ავტორის სტილი დაცულია

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, მათემატიკის დეპარტამენტი

სადოქტორო პროგრამის სახელწოდება: მათემატიკა

თეა შავაძე

ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისათვის დაგვიანების პარამეტრების შეშფოთებების გათვალისწინებით და მათი ზოგიერთი გამოყენება

მათემატიკაში დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

თამაზ თადუმაძე - ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

აბდელჯალილ ნაშავი - დოქტორი, პროფესორი (ნანტის უნივერსიტეტი, საფრანგეთი)

თბილისი 2019

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Faculty of Exact and Natural Sciences
Department of Mathematics

Name of Doctoral Program: Mathematics

Tea Shavadze

Variation Formulas of Solution for the Controlled Functional Differential Equations Considering Delay Parameters Perturbations and Some of Their Applications

Thesis submitted for the degree of PhD in Mathematics

Scientific advisers:
Tamaz Tadumadze – Dr. of Physical Mathematical sciences, Professor

Abdeljalil Nachaoui- Professor HDR, (Nantes University, France)

Tbilisi 2019

აბსტრაქტი

ნაშრომი ეხება ამონახსნის ვარიაციის ფორმულებსა და ოპტიმიზაციის ამოცანებს არა-წრფივი სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისათვის მრავალი მუდმივი დაგვიანებით ფაზურ კოორდინატებსა და მართვებში, წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობით.

ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა ეწოდება შეშფოთებული და თავდაპირველი განტო-ლების ამონახსნების სხვაობის მთავარი ნაწილის - წრფივად წარმოდგენას საწყისი მონაცემის შეშფოთებების მიმართ.

საწყის პირობას ეწოდება წყვეტილი, თუ საწყის მომეტში ტრაექტორიისა და საწყისი ფუნქციის მნიშვნელობები, საზოგადოდ, ერთმანეთს არ ემთხვევა. საწყის პირობას ეწოდება უწყვეტი, თუ საწყის მომეტში ტრაექტორიისა და საწყისი ფუნქციის მნიშვნე-ლობები ყოველთვის ერთმანეთს ემთხვევა.

წყვეტილი საწყისი პირობის შემთხვევაში, საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება საწყისი მომენტის, ფაზურ კოორდინატებში შემავალი დაგვიანების პარამეტრების, საწყისი ვექტორის, საწყისი და მართვის ფუნქციების ერთობლიობა, ხოლო უწყვეტი საწყისი პირობის შემთხვევაში საწყისი მონაცემების ერთობლიობა, განსხვავებით ზემოაღნიშნულისა, არ შეიცავს საწყის ვექტორს.

ვარიაციის ფორმულა საშუალებას იძლევა განტოლების ამოუხსნელად, დადგინდეს საწყისი განტოლების ამონახსნზე შეშფოთებების გავლენის ეფექტები. ვარიაციის ფორმულები ერთის მხრივ ფუნდამენტურ როლს ასრულებენ ოპტიმიზაციის ამოცანებში ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების დამტკიცებისას, მეორეს მხრივ ისინი საშუალებას იძლევიან, ანალიზურად აიგოს შეშფოთებული განტოლების ამონახსნი და განხორციელდეს დიფერენციალური მოდელების სენსიტიური ანალიზი.

ნაშრომში, წყვეტილი საწყისი პირობის შემთხვევაში დამტკიცებულია ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები ძირითადი ინტერვალის საბოლოო მომენტის მიდამოში (ლოკალური ფორმულები) საწყისი მომენტის ცალმხრივი და ორმხრივი ვარიაციის გათვალისწინებით.

უწყვეტი საწყისი პირობის შემთხვევაში დამტკიცებულია ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები მთელ ძირითად ინტერვალზე (გლობალური ფორმულები).

ამონახსნის ვარიაციის ფორმულებში გამოვლენილია საწყისი მონაცემების, წყვეტი-ლი და უწყვეტი საწყისი პირობების ეფექტები. დადგენილია განტოლებისა და საწყისი პირობების სახე, რომელსაც აკმაყოფილებს ამონახსნის ვარიაცია. აგებულია შეშფო-თებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი, საილუსტრაციოდ განხილულია მაგალითი. ვარიაციის ფორმულების სახე დაკონკრეტებულია წრფივი განტო-ლებისათვის.

სადისერტაციო ნაშრომში, ადრე ცნობილი ნაშრომებისგან განსხვავებით, სიახლეს წარმოადგენს ის გარემოება, რომ აქ ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები დამტკიცებულია სამართი განტოლებისთვის მრავალი დაგვიანებით, გათვალისწინებულია დაგვიანების პარამეტრების შეშფოთება და კიდევ საწყისი მომენტისა და დაგვიანებების ვარიაცის ნიშნები, საზოგადოდ, ერთმანეთს არ ემთხვევა.

დამხმარე დებულებების სახით ნაშრომის ამ ნაწილში, წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობების შემთხვევისათვის, საწყისი მომენტის ცალმხრივი და ორმხრივი ვარიაციის გათვალისწინებით,დადგენილია ამონახსნის ნაზრდის რიგი მცირე პარამეტრის მიმართ, გამოთვლილია ნაზრდის მნიშვნელობა საწყის მომენტში. ეს შედეგები არსებითად გამოიყენება ვარიაციის ფორმულების დამტკიცებისას.

ოპტიმიზაციის ამოცანებისთვის წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობით, ზოგადი სასაზღვრო პირობებითა და ფუნქციონალით, მრავალი დაგვიანებით ფაზურ კორდინატებსა და მართვებში დამტკიცებულია ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები: საწყისი და საბოლოო მომენტებისთის უტოლობისა და ტოლობის სახით; ფაზურ კოორდინატებში შემავალი დაგვიანების პარამეტრებისათვის ტოლობის სახით; საწყისი ვექტორისთვის ტოლობის სახით; საწყისი და მართვის ფუნქციებისთვის ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპის ფორმით. ნაშრომის ამ ნაწილში განსაკუთრებულ სიახლეს წარმოადგენს ის გარემოება, რომ განხორციელებულია ფაზურ კოორდინატებში შემავალი დაგვიანებების ოპტიმიზაცია, ხოლო მართვებში შემავალი დაგვიანებები საზოგადოდ არათანაზომადია. ზოგადი შედეგები დაკონკრეტებულია ოპტიმალური ამოცანისათვის დამაგრებული ბოლოებით და ინტეგრალური ფუნქციონალით.

დამხმარე დებულებების სახით ნაშრომის ამ ნაწილში აგებულია ოპტიმალური ამოცანის შესაბამისი ასახვა, დამტკიცებულია მისი უწყვეტობა და კრიტიკულობა ამოზნექილ ფილტრზე, ამონახსნის ვარიაციის ფორმულის საფუძველზე გამოთვლილია ასახვის დიფერენციალი. ეს შედეგები არსებითად გამოიყენება ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების დამტკიცებისას.

Abstract

The work is devoted to the variation formulas of solution and optimization problems for the nonlinear controlled functional differential equation with several constant delays in the phase coordinates and in controls with discontinuous and continuous initial conditions.

The variation formula of solution is called the linear representation of the main part of deference of solutions of the perturbed and initial equations – with respect to perturbations of initial date.

The initial condition is called discontinuous if the values of the trajectory and the initial function, in general, does not coincide at the initial moment. The initial condition is called the continuous if the values of the trajectory and the initial function always coincide at the initial moment.

In the case of the discontinuous initial condition under the initial date we mean the collection of initial moment, delay parameters in the phase coordinates, initial vector, initial and controll functions, but in the case of the continuous initial condition unlike the above considered , the collection of initial date does not contains the initial vector.

The variation formula allows one to determine the effects of perturbations on the solution of the initial equation without solving of equation. On one side variation formulas plays the fundamental role of proving the necessary conditions of optimality in the optimization problems, on the other side they allows us to construct analytically the solution of perturbed equation and to implement sensitivity analysis of the differential models.

In the work, in the case of the discontinuous initial condition the variation formulas (local formulas) are proved in the neighborhood of the finally moment of the main interval taking into account the variation from one and both side.

In the case of the continuous initial condition the variation formulas (global formulas) are proved in the whole interval.

In the variation formulas of solution the effects of initial date, discontinuous and continuous initial conditions are revealed. It is established the form of the equation and initial conditions, which satisfies the solution of variation. It is constructed the approximate solution of perturbed equation, to illustrate this there is considered an example. The form of variation formulas are specified for linear equation.

In the dissertation thesis, unlike earlier papers, the novelty is the fact that here the variation formulas are proved for controlled equation with several delays with respect to perturbation of delay parameters and moreover, the signs of variations of initial moment and delays in generally, are different.

In this part of the work with the form of auxiliary assertions, in the case of the discontinuous and continuous initial conditions, taking into account one-sided and two-sided variation of the

initial moment, it is established the order of increment of solution with respect to a small parameter and the value of the increment at the initial moment is calculated. These results are essentially used in proving of variation formulas of solution.

For the optimization problems with the discontinuous and continuous initial conditions, with general boundary conditions and functional with several delays in the phase coordinates and controls are proved the necessary optimality conditions: for the initial and final moments in the form of inequalities and equalities; for delays containing in the phase coordinates in the form of equalities; for the initial vector in the form of equality, and for the initial function and control function in the form of the integral maximum principle.

In this part of work the essential novelty is that here we have optimization of the delays in the phase coordinates and delays in the controls are uncommensurability. The general optimality conditions are concretized: for the optimization problem with the fixed ends and integral functional.

In this part of the work with the form of auxiliary assertions, it is constructed an appropriate map of the optimal problem, it is proved of the continuity and criticality on the convex filter, using of variation formulas of solution it is calculated the differential of map. These results are essentially used in proving of necessary optimality conditions.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

დინამიური სამართი სისტემა, რომლის ყოფაქცევა დროის t მომენტში დამოკიდებულია თავის მდგომარეობაზე როგორც t მომენტში ასევე დროის წინა $t-\tau_1,\ t-\tau_2\ ,...,\ t-\tau_s$ მომენტებში (წარსულში), როგორც წესი, აღიწერება სამართი დაგვიანებულ არგუმენტიანი ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით

$$\dot{x}(t)=f\left(t,x(t),x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_s),u(t)\right),\ \ x(t)\in R^n\ . \tag{1}$$

რიცხვებს $\tau_i>0,\ \overline{1,s}$ ეწოდება დაგვიანებები (დაგვიანების პარამეტრები, დაგვიანების ფაქტორი), ხოლო $u(t)\in\mathbb{R}^r$ - მართვის ფუნქცია (მართვა).

(1) განტოლებით აღიწერება მრავალი ეკონომიკური, ბიოლოგიური და ფიზიკური პროცესი [12, 21, 26, 30]. საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ ეკონომიკური ზრდის მოდელი. ვთქვათ $N(t)$ არის დროის t მომენტში გამოშვებული ერთი სახის პროდუქციის რაოდენობა გამოსახული ფულად ერთეულში. ეკონომიკური ზრდის ობიექტური კანონის თანახმად $N(t)$ წარმოდგენილი უნდა იქნეს ორი შესაკრების სახით

$$N(t)=C(t)+I(t), \tag{2}$$

სადაც $C(t)$ არის თანხა, რომელიც ხმარდება თანამშრომელთა ხელფასებს, სოციალურ პროგრამებს და ა. შ. $I(t)$ არის თანხა, რომელიც ხმარდება ახალი დანადგარების შეძენას, ახალი ტექნოლოგიების დანერგვას და ა. შ. (შიგა ინვესტიცია). განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ფუნქციებს $C(t)$ და $I(t)$ აქვთ შემდეგი სახე

$$C(t)=u_1(t)N(t)\,, \tag{3}$$

$$I(t)=\sum_{i=1}^{s}u_{i+1}(t)N(t-\tau_i)+\alpha\dot{N}(t)\ \ , \tag{4}$$

სადაც $u_i(t)\in(0,1),\overline{1,s+1}$ არის მართვის ფუნქციები, ხოლო $\alpha>0$ არის მოცემული რიცხვი. (4) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ t მომენტში ინვესტიციის მოცულობა დამოკიდებულია ფულის მასაზე $t-\tau_i$ მომენტებში და პროდუქციის გამოშვების $\dot{N}(t)$ სიჩქარეზე t მომენტში. (2)-დან (3)-(4)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ განტოლებას

$$\dot{N}(t)=\frac{1-u_1(t)}{\alpha}N(t)-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{s}u_{i+1}(t)N(t-\tau_i).$$

ეს განტოლება არის ეკონომიკური ზრდის უმარტივესი მათემატიკური მოდელი, სადაც გათვალისწინებულია დაგვიანების ფაქტორი (წინაისტორია).

