიან დანარჩენებს.

სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის საილუსტრაციო მაგალითის განხილვა დავასრულოთ მისი მოდიფიცირებული ვერსიის ამოხსნით. მოდიფიცირებული მაგალითი ალბათ უფრო ახლოს იქნება რეალურ სიტუაციასთან, რადგან შემთხვევითი პრინციპით არ მოხდება შემავალი მონაცემების გენერაცია. დეტალურად აღვწეროთ მოდიფიცირებული მაგალითის შემავალი მონაცემები: სატრანსპორტო საშუალებების მაქსიმალური ტვირთამწეობა Q და ერთი მარშრუტის

ფარგლებში გავლადი მაქსიმალური მანძილი D დავტოვეთ უცვლელი. ასევე უცვლელი დარჩა მომხმარებელთა მოთხოვნები (ცხრილი 8) და პუნქტებს შორის მანძილების მატრიცა (ცხრილი 9). პუნქტებს შორის გადაადგილების მიახლოებითი დროების მატრიცაც (ცხრილი 10) უცვლელი დავტოვეთ, რადგან ის მანძილების მატრიცაზე დაყრდნობით იყო გენერირებული, გარკვეული შემთხვევითობის ფაქტორების გათვალისწინებით. მანძილებისა და დროების მსგავსი მატრიცების მიღება თავისუფლად არის შესაძლებელი თანამედროვე ფართოდ გავრცელებული სისტემების გამოყენებით. მაგალითად, Google Maps პროდუქტის პროგრამული ინტერფეისების (Google Maps Directions API) საშუალებით შეგვიძლია მივიღოთ როგორც ნებისმიერ ორ პუნქტს შორის მანძილი, ასევე კონკრეტული ტიპის სატრანსპორტო საშუალებით (ან ფეხით) ამ მანძილის გავლისთვის საჭირო მიახლოებითი დროის შეფასება. საილუსტრაციო მაგალითში შევცვალეთ მხოლოდ პუნქტებს შორის ვერ გადაადგილების შესაძლებლობების მატრიცა (ცხრილი 11): ვიგულისხმეთ, რომ ჩვეულებრივ სიტუაციებში, როდესაც გზებზე არ ფიქსირდება დაზიანებები, მატრიცა ნულოვანია (მისი ყველა ელემენტი 0-ის ტოლია), რაც იმას ნიშნავს, რომ გადაადგილება ყველა გზაზე შესაძლებელია მაქსიმალური მაჩვენებლით (უმაღლესი სარწმუნოებით).

აქვე აღვნიშნოთ, რომ ზოგჯერ სასარგებლოა არა ნულოვანი, არამედ გარკვეული მინიმალური შესაძლებლობითი დონის (მაგალითად, 0.1 ან 0.01) მქონე მატრიცის აღება იმისთვის, რომ არ მოხდეს პუნქტებს შორის გადაადგილების მიახლოებითი დროების შესახებ ინფორმაციის უგულვებელყოფა (შესაძლებლობების ნულოვანი მატრიცის აღების შემთხვევაში, (43) შოკვის ინტეგრალში განულებდა ყველა შესაკრები შესაძლებლობების ნულოვანების გამო).

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ექსტრემალურ სიტუაციებში, როდესაც გზებზე ფიქსირდება შეფერხებები და დაზიანებები, ექსპერტს მოუწევს კორექტირება გაუკეთოს პუნქტებს შორის ვერ გადაადგილების შესაძლებლობების მატრიცის მხოლოდ იმ ელემენტებს, რომელთა შესაბამის გზებთან დაკავშირებით მიღებულია ინფორმაცია დაზიანებების შესახებ, ან არსებობს ეჭვი, რომ გზებზე შეიძლება ფიქსირდებოდეს დაზიანებები. დავუშვათ, რომ დაზიანებები დაფიქსირდა ცენტრალურ მაგისტრალზე, ანუ სწორედ იმ გზაზე, რომლის გამოყენებითაც მიიღწევა უმოკლესი მანძილის გავლით ტვირთების დარიგება (პირველი მიზნის ფუნქციის შესაბამისად). დაზიანდა სულ რამდენიმე მონაკვეთი, გზები მე-6 და მე-2, მე-14 და მე-11, მე-18 და მე-5, მე-19 (საწყობსა) და მე-4 პუნქტებს შორის. შედეგად, ექსპერტმა კორექტირება გაუკეთა ცხრილი 11-ის 4 ელემენტს (სიმეტრიული მატრიცის შემთხვევაში) და მივიღეთ პუნქტებს შორის ვერ გადაადგილების შესაძლებლობების მატრიცა, რომელიც მოცემულია ცხრილი 12-ში.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1																		
2	0.1																	
3	0.1	0.1																
4	0.1	0.1	0.1															
5	0.1	0.1	0.1	0.1														
6	0.1	1	0.1	0.1	0.1													
7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1												
8	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1											
9	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1										
10	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1									
11	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1								
12	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1							
13	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1						
14	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1	0.1	0.1					
15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1				
16	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1			
17	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1		
18	0.1	0.1	0.1	0.1	1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	
19	0.1	0.1	0.1	1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

ცხრილი 12. მოდიფიცირებული საილუსტრაციო მაგალითი #2 - პუნქტებს შორის ვერ გადაადგილების შესაძლებლობების მატრიცა

მოდიფიცირებული მაგალითის ამოხსნის შემთხვევაში მივიღებთ შემდეგ პარეტო-ოპტიმალურ ამონახსნებს:

ამონახსნი	ჩაკეტილი მარშრუტები	ჯამური მანძილი	ვერ განხორციელების მაჩვენებელი
S_{DF1}	$PR_1: 19 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 3 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_6: 19 \rightarrow 18 \rightarrow 5 \rightarrow 13 \rightarrow 15 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 19$ $PR_{61}: 19 \rightarrow 4 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{68}: 19 \rightarrow 1 \rightarrow 19$	288	0.887302
S_{DF2}	$PR_1: 19 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 3 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 19$ $PR_{34}: 19 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{39}: 19 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 19$ $PR_{49}: 19 \rightarrow 9 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 18 \rightarrow 19$	294	0.824898
S_{DF3}	$PR_7: 19 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 14 \rightarrow 11 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 19$ $PR_{23}: 19 \rightarrow 3 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 19$ $PR_{34}: 19 \rightarrow 6 \rightarrow 19$ $PR_{49}: 19 \rightarrow 9 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 18 \rightarrow 19$	297	0.819048
S_{DF4}	$PR_5: 19 \rightarrow 10 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow 3 \rightarrow 12 \rightarrow 14 \rightarrow 19$ $PR_{20}: 19 \rightarrow 11 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 18 \rightarrow 19$ $PR_{22}: 19 \rightarrow 2 \rightarrow 19$ $PR_{38}: 19 \rightarrow 5 \rightarrow 13 \rightarrow 15 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 19$	306	0.093074

როგორც ვხედავთ, მხოლოდ მანძილის თვალსაზრისით ოპტიმალური ამონახსნი (S_{DF1}) თითქმის განუხორციელებადია (განუხორციელებადობის ინდექსია 0.9). ამავე დროს, S_{DF4}

ამონახსნი, რომელიც ჯამური მანძილის მაჩვენებლით ახლოს არის S_{DF1} ამონახსნთან, თითქმის გარანტირებულად განხორციელებადია, რადგან მისი განუხორციელებადობის ინდექსია 0.1.

სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანების განხილვა შეგვიძლია დავასრულოთ დასკვნით, რომ რეალურ ამოცანებში, როდესაც საქმე გვაქვს არა იდეალურ, არამედ რეალურ პირობებთან, როდესაც გზებზე არსებობს სხვადასხვა ტიპის შეფერხებები (დატვირთულობის თუ დაზიანებების გამო), ოპტიმალური გადაწყვეტილებების მიღებისთვის მნიშვნელოვანია აღნიშნული რეალობის ამსახველი ინფორმაციის გათვალისწინება. ხშირად, ეს ინფორმაცია არასრული, არაზუსტი და სუბიექტურია, რადგან შეუძლებელია მოვლენების განვითარების ზუსტად პროგნოზირება, ან ხელმისაწვდომი არ არის გარკვეული ინფორმაცია. მაგალითად, რა დრო დაჭირდება გზის გავლას, როგორი იქნება გზების დატვირთულობა, როგორი იქნება მეტეოროლოგიური პირობები, შეძლებს თუ არა სატრანსპორტო საშუალება გზის დროულად გავლას, როდესაც ვიცით, ან არსებობს ეჭვი, რომ გზა დაზიანებულია. ჩვენ მიერ შემოთავაზებული მოდელი მსგავს კითხვებს აჯგუფებს ინფორმაციის არასრულყოფილების ორ პოლუსში: უზუსტობის პოლუსი აღწერს არაზუსტ ინფორმაციას, ხოლო განუზღვრელობის პოლუსი იმ განუსაზღვრელობას, რომელიც ინფორმაციის დანაკლისით არის გამოწვეული. უზუსტობა და განუზღვრელობა ასევე თან ახლავს ექსპერტთა მიერ არასრული ინფორმაციის სუბიექტური შეფასებებით შევსებას. ჩვენ მიერ შემოთავაზებული მოდელი ითვალისწინებს არასრული ინფორმაციის ორივე მახასიათებელს, როგორც უზუსტობას, ასევე განუზღვრელობას, სინთეზს უკეთებს მათ და კლასიკურ ამოცანას უმატებს ახალი კრიტერიუმის სახით იმისთვის, რომ ძირითად კრიტერიუმთან ერთად მოხდეს ინფორმაციის დანაკლისით გამოწვეული უზუსტობისა და განუზღვრელობის მინიმიზაცია და მოდელის სანდოობის გაზრდა.

თავი 4. პროგრამული უზრუნველყოფა

4.1. პროგრამული ბიბლიოთეკა და ინტერაქტიული სისტემა

ნაშრომში განხილული მოდელები და ალგორითმები დაპროგრამდა და შემოწმდა .Net ტექნოლოგიების გამოყენებით. ობიექტზე ორიენტირებულ მეთოდოლოგიაზე დაყრდნობით შეიქმნა უნივერსალური პროგრამული ბიბლიოთეკა, რომლის გამოყენება შესაძლებელია სხვადასხვა ტიპის ამოცანების გადაჭრის მიზნით შექმნილ სისტემებში. პროგრამული ბიბლიოთეკა მოიცავს:

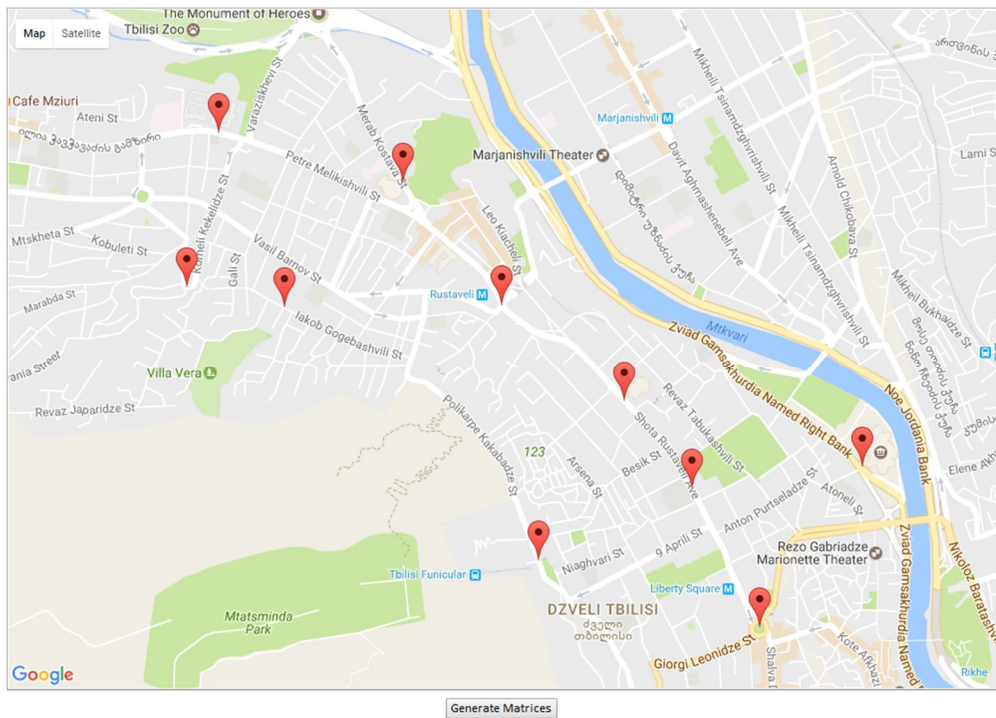
1. საბაზისო მონაცემთა სტრუქტურებს და მათთვის განსაზღვრულ ოპერაციებს. მაგალითისთვის შეგვიძლია დავასახელოთ კლასები, რომლებიც წარმოადგენენ სიმრავლეებს, არამკაფიო სიმრავლეებს, არამკაფიო რიცხვებს, მათზე განსაზღვრულ ოპერაციებს; კლასები, რომლებიც რეალიზაციას უკეთებს ჩვენი მიდგომების ძირითად მათემატიკურ აპარატს, რომელიც მოიცავს მონოტონურ ზომებს, შოკესა და სუჯენოს ინტეგრალებს;
2. ძირითად ალგორითმებს, რომელშიც, დაფარვა-დაყოფის ამოცანებისთვის, ცენტრალური ადგილი უჭირავს ჩვენ მიერ მოდიფიცირებულ DLX ალგორითმს (MDLX). სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანებისთვის ასევე რეალიზებულია დასაშვები (იმედის მომცემი) მარშრუტების გენერაციის, გრაფში უმოკლესი გზების ძიების, და კომივოიაჟერის ამოცანის გადაჭრის ალგორითმები;
3. დამხმარე ინსტრუმენტებს, როგორცაა შემავალი და გამომავალი მონაცემების წაკითხვისა და ჩაწერის ადაპტერ-კლასები, რომელთა საშუალებით უნიფიცირებულია შემავალი და გამომავალი მონაცემების სტრუქტურა და ფორმატი. შედეგად, ალგორითმები არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ საიდან ხდება მათთვის მონაცემების მიწოდება, ან სად უნდა მოხდეს შედეგების გამოტანა (მაგალითად, ტექსტურ ფაილში, Microsoft Office Excel-ის ფაილში, მონაცემთა ბაზაში, თუ სხვაგან);

პროგრამული ბიბლიოთეკის თითოეული კომპონენტის ლოგიკა მთლიანად ენკაფსულირებულია ამ კომპონენტში, ამრიგად ეს კომპონენტები არ არიან დამოკიდებული ბიბლიოთეკის სხვა კომპონენტების იმპლემენტაციის დეტალებზე. შედეგად, შესაძლებელია თითოეული კომპონენტის მოდიფიკაცია ან მთლიანად ჩანაცვლება ისე, რომ შესაცვლელი არ გახდება პროგრამული ბიბლიოთეკის სხვა კომპონენტები. მაგალითად, შესაძლებელია სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანებისთვის დასაშვები მარშრუტების გენერაციის ალგორითმის ცვლილება ისე, რომ ამას არავითარი გავლენა არ ექნება კომივოიაჟერის ამოცანის გადაჭრის ან დაფარვა-დაყოფის გენერაციის მოდულებზე.