სხვადასხვა კლასის ფუნქციონალურ–დიფერენციალური განტოლებებისა და მათი შესაბამისი ოპტიმიზაციის ამოცანების გამოკვლევას მრავალი ნაშრომი მიეძღვნა, მათშორისაა შრომები: ნ. აზბელევი და ლ. რახმატულინა [1] ; რ. აგარვალი, ლ. ბერეზანსკი, ე. ბრავერმანი და ა. დომოშნიცკი [2]; ლ. ალხაზიშვილი [3]; ა. არუთინოვი და მ. მარდანოვი [4]; მ. აშორდია [5]; ს. ბეიკერი [6]; ჰ. ბენქსი [7]; ლ. ბეკლარიანი [8];

რ. ბელმანი და კ. კუკი [9]; ა. ბოჩია და რ. ვინტერი [10]; რ. გაბასოვი და ფ. კირილოვა [15]; ლ. გოლმანი და ჰ. მაურერი [18]; ნ. გორგოძე [17]; რ. დრაივერი [11]; ფ. დვალიშვილი და ი. რამიშვილი [13]; ლ. ელსგოლცი და ს. ნორკინი [14]; ჯ. ვარგა [53]; თ. თადუმაძე [48, 49]; თ. თადუმაძე და ლ. ალხაზიშვილი [50, 51] ; თ. თადუმაძე და ა. ნაშავი [52]; მ. იორდანიშვილი [22]; ი. კიღურაძე და ბ. პუჟა [25]; ვ. კოლმანოვსკი და ა. მიშკისი [26]; რ. კოპლატაძე [27]; რ. კოპლატაძე და თ. ჭანტურია [28]; ზ. მაჩაიძე [29]; ა. მანიტიუსი [30]; მ. მარდანოვი, კ. მანსიმოვი და ტ. მელიქოვი [31]; ნ. მარკოზაშვილი [32]; ა. მიშკისი [33]; ბ. მორდუხოვიჩი [34]; ლ. ნოიშტადტი [35]; ს. ნიკოლესკუ [36]; ნ. ოგუსტორელი [37]; ზ. სოხაძე [47]; ნ. ფარცვანია [38]; გ. ხარატიშვილი [23]; გ. ხარატიშვილი და თ. თადუმაძე [24]; ა. ჰალანაი [19, 20]; ჯ. ჰეილი [21] და სხვა.

სადისერტაციო ნაშრომის პირველი ნაწილი (თავი 1 და 2) ეხება ამონახსნის ვარიაციის ფორმულებს. ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა (მოკლედ – ვარიაციის ფორმულა) ეწოდება შეშფოთებული და თავდაპირველი განტოლების ამონახსნების სხვაობის (ამონახსნის ნაზრდი) მთავარი ნაწილის (ამონახსნის ვარიაცია) წრფივად წარმოდგენას შეშფოთებების მიმართ. ვარიაციის ფორმულა საშუალებას იძლევა განტოლების ამოუხსნელად, დადგინდეს საწყისი განტოლების ამონახსნზე შეშფოთებების გავლენის ეფექტები. ვარიაციის ფორმულები ერთის მხრივ ფუნდამენტურ როლს ასრულებენ ოპტიმიზაციის ამოცანებში ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების დამტკიცებისას, მეორეს მხრივ ისინი საშუალებას იძლევიან, ანალიზურად აიგოს შეშფოთებული განტოლების ამონახსნი და განხორციელდეს დიფერენციალური მოდელების სენსიტიური ანალიზი. თუ განვიხილავთ შეშფოთებული განტოლების ამონახსნს, როგორც შეშფოთებათა სივრცეზე განსაზღვრულ ასახვას, მაშინ ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა ასახვის დიფერენციალი იქნება. აქედან გამომდინარე, ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა მჭიდროდ არის დაკავშირებული ამონახსნის საწყისი მონაცემებისა და პარამეტრების მიმართ დიფერენცირებადობის კლასიკურ მიმართულებასთან. აღსანიშნავია, რომ ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები გამომდინარეობს ამონახსნის ვარიაციის ფორმულიდან.

ვარიაციის ფორმულა, არაწრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისთვის, სადაც შეშფოთებას განიცდის განტოლების მარჯვენა მხარე, საწყისი მომენტი და ვექტორი, პირველად, დამტკიცებული იყო რ. გამყრელიძის მიერ [16]. მანვე შემოიღო ტერმინი "ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა". ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის ერთი დაგვიანებით, ვარიაციის ფორმულაში საწყისი მომენტის შეშფოთებისა და საწყისი პირობის წყვეტილობის ეფექტები პირველად გამოვლენილი იყო თ. თადუმაძის მიერ [48].

სადისერტაციო ნაშრომში, ვარიაციის ფორმულები დამტკიცებულია (1) განტოლებისთვის წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობით, საწყისი მონაცემების შეშფოთებების მიმართ.

პირობას

$$x(t)=\varphi(t),\ t<t_0,\ x(t_0)=x_0 \qquad (2)$$

ეწოდება წყვეტილი საწყისი პირობა, რადგანაც, საზოგადოდ , $x(t_0)\neq\varphi(t_0)$. (2) პირობაში $\varphi(t)$ არის უწყვეტი საწყისი ფუნქცია, რომელიც ახასიათებს სისტემის მდგომარეობას წარსულში ანუ სისტემის წინაისტორიას, ხოლო x_0 ვექტორი არის სისტემის მდგომარეობა საწყის t_0 მომენტში. (2) პირობა მიუთითებს იმაზე, რომ სისტემის ყოფაქცევა t_0 მომენტში შეიძლება არ იყოს მისი წარსულის უწყვეტი გაგრძელება არამედ იგი შეიძლება იცვლებოდეს მყისიერად, მაგალითად ორგანიზმში ვირუსების მომენტალური შემოჭრა, შემოსავლის მომენტალური ცვლილება და ა. შ.

პირობას

$$x(t)=\varphi(t),\ t\leq t_0$$

ეწოდება უწყვეტი საწყისი პირობა, რადგანაც, ყოველთვის $x(t_0)=\varphi(t_0)$.

წყვეტილი საწყისი პირობის შემთხვევაში, საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება საწყისი მომენტის, ფაზურ კოორდინატებში შემავალი დაგვიანების პარამეტრების, საწყისი ვექტორის, საწყისი და მართვის ფუნქციების ერთობლიობა, ხოლო უწყვეტი საწყისი პირობის შემთხვევაში საწყისი მონაცემების ერთობლიობა, განსხვავებით ზემოაღნიშნულისა, არ შეიცავს საწყის ვექტორს.

პირველ თავში, ძირითადი ინტერვალის მარჯვენა ბოლოს მიდამოში, დამტკიცებულია ვარიაციის ფორმულები (ლოკალური ფორმულები) (1) სამართი განტოლებისთვის წყვეტილი საწყისი პირობით, საწყისი მომენტის ცალმხრივი და ორმხრივი ვარიაციის შემთხვევისთვის. 1.1 პუნქტში ჩამოყალიბებულია ძირითადი თეორემები; ამოწერილია ლოკალურ ვარიაციის ფორმულებში საწყისი მონაცემების შეშფოთებისა და წყვეტილი საწყისი პირობის ეფექტები; დადგენილია განტოლებისა და საწყისი პირობის სახე რომელსაც აკმაყოფილებს ამონახსნის ვარიაცია; დადგენილია შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის ანალიზური სახე; საილუსტრაციოდ განხილულია მაგალითი.

აღვნიშნავთ, რომ, თეორემა 1.1-1.3–ის მსგავსი თეორემები აგრეთვე სამართლიანია განტოლებისათვის

$$\dot{x}(t)=f\big(t,x(t),x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_s),u(t),u(t-\theta_1),...,u(t-\theta_k)\big). \qquad (3)$$

ამავე პუნქტში (3) განტოლებისთვის და შესაბამისი წრფივი განტოლებისთვის ამოწერილია ვარიაციის ფორმულები. (3) განტოლებისათვის ვარიაციის ფორმულების დამტკიცება ხორციელდება 1.3 და 1.4 პუნქტებში მოყვანილი სქემით და არანაირ სიძნელეს არ წარმოადგენს. შევნიშნავთ, რომ ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების დამტკიცებისას გამოიყენება (3) განტოლების შესაბამისი ვარიაციის ფორმულა.

1.2 პუნქტში დადგენილია ამონახსნის ნაზრდის რიგი მცირე პარამეტრის მიმართ და გამოთვლილია მისი მნიშვნელობა საწყის მომენტში. ეს შედეგები არსებითად გამოიყენება ვარიაციის ლოკალური ფორმულების დამტკიცებისას, რომელიც განხორციელებულია 1.3 და 1.4 პუნქტში.

სადისერტაციო ნაშრომში სიახლეს წარმოადგენს ის გარემოება, რომ ვარიაციის ფორმულები აქ დამტკიცებულია სამართი განტოლებისთვის მრავალი დაგვიანებით,

სადაც [50, 51] ნაშრომებისგან განსხვავებით განხორციელებულია დაგვიანების პარამეტრების შეშფოთება, ხოლო [52] შრომისგან განსხვავებით საწყისი მომენტისა და დაგვიანებების ვარიაცის ნიშნები, საზოგადოდ, ერთმანეთს არ ემთხვევა.

მეორე თავში, მთელს ძირითად ინტერვალზე, დამტკიცებულია ვარიაციის ფორმულები (გლობალური ფორმულები) (1) სამართი განტოლებისთვის უწყვეტი საწყისი პირობით, საწყისი მომენტის ცალმხრივი და ორმხრივი ვარიაციის შემთხვევისთვის. 2.1 პუნქტში ჩამოყალიბებულია ძირითადი თეორემები; ამოწერილია გლობალურ ვარიაციის ფორმულებში საწყისი მონაცემების შეშფოთებისა და უწყეტი საწყისი პირობის ეფექტები; დადგენილია განტოლებისა და საწყისი მონაცემების სახე რომელსაც აკმაყოფილებს ამონახსნის ვარიაცია; დადგენილია შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის ანალიზური სახე; საილუსტრაციოდ განხილულია მაგალითი. ამავე პუნქტში (3) განტოლებისთვის უწყვეტი საწყისი პირობით აგრეთვე ამოწერილია ვარიაციის ფორმულა.

2.2 პუნქტში დადგენილია ამონახსნის ნაზრდის რიგი მცირე პარამეტრის მიმართ და გამოთვლილია მისი მნიშვნელობა საწყის მომენტში, რომლებიც არსებითად გამოიყენება ვარიაციის გლობალური ფორმულების დამტკიცებისას, რომლებიც განხორციელებულია 2.3 და 2.4 პუნქტში.

აღვნიშნავთ, რომ ვარიაციის ფორმულების დამტკიცება განხორციელებულია [49]-ში მოყვანილი მეთოდის საფუძველზე.

სადისერტაციო ნაშრომის მეორე ნაწილი ეხება ოპტიმალური ამოცანების გამოკვლევას. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობა–პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპის ანალოგი სწრაფქმედების ოპტიმალური ამოცანისათვის

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), x(t-\tau), u(t)\right),\ t \in [t_0, t_1],$$
$$x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0],\ x(t_1) = x_1,$$
$$t_1 - t_0 \to \min$$

პირველად დამტკიცებული იყო გურამ ხარატიშვილის მიერ ნაშრომში [23], ამ შედეგის გავრცელებას სხვადასხვა კლასის ოპტიმალურ ამოცანებზე დაგვიანებით მრავალი ნაშრომი მიეძღვნა, მათშორის [3, 4, 7, 8, 10, 15, 17-19, 24, 29-32, 34, 35, 37, 42, 45, 49].

მესამე თავში განხილულია ოპტიმალური ამოცანა წყვეტილი საწყისი პირობით

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(t, x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_s), u(t), u(t-\theta_1), ..., u(t-\theta_k)\right), \quad t \in [t_0, t_1], \\ x(t) = \varphi(t), \quad t < t_0, \quad x(t_0) = x_0, \\ q^i\left(t_0, t_1, \tau_1, ..., \tau_s, x_0, x(t_1)\right) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \\ q^0\left(t_0, t_1, \tau_1, ..., \tau_s, x_0, x(t_1)\right) \to \min. \end{cases} \tag{4}$$

3.1 პუნქტში თეორემების სახით მოყვანილია ელემენტის (ელემენტის ქვეშ იგულისხმება საწყისი მონაცემისა და საბოლოო მომენტის ერთობლიობა) ლოკალურად ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები: საწყისი და საბოლოო მომენტებისთვის უტოლობისა და ტოლობის სახით; დაგვიანების პარამეტრებისთვის ტოლობის სახით; საწყისი ვექტორისთვის ტოლობის სახით; საწყისი და მართვის ფუნქციებისთვის ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპის ფორმით. ზოგადი შედეგები დაკონკრეტებულია

ოპტიმალური ამოცანისათვის დამაგრებული ბოლოებით და ინტეგრალური ფუნქციონალით.

თეორემა 3.1 დამტკიცებულია 1.1 პუნქტში (3) განტოლებისთვის მოყვანილი ამონახსნის ვარიაციის ფორმულებისა და კრიტიკულობის გამყრელიძე-ხარატიშვილის აუცილებელი პირობის საფუძველზე [49]. სახელდობრ, ვექტორულ სივრცეში აგებულ სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილ სიმრავლეზე შემოღებულია ასახვა, დამტკიცებულია მისი უწყვეტობა და კრიტიკულობა ამოზნექილ ფილტრზე, გამოთვლილია ასახვის დიფერენციალი, ამის შემდეგ კრიტიკულობის აუცილებელი პირობიდან მიღებულია ელემენტის ლოკალურად ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები.

მეოთხე თავში განხილულია ოპტიმალური ამოცანა უწყვეტი საწყისი პირობით. ანალოგიური სქემით დამტკიცებულია ელემენტის (ამ შემთხვევაში ელემენტი არ შეიცავს საწყის ვექტორს) ლოკალურად ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები.

სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი შედეგები მოხსენებული იყო სამეცნიერო სემინარებზე (თსუ გმი, ნანტის უნივერსიტეტი), საერთაშორისო კონფერენციაზე (კვიპროსი, ბაქო, ჩინეთი, ისრაელი) და გამოქვეყნებულია [39–46] შრომებში.

კვლევა განხორციელდა შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის ფინანსური მხარდაჭერით [გრანტის ნომერი № PhD_F_17_89].

თავი I. ამონახსნის ვარიაციის ლოკალური ფორმულები სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისათვის მრავალი დაგვიანებით და წყვეტილი საწყისი პირობით

1.1. ამოცანის დასმა და ძირითადი შედეგების ფორმულირება

ვთქვათ, $\mathbb{R}^n$ არის $x=\left(x^1,...,x^n\right)^T$ წერტილების n – განზომილებიანი ვექტორული სივრცე, სადაც T აღნიშნავს ტრანსპონირების ოპერაციას. ვთქვათ, $I=[a,b]$ არის სასრული ინტერვალი, ხოლო $0<h_{i1}<h_{i2}$, $i=\overline{1,s}$ მოცემული რიცხვებია; ვთქვათ $O\subset\mathbb{R}^n$ და $U_0\subset\mathbb{R}^r$ არის ღია სიმრავლეები, ხოლო n – განზომილებიანი $f\left(t,x,x_1,...,x_s,u\right)$ ვექტორ–ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) თითქმის ყველა $t\in I$ ფუნქცია $f\left(t,\cdot\right):O^{1+s}\times U_0\to\mathbb{R}^n$ უწყვეტად წარმოებადია;

ბ) ყოველი ფიქსირებული $\left(x,x_1,...,x_s,u\right)\in O^{1+s}\times U_0$ წერტილისათვის ფუნქციები

$$f(t,x,x_1,...,x_s,u),\ f_x(t,x,x_1,...,x_s,u),\ \sum_{i=1}^{s}f_{x_i}(t,x,x_1,...,x_s,u),\ i=\overline{1,s},\ f_u(t,x,x_1,...,x_s,u)$$

ზომადია I ინტერვალზე;

გ) ნებისმიერი $K\subset O$ და $U\subset U_0$ კომპაქტებისათვის არსებობს ფუნქცია $m_{K,U}(t)\in L_1\left(I,\mathbb{R}_+\right),\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|f(t,x,x_1,...,x_s,u)\right|+\left|f_x(t,\cdot)\right|+\sum_{i=1}^{s}\left|f_{x_i}(t,\cdot)\right|++\left|f_u(t,\cdot)\right|\le m_{K,U}(t)$$

ყოველი $\left(x,x_1,...,x_s,u\right)\in K^{1+s}\times U$ და თითქმის ყველა $t\in I.$

ვთქვათ Φ არის უწყვეტი $\varphi:I_1=[\hat{\tau},b]\to O$ ფუნქციების სივრცე, სადაც $\hat{\tau}=a-\max\left\{h_{12},...,h_{s2}\right\}$ და ვთქვათ Ω არის ზომადი $u\left(t\right)$, $t\in I$ ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $clu\left(I\right)\subset U_0$ და არის კომპაქტური სიმრავლე $\mathbb{R}^r$-ში.

ყოველ $\mu=(t_0,\tau_1,...,\tau_s,x_0,\varphi,u)\in\Lambda=[a,b)\times[h_{11},h_{12}]\times...\times[h_{s1},h_{s2}]\times O\times\Phi\times\Omega$ ელემენტს შევუ-საბამოთ დაგვიანებულ არგუმენტიანი სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}\left(t\right)=f\left(t,x\left(t\right),x\left(t-\tau_1\right),...,x\left(t-\tau_s\right),u\left(t\right)\right)\qquad(1.1)$$

წყვეტილი საწყისი პირობით

$$x(t)=\varphi(t),\ t\in[\hat{\tau},t_0),x(t_0)=x_0. \tag{1.2}$$

განსაზღვრება 1.1. ვთქვათ $\mu=(t_0,\tau_1,...,\tau_s,x_0,\varphi,u)\in\Lambda$. ფუნქციას $x(t)=x(t;\mu)\in O$, $t\in[\hat{\tau},t_1]$, $t_1\in(t_0,b]$, ეწოდება (1.1) განტოლების ამონახსნი (1.2) საწყისი პირობით, ან μ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_1]$ ინტერვალზე, თუ ის აკმაყოფილებს (1.2) - პირობას და აბსოლუტურად უწყვეტია $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე და აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას თითქმის ყველგან $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე.

ვთქვათ, $\mu_0=(t_{00},\tau_{10},...,\tau_{s0},x_{00},\varphi_0,u_0)\in(a,b)\times[h_{11},h_{12}]\times...\times[h_{s1},h_{s2}]\times O\times\Phi\times\Omega$ ფიქსირებული ელემენტია. შემოვიღოთ ვარიაციათა სიმრავლე

$$V=\Big\{\delta\mu=(\delta t_0,\delta\tau_1,...,\delta\tau_s,\delta x_0,\delta\varphi,\delta u):\delta t_0\in(a,b)-t_{00},\delta\tau_i\in(h_{i1},h_{i2})-\tau_{i0},i=\overline{1,s},$$

$$\delta x_0\in O-x_{00},\delta\varphi=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\delta\varphi_i,\delta\varphi_i\in\Phi-\varphi_0,i=\overline{1,k}\ ,\delta u\in\Omega-u_0,|\delta t_0|\le\alpha,|\delta\tau_i|\le\alpha,i=\overline{1,s},$$

$$|\delta x_0|\le\alpha,|\lambda_i|\le\alpha,i=\overline{1,k},\|\delta u\|\le\alpha\Big\},$$

სადაც $\alpha>0$ ფიქსირებული რიცხვია, $(a,b)-t_{00}=\{\delta t_0=t_0-t_{00}:\forall t_0\in(a,b)\}$ და $\|\delta u\|=\sup\{\delta u(t):t\in I\}$.

ვთქვათ, $x_0(t)$ არის μ_0 ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_{10}]$ ინტერვალზე. არსებობს რიცხვები $\delta_1>0$ და $\varepsilon_1>0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in(0,\varepsilon_1)\times V$ ელემენტისათვის $\mu_0+\varepsilon\delta\mu\in\Lambda$ და მას შეესაბამება ამონახსნი $x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრული ინტერვალზე $[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]\subset I_1$ (იხ. თეორემა 1.8, გვ. 28, [49]). ცხადია, რომ $x(t;\mu_0)$ ამონახსნი არის $x_0(t)$ ამონახსნის გაგრძელება $[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]$ ინტე-რვალზე. ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x_0(t)$ ამონახსნი განსაზღვრულია $[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]$ ინტერვალზე.

შემოვიღოთ $x_0(t):=x(t;\mu_0)$, $t\in[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]$ ამონახსნის ნაზრდი:

$$\Delta x(t;\varepsilon\delta\mu)=x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)-x_0(t),\forall(\varepsilon,\delta\mu)\in(0,\varepsilon_1)\times V. \tag{1.3}$$

ამოცანის ფორმულირება: ამონახსნის ნაზრდი $\Delta x(t;\varepsilon\delta\mu)$ გარკვეულ ინტერვალზე $\hat{I}\subset[t_{00}t_{10}+\delta_1]$ წარმოადგინეთ ორი შესაკრების სახით ისეთნაირად, რომ პირველი შესაკრები იყოს ε- ის მიმართ პირველი ხარისხის, ხოლო მისი კოეფიციენტი იყოს წრფივი ასახვა საწყისი მონაცემების შეშფოთებების მიმართ. გარდა ამისა, მეორე შესაკრები ε - თან შედარებით იყოს მაღალი რიგის უსასრულო მცირე თანაბრად $(t,\delta\mu)\in\hat{I}\times\widehat{V}$ მიმართ , სადაც $\hat{V}\subset V$ რაიმე სიმრავლეა.

თეორემა 1.1. *ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

1.1) $\tau_{s0}>...>\tau_{10}$ *და* $t_{00}+\tau_{s0}<t_{10}$;

1.2) *ფუნქცია* $\varphi_0(t)$ *აბსოლუტურად უწყვეტია, ხოლო* $\dot{\varphi}_0(t)$, $t\in I_1$ *შემოსაზღვრული;*

1.3) *ფუნქცია* $f(w,u)$, *სადაც* $w=(t,x,x_1,...,x_s)$ *შემოსაზღვრულია* $I\times O^{1+s}\times U_0$ *-ზე;*

1.4) *არსებობს სასრული ზღვარი*

$$\lim_{w\to w_0} f(w,u_0(t))=f^-,\ \ w\in(a,t_{00}]\times O^{1+s},$$

სადაც $w_0=(t_{00},x_{00},\varphi_0(t_{00}-\tau_{10}),...,\varphi_0(t_{00}-\tau_{s0}))$;

1.5) *არსებობს სასრული ზღვრები*

$$\lim_{(w_{1i},w_{2i})\to(w_{1i}^0,w_{2i}^0)}\left[f(w_{1i},u_0(t))-f(w_{2i},u_0(t))\right]=f_i,$$

სადაც $w_{1i},w_{2i}\in(a,b)\times O^{1+s}, i=\overline{1,s}$,

$$w_{1i}^0=(t_{00}+\tau_{i0},x_0(t_{00}+\tau_{i0}),x_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{10}),...,x_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{i-10}),$$
$$x_{00},\varphi_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{i+10}),...,\varphi_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{s0})),$$
$$w_{2i}^0=(t_{00}+\tau_{i0},x_0(t_{00}+\tau_{i0}),x_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{10}),...,x_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{i-10}),$$
$$\varphi_0(t_{00}),\varphi_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{i+10}),...,\varphi_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{s0})),$$

მაშინ არსებობს $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ *და* $\delta_2\in(0,\delta_1)$ *რიცხვები, რომელთათვისაც* $t_{10}-\delta_2>t_{00}+\tau_{s0}$ *ისეთი, რომ ნებისმიერი* $(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[t_{10}-\delta_2,t_{10}+\delta_2]\times(0,\varepsilon_2)\times V^-$ *ადგილი აქვს ტოლობას*

$$\Delta x(t;\varepsilon\delta\mu)=\varepsilon\,\delta x(t;\delta\mu)+o(t;\varepsilon\delta\mu), \tag{1.4}$$

სადაც $V^-=\{\delta\mu\in V:\delta t_0\le 0\}$ *და*

$$\delta x(t;\delta\mu)=-Y(t_{00};t)f^-\delta t_0+\beta(t;\delta\mu), \tag{1.5}$$

$$\beta(t;\delta\mu)=Y(t_{00};t)\delta x_0-\left[\sum_{i=1}^{s}Y(t_{00}+\tau_{i0};t)f_i\right]\delta t_0-\sum_{i=1}^{s}\Big[Y(t_{00}+\tau_{i0};t)f_i$$

$$+\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_{x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi\Big]\delta\tau_i$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi+\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_u[\xi]\delta u(\xi)d\xi,$$

აქ იგულისხმება, რომ

$$\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_{x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi=\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{i0}}Y(\xi;t)f_{x_i}[\xi]\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi$$

$$+\int_{t_{00}+\tau_{i0}}^{t}Y(\xi;t)f_{x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi;$$

$Y(s;t)$ *არის* $n\times n$ *მატრიც–ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას*

$$Y_\xi(\xi;t)=-Y(\xi;t)f_x[\xi]-\sum_{i=1}^{s}Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}],\ \xi\in[t_{00},t] \qquad (1.6)$$

და პირობას

$$Y(\xi;t)=\begin{cases}H, & \xi=t,\\ \Theta, & \xi>t;\end{cases} \qquad (1.7)$$

აქ

$$f_{x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}f,\ f_{x_i}[\xi]=f_{x_i}\big(\xi,x_0(\xi),x_0(\xi-\tau_{10}),...,x_0(\xi-\tau_{s0}),u_0(\xi)\big),$$

H *არის ერთეულოვანი მატრიცა, ხოლო* Θ *ნულოვანი მატრიცა,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{o(t;\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}=0,\ \text{თანაბრად}\ (t,\delta\mu)\in[t_{10}-\delta_2,t_{10}+\delta_2]\times V^-.$$

ზოგიერთი კომენტარი. $\delta x(t;\delta\mu)$ ფუნქციას ეწოდება $x_0(t),\quad t\in[t_{10}-\delta_2,t_{10}+\delta_2]$ ამონახსნის პირველი ვარიაცია, ხოლო (1.5) გამოსახულებას ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა; ზოგადობის შეუზღუდავად , ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ უტოლობა $\tau_{s0}>...>\tau_{10}$ შესრულებულია.

$$-\left[Y(t_{00};t)f^-+\sum_{i=1}^{s}Y(t_{00}+\tau_{i0};t)f_i\right]\delta t_0$$

$$-\sum_{i=1}^{s}\left[Y(t_{00}+\tau_{i0};t)f_i+\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_{x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi\right]\delta\tau_i$$

შესაკრები (1.5) ფორმულაში არის t_{00} საწყისი მომენტის (1.2) წყვეტილი საწყისი პირობისა და $\tau_i, i=\overline{1,s}$ დაგვიანებების შეშფოთების ეფექტი.