გარდა პროგრამული ბიბლიოთეკისა, ნაშრომში განხილული ორივე ამოცანა-მაგალითისთვის შევქმენით სისტემები, რომელთა საშუალებით შესაძლებელია შესაბამისი ამოცანების გადაჭრა. სწორედ ამ სისტემების გამოყენებით ჩატარდა ჩვენ მიერ შემოთავაზებული მიდგომების კვლევა, მოდელებისა და ალგორითმების ტესტირება.

როგორც კანდიდატების (მთარგმნელების) შერჩევის, ასევე სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანის შესაბამისი სისტემის ძირითად შემავალ მონაცემებს წარმოადგენენ მატრიცები, პირველი ამოცანისთვის - ერთი (კანდიდატების მიერ კომპეტენციების დაფარვის), მეორესთვის კი - სამი (პუნქტებს შორის მანძილების, პუნქტებს შორის გადაადგილების

მიხლოებითი დროების და პუნქტებს შორის ვერ გადაადგილების შესაძლებლობების). აღსანიშნავია, რომ პრაქტიკული მოსაზრებებიდან გამომდინარე, სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანისთვის ასევე შეიქმნა დამატებითი მოდული, რომლის საშუალებით შესაძლებელია შემავალი მონაცემების ძირითადი ნაწილის ავტომატურად გენერირება. კონკრეტულად, შეიქმნა მოდული, რომელიც მომხმარებელს საშუალებას აძლევს, ინტერაქტიულ რუკაზე (Google Maps) მონიშნოს მომხმარებელთა და საწყობის შესაბამისი პუნქტები, შემდეგ კი მოდული, Google Maps Directions API-ის გამოყენებით, ავტომატურად აგენერირებს პუნქტებს შორის მანძილების და გადაადგილების მიხლოებითი დროების მატრიცებს (იხ. მაგალითი ფიგურა 22-ზე).



	4 Freedom Square	1-11 Shota Rustaveli Ave	22 Daniel Chonqadze St	Zviad Gamsakhurdia Named Right Bank	25 Shota Rustaveli Ave	Dzmebi Kakabadzeebi St	35 Merab Kostava St	1 Ilia Chavchavadze Avenue	34 Korneli Kekelidze St	46 Iakob Gogebashvili St
4 Freedom Square	0	701	1283	2233	1094	1824	2247	3484	4149	2739
1-11 Shota Rustaveli Ave	524	0	946	1532	393	1123	1546	2783	3448	2339
22 Daniel Chonqadze St	1543	1019	0	2572	1151	1394	2142	2408	2193	1456
Zviad Gamsakhurdia Named Right Bank	1274	1394	2119	0	1100	2144	2628	3375	4040	3421
25 Shota Rustaveli Ave	917	393	1033	1550	0	730	1153	2390	3055	1946
Dzmebi Kakabadzeebi St	1509	985	1468	2013	592	0	1140	2377	1412	925
35 Merab Kostava St	2626	2103	2422	3578	1709	1158	0	1237	1902	1421
1 Ilia Chavchavadze Avenue	2704	2180	2365	3628	1787	1235	838	0	665	908
34 Korneli Kekelidze St	3174	2650	2231	4098	2257	1705	1308	641	0	775
46 Iakob Gogebashvili St	2470	1946	1456	3910	1553	961	1121	886	736	0

	4 Freedom Square	1-11 Shota Rustaveli Ave	22 Daniel Chonqadze St	Zviad Gamsakhurdia Named Right Bank	25 Shota Rustaveli Ave	Dzmebi Kakabadzeebi St	35 Merab Kostava St	1 Ilia Chavchavadze Avenue	34 Korneli Kekelidze St	46 Iakob Gogebashvili St
4 Freedom Square	0	2 min	4 min	5 min	2 min	4 min	5 min	7 min	10 min	9 min
1-11 Shota Rustaveli Ave	1 min	0	4 min	3 min	1 min	2 min	3 min	6 min	8 min	7 min
22 Daniel Chonqadze St	5 min	5 min	0	8 min	5 min	4 min	7 min	8 min	7 min	5 min
Zviad Gamsakhurdia Named Right Bank	3 min	4 min	8 min	0	3 min	3 min	4 min	5 min	8 min	8 min
25 Shota Rustaveli Ave	1 min	1 min	4 min	4 min	0	2 min	2 min	5 min	8 min	6 min
Dzmebi Kakabadzeebi St	3 min	2 min	5 min	5 min	1 min	0	3 min	6 min	7 min	5 min
35 Merab Kostava St	6 min	5 min	8 min	6 min	4 min	3 min	0	3 min	5 min	6 min
1 Ilia Chavchavadze Avenue	5 min	4 min	8 min	6 min	4 min	3 min	2 min	0	3 min	4 min
34 Korneli Kekelidze St	7 min	6 min	7 min	8 min	6 min	5 min	4 min	2 min	0	3 min
46 Iakob Gogebashvili St	7 min	6 min	4 min	8 min	5 min	4 min	4 min	4 min	3 min	0

ფიგურა 22. Google Maps-ის ინტერაქტიული რუკით მონაცემების გენერირება

4.2. ექსპერიმენტული შედეგები

შექმნილი პროგრამული უზრუნველყოფა შემოწმდა არაერთ ხელოვნურად შედგენილ და რეალურ მაგალითზე. ხელოვნურად შედგენილი მაგალითებით ტესტირების მიზანს წარმოადგენდა განსაკუთრებული შემთხვევების სწორად დამუშავების შემოწმება, რეალური მაგალითებით ტესტირებისას კი - ჩვენი მეთოდის და ალგორითმის ეფექტურობის გამოცდა. რეალური მაგალითების წყაროს წარმოადგენდა ინტერნეტში ხელმისაწვდომი სატესტო მონაცემთა ბაზები, ასევე ნაშრომზე მუშაობის პარალელურად განხორციელებული სამეცნიერო პროექტების ფარგლებში განხილული რეალური ამოცანები.

ინტერნეტში თავისუფლად ხელმისაწვდომი სატესტო მონაცემთა ბაზები აერთიანებს სხვადასხვა ტიპის და განზომილებების მქონე ამოცანების შესაბამის მონაცემებს. ამოცანების ნაწილისთვის ასევე მოცემულია ოპტიმალური ამონახსნები, ან მოცემული მომენტისთვის ნაპოვნი ოპტიმალური ამონახსნები, რომელთა გაუმჯობესება კიდევ არის შესაძლებელი. დაყოფა-დაფარვის, სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის და ოპერაციათა კვლევისა და დისკრეტული ოპტიმიზაციის სხვა ამოცანების ფართოდ გავრცელებული სატესტო მონაცემები ინტერნეტში განთავსებულია სამეცნიერო მონაცემთა ბიბლიოთეკების სახით, რომელთაგან შეგვიძლია დავასახელოთ OR-Library, TSPLIB, VRPLIB, CVRPLIB, NEO Research Group-ის ბიბლიოთეკა და სხვა.

უნდა აღინიშნოს, რომ ჩვენი ნაშრომის ძირითად მიზანს არ წარმოადგენდა დიდ განზომილებებზე მომუშავე, მაღალი სწრაფქმედების მქონე პროგრამული უზრუნველყოფის შექმნა. მიუხედავად ამისა, კონკრეტულად დაყოფა-დაფარვის ამოცანებისთვის ჩვენ მიერ შექმნილი ზუსტი ალგორითმი და შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფა გამოირჩევა მაღალი ეფექტურობით და მისი გამოყენებით შესაძლებელია რეალური ამოცანების გადაჭრა გონივრულ დროში, ჩვეულებრივი პერსონალური კომპიუტერის გამოყენებით. მაგალითისთვის შეგვიძლია მოვიტანოთ ჩვენივე ნაშრომში განხილული ორი საილუსტრაციო ამოცანის გამოთვლების შედეგები, რომლებიც ჩატარდა შემდეგი მონაცემების მქონე პერსონალურ კომპიუტერზე: Intel(R) Core(TM) i7 CPU 860 @ 2.80 GHz, 4 GB RAM. პირველი, მთარგმნელების მაგალითისთვის, რომლის განზომილება იყო 10 x 16, პროგრამულმა უზრუნველყოფამ ოპტიმალური ამონახსნების გენერირება მოახერხა 0.1 წამზე ნაკლებ დროში. მეორე, სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანისთვის, რომლის დაყოფის ამოცანაზე დაყვანის შემდეგ მივიღეთ 18 x 90 განზომილების მქონე ამოცანა, ოპტიმალური ამონახსნების გენერირება მოხდა 0.3 წამზე ნაკლებ დროში. ცხრილი 13-ში წარმოდგენილია იგივე კომპიუტერის გამოყენებით უფრო დიდი განზომილებების მქონე ამოცანების გადაჭრის დროითი მაჩვენებლები. ამოცანები აღებულია OR-Library-ის სატესტო მონაცემთა ბაზებიდან.

ამოცანა (ფაილის დასახელება)	განზომილება	ოპტიმალური ამონახსნის პოვნის დრო (წმ)
sppnw23	19 x 711	0.095
sppnw24	19 x 1366	0.068
sppnw36	20 x 1783	1.159
sppnw22	23 x 619	0.105
sppnw33	23 x 3068	2.888
sppnw08	24 x 434	0.090
sppnw30	26 x 2653	0.964
sppnw19	40 x 2879	23.880
sppnw06	50 x 6774	87.415
sppnw18'	124 x 4178	274.233

ცხრილი 13. დაყოფის ალგორითმის ტესტირების შედეგები

აქვე შეგვიძლია მცირე განმარტება გავაკეთოთ იმასთან დაკავშირებით, თუ რატომ შევაჩერეთ არჩევანი დაყოფის (დაფარვის) ზუსტ ალგორითმზე. ზუსტი ალგორითმების დადებითი მხარეს წარმოადგენს ის ფაქტი, რომ ეს ალგორითმები პოულობენ ზუსტ ოპტიმალურ ამონახსნებს (და არა ოპტიმალურთან მიახლოებულებს). მიახლოებითი ალგორითმების მთავარი უპირატესობა კი იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი ერევიან უფრო დიდი განზომილებების მქონე ამოცანებს და პოულობენ ოპტიმალურთან მეტ-ნაკლებად მიახლოებულ ამონახსნებს. ჩვენ ნაშრომში განვიხილავთ ამოცანებს, რომელთა გადაჭრაში ერთგვებიან ექსპერტები იმისთვის, რომ ობიექტური და ზუსტი ინფორმაციის დანაკლისი შეივსოს სუბიექტური შეფასებებით. ეს შეუძლებელია (არაპრაქტიკულია) დიდი განზომილებების მქონე ამოცანების შემთხვევაში, რადგან ექსპერტთა მიერ შეფასებების გაკეთება ძალიან დიდ დროს წაიღებს. ასე რომ, ჩვენ განვიხილავთ ამოცანებს, რომელთაც არ აქვთ დიდი განზომილებები და მათთვის ზუსტი ამონახსნების პოვნა სავსებით შესაძლებელია გონივრულ დროში.

ასევე შეიძლება გაჩნდეს კითხვა, რატომ შევქმენით ჩვენი საკუთარი და რატომ არ გამოვიყენეთ დაფარვისა და დაყოფის ამოცანების გადაჭრის რომელიმე არსებული ზუსტი ალგორითმი და მზა პროგრამული ბიბლიოთეკა. გარდა იმისა, რომ ჩვენი ალგორითმი საკმაოდ ეფექტურია მცირე და საშუალო განზომილებების მქონე ამოცანების გადასაჭრელად, რაც სავსებით საკმარისია ჩვენი საკვლევი თემის პრაქტიკული მიმართულებისთვის, საკუთარი ალგორითმი და პროგრამული ბიბლიოთეკა საშუალებას გვაძლევს, კვლევის დროს სხვადასხვა მოდიფიკაცია გავუკეთოთ მას. სწორედ ამგვარი მოდიფიკაციების ხარჯზე შეიქმნა და დაიხვეწა დაფარვისა და დაყოფის ამოცანებისთვის MDLX ალგორითმი, განხორციელდა მისი პარალელიზაცია და დაემატა მრავალკრიტერიუმულობის მხარდაჭერა. ამას გარდა, კვლევის დაწყებისთანავე მოვიაზრებდით, რომ საბოლოოდ შეიქმნებოდა პროგრამული ბიბლიოთეკა, რომელიც იქნებოდა დამოუკიდებელი, არ გამოიყენებდა სხვა მზა, ფასიან თუ უფასო პროგრამულ ბიბლიოთეკებს და კვლევის პროცესში გვექნებოდა მასში ნებისმიერი ცვლილების შეტანის და ამ გზით სხვადასხვა ექსპერიმენტის ჩატარების შესაძლებლობა. საბოლოოდ, ამავე პროგრამული ბიბლიოთეკის გამოყენებით შევძლებდით, საჭიროების მიხედვით, შეგვექმნა სხვადასხვა სისტემა, რომელთა ორი წარმომადგენელი - კანდიდატების შერჩევის და სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანებისთვის - ოდნავ ზემოთ განვიხილეთ.

ვფიქრობთ, ჩვენი საკუთარი პროგრამული ბიბლიოთეკა, რომელშიც არაერთი სასარგებლო მონაცემთა სტრუქტურა (კლასი) და ალგორითმი დაგვიგროვდა, მომავალშიც გამოგვადგება კვლევის გასაგრძელებლად და პრაქტიკული გამოყენებების მქონე სისტემების შესაქმნელად.