გამოსახულება

$$Y(t_{00};t)\delta x_0+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_u[\xi]\delta u(\xi)d\xi,$$

ფორმულა (1.5) - ში არის საწყისი x_{00} ვექტორის, საწყისი $\varphi_0(t)$ ფუნქციისა და მართვის $u_0(t)$ ფუნქციის შეშფოთების ეფექტი.

ადვილი მისახვედრია, რომ (1.5) შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ :

$$\delta x(t;\delta\mu)=\delta x_0(t;\delta\mu)+\sum_{i=1}^{s}\delta x_i(t;\delta\mu),$$

სადაც

$$\delta x_0(t;\delta\mu)=Y(t_{00};t)\left(\delta x_0-f^-\delta t_0\right)+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)\left[f_u[\xi]\delta u(\xi)-\sum_{i=1}^{s}f_{x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})\delta\tau_i\right]d\xi,$$

$$\delta x_i(t;\delta\mu)=-Y(t_{00}+\tau_{i0};t)f_i(\delta t_0+\delta\tau_i),i=\overline{1,s}.$$

კოშის ფორმულის ძალით (იხ. ლემა 2.3, გვ. 31, [49]) დავასკვნით, რომ

$$\delta x_0(t)=\begin{cases}\delta\varphi(t), & t\in[\hat{\tau},t_{00}),\\ \delta x_0(t;\delta\mu), & t\in[t_{00},t_{10}+\delta_2]\end{cases}$$

ფუნქცია აკმაყოფილებს წრფივ არაერთგვაროვან განტოლებას

$$\dot{\delta}x(t)=f_x[t]\delta x(t)+\sum_{i=1}^{s}f_{x_i}[t]\delta x(t-\tau_{i0})+f_u[t]\delta u(t)-\sum_{i=1}^{s}f_{x_i}[t]\dot{x}_0(t-\tau_{i0})\delta\tau_i$$

საწყისი პირობით

$$\delta x(t)=\delta\varphi(t),t\in[\hat{\tau},t_{00}),\delta x(t_{00})=\delta x_{00}-f^-\delta t_0;$$

ხოლო

$$\delta x_i(t)=\begin{cases}0, & t\in[\hat{\tau},t_{00}+\tau_{i0}),\\ \delta x_i(t;\delta\mu), & t\in[t_{00}+\tau_{i0},t_{10}+\delta_2]\end{cases}$$

ფუნქცია აკმაყოფილებს წრფივ ერთგვაროვან განტოლებას

$$\dot{\delta x}(t)=f_x[t]\delta x(t)+\sum_{i=1}^{s}f_{x_i}[t]\delta x(t-\tau_{i0})$$

საწყისი პირობით

$$\delta x(t)=0,\ t\in[\hat{\tau},t_{00}+\tau_{i0}),\delta x(t_{00}+\tau_{i0})=-f_i(\delta t_0+\delta\tau_i).$$

ამრიგად, ამონახსნის პირველი ვარიაცია შეიძლება გამოვთვალოთ ორი გზით: პირველი — ვიპოვოთ მატრიც ფუნქცია $Y(\xi;t)$, მეორე – ვიპოვოთ $s+1$ რაოდენობა წრფივ განტოლებათა ამონახსნები.

თეორემა 1.2. *ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 1.1 - ის 1.1)-1.3) და 1.5) პირობები ამასთან, არსებობს სასრული ზღვარი*

$$\lim_{w\to w_0}f(w,u_0(t))=f^+,\ w\in[t_{00},b)\times O^{1+s},\tag{1.8}$$

მაშინ არსებობს $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ *და* $\delta_2\in(0,\delta_1)$ *რიცხვები ისეთი, რომ* $t_{10}-\delta_2>t_{00}+\tau_{s0}$ *და ნებისმიერი* $(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[t_{10}-\delta_2,t_{10}+\delta_2]\times(0,\varepsilon_2)\times V^+$, *სადაც* $V^+=\{\delta\mu\in V:\delta t_0\geq 0\}$ *ადგილი აქვს (1.4) ფორმულას, სადაც*

$$\delta x(t;\delta\mu)=-Y(t_{00};t)f^+\delta t_0+\beta(t;\delta\mu).\tag{1.9}$$

თეორემა 1.3. *ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 1.1 - ის 1.1)-1.5) პირობები და (1.8) პირობა. ამასთან,* $f^-=f^+:=\hat{f}$. *მაშინ არსებობს რიცხვები* $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ *და* $\delta_2\in(0,\delta_1)$, *ისეთი, რომ* $t_{10}-\delta_2>t_{00}+\tau_{s0}$ *და ნებისმიერი* $(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[t_{10}-\delta_2,t_{10}+\delta_2]\times(0,\varepsilon_2)\times V$, *ადგილი აქვს (1.4) ფორმულას, სადაც*

$$\delta x(t;\delta\mu)=-Y(t_{00};t)\hat{f}\delta t_0+\beta(t;\delta\mu).$$

თეორემა 1.3 არის თეორემა 1.1 და 1.2 შედეგი.

შევნიშნავთ, რომ, თეორემა 1.1-1.3–ის მსგავსი თეორემები სამართლიანია განტოლებისათვის

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_s),u(t),u(t-\theta_1),...,u(t-\theta_k))$$

წყვეტილი საწყისი პირობით

$$x(t)=\varphi(t),\ t\in[\hat{\tau},t_0),x(t_0)=x_0.$$

სადაც განტოლების მარჯვენა მხარე, n – განზომილებიანი $f(t,x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k)$ ვექტორ–ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) თითქმის ყველა $t\in I$ ფუნქცია $f(t,\cdot):O^{1+s}\times U_0^{1+k}\to\mathbb{R}^n$ უწყვეტად წარმოებადია;

ბ) ყოველი ფიქსირებული $(x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k)\in O^{1+s}\times U_0^{1+k}$ წერტილისათვის ფუნქციები

$$f(t,\cdot),\ f_x(t,\cdot),\ \sum_{i=1}^{s}f_{x_i}(t,\cdot),\ i=\overline{1,s},\ f_u(t,\cdot)\,f_{u_i}(t,\cdot),i=\overline{1,k}$$

ზომადია I ინტერვალზე;

გ) ნებისმიერი $K\subset O$ და $U\subset U_0$ კომპაქტებისათვის არსებობს ფუნქცია $m_{K,U}(t)\in L_1(I,\mathbb{R}_+),\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|f(t,x,x_1,...,x_s,u)\right|+\left|f_x(t,\cdot)\right|+\sum_{i=1}^{s}\left|f_{x_i}(t,\cdot)\right|+\left|f_u(t,\cdot)\right|+\sum_{i=1}^{k}\left|f_{u_i}(t,\cdot)\right|\le m_{K,U}(t).$$

ამ შემთხვევაში გვექნება (იხ. თეორემა 1.1):

$$\delta x(t;\delta\mu)=-Y(t_{00};t)f^{-}\delta t_0+\beta(t;\delta\mu),t\in[t_{10}-\delta_2,t_{10}+\delta_2] \tag{1.10}$$

სადაც

$$\lim_{w\to w_0}f\left(w,u_0(t),u_0(t-\theta_1),...,u_0(t-\theta_k)\right)=f^{-},\quad w\in(a,t_{00}]\times O^{1+s},$$

$$\beta(t;\delta\mu)=Y(t_{00};t)\delta x_0-\left[\sum_{i=1}^{s}Y(t_{00}+\tau_{i0};t)f_i\right]\delta t_0-\sum_{i=1}^{s}\Big[Y(t_{00}+\tau_{i0};t)f_i$$

$$+\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_{x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi\Big]\delta\tau_i$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi+\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_u[\xi]\delta u(\xi)d\xi.$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_{u_i}[\xi]\delta u(\xi-\theta_i)d\xi,$$

$$f_{x_i}[\xi]=f_{x_i}\left(\xi,x_0(\xi),x_0(\xi-\tau_{10}),...,x_0(\xi-\tau_{s0}),u_0(\xi),u_0(\xi-\theta_1),...,u_0(\xi-\theta_k)\right).$$

ვთქვათ

$$f(t,x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k)=A(t)x+\sum_{i=1}^{s}A_i(t)x_i+B(t)u+\sum_{i=1}^{k}B_i(t)u_i,$$

სადაც $A(t),\ A_i(t),\ i=\overline{1,s},\ B(t),\ B_i(t),\ \overline{1,k}$ უწყვეტი მატრიც ფუნქციებია, ხოლო $u_0(t)$ ფუნქცია უწყვეტია წერტილებში $t_{00}, t_{00}-\theta_i, i=1,...,k.$ ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\delta x(t;\delta\mu) = -Y(t_{00};t)\Big[A(t_{00})x_0(t_{00}) + \sum_{i=1}^{s} A_i(t_{00})x_0(t_{00}-\tau_{i0}) + B(t_{00})u_0(t_{00})$$

$$+\sum_{i=1}^{k} B_i(t_{00})u_0(t_{00}-\theta_i)\Big]\delta t_0 + \beta(t;\delta\mu),\ t\in[t_{10}-\delta_2, t_{10}+\delta_2]$$

სადაც

$$\beta(t;\delta\mu) = Y(t_{00};t)\delta x_0 - \Big[\sum_{i=1}^{s} Y(t_{00}+\tau_{i0};t)A_i(t_{00}+\tau_{i0})\big(x_{00}-\varphi_0(t_{00})\big)\Big]\delta t_0$$

$$-\sum_{i=1}^{s}\Big[Y(t_{00}+\tau_{i0};t)A_i(t_{00}+\tau_{i0})\big(x_{00}-\varphi_0(t_{00})\big)$$

$$+\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)A_i(\xi)\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi\Big]\delta\tau_i$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_{i0};t)A_i(\xi+\tau_{i0})\delta\varphi(\xi)d\xi + \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)B(\xi)\delta u(\xi)d\xi.$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)B_i(\xi)\delta u(\xi-\theta_i)d\xi.$$

შეშფოთებული განტოლების ამონახსნი გამოითვლება ფორმულით

$$x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu) = x_0(t) + \varepsilon\delta x(t;\delta\mu) + o(t;\varepsilon\delta\mu),\ t\in I,$$

უკანასკნელი ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი ანალიზური ფორმით. ფაქტობრივად, მცირე $\varepsilon > 0$-თვის მივიღებთ

$$x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu) \approx x_0(t) + \varepsilon\delta x(t;\delta\mu),\ t\in[t_{10}-\delta, t_{10}+\delta].$$

ქვემოთ, შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის აგებასთან დაკავშირებით, მაგალითის სახით განხილულია ერთი დაგვიანების შემცველი სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება წყვეტილი საწყისი პირობით

მაგალითი.

a) ვთქვათ, $t_{00}=0,\ t_{10}=3,\ h_{11}=0.5,\ h_{12}=1.5,\ \tau_0=1,\ \varphi_0(t)=1,\ x_{00}=2,\ \delta=1.5,$

$$u_0(t)=\begin{cases}\sqrt{2(t+2)^2+1}, & t\in[0,1),\\ \sqrt{2(4t-1)^2+(t+1)^2-3}, & t\in[1,2),\\ \sqrt{2(4t-1)^2+(4t-5)^2-3}, & t\in[2,3],\end{cases}$$

ე.ი. ამ შემთხვევაში $\mu_0=(1,2,1,u_0)$ და განვიხილოთ თავდაპირველი სკალარული განტოლება

$$\dot{x}(t)=f\left(t,x(t),x(t-1),u_0(t)\right)=2x^2(t)+x^2(t-1)-u_0^2(t)+1,\ t\in[0,3],$$

საწყისი პირობით

$$x(t)=1,\ t\in[-1.5,0),\ x(0)=2.$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$x_0(t)=x(t;\mu_0)=\begin{cases}1, & t\in[-1.5,0),\\ t+2, & t\in[0,1),\\ 4t-1, & t\in[1,3].\end{cases}$$

ხ) შემოვიღოთ სიმრავლეები:

$$O=\{2+\rho_4:\rho_4\in R\},\quad \Phi=\{1+2\rho_2\cos t:\rho_2\in R\},\quad \Omega=\{u_0(t)+\rho_3\sin t:\rho_3\in R\}.$$

ვარიაციათა სიმრავლე იქნება

$$V=\{\delta\mu=(\delta\tau,\delta x_0,\delta\varphi,\delta u):\delta\tau=\rho_1\in(0.5,1.5)-1,\delta x_0=\rho_4\in O-2,\delta\varphi=2\rho_2\cos t\in\Phi-1,$$

$$\delta u=\rho_3\sin t\in\Omega-u_0,\ |\rho_i|\le\alpha,\ i=\overline{1,4}\},$$

სადაც $\alpha>0$ მოცემული რიცხვია.