დასკვნა

კომპიუტერული ტექნოლოგიების განვითარებამ მნიშვნელოვნად გაზარდა ჩვენი შესაძლებლობები, გადავჭრათ პრობლემები და ამოცანები, რომლებიც რთულად მიიჩნეოდა თუნდაც რამდენიმე ათწლეულის წინ. ამგვარი ამოცანების დიდი ნაწილის გადაწყვეტას საფუძვლად უდევს ავტომატიზებული მართვა, ინფორმაციის დამუშავება, პროგნოზირება და გადაწყვეტილებების მიღება. ჩვენი შესაძლებლობები მით უფრო იზრდება, რაც უფრო მეტი ინფორმაციაა ხელმისაწვდომი, რაც უფრო სწრაფად ვახერხებთ მის დამუშავებას და უფრო კარგად ვუმკლავდებით ინფორმაციის დანაკლისს, ან ინფორმაციას, რომელიც მოცემულია გარკვეული ცდომილებით, აღწერილია არამკაფიოდ.

ნაშრომში შევეცადეთ ჩამოგვეყალიბებინა არასრული ინფორმაციის დამუშავებისა და მისი სხვადასხვა ამოცანებში გათვალისწინების მეთოდოლოგია. პირველ რიგში, ამისთვის წარმოვადგინეთ მათემატიკური აპარატი, რომელიც აღწერს არასრულ, არასრულყოფილ ინფორმაციას. კლირის და ფოლგერის ნაშრომში (Klir & Folger, 1988) შემოთავაზებული მიდგომის შესაბამისად, არაზუსტად მოცემული ინფორმაციის აღსაწერად გამოვიყენეთ არამკაფიო სიმრავლეები, ხოლო ინფორმაციასთან დაკავშირებული განუზღვრელობის აღსაწერად - მონოტონური ზომები. განვიხილეთ აგრეგაციის ინსტრუმენტები, რომელთა გამოყენებით ეფექტურად ხდება არასრული ინფორმაციის ამ ორი მახასიათებლის - უზუსტობის და განუზღვრელობის - სინთეზი.

ჩამოყალიბებული მათემატიკური აპარატის გამოყენებით, წარმოვადგინეთ დაფარვისა და დაყოფის ამოცანებში არასრული ინფორმაციის გათვალისწინების მეთოდოლოგია. აღნიშნული ამოცანები შეირჩა იმ პრინციპით, რომ ისინი წარმოადგენენ კლასიკურ პრობლემას, რომელიც კარგად შესწავლილია და აქვს ბევრი პრაქტიკული გამოყენება სხვადასხვა მიმართულებით. მაგრამ, შესაბამისი პრაქტიკული ამოცანების გადაჭრისას, იშვიათად ხდება ამ ამოცანების მონაცემების, როგორც ინფორმაციის, სრულყოფილად დამუშავება, რადგან ხშირად განიხილება გამარტივებული მოდელები და ხდება არაზუსტი და განუზღვრელობის შემცველი ინფორმაციის უგულებელყოფა, ან გამოიყენება არსობრივად შეუსაბამო მათემატიკური აპარატი. ამის გამო მიღებული შედეგები მიახლოებითია, აცდენილია რეალობას. უხეში შედარება რომ გავაკეთოთ, მიიღება დაახლოებით იმ სიზუსტის შედეგები, როგორც მიიღება ფიზიკის ამოცანების გამარტივებული მოდელით ამოხსნის შემთხვევაში, როდესაც ხდება რეალურად არსებული მთელი რიგი ფაქტორების (მაგალითად, ჰაერის წინააღობის, ხახუნის ძალის, მიზიდულობის ძალის და ა.შ.) უგულებელყოფა.

დაფარვისა და დაყოფის ამოცანებისთვის წარმოვადგინეთ მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა, ობიექტურ მონაცემებთან ერთად, გავითვალისწინოთ სუბიექტური, ექსპერტთა ცოდნაზე და გამოცდილებაზე დაფუძნებული ინფორმაცია, რომელიც ბუნებრივად შეიცავს უზუსტობას და ადამიანის ენისთვის დამახასიათებელ მოქნილ ტერმინებში აღწერს განუზღვრელობას. ამ ინფორმაციაზე დაყრდნობით შევქმენით ახალი მიზნის ფუნქცია, რომელიც ასახავს ამონახსნების სანდოობას, მათ პრაქტიკულად განხორციელებადობას, ექსპერტთა რწმენას, რომ ამონახსნები ხარისხობრივად სჯობს დანარჩენებს. ოპტიმალური ამონახსნების ძიებისას, აღნიშნულ მიზნის ფუნქციას განვიხილავთ როგორც დამატებით კრიტერიუმს, რომელიც ხშირად კონფლიქტში მოდის ძირითად (ხარჯების მინიმიზაციის) კრიტერიუმთან, მაგრამ უზრუნველყოფს დაბალი სანდოობის მქონე ამონახსნების ფილტრაციას.

ჩამოყალიბებული მეთოდოლოგიის პრაქტიკაში გამოყენების შესაძლებლობების სადემონსტრაციოდ, განვიხილეთ ორი მაგალითი. პირველი მაგალითი ფაზი-დაფარვის ან დაყოფის ამოცანისთვის ახალი კრიტერიუმის დამატების გზით სუბიექტური ინფორმაციის გათვალისწინების ეფექტიანობას აჩვენებს. მეორე მაგალითი კი არა უშუალოდ დაფარვის ან დაყოფის, არამედ სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანაა, რომელიც ასევე აქტიურად გამოიყენება ყოველდღიურ ცხოვრებაში. განვიხილეთ მეთოდი, რომელიც ამ ამოცანას დაიყვანს დაყოფის ორკრიტერიუმიან ამოცანაზე და საშუალებას გვამძლევს, კვლავ გავითვალისწინოთ ამ ამოცანებთან ბუნებრივად დაკავშირებული უზუსტობა და განუზღვრელობა, ექსპერტთა მიერ მოცემული სუბიექტური ინფორმაცია.

ორივე საილუსტრაციო მაგალითი სრულდება მათი კონკრეტული რიცხვითი ეგზემპლარის განხილვით, რომელშიც, ჩვენ მიერ შემოთავაზებული მეთოდოლოგიის გამოყენებით, კონკრეტული შემავალი მონაცემებისთვის ხდება ოპტიმალური ამონახსნების გენერირება და მათი შედარება ამონახსნებთან, რომლებსაც ამავე ამოცანებისთვის მივიღებდით სუბიექტური მონაცემების გათვალისწინების გარეშე. შედეგად ნათელი ხდება, რამდენად დიდ ინფორმაციას ვკარგავთ, როდესაც უგულბებლვყოფთ ან არასწორად ვამუშავებთ არაზუსტ და განუზღვრელობის შემცველ ინფორმაციას.

რადგან ჩვენ მიერ შემოთავაზებულ მეთოდოლოგიაში სუბიექტური მონაცემების გათვალისწინება საწყისი ამოცანისთვის დამატებითი კრიტერიუმის შემოღების გზით ხდება და განხილული მაგალითებიც სწორედ დაფარვისა და დაყოფის ორკრიტერიუმიან ამოცანებზე დაიყვანება, ნაშრომში ასევე განიხილება დისკრეტული ოპტიმიზაციის მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანების ძირითადი ცნებები და ამოხსნის მეთოდები. ყურადღება გამახვილებულია ორკრიტერიუმიან შემთხვევებზე და შემოთავაზებულია დაყოფის ორკრიტერიუმიანი ამოცანის ϵ -შეზღუდვითა მეთოდით ამოხსნის მიდგომა, რომლის საშუალებით აღნიშნული ამოცანისთვის ხდება ყველა პარეტო-ოპტიმალური ამონახსნის მოძიება.

ნაშრომში ასევე წარმოდგენილი და დეტალურად განხილულია დონალდ კნუტის მიერ შემოთავაზებულ ეფექტურ ტექნიკაზე დაყრდნობით ჩვენ მიერ შექმნილი ალგორითმები (MDLX, ϵ -MDLX), რომელთა გამოყენებით გადაჭრილია ნაშრომში განხილული ყველა ამოცანა. სწორედ ამ ალგორითმებისთვის, კვლევის პარალელურად, შექმნილია პროგრამული უზრუნველყოფა, რომელიც ეტაპობრივად დაიხვეწა და მიიღო პროგრამული ბიბლიოთეკის სახე, რომელიც აღნიშნული ალგორითმების გარდა, ასევე მოიცავს არაზუსტ და განუზღვრელობის შემცველ მონაცემებთან სამუშაო პროგრამულ ინსტრუმენტებს (არამკავიო სიმრავლეების, მონოტონური ზომების, განზოგადებული ინტეგრალების შესაბამისი კლასები).

ნაშრომი ასახავს კვლევას და მიღებულ შედეგებს რამდენიმე მიმართულებით:

- საექსპერტო ცოდნის ინჟინერიის მიმართულებით - ფორმალიზებულია არაზუსტი და განუზღვრელობის შემცველი ინფორმაციის დამუშავების მეთოდოლოგია;
- ალგორითმების მიმართულებით - შექმნილია დაფარვისა და დაყოფის ერთ და ორ კრიტერიუმიანი ამოცანების ამოხსნის ეფექტური ზუსტი ალგორითმები;
- პრაქტიკული ამოცანების გადაჭრის მიმართულებით - აგებულია კანდიდატების შერჩევის და სატრანსპორტო მარშრუტიზაციის ამოცანების ახალი მოდელები, რომლებიც ითვალისწინებენ უზუსტობასა და განუზღვრელობას და ზრდიან მიღებული ამონახსნების ხარისხს, მათ სანდოობას;

- პროგრამული უზრუნველყოფის მიმართულებით - შექმნილია პროგრამული ბიბლიოთეკა, რომელიც აერთიანებს ჩამოყალიბებული მეთოდოლოგიისთვის საჭირო მონაცემთა სტრუქტურებს, მათემატიკური აპარატის შესაბამის კლასებს და კვლევის შედეგად შექმნილ ალგორითმებს. ასევე შექმნილია მუშა სისტემა ნაშრომში განხილული ორივე პრაქტიკული ამოცანისთვის.

ბოლოს უნდა აღინიშნოს, რომ უზუსტობა და განუზღვრელობა მხოლოდ დაფარვისა და დაყოფის, ან მათზე დაყვანად ამოცანებში არ გვხვდება. არასრულყოფილი ინფორმაციის გათვალისწინება და მისი სწორად დამუშავება ასევე დადებით შედეგებს იძლევა, მაგალითად, ხელოვნური ინტელექტის, მანქანური სწავლის ალგორითმებში, თუმცა მათი წარმოჩენა სცილდება წარმოდგენილი ნაშრომის ფარგლებს და წარმოშობს ამ მიმართულებით კვლევის გაღრმავების ახალ, სამომავლო შესაძლებლობებს.

დისერტაციაში წარმოდგენილი კვლევის შედეგები ასახულია შემდეგ სამეცნიერო პუბლიკაციებში:

1. G. Sirbiladze, B. Ghvaberidze, T. Latsabidze, B. Matsaberidze. Using Minimal Fuzzy Covering in Decision-making Systems. *Information Sciences: An International Journal*, Volume 179, Issue 12, 2009, pp. 2022-2027.
2. G. Sirbiladze, B. Ghvaberidze, A. Sikharulidze, B. Matsaberidze, D. Devadze. Fuzzy Covering and Partitioning Problems Based on the Expert Valuations: Application in Optimal Choice of Candidates. *WSEAS Transactions on Information Science and Applications*, Volume 6, Issue 11, 2009, pp. 1840-1849.
3. G. Sirbiladze, A. Sikharulidze, B. Ghvaberidze, B. Matsaberidze. Fuzzy-probabilistic Aggregations in the Discrete Covering Problem. *International Journal of General Systems*, 2011, Volume 40, Issue 2, pp. 169 -196.
4. G. Sirbiladze, A. Sikharulidze, B. Ghvaberidze, B. Matsaberidze. Fuzzy-Probabilistic Aggregations in the Discrete Covering Problem. Part I: Representation of the Most Typical Value (MTV) through Associated Probabilities. *Georgian International Journal of Science and technology*, Volume 4, Issue 1-2, 2012, pp. 1-18, Nova Science Publishers, Inc.
5. G. Sirbiladze, A. Sikharulidze, B. Ghvaberidze, B. Matsaberidze. Fuzzy-Probabilistic Aggregations in the Discrete Covering Problem. Part II: The Use of MTV as a Tool to Aggregate an Uncertain Information in a Minimal Fuzzy Misbelief Criterion Representation of the Most Typical Value (MTV) through Associated Probabilities. *Georgian International Journal of Science and technology*, Volume 4, Issue 1-2, 2012, pp. 19-36, Nova Science Publishers, Inc.
6. G. Sirbiladze, A. Sikharulidze, B. Matsaberidze, T. Manjaparashvili, I. Khutsishvili, G. Chachia. On the New Constructions of a Fuzzy Prediction Simulation System. *Georgian International Journal of Science and technology*, Volume 6, Issue 1, 2013, pp. 82-91, Nova Science Publishers, Inc.
7. G. Sirbiladze, B. Ghvaberidze, B. Matsaberidze, A. Sikharulidze, G. Mgeladze. A New Approach in Fuzzy Vehicle Routing Problem: Theoretical Foundations. *Georgian International Journal of Science and technology*, Vol. 6, Issue 4, 2014, pp. 339-352, Nova Science Publishers, Inc.
8. G. Sirbiladze, B. Ghvaberidze, B. Matsaberidze. Bicriteria Fuzzy Vehicle Routing Problem for Extreme Environment. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, Volume 8, No. 2, 2014, pp. 41-48.

9. G. Sirbiladze, B. Ghvaberidze, B. Matsaberidze. Fuzzy Vehicle Routing Problem for Extreme Environment. XII International Conference on Fuzzy Systems and Neural Computing. International Science Index, Volume 8, No. 10, Part XII, 2014, pp. 940-945.
10. B. Ghvaberidze, G. Sirbiladze, B. Matsaberidze, Z. Modebadze. New Two-Stage Approach for Bi-criteria Vehicle Routing Problem in Extreme Environment. Recent Advances in Systems. Proceedings of the 19th International Conference on Systems (part of CSCC '15), 2015, pp. 111-118.
11. G. Sirbiladze, B. Ghvaberidze, B. Matsaberidze. A New Fuzzy Model of the Vehicle Routing Problem for Extreme Conditions. Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences, Volume 9, No. 2, 2015, pp. 46-53.
12. G. Sirbiladze, B. Ghvaberidze, B. Matsaberidze, A. Sikharulidze. Multi-Objective Emergency Service Facility Location Problem Based on Fuzzy TOPSIS. Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences, Volume 11, No. 1, 2017, pp. 23-30.
13. R. Santana, G. Sirbiladze, B. Ghvaberidze, B. Matsaberidze. A Comparison of Probabilistic-based Optimization Approaches for Vehicle Routing Problems. IEEE Congress on Evolutionary Computation, San-Sebastian, Spain, 2017 (იბეჭდება).