ვთქვათ $\varepsilon>0$ რიცხვი იმდენად მცირეა, რომ $\forall\delta\mu\in V,\ \mu_0+\varepsilon\delta\mu\in(0.5,1.5)\times O\times\Phi\times\Omega$

და არსებობს ამონახსნი $x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრული $[-1.5,3]$ შუალედზე.

$[-1.5,3]$ ინტერვალზე ანალიზურად ვიპოვოთ შეშფოთებული კოშის ამოცანის ამონახსნი მეორე გზით, რომელიც გულისხმობს წრფივი განტოლების ამოხსნას (იხ. გვ. 16).

c) შეშფოთებული განტოლება

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), x(t-1-\varepsilon\rho_1), u(t)\right) = 2x^2(t) + x^2(t-1-\varepsilon\rho_1) - \left[u_0(t) + \varepsilon\rho_3 \sin t\right]^2 + 1, \ t \in [0,3]$$

შეშფოთებული საწყისი პირობით

$$x(t) = 1 + 2\varepsilon\rho_2 \cos t, \ t \in [-1.5, 0), \ x(0) = 2 + \varepsilon\rho_4,$$

ცხადია, რომ

$$f_x[t] = 4x_0(t), \ f_y[t] = 2x_0(t-1), \ f_u[t] = -2u_0(t).$$

ამრიგად,

$\delta x_0(t;\delta\mu), \ t \in [-1.5, 3]$ და $\delta x_1(t;\delta\mu), \ t \in [1,3]$ ფუნქციები შესაბამისად იქნება შემდეგი კოშის ამოცანების ამონახსნები (იხ. გვ. 17 და 18)

ამდენად,

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = 4x_0(t)\delta x(t) + 2x_0(t-1)\delta x(t-1) - 2\rho_1 x_0(t-1)\dot{x}_0(t-1) \\ \qquad -2\rho_3 \sin t u_0(t), \quad t \in (0,3), \\ \dot{\delta x}(t) = 2\rho_2 \cos t, \quad t \in [-1.5, 0), \quad \delta x(0) = \rho_4; \end{cases} \tag{1.11}$$

შესაბამისად, გვექნება

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = 4x_0(t)\delta x(t) + 2x_0(t-1)\delta x(t-1), \quad t \in (1,3], \\ \delta x(t) = 0, \quad t \in [0,1), \quad \delta x(1) = -f_1\rho_1 = -3\rho_1. \end{cases} \tag{1.12}$$

აქ f_1 არის წყვეტილი საწყისი პირობის ეფექტი და მას აქვს სახე

$$f_1 = f\left(t_{00}+1, x_0(t_{00}+1), x_0(t_{00}+1-1), u_0(t_{00}+1)\right)$$

$$-f\left(t_{00}+1, x_0(t_{00}+1), \varphi_0(t_{00}+1-1), u_0(t_{00}+1)\right) = 4 - 1 = 3.$$

ელემენტარული გარდაქმნებით (1.11) განტოლების ამონახსნია

$$\delta x_0(t;\delta\mu) = \begin{cases} 2\rho_2 \cos t, & t \in [-1.5, 0), \\ \delta x_{01}(t), & t \in [0,1), \\ \delta x_{02}(t), & t \in [1,2), \\ \delta x_{03}(t), & t \in [2,3), \end{cases} \tag{1.13}$$

სადაც

$$\delta x_{01}(t)=e^{2t(t+4)}\left(\rho_4+\int_0^t e^{-2s(s+4)}\left(4\rho_2\cos(s-1)-2\rho_3\sqrt{2(s+1)^2+1}\right)ds\right),$$

$$\delta x_{02}(t)=e^{8\left(2t^2-t-1\right)}\left(\delta x_{01}(1)+\int_1^t e^{8\left(1+s-2s^2\right)}\left[2(s+1)\delta x_{11}(s-1)-2\rho_1(s+1)\right.\right.$$

$$\left.-2\rho_3\sin s\sqrt{2(4s-1)+(s+1)^2-3}\right)ds,$$

$$\delta x_{03}(t)=e^{8\left(2t^2-t-6\right)}\left(\delta x_{02}(2)+\int_2^t e^{8\left(6+s-2s^2\right)}\left[2(4s-5)\delta x_{02}(s-1)-8\rho_1(4s-5)\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho_3\sqrt{2(4s-1)^2+(4s-5)^2-3}\right]ds\right).$$

(1.12) განტოლების $\delta x_1(t;\delta\mu)$ ამონახსნს აქვს სახე

$$\delta x_1(t;\delta\mu)=\begin{cases}0, & t\in[0,1),\\ \delta x_{11}(t), & t\in[1,2),\\ \delta x_{12}(t), & t\in[2,3),\end{cases}\tag{1.14}$$

სადაც

$$\delta x_{11}(t)=-3\rho_1 e^{8\left(2t^2-t-1\right)},$$

$$\delta x_{12}(t)=e^{8\left(2t^2-t-6\right)}\left(\delta x_{11}(2)+\int_2^t e^{8\left(6-t-2t^2\right)}\left[2(4s-5)\delta x_{11}(s-1)\right]ds\right).$$

ამრიგად, შეშფოთებული განტოლების მიახლოებულ ამონახსნს $x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)$ აქვს სახე

$$x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)\approx 4t-1+\varepsilon\left(\delta x_0(t;\delta\mu)+\delta x_1(t;\delta\mu)\right),\ t\in[1.5,3]$$

(იხ (1.13) და (1.14)).

1.2. ლემები ამონახსნის ნაზრდის შეფასების შესახებ

ყოველ $\mu=(t_0,\tau_1,...,\tau_s,x_0,\varphi,u)\in\Lambda$ ელემენტს შევუსაბამოთ ფუნქციონალურ-დიფე-რენციალური განტოლება

$$\dot y(t)=f(t_0,\tau_1,...,\tau_s,\varphi,y,u)(t)\tag{1.15}$$

საწყისი პირობით

$$y(t_0) = x_0, \tag{1.16}$$

სადაც

$$f(t_0,\tau_1,...,\tau_s,\varphi,y,u)(t) = f\big(t,y(t),h(t_0,\varphi,y)(t-\tau_1),...,h(t_0,\varphi,y)(t-\tau_s),u(t)\big)$$

ხოლო $h(t_0,\varphi,y)(t)$ ოპერატორი განისაზღვრება ფორმულით

$$h(t_0,\varphi,y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t\in[\hat{\tau},t_0) \\ y(t), & t\in[t_0,b]. \end{cases} \tag{1.17}$$

განსაზღვრება 1.2. აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას $y(t) = y(t;\mu)\in O,\quad t\in[r_1,r_2]\subset I$ ეწოდება (1.15) განტოლების ამონახსნი (1.16) საწყისი პირობით ან μ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, განსაზღვრული $[r_1,r_2]$ ინტერვალზე, თუ $t_0\in[r_1,r_2], y(t_0)=x_0$ და ფუნქცია $y(t)$ აკმაყოფილებს (1.15) განტოლებას თითქმის ყველგან $[r_1,r_2]$ ინტერვალზე.

შენიშვნა 1.1. ვთქვათ $y(t;\mu),\quad t\in[r_1,r_2]$ არის $\mu=(t_0,\tau_1,...,\tau_s,x_0,\varphi,u)\in\Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი. მაშინ ფუნქცია

$$x(t;\mu) = h\big(t_0,\varphi,y(\cdot;\mu)\big)(t), t\in[\hat{\tau},r_2], \tag{1.18}$$

არის (1.1) განტოლების ამონახსნი (1.2) საწყისი პირობით (იხ. განსაზღვრება 1.1. და (1.17)).

ლემა 1.1. *ვთქვათ $y_0(t)$ არის μ_0 ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[r_1,r_2]\subset(a,b)$ ინტერვალზე; ვთქვათ $t_{00}\in[r_1,r_2),\quad \tau_{i0}\in(h_{i1},h_{i2}),\quad i=\overline{1,s}$ და ვთქვათ $K_1\subset O$ არის კომპაქტური სიმრავლე, რომელიც შეიცავს $\varphi_0(I_1)\cup y_0([r_1,r_2])$ სიმრავლის რაიმე მიდამოს, ხოლო $U_1\subset U_0$ არის კოპაქტური სიმრავლე, რომელიც შეიცავს $clu_0(I)$ სიმრავლი მიდამოს . მაშინ არსებობს რიცხვები $\varepsilon_1>0$ და $\delta_1>0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in(0,\varepsilon_1)\times V$, გვაქვს $\mu_0+\varepsilon\delta\mu\in\Lambda$. ამასთან, ამ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი $y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრულია ინტერვალზე $[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]\subset I$.*

გარდა ამისა,

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0(t) + \varepsilon\delta\varphi(t) \in K_1, \quad t \in I_1; \\ u(t) = u_0(t) + \varepsilon\delta u(t) \in U_1, \quad t \in I; \\ y(t;\mu_0 + \varepsilon\delta\mu) \in K_1, \quad t \in [r_1 - \delta_1, r_2 - \delta_1] \end{cases} \tag{1.19}$$

და

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t;\mu_0 + \varepsilon\delta\mu) = y(t;\mu_0), \textit{ თანაბრად } (t,\delta\mu) \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \times V.$$

ეს ლემა არის თეორემა 1.8 - ის შედეგი ([49], გვ. 28).

ლემა 1.2. *ვთქვათ* $x_0(t)$ *არის* $\mu_0 = (t_{00}, \tau_{10}, ..., \tau_{s0}, x_0, \varphi_0, u_0) \in \Lambda$ *ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული* $[\hat{\tau}, t_{10}]$ *ინტერვალზე (იხ. განსაზღვრება 1.1); ვთქვათ* $t_{00}, t_{10} \in (a,b), \quad \tau_{i0} \in (h_{i1}, h_{i2}), i = \overline{1,s}$ *და ვთქვათ* $K_1 \subset O$ *არის კომპაქტური სიმრავლე, რომელიც შეიცავს* $\varphi_0(I_1) \cup x_0([t_{00}, t_{10}])$ *სიმრავლის რაიმე მიდამოს. მაშინ არსებობს რიცხვები* $\varepsilon_1 > 0$ *და* $\delta_1 > 0$ *ისეთი, რომ ნებისმიერი* $(\varepsilon, \delta\mu) \in (0, \varepsilon_1) \times V$, *გვაქვს* $\mu_0 + \varepsilon\delta\mu \in \Lambda$. *ამასთან, ამ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი* $x(t;\mu_0 + \varepsilon\delta\mu)$ *განსაზღვრულია ინტერვალზე* $[\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1] \subset I_1$. ამასთან,

$$x(t;\mu_0 + \varepsilon\delta\mu) \in K_1, \;\; t \in [\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1]. \tag{1.20}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ ლემა 1.1-ში დავუშვებთ $r_1 = t_{00}$, $r_2 = t_{10}$, მაშინ $x_0(t) = y_0(t), \; t \in [t_{00}, t_{10}]$ და

$$x(t;\mu_0 + \varepsilon\delta\mu) = h(t_0, \varphi, y(\cdot, \mu_0 + \varepsilon\delta\mu)), (t, \varepsilon, \delta\mu) \in [\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1] \times (0, \varepsilon_1) \times V$$

(იხ. (1.18)). ამდენად, ლემა 1.2. წარმოადგენს ლემა 1.1-ის შედეგს (იხ. (1.19)).

შენიშვნა 1.2. ერთადერთობიდან გამომდინარეობს, რომ $y(t;\mu_0)$ ამონახსნი არის $y_0(t)$ ამონახსნის გაგრძელება $[r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1]$ ინტერვალზე. მას კვლავ აღვნიშნავთ $y_0(t)$.

ლემა 1.1 საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ $y_0(t) = y(t;\mu_0)$ ამონახსნის ნაზრდი

$$\Delta y(t) = \Delta y(t;\varepsilon\delta\mu) = y(t;\mu_0 + \varepsilon\delta\mu) - y_0(t), (t, \varepsilon, \delta\mu) \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \times (0, \varepsilon_1) \times V. \tag{1.21}$$

ცხადია,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Delta y(t;\varepsilon\delta\mu) = 0, \tag{1.22}$$

თანაბრად $(t,\delta\mu) \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \times V$ (იხ. ლემა 1.1).

ლემა 1.3. *ვთქვათ* $\tau_{s0} > ... > \tau_{10}$ *და* $t_{00} + \tau_{s0} \le r_2$. *ამასთან, ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 1.1 - ის 1.2)-1.4) პირობები. მაშინ არსებობს რიცხვი* $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ *ისეთი, რომ*

$$\max_{t \in [t_{00}, r_2 + \delta_1]} |\Delta y(t)| \le O(\varepsilon \delta\mu) \tag{1.23}$$

ნებისმიერი $(\varepsilon, \delta\mu) \in (0, \varepsilon_2) \times V^-$, *სადაც*

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} O(\varepsilon\delta\mu) / \varepsilon = g(\delta\mu)$, *თანაბრად* $\delta\mu \in V^-$ *და* $|g(\delta\mu)| \le const$. *ამასთან,*

$$\Delta y(t_{00}) = \varepsilon \left[\delta x_0 - f^- \delta t_0 \right] + o(\varepsilon\delta\mu). \tag{1.24}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ იმდენად მცირეა, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon, \delta\mu) \in (0, \varepsilon_2) \times V^-$ ადგილი აქვს უტოლობებს

$$t_0 + \tau_i > t_{00}, \quad i = \overline{1, s}, \tag{1.25}$$

სადაც $t_0 = t_{00} + \varepsilon \delta t_0$, $\tau_i = \tau_{i0} + \varepsilon\delta\tau_i$.