ბიბლიოგრაფია

- Agarwal, P., & Nayal, H. S. (2015). Possibility Theory versus Probability Theory in Fuzzy Measure Theory. *International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA)*, 5(5), 37-43.
- Akhter, F. (2015). A Heuristic Approach for Minimum Set Cover Problem. *International Journal of Advanced Research in Artificial Intelligence (IJARAI)*, 4(6), 40-45.
- Al-Sultan, K. S., Hussain, M. F., & Nizami, J. S. (1996). A Genetic Algorithm for the Set Covering Problem. *Journal of the Operational Research Society*, 47(5), 702-709.
- Ananiashvili, N., Gvaberidze, B., Machaidze, Z., & Tsintsadze, Z. (1986). On Approximate Solution of One Group of Route Problems. *Some Problems of Hydrodynamics of Gas and Gasification Issues*, 24-40.
- Augerat, P., Belenguer, J., Benavent, E., Corberán, A., Naddef, D., & Rinaldi, G. (1998). *Computational Results with a Branch and Cut Code for the Capacitated Vehicle Routing Problem*. Research Report 949-M, Universite Joseph Fourier, Grenoble.
- Balas, E., & Padberg, M. W. (1976). Set Partitioning: A Survey. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM Review)*, 18(4), 710-760.
- Baldacci, R., Christofides, N., & Mingozzi, A. (2008). An Exact Algorithm for the VRP Based on the Set Partitioning Formulation with Additional Cuts. *Mathematical Programming*, 115(2), 351-385.
- Balinski, M. L., & Quandt, R. E. (1964). On an Integer Program for a Delivery Problem. *Operations Research*, 12(2), 300-304.
- Beasley, J. E. (1987). An Algorithm for Set Covering Problem. *European Journal of Operational Research*, 31, 85-93.
- Beasley, J. E., & Chu, P. C. (1996). A Genetic Algorithm for the Set Covering Problem. *European Journal of Operational Research*, 94(2), 392-404.
- Berman, P., Karpinski, M., & Lingas, A. (2012). Exact and Approximation Algorithms for Geometric and Capacitated Set Cover Problems. *Algorithmica*, 64(2), 295-310.
- Bérubé, J. F., Gendreau, M., & Potvin, J. Y. (2009). An Exact ϵ -constraint Method for Bi-objective Combinatorial Optimization Problems: Application to the Traveling Salesman Problem with Profits. *European Journal of Operational Research*, 194(1), 39-50.
- Bozkaya, B., Erkut, E., & Laporte, G. (2003). A Tabu Search Heuristic and Adaptive Memory Procedure for Political Districting. *European Journal of Operational Research*, 144(1), 12-26.
- Brito, J., Campos, C., Castro, J., Martínez, F., Melián, B., Moreno, J., & Moreno, J. (2008). Fuzzy Vehicle Routing Problem with Time Windows. *Proceedings of 12th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU'08)*, (pp. 1266-1273). Málaga.
- Brito, J., Moreno, J. A., & Verdegay, J. L. (2009). Fuzzy Optimization in Vehicle Routing Problems. *Proceedings of the Joint International Fuzzy Systems Association World Congress and European Society of Fuzzy Logic and Technology Conference (IFSA-EUSFLAT 2009)* (pp. 1547-1552). Lisbon: IFSA-EUSFLAT.
- Campos, L. M., & Bolanos, M. J. (1992). Characterization and Comparison of Sugeno and Choquet Integrals. *Fuzzy Sets and Systems*, 52(1), 61-67.

- Caprara, A., Toth, P., & Fischetti, M. (2000). Algorithms for the Set Covering Problem. *Annals of Operations Research*, 98(1), 353-371.
- Carlsson, C., & Fullér, R. (2001). On Possibilistic Mean Value and Variance of Fuzzy Numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 122(2), 315-326.
- Chan, T. J., & Yano, C. A. (1992). A Multiplier Adjustment Approach for the Set Partitioning Problem. *Operations Research*, S40-S47.
- Chankong, V., & Haimes, Y. Y. (1983). *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*. New York: North Holland / Elsevier.
- Choquet, G. (1954). Theory of Capacities. *Annales de l'institut Fourier*, 5, 131-295.
- Christofides, N. (1975). *Graph Theory - An Algorithmic Approach*. London: Academic Press.
- Christofides, N., & Korman, S. (1975). A Computational Survey of Methods for the Set Covering Problem. *Management Science*, 21(5), 591-599.
- Christofides, N., Mingozzi, A., Toth, P., & Sandi, C. (1979). *Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons.
- Clarke, G., & Wright, J. W. (1964). Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points. *Operations Research*, 12(4), 568-581.
- Cordeau, J.-F., Laporte, G., Savelsbergh, M. W., & Vigo, D. (2007). Vehicle Routing. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 14, 367-428.
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2009). *Introduction to Algorithms* (3rd ed.). Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- Cormode, G., Karloff, H., & Wirth, A. (2010). Set Cover Algorithms for Very Large Datasets. *CIKM '10 Proceedings of 19th ACM International Conference on Information and Knowledge Management* (pp. 479-488). New York: ACM.
- Dantzig, G. B., & Ramser, J. H. (1959). The Truck Dispatching Problem. *Management Science*, 6(1), 80-91.
- Daskin, M. S. (2013). *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications* (2nd ed.). New York: Wiley.
- Dempster, A. P. (1967). Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping. *The Annals of Mathematical Statistics*, 38(2), 325-339.
- Dubois, D., & Prade, H. (1986). Weighted Minimum and Maximum Operations in Fuzzy Set Theory. *Information Sciences*, 39(2), 205-210.
- Dubois, D., & Prade, H. (1988). *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. New York: Springer.
- Dubois, D., & Prade, H. (2015). Possibility Theory and Its Applications: Where Do We Stand? In J. Kacprzyk, & W. Pedrycz (Eds.), *Springer Handbook of Computational Intelligence* (Vol. A, pp. 31-60). Berlin: Springer.
- Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria Optimization* (2nd ed.). Berlin: Springer.
- Ehrgott, M., & Ryan, D. M. (2000). Bicriteria Robustness versus Cost Optimisation in Tour of Duty Planning at Air New Zealand. *Proceedings of the 35th Annual Conference of the Operational Research Society of New Zealand* (pp. 31-39). Auckland: ORSNZ.