$[t_{00}, r_2 + \delta_1]$ ინტერვალზე ფუნქცია $\Delta y(t) = y(t) - y_0(t)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta y}(t) = a(t; \varepsilon\delta\mu), \tag{1.26}$$

სადაც

$$a(t; \varepsilon\delta\mu) = f(t_0, \tau_1, ..., \tau_s, \varphi, y_0 + \Delta y, u)(t) - f(t_{00}, \tau_{10}, ..., \tau_{s0}, \varphi_0, y_0, u_0)(t) \tag{1.27}$$

გადავწეროთ (1.26) ინტეგრალური ფორმით

$$\Delta y(t) = \Delta y(t_{00}) + \int_{t_{00}}^{t} a(\xi; \varepsilon\delta\mu) d\xi.$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$|\Delta y(t)| \le |\Delta y(t_{00})| + a_1(t; t_{00}, \varepsilon\delta\mu), \tag{1.28}$$

სადაც

$$a_1(t; t_{00}, \varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t} |a(\xi; \varepsilon\delta\mu)| d\xi, \quad t \in [t_{00}, r_2 + \delta_1].$$

დავამტკიცოთ (1.24) ფორმულა. გვაქვს

$$\Delta y(t_{00}) = y(t_{00}; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu) - y_0(t_{00}) = x_{00} + \varepsilon\delta x_0$$

$$+ \int_{t_0}^{t_{00}} f\big(t, y_0(t) + \Delta y(t), \varphi(t - \tau_1), ..., \varphi(t - \tau_s), u(t)\big) dt - x_{00} \tag{1.29}$$

(იხ. (1.25) და (1.17)).

ცხადია, თუ $t \in [t_0, t_{00}]$, მაშინ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \big(t, y_0(t) + \Delta y(t), \varphi(t - \tau_1), ..., \varphi(t - \tau_s)\big) = \lim_{t \to t_{00}-} \big(t, y_0(t), \varphi_0(t - \tau_{10}), ..., \varphi_0(t - \tau_{s0})\big) = w_0,$$

(იხ. (1.22)). მაშასადამე,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in[t_0,t_{00}]}\left|f\left(t,y_0\left(t\right)+\Delta y\left(t\right),\varphi\left(t-\tau_1\right),...,\varphi\left(t-\tau_s\right),u\left(t\right)\right)-f^-\right|=0.$$

ამრიგად,

$$\int_{t_0}^{t_{00}} f\left(t,y_0\left(t\right)+\Delta y\left(t\right),\varphi\left(t-\tau_1\right),...,\varphi\left(t-\tau_s\right),u\left(t\right)\right)dt=-\varepsilon f^-\delta t_0$$

$$+\int_{t_0}^{t_{00}}\left[f\left(t,y_0\left(t\right)+\Delta y\left(t\right),\varphi\left(t-\tau_1\right),...,\varphi\left(t-\tau_k\right),u\left(t\right)\right)-f^-\right]dt=-\varepsilon f^-\delta t_0+o\left(\varepsilon\delta\mu\right). \quad (1.30)$$

(1.29)-ში (1.30) გათვალისწინებით მივიღებთ (1.24)-ს.

ახლა დავამტკიცოთ (1.23) უტოლობა. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ $K_1\subset O$ და $U_1\subset U_0$ კომპაქტური სიმრავლეებისთვის არსებობს $L_{K_1,U_1}\left(t\right)\in L_1\left(I,\mathbb{R}_+\right)$ ფუნქცია ისეთი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|f\left(t,x,x_1,...,x_s,u_1\right)-f\left(t,y,y_1,...,y_s,u_2\right)\right|\le L_{K_1,U_1}\left(t\right)\left(\left|x-y\right|+\sum_{i=1}^{s}\left|x_i-y_i\right|+\left|u_1-u_2\right|\right)$$

თითქმის ყველა $t\in I$ და ნებისმიერი $\left(x,y\right)\in K^2$, $\left(x_i,y_i\right)\in K^2$, $i=\overline{1,s}$, $u_1,u_2\in U_1$. (იხ.ლემა 2.2, გვ. 29, [49]).

ახლა შევაფასოთ $a_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)$, $t\in\left[t_{00},r_2+\delta_1\right]$. ცხადია, რომ

$$a_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)\le\int_{t_{00}}^{t}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi+\sum_{i=1}^{s}a_{2i}\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)+\varepsilon\int_{t_{00}}^{t}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|\delta u\left(\xi\right)\right|d\xi, \quad (1.31)$$

სადაც

$$a_{2i}(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t}L_{K_1,U_1}(\xi)\left|h(t_0,\varphi,y_0+\Delta y)(\xi-\tau_i)-h(t_{00},\varphi_0,y_0)(\xi-\tau_{i0})\right|d\xi$$

(იხ. (1.27)).

აშკარაა, რომ

$$\varepsilon\int_{t_{00}}^{t}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|\delta u\left(\xi\right)\right|d\xi\le\varepsilon\alpha\int_I L_{K_1,U_1}\left(t\right)dt=O\left(\varepsilon\right).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\rho_{i1}=\min\left\{t_0+\tau_i,t_{00}+\tau_{i0}\right\},\quad \rho_{i2}=\max\left\{t_{00}+\tau_i,t_{00}+\tau_{i0}\right\}$$

ცხადია, რომ $\rho_{i2}\ge\rho_{i1}>t_{00}$ და $\rho_{i2}-\rho_{i1}=O\left(\varepsilon\delta\mu\right)$.

ვთქვათ $t\in\left[t_{00},\rho_{11}\right)$, მაშინ როცა $\xi\in\left[t_{00},t\right]$, ყოველი $i=\overline{1,s}$ გვექნება $\xi-\tau_i<t_0$ და $\xi-\tau_{i0}<t_{00}$.

აქედან გამომდინარე,

$$a_{2i}\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=\int_{t_{00}}^{t}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|\varphi\left(\xi-\tau_i\right)-\varphi_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)\right|d\xi.$$

$\dot{\varphi}_0\left(t\right),\ \ t\in I_1$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობიდან გვაქვს

$$\left|\varphi\left(\xi-\tau_i\right)-\varphi_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)\right|=\left|\varphi_0\left(\xi-\tau_i\right)+\varepsilon\delta\varphi\left(\xi-\tau_i\right)-\varphi_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)\right|$$

$$=O\left(\varepsilon\delta\mu\right)+\left|\int_{\xi-\tau_{i0}}^{\xi-\tau_i}\dot{\varphi}_0\left(t\right)dt\right|\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right).$$

ამრიგად, როცა $t\in\left[t_{00},\rho_{i1}\right]$, მივიღებთ

$$a_{2i}\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right),\ \ i=\overline{1,s}.$$

მაშასადამე, როცა $t\in\left[t_{00},\rho_{i1}\right]$, მაშინ

$$a_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right)+\int_{t_{00}}^{t}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi \tag{1.32}$$

(იხ. (1.31)).

ვთქვათ $t\in\left[\rho_{11},\rho_{12}\right]$, მაშინ

$$a_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=a_1\left(\rho_{11};t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)+a_1\left(t;\rho_{11},\varepsilon\delta\mu\right).$$

თეორემა 1.1-ის პირობით ფუნქცია $|a\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)|$, $\xi\in\left[t_{00},r_2+\delta_1\right]$, შემოსაზღვრულია ე. ი.

$$|a_1\left(t;\rho_{11},\varepsilon\delta\mu\right)|\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right),\ t\in\left[\rho_{11},\rho_{12}\right].$$

მაშასადამე, როცა $t\in\left[\rho_{11},\rho_{12}\right]$ გვაქვს

$$a_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=a_1\left(\rho_{11};t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)+O\left(\varepsilon\delta\mu\right)\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right)+\int_{t_{00}}^{\rho_{11}}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi$$

$$\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right)+\int_{t_{00}}^{t}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi\,.$$

ამრიგად , $\left[t_{00},\rho_{12}\right]$ ინტერვალზე (1.27) ფორმულა სამართლიანია.

ვთქვათ $t\in\left[\rho_{12},\rho_{21}\right]$, მაშინ $t-\tau_1>t_0, t-\tau_{10}>t_{00}$, ხოლო ყოველი $i=\overline{2,s}$ გვაქვს $\xi-\tau_i<t_0$ და $\xi-\tau_{i0}<t_{00}$. ამ შემთხვევისთვის მივიღებთ

$$a_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=a_1\left(\rho_{12};t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)+a_1\left(t;\rho_{12},\varepsilon\delta\mu\right)\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right)+\int_{t_{00}}^{\rho_{12}}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi$$

$$+\int_{\rho_{12}}^{t}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi+\int_{\rho_{12}}^{t}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|\Delta y\left(\xi-\tau_1\right)\right|d\xi$$

$$+\int_{\rho_{12}}^{t}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|y_0\left(\xi-\tau_1\right)-y_0\left(\xi-\tau_{10}\right)\right|d\xi+\sum_{i=2}^{s}a_{2i}\left(t;\rho_{12},\varepsilon\delta\mu\right)$$

(იხ. (1.31)). ცხადია, რომ

$$\left|y_0\left(\xi-\tau_1\right)-y_0\left(\xi-\tau_{10}\right)\right|\le\left|\int\limits_{\xi-\tau_1}^{\xi-\tau_{10}}\left|f\left(t_{00},\tau_{10},...,\tau_{1s},\varphi_0,y_0,u_0\right)(t)\right|dt\right|\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right)$$

ხოლო

$$a_{2i}\left(t;\rho_{12},\varepsilon\delta\mu\right)=\int\limits_{\rho_{12}}^{t}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|\varphi\left(\xi-\tau_i\right)-\kappa_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)\right|d\xi\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right),\ i=\overline{2,s}.$$

ამრიგად, როცა $t\in\left[t_{00},\rho_{21}\right]$

$$a_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right)+\int\limits_{t_{00}}^{t}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi+\int\limits_{\rho_{12}-\tau_1}^{t-\tau_1}L_{K_1,U_1}\left(\xi+\tau_1\right)\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi$$

$$\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right)+\int\limits_{t_{00}}^{t}\left[L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)+\chi\left(\xi+\tau_1\right)L_{K_1,U_1}\left(\xi+\tau_1\right)\right]\left|\Delta y(\xi)\right|d\xi,\ \rho_{12}-\tau_1\ge t_{00},$$

სადაც $\chi\left(\xi\right)$ არის I ინტერვალის მახასიათებელი ფუნქცია. ამ პროცესის გაგრძელებით შეიძლება დამტკიცდეს

$$a_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right)+\int\limits_{t_{00}}^{t}\left[L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)+\sum_{i=1}^{s-1}\left(s-i\right)\chi\left(\xi+\tau_i\right)L_{K_1,U_1}\left(\xi+\tau_i\right)\right]\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi. \quad (1.33)$$

ვთქვათ $t\in\left[\rho_{2s},r_2+\delta_1\right]$, მაშინ

$$a_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=a_1\left(\rho_{s2};t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)+a_1\left(t;\rho_{s2},\varepsilon\delta\mu\right)\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right)$$

$$+\int\limits_{t_{00}}^{\rho_{s2}}\left[L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)+\sum_{i=1}^{s-1}\left(s-i\right)\chi\left(\xi+\tau_i\right)L_{K_1,U_1}\left(\xi+\tau_i\right)\right]\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi$$

$$+\int\limits_{\rho_{s2}}^{t}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left[\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|+\sum_{i=1}^{s}\left|y_0\left(\xi-\tau_i\right)-y_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)\right|+\sum_{i=1}^{s}\left|\Delta y\left(\xi-\tau_i\right)\right|\right]d\xi$$

$$\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right)+\int\limits_{t_{00}}^{t}L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi+\int\limits_{t_{00}}^{t}\left[\sum_{i=1}^{s-1}\left(s-i\right)\chi\left(\xi+\tau_i\right)L_{K_1,U_1}\left(\xi+\tau_i\right)\right]\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{\rho_{s2}-\tau_i}^{t-\tau_i}\chi\left(\xi+\tau_i\right)L_{K_1,U_1}\left(\xi+\tau_i\right)\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi$$

$$\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right)+\int\limits_{t_{00}}^{t}\left[L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)+\sum_{i=1}^{s}\left(s-i+1\right)\chi\left(\xi+\tau_i\right)L_{K_1,U_1}\left(\xi+\tau_i\right)\right]\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi$$

(იხ. (1.33)). მაშასადამე,

$$a_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)\le O\left(\varepsilon\delta\mu\right)+\int\limits_{t_{00}}^{t}\left[L_{K_1,U_1}\left(\xi\right)+\sum_{i=1}^{s}\left(s-i+1\right)\chi\left(\xi+\tau_i\right)L_{K_1,U_1}\left(\xi+\tau_i\right)\right]\left|\Delta y\left(\xi\right)\right|d\xi \quad (1.34)$$

(1.24) და (1.34) უტოლობების გათვალისწინებით (1.28) უტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\left|\Delta y(\xi)\right| \le O(\varepsilon\delta\mu) + \int_{t_{00}}^{t}\left[L_{K_1,U_1}(\xi) + \sum_{i=1}^{s}\chi(\xi+\tau_i)L_{K_1,U_1}(\xi+\tau_i)\right]\left|\Delta y(\xi)\right| d\xi, \quad t \in [t_{00}, r_2+\delta_1]$$

საიდანაც გრონუოლის ლემის გამოყენებით, მივიღებთ (1.23)-ს.