- Ehrgott, M., & Ryan, D. M. (2002). Constructing Robust Crew Schedules with Bicriteria Optimization. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 11(3), 139-150.
- Garfinkel, R. S., & Nemhauser, G. L. (1969). The Set-Partitioning Problem: Set Covering with Equality Constraints. *Operations Research*, 17(5), 848-856.
- Garfinkel, R. S., & Nemhauser, G. L. (1970). Optimal Political Districting by Implicit Enumeration Techniques. *Management Science*, 16(8), B495-B508.
- Ghannadpour, S. F., Noori, S., Tavakkoli-Moghaddam, R., & Ghoseiri, K. (2014). A Multi-Objective Dynamic Vehicle Routing Problem With Fuzzy Time Windows: Model, Solution and Application. *Applied Soft Computing*, 14, 504-527.
- Golomb, S. W., & Baumart, L. D. (1965). Backtrack Programming. *Journal of the ACM (JACM)*, 12(4), 516-524.
- Grabisch, M. (1996). The Application of Fuzzy Integrals in Multicriteria Decision Making. *European Journal of Operational Research*, 89(3), 445-456.
- Grabisch, M., Murofushi, T., & Sugeno, M. (Eds.). (2000). *Fuzzy Measures and Integrals - Theory and Applications* (Vol. 40). Physica-Verlag Heidelberg.
- Gupta, R., Singh, B., & Pandey, D. (2010). Multi-Objective Fuzzy Vehicle Routing Problem: A Case Study. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 5(29), 1439-1454.
- Hoffman, K., & Padberg, M. (2009). Set Covering, Packing and Partitioning Problems. In C. A. Floudas, & P. M. Pardalos (Eds.), *Encyclopedia of Optimization* (Second Edition ed., pp. 3482-3486). Springer US.
- Hong, L., & Xu, M. (2008). A Model of MDVRPTW with Fuzzy Travel Time and Time-Dependent and Its Solution. *Proceeding of Fifth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD '08)*. 3, pp. 473-478. IEEE.
- Hong, L., & Xu, M. (2008). Real Vehicle Routing and Dispatching with Dynamic Fuzzy Travel Times. *Proceedings of the Second International Conference on Genetic and Evolutionary Computing (WGEC '08)* (pp. 32-37). IEEE.
- Jozefowiez, N., Semet, F., & Talbi, E.-G. (2008). From Single-Objective to Multi-Objective Vehicle Routing Problems: Motivations, Case Studies, and Methods. (B. Golden, S. Raghavan, & E. Wasil, Eds.) *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*, 43, pp. 445-471.
- Jozefowiez, N., Semet, F., & Talbi, E.-G. (2008). Multi-Objective Vehicle Routing Problems. *European Journal of Operational Research*, 189(2), 293-309.
- Kandel, A. (1978). Fuzzy Statistics And Forecast Evaluation. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 8(5), 396-401.
- Karp, R. M. (1972). Reducibility Among Combinatorial Problems. In R. E. Miller, J. W. Thatcher, & J. D. Bohlinger (Eds.), *Complexity of Computer Computations* (pp. 85-103). New York: Springer.
- Klir, G. J., & Folger, T. A. (1988). *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*. New Jersey: Prentice Hall.
- Knuth, D. (2000). Dancing Links. *Millennial Perspectives in Computer Science*, 187-214.
- Koronacki, J., Raś, Z. W., Wierzchoń, S. T., & Kacprzyk, J. (Eds.). (2010). *Advances in Machine Learning I-II* (Vols. 262-263). Springer.
- Laporte, G. (2009). Fifty Years of Vehicle Routing. *Transportation Science*, 43(4), 408-416.

- Laporte, G., Gendreau, M., Potvin, J. Y., & Semet, F. (2000). Classical and Modern Heuristics for the Vehicle Routing Problem. *International Transactions in Operational Research*, 7(4-5), 285-300.
- Marsten, R. E., & Shepardson, F. (1981). Exact Solution of Crew Scheduling Problems Using the Set Partitioning Model: Recent Successful Applications. *Networks*, 11(2), 165-177.
- Maus, A., & Aas, T. (1995). *PRP - Parallel Recursive Procedures*. Retrieved from <http://heim.ifi.uio.no/~arnem/PRP/>
- Mavrotas, G. (2009). Effective Implementation of the ϵ -constraint Method in Multi-Objective Mathematical Programming Problems. *Applied Mathematics and Computation*, 213(2), 455-465.
- Norris, D., Pilsworth, B. W., & Baldwin, J. F. (1987). Medical Diagnosis From Patient Records - A Method Using Fuzzy Discrimination and Connectivity Analyses. *Fuzzy Sets and Systems*, 23(1), 73-87.
- Renaud, J., Boctor, F. F., & Laporte, G. (1996). An Improved Petal Heuristic for the Vehicle Routing Problem. *The Journal of the Operational Research Society*, 47(2), 329-336.
- Ropke, S., & Cordeau, J. F. (2009). Branch-and-Cut-and-Price for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows. *Transportation Science*, 43(3), 267-286.
- Shafer, G. (1976). *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Sirbiladze, G. (2005-2007). Modeling of Extremal Fuzzy Dynamic Systems, Parts I-VI. *International Journal of General Systems*.
- Sirbiladze, G. (2013). *Extremal Fuzzy Dynamic Systems: Theory and Applications* (Vol. 28). New York: Springer.
- Sirbiladze, G., & Gachechiladze, T. (2005). Restored Fuzzy Measures in Expert Decision-Making. *Information Sciences*, 169(1-2), 71-95.
- Sirbiladze, G., Sikharulidze, A., Ghvaberidze, B., & Matsaberidze, B. (2011). Fuzzy-probabilistic Aggregations in the Discrete Covering Problem. *International Journal of General Systems*, 40(2), 169-196.
- Steuer, R. E. (1986). *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. New York: Wiley.
- Sugeno, M. (1974). *Theory of Fuzzy Integrals and its Applications*. Tokyo: Tokyo Institute of Technology.
- Sugeno, M. (1977). Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals: A Survey. (M. M. Gupta, G. N. Saridis, & B. R. Gaines, Eds.) *Fuzzy Automata and Decision Processes*, 89-102.
- Tang, L., Cheng, W., Zhang, Z., & Zhong, B. (2007). Ant Colony Algorithm Based on Information Entropy Theory to Fuzzy Vehicle Routing Problem. *Proceedings of International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering (ISKE 2007), Series: Advances in Intelligent Systems Research*. Atlantis Press.
- Teodorović, D., & Kikuchi, S. (1991). Application of Fuzzy Sets Theory to the Saving Based Vehicle Routing Algorithm. *Civil Engineering Systems*, 8(2), 87-93.
- Teodorović, D., & Lučić, P. (2007). The Fuzzy Ant System for the Vehicle Routing Problem when Demand at Nodes is Uncertain. *International Journal on Artificial Intelligence Tools*, 16(5), 751-770.
- Tjensvold, J. M. (2007). *Generic Distributed Exact Cover Solver*. Retrieved from <https://janmagnet.files.wordpress.com/2008/07/decs-report-draft-02.pdf>
- Torra, V., & Narukawa, Y. (2006). The Interpretation of Fuzzy Integrals and Their Application to Fuzzy Systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 41(1), 43-58.

- Toth, P., & Vigo, D. (Eds.). (2002). *The Vehicle Routing Problem. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications* (Vol. 9). Philadelphia: SIAM.
- Viertl, R. (1987). Is it Necessary to Develop a Fuzzy Bayesian Inference? In R. Viertl, *Probability and Bayesian Statistics* (pp. 471-475). New York: Plenum Press.
- Wang, Z., & Klir, G. J. (2009). *Generalized Measure Theory*. New York: Springer.
- Williamson, D. P., & Shmoys, D. B. (2011). *The Design of Approximation Algorithms*. New York: Cambridge University Press.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.
- Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1), 3-28.
- Zimmermann, K. (1991). Fuzzy Set Covering Problem. *International Journal of General Systems*, 20(1), 127-131.