ქვემოთ მოყვანილი ლემა უმნიშვნელო ცვლილებებით მტკიცდება ლემა 1.3 -ის ანალოგიურად.

ლემა 1.4. *ვთქვათ* $\tau_{s0} > ... > \tau_{10}$ *და* $t_{00}+\tau_{s0} \le r_2$. *ამასთან, ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 1.1 - ის 1.2),1.3) პირობები და პირობა (1.8). მაშინ არსებობს რიცხვები* $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1)$ *და* $\delta_2 \in (0,\delta_1)$ *ისეთი, რომ*

$$\max_{t\in[t_0, r_2+\delta_1]}\left|\Delta y(t)\right| \le O(\varepsilon\delta\mu), \quad \text{ნებისმიერი } (\varepsilon,\delta\mu)\in(0,\varepsilon_2)\times V^{+}.$$

ამასთან,

$$\Delta y(t_0) = \varepsilon\left[\delta x_0 - f^{+}\delta t_0\right] + o(\varepsilon\delta\mu).$$

1.3. თეორემა 1.1 დამტკიცება

ვთქვათ, ლემა 1.1.-ში $r_1 = t_{00}$ და $r_2 = t_{10}$, მაშინ

$$x_0(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t\in[\hat{\tau}, t_{00}), \\ y_0(t), & [t_{00}, t_{10}], \end{cases}$$

და ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in(0,\varepsilon_2)\times V^{-}$,

$$x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu) = \begin{cases} \varphi(t) := \varphi_0(t) + \varepsilon\delta\varphi(t), & t\in[\hat{\tau}, t_0), \\ y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu), & [t_0, t_{10}+\delta_1] \end{cases}$$

(იხ. (1.18)). შევნიშნოთ, რომ $\delta\mu\in V^{-}$, ე.ი. $t_0 < t_{00}$, აქედან გამომდინარე, გვაქვს

$$\Delta x(t) = \begin{cases} \varepsilon\delta\varphi(t), & t\in[\hat{\tau}, t_0) \\ y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu) - \varphi_0(t), & t\in[t_0, t_{00}), \\ \Delta y(t), & t\in[t_{00}, t_{10}+\delta_1] \end{cases}$$

(იხ. (1.3) და (1.23)). ლემა 1.3 - ით გვაქვს

$$\left|\Delta x(t)\right| \le O(\varepsilon\delta\mu), (t,\varepsilon,\delta\mu)\in[t_{00}, t_{10}+\delta_2]\times(0,\varepsilon_2)\times V^{-}, \tag{1.35}$$

$$\Delta x(t_{00}) = \varepsilon\left[\delta x_{00} - f^{-}\delta t_0\right] + o(\varepsilon\delta\mu). \tag{1.36}$$

ფუნქცია $\Delta x(t)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta x}(t) = f[t, x_0 + \Delta x] - f[t]$$

$$= f_x[t]\Delta x(t) + \sum_{i=1}^{s} f_{x_i}[t]\Delta x(t - \tau_{i0}) + \varepsilon f_u[t]\delta u(t) + \eta_1(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{1.37}$$

$[t_{00}, t_{10} + \delta_1]$ ინტერვალზე, სადაც

$$f[t, x_0 + \Delta x] = f\left(t, x_0(t) + \Delta x(t), x_0(t-\tau_1) + \Delta x(t-\tau_1), ..., x_0(t-\tau_s) + \Delta x(t-\tau_s), u_0(t) + \varepsilon\delta u(t)\right),$$

$$f[t] = f\left(t, x_0(t), x_0(t-\tau_{10}), ..., x_0(t-\tau_{s0}), u_0(t)\right), \tag{1.38}$$

$$\eta_1(t;\varepsilon\delta\mu) = f[t, x_0 + \Delta x] - f[t] - f_x[t]\Delta x(t) - \sum_{i=1}^{s} f_{x_i}[t]\Delta x(t-\tau_{i0}) - \varepsilon f_u[t]\delta u(t)$$

კოშის ფორმულის გამოყენებით (1.37) განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით:

$$\Delta x(t) = Y(t_{00};t)\Delta x(t_{00}) + \varepsilon \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_u[t]\delta u(t)dt + \sum_{p=0}^{1} R_p, \tag{1.39}$$

სადაც

$$\begin{cases} R_0 := \sum_{i=1}^{s} R_{i0}(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu) = \sum_{i=1}^{s} R_{i0}, \\ R_{i0} = \int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_{i0};t) f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\Delta x(\xi)d\xi, \\ R_1 := R_1(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)\eta_1(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi \end{cases} \tag{1.40}$$

$Y(\xi;t)$ არის მატრიც-ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (1.6) განტოლებას და (1.7) პირობას. ვთქვათ $\delta_2 \in (0,\delta_1)$ იმდენად მცირეა, რომ ადგილი აქვს უტოლობებს: $t_{00} - \delta_2 > a$, $t_{00} + \tau_{s0} < t_{10} - \delta_2$. $Y(\xi;t)$ ფუნქცია უწყვეტია სიმრავლეზე $\{(\xi;t) : \xi \in [t_{00} - \delta_2, t_{00}], t \in [t_{10} - \delta_2, t_{10} + \delta_2]\} \subset \Pi = \{(\xi;t) : a < \xi < t, \ t \in (a,b)\}$ (იხ. ლემა 2.6, გვ. 32, [49]) .

ამდენად,

$$Y(t_{00};t)\Delta x(t_{00}) = \varepsilon Y(t_{00};t)\left[\delta x_0 - f^{-}\delta t_0\right] + o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{1.41}$$

(იხ. (1.36)). ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$R_{i0}=\varepsilon\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_0} Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi+\int_{t_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\Delta x(\xi)d\xi$$

$$=\varepsilon\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_0} Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\int_{t_0+\tau_{i0}}^{t_{00}+\tau_{i0}} Y(\xi;t)f_{x_i}[\xi](\xi)\Delta x(\xi-\tau_{i0})d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

ამდენად,

$$R_0=\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_0} Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_0+\tau_{i0}}^{t_{00}+\tau_{i0}} Y(\xi;t)f_{x_i}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{i0})d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu). \qquad (1.42)$$

ვთქვათ $\rho_{i,1}=\min\{t_0+\tau_i,t_{00}+\tau_{i0}\}$, $\rho_{i,2}=\max\{t_0+\tau_i,t_{00}+\tau_{i0}\}$ და ვთქვათ $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ იმდენად მცირე რიცხვია, რომ

$$t_{00}<\rho_{1,1},\ \rho_{i,2}<\rho_{i+1,1},\ i=\overline{1,s-1},\ \rho_{s,2}<t_{10}-\delta_2.$$

ვთქვათ $\eta_2(\xi;t,\varepsilon\delta\mu):=Y(\xi;t)\eta_1(\xi;\varepsilon\delta\mu)$, მაშინ როცა $t\in[t_{10}-\delta_2,t_{10}+\delta_2]$ გვაქვს

$$R_1=\sum_{i=1}^{s}w_i,\ \text{სადაც}\ \ w_0=w_0(t;\varepsilon\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{10}}\eta_2(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi,$$

$$w_i=\int_{t_{00}+\tau_{i0}}^{t_{00}+\tau_{i+10}}\eta_2(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi,\ i=\overline{1,s-1},\ w_s=\int_{t_{00}+\tau_{s0}}^{t}\eta_2(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi.$$

ვთქვათ $\rho_{1,1}=t_0+\tau_1$ და $t_0+\tau_1<t_0+\tau_{10}$, მაშინ გვაქვს $w_0=w_{01}+w_{02}$. აქ

$$w_{01}=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_i}\eta_2(\xi;t,\varepsilon\delta\mu)d\xi,\ w_{02}=\int_{t_0+\tau_i}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)\{f[\xi,x_0+\Delta x]-f[\xi]\}d\xi$$

$$-\int_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)\left[f_x[\xi]\Delta x(\xi)+\sum_{i=2}^{s}f_{x_i}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{i0})\right]d\xi$$

$$-\int_{t_0+\tau_1}^{t_0+\tau_{10}} Y(\xi;t)f_{x_1}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{10})d\xi-\int_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)f_{x_1}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{10})d\xi$$

$$-\varepsilon\int_{t_0+\tau_1}^{t_0+\tau_{10}} Y(\xi;t)f_u[\xi]\delta u(\xi)d\xi$$

(იხ. (1.38)) შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$f\left[\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right]=f\Big(\xi,x_0\left(\xi\right)+\eta\Delta x\left(\xi\right),x_0\left(\xi-\tau_{10}\right)+\eta\Big(x_0\left(\xi-\tau_1\right)-x_0\left(\xi-\tau_{10}\right)+\Delta x\left(\xi-\tau_1\right)\Big),...,$$
$$x_0\left(\xi-\tau_{s0}\right)+\eta\Big(x_0\left(\xi-\tau_s\right)-x_0\left(\xi-\tau_{s0}\right)+\Delta x\left(\xi-\tau_s\right),u_0\left(\xi\right)+\eta\varepsilon\delta u\left(\xi\right)\Big)\Big),$$

$$\sigma\left(\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right)=f_x\left[\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right]-f_x\left[\xi\right],\quad \sigma_i\left(\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right)=f_{x_i}\left[\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right]-f_{x_i}\left[\xi\right],$$
$$\sigma_u\left(\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right)=f_u\left[\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right]-f_u\left[\xi\right].$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$f\left[\xi,x_0+\Delta x\right]-f\left[\xi\right]=\int_0^1\frac{d}{d\eta}f\left[\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right]d\eta$$
$$=\int_0^1\Big\{f_x\left[\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right]\Delta x\left(\xi\right)+\sum_{i=1}^{s}f_{x_i}\left[\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right]\Big(x_0\left(\xi-\tau_i\right)-x_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)+\Delta x\left(\xi-\tau_i\right)\Big)$$
$$+\varepsilon f_u\left[\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right]\delta u\left(\xi\right)\Big\}d\eta$$
$$=\sigma_1\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)\Delta x\left(\xi\right)+\sum_{i=1}^{s}\sigma_{i1}\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)\Big(x_0\left(\xi-\tau_i\right)-x_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)+\Delta x\left(\xi-\tau_i\right)\Big)$$
$$+\varepsilon\sigma_u\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)\delta u\left(\xi\right)+f_x\left[\xi\right]\Delta x\left(\xi\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{s}f_{x_i}\left[\xi\right]\Big(x_0\left(\xi-\tau_i\right)-x_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)+\Delta x\left(\xi-\tau_i\right)\Big)+\varepsilon f_u\left[\xi\right]\delta u\left(\xi\right)$$

სადაც

$$\sigma_1\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)=\int_0^1\sigma\left(\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right)d\eta,\quad \sigma_{i1}\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)=\int_0^1\sigma_i\left(\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right)d\eta,$$
$$\sigma_u\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)=\int_0^1\sigma_u\left(\xi;\eta,\varepsilon\delta\mu\right)d\eta,$$

უკანასკნელი ტოლობისათვის, როცა $t\in\left[t_{00},t_{10}+\delta_2\right]$ გვაქვს

$$w_{01}=\sum_{p=1}^{5}w_{01}^p,\ w_{01}^1=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1}Y\left(\xi;t\right)\sigma_1\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)\Delta x\left(\xi\right)d\xi$$
$$w_{01}^2=\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1}Y\left(\xi;t\right)\sigma_{i1}\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)\Big[x_0\left(\xi-\tau_i\right)-x_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)+\Delta x\left(\xi-\tau_i\right)\Big]d\xi$$
$$=\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1}Y\left(\xi;t\right)\sigma_{i1}\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)\Big[\varphi_0\left(\xi-\tau_i\right)-\varphi_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)+\varepsilon\delta\varphi\left(\xi-\tau_i\right)\Big]d\xi,$$
$$w_{01}^3=\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1}Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\Big[x_0\left(\xi-\tau_i\right)-x_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)\Big]d\xi$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t) f_{x_i}[\xi]\left[\varphi_0(\xi-\tau_i)-\varphi_0(\xi-\tau_{i0})\right]d\xi,$$

$$w_{01}^4=\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t) f_{x_i}[\xi]\left[\Delta x(\xi-\tau_i)-\Delta x(\xi-\tau_{i0})\right]d\xi$$

$$=\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t) f_{x_i}[\xi]\left[\delta\varphi(\xi-\tau_i)-\delta\varphi(\xi-\tau_{i0})\right]d\xi,$$

$$w_{01}^5=\varepsilon\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1} Y(\xi;t)\sigma_u(\xi;\varepsilon\delta\mu)\delta u(\xi)\,d\xi.$$

ფუნქცია $\varphi_0(\xi)$, $\xi\in I_1$ აბსოლუტურად უწყვეტია, ამიტომ ყოველი ფიქსირებული ლებეგის წერტილისთვის $\xi\in(t_{00},t_{10}+\delta_2)$, $\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_{i0})$ ფუნქციისთვის მივიღებთ

$$\varphi_0(\xi-\tau_i)-\varphi_0(\xi-\tau_{i0})=\int_{\xi}^{\xi-\varepsilon\delta\tau_i}\dot{\varphi}_0(\varsigma-\tau_{i0})\,d\varsigma=-\varepsilon\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_{i0})\delta\tau_i+\gamma_i(\xi;\varepsilon\delta\mu), \qquad (1.43)$$

სადაც

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\gamma_i(\xi;\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}=0,\ \text{თანაბრად}\ \delta\mu\in V^-. \qquad (1.44)$$

ამდენად, (1.43) სამართლიანია $(t_{00},t_{10}+\delta_2)$ ინტერვალის ყველა წერტილისათვის. (1.43)-დან და $\dot{\varphi}_0(\xi)$ ფუნქციების შემოსაზღვრულობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\left|\varphi_0(\xi-\tau_i)-\varphi_0(\xi-\tau_{i0})\right|\le O(\varepsilon\delta\mu)\ \text{და}\ \left|\frac{\gamma_i(\xi;\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}\right|\le const. \qquad (1.45)$$

(1.35) და (1.43) გამოსახულებებზე დაყრდნობით $w_{01}^p, p=\overline{1,5}$, გამოსახულებისათვის გვაქვს

$$\left|w_{01}^1\right|\le\|Y\|O(\varepsilon\delta\mu)\sigma_1(\varepsilon\delta\mu),\ \left|w_{01}^2\right|\le\|Y\|O(\varepsilon\delta\mu)\sum_{i=1}^{s}\sigma_{i1}(\varepsilon\delta\mu),$$

$$w_{01}^3=\sum_{i=1}^{s}\left[\gamma_{i1}(t;\varepsilon\delta\mu)-\varepsilon\left(\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1}Y(\xi;t)f_{x_i}[\xi]\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_i)\,d\xi\right)\delta\tau_i\right],$$

$$\left|w_{01}^4\right|\le o(\varepsilon\delta\mu)\|Y\|\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_1}\left|f_{x_i}[\xi]\right|d\xi,\ \left|w_{01}^5\right|\le\|Y\|O(\varepsilon\delta\mu)\sigma_u(\varepsilon\delta\mu).$$

აქ,

$$\sigma_1(\varepsilon\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_{10}}\left|\sigma_1(\xi;\varepsilon\delta\mu)\right|d\xi,\quad \sigma_{i1}(\varepsilon\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau_{10}}\left|\sigma_{i1}(\xi;\varepsilon\delta\mu)\right|d\xi,$$

$$\sigma_u\left(\varepsilon\delta\mu\right)=\int\limits_{t_{00}}^{t_0+\tau_{10}}\left|\sigma_u\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)\right|d\xi,\ \ \|Y\|=\sup\left\{\left|Y\left(\xi;t\right)\right|:\left(\xi;t\right)\in\Pi\right\},$$

$$\gamma_{i1}\left(t;\varepsilon\delta\mu\right)=\int\limits_{t_{00}}^{t_0+\tau_1}Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\gamma_i\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)d\xi,$$

ცხადია,

$$\left|\frac{\gamma_{i1}\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)}{\varepsilon}\right|=\|Y\|\int\limits_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{10}}\left|f_{x_i}\left[\xi\right]\right|\left|\frac{\gamma_i\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)}{\varepsilon}\right|d\xi.$$

ლებეგის თეორემის ძალით ზღვრის ნიშნის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ შეტანის შესახებ, გვაქვს

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sigma_1\left(\varepsilon\delta\mu\right)=0,\ \lim_{\varepsilon\to0}\sigma_{i1}\left(\varepsilon\delta\mu\right)=0,\ \lim_{\varepsilon\to0}\sigma_u\left(\varepsilon\delta\mu\right)=0,\ \lim_{\varepsilon\to0}\left|\frac{\gamma_{i1}\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)}{\varepsilon}\right|=0$$

თანაზრად $\left(t,\delta\mu\right)\in\left[t_{00},t_{10}+\delta_2\right]\times V^-$ (იხ. (1.44) და (1.45)). ამდენად,

$$w_{01}^1=w_{01}^2=w_{01}^4=w_{01}^5=o\left(t;\varepsilon\delta\mu\right)\tag{1.46}$$

და

$$w_{01}^3=-\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\left[\int\limits_{t_{00}}^{t_0+\tau_1}Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\dot{\varphi}_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)d\xi\right]\delta\tau_i+o\left(t;\varepsilon\delta\mu\right).$$

ამასთან, როცა $\xi\in\left[t_{00},t_{00}+\tau_{i0}\right)$,

$$\varepsilon\int\limits_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}}Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\dot{\varphi}_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)d\xi=o\left(t;\varepsilon\delta\mu\right),\ \ \dot{x}_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)=\dot{\varphi}_0\left(\xi-\tau_{i0}\right),$$

აქედან გამომდინარე,

$$w_{01}^3=-\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\left[\int\limits_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{10}}Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\dot{x}_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)d\xi\right]\delta\tau_i+o\left(t;\varepsilon\delta\mu\right),\tag{1.47}$$

(1.46) და (1.47) გამოსახულებებზე დაყრდნობით, მივიღებთ

$$w_{01}=-\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\left[\int\limits_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{10}}Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\dot{x}_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)d\xi\right]\delta\tau_i+o\left(t;\varepsilon\delta\mu\right).$$

ახლა გარდავქმნათ w_{02}, გვაქვს

$$w_{02}=\int\limits_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}}Y\left(\xi;t\right)\left\{f\left[\xi,x_0+\Delta x\right]-f\left[\xi\right]\right\}d\xi$$

$$+\int_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t) f_{x_1}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{10})\,d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

საიდანაც, როცა $\xi \in [t_0+\tau_1, t_{00}+\tau_{10}]$, მაშინ

$$|\Delta x(\xi)| \le O(\varepsilon\delta\mu), \quad |\Delta x(\xi-\tau_i)| = \varepsilon|\delta\varphi(\xi-\tau_i)|, \quad |x_0(\xi-\tau_i)| = |\varphi_0(\xi-\tau_i)|, \quad i=\overline{2,s}$$

და

$$x_0(\xi-\tau_1)+\Delta x(\xi-\tau_1) = x(\xi-\tau_1;\mu_0+\varepsilon\delta\mu) = y(\xi-\tau_1;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)$$

$$y_0(\xi-\tau_1)+\Delta y(\xi-\tau_1;\varepsilon\delta\mu),$$

აქედან გამომდინარე,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\xi, x_0(\xi)+\Delta x(\xi), x_0(\xi-\tau_1)+\Delta x(\xi-\tau_1),\dots,x_0(\xi-\tau_s)+\Delta x(\xi-\tau_s)\big)$$

$$=\lim_{\xi\to t_{00}+\tau_{10}-}\big(\xi, x_0(\xi), x_0(\xi-\tau_{10}),\dots,x_0(\xi-\tau_{s0})\big) = w_{21}^0,$$

ე.ი.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\xi\in[t_0+\tau_1,t_{00}+\tau_{10}]}\big[f[\xi,x_0+\Delta x]-f[\xi]-f_1\big]=0.$$

ამასთან, ფუნქცია $Y(\xi;t)$ უწყვეტია $[t_{00},t_{00}+\tau_{10}]\times[t_{00}-\tau_2,t_{10}+\delta_2]\subset\Pi$ სიმრავლეზე ამდენად,

$$\int_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)\{f[\xi,x_0+\Delta x]-f[\xi]\}\,d\xi$$

$$=\int_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t) f_1 d\xi + \int_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t)\{f[\xi,x_0+\Delta x]-f[\xi]-f_1\}\,d\xi$$

$$-\varepsilon Y(t_{00}+\tau_{10};t) f_1(\delta t_0+\delta\tau_1)+o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

გამოსახულება $-\varepsilon Y(t_{00}+\tau_{10};t) f_1(\delta t_0+\delta\tau_1)$ არის წყვეტილობის ეფექტი.

შესაბამისად,

$$w_{01} = -\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\left[\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t) f_{x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})\,d\xi\right]\delta\tau_i$$

$$-\varepsilon Y(t_{00}+\tau_{10};t) f_1(\delta t_0+\delta\tau_1)$$

$$-\sum_{i=1}^{s}\int_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y(\xi;t) f_{x_1}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{10})\,d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu). \qquad (1.48)$$

ვთქვათ $\rho_{1,1} = t_0 + \tau_1$ კვლავ და $t_0 + \tau_{10} < t_0 + \tau_1$, მაშინ გვაქვს

$$w_0 = \hat{w}_{01} + \hat{w}_{02},$$

სადაც

$$\hat{w}_{01} = \int_{t_{00}}^{t_0+\tau_{10}} \theta_2\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)d\xi,\ \ \hat{w}_{02} = \int_{t_0+\tau_{10}}^{t_0+\tau_1} Y\left(\xi;t\right)\left\{f\left[\xi,x_0+\Delta x\right]-f\left[\xi\right]\right\}d\xi$$

$$+\int_{t_0+\tau_1}^{t_{00}+\tau_{10}} Y\left(\xi;t\right)\left\{f\left[\xi,x_0+\Delta x\right]-f\left[\xi\right]\right\}d\xi - \int_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y\left(\xi;t\right)\left[f_x\left[\xi\right]\Delta x\left(\xi\right)+\sum_{i=2}^{s} f_{x_i}\left[\xi\right]\Delta x\left(\xi-\tau_{i0}\right)\right]d\xi$$

$$-\int_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y\left(\xi;t\right)f_{x_1}\left[\xi\right]\Delta x\left(\xi-\tau_{10}\right)d\xi - \varepsilon\int_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y\left(\xi;t\right)f_u\left[\xi\right]\delta u\left(\xi\right)d\xi.$$

ამ შემთხვევაში ფორმულა (1.48) სამართლიანია და მისი დამტკიცემა შესაძლებელია ზემოთ აღწერილი სქემის მიხედვით.

ვთქვათ $\rho_{1,1} = t_{00} + \tau_{10}$, ე.ი. $t_{00} + \tau_{10} < t_0 + \tau_1$. ამ შემთხვევაში ანალოგიური გარდაქმნებით შესაძლებელია დამტკიცდეს ფორმულა

$$w_0\left(t;\varepsilon\delta\mu\right) = -\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\left[\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\dot{x}_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)d\xi\right]\delta\tau_i$$

$$-\int_{t_0+\tau_{10}}^{t_{00}+\tau_{10}} Y\left(\xi;t\right)f_{x_1}\left[\xi\right]\Delta x\left(\xi-\tau_{10}\right)d\xi + o\left(t;\varepsilon\delta\mu\right)$$

წყვეტილობის $-\varepsilon Y\left(t_{00}+\tau_{10};t\right)f_1\left(\delta t_0+\delta\tau_1\right)$ ეფექტის გარეშე. შევნიშნოთ, რომ ეს ეფექტი გაქრება $w_1\left(t;\varepsilon\delta\mu\right)$ შესაკრების გარდაქმისას.

$w_i\left(t;\varepsilon\delta\mu\right)$, $i=\overline{1,s}$ გამოსახულებების გარდაქმნის შემდეგ, $R_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)$ -თვის მივიღებთ ფორმულას

$$R_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right) = -\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\left[\int_{t_{00}}^{t} Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\dot{x}_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)d\xi\right]\delta\tau_i$$

$$-\sum_{i=1}^{s}\int_{t_0+\tau_{i0}}^{t_{00}+\tau_{i0}} Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\Delta x\left(\xi-\tau_{i0}\right)d\xi \qquad (1.49)$$

$$-\varepsilon\sum_{i=1}^{s} Y\left(t_{00}+\tau_{i0}\right)f_i\left(\delta t_0+\delta\tau_i\right)+o\left(t;\varepsilon\delta\mu\right)$$

(1.42) გამოსახულებიდან, (1.41), (1.42) და (1.49) წარმოდგენებით, მივიღებთ (1.4)-ს, სადაც $\delta x(t;\delta\mu)$ აქვს (1.5) ფორმა.

□

1.4. თეორემა 1.2 დამტკიცება

უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ $\delta\mu\in V^{+}$, ე.ი. $t_{00}<t_0$; აქედან გამომდინარე გვაქვს

$$\Delta x(t)=\begin{cases}\varepsilon\delta\varphi(t), & t\in[\hat{\tau},t_{00}),\\ \varphi(t)-y_0(t), & t\in[t_{00},t_0),\\ \Delta y(t), & t\in[t_0,t_{10}+\delta_1]\end{cases}$$

ლემა 1.4 - ის გამოყენებით, მივიღებთ

$$\Delta x(t_0)=\varepsilon\left[\delta x_0-f^{+}\delta t_0\right]+o(\varepsilon\delta\mu). \tag{1.50}$$

ფუნქცია $\Delta x(t)$ აკმაყოფილებს (1.37) განტოლებას $[t_0,t_{10}+\delta_2]$ ინტერვალზე. აქედან გამომდინარე, კოშის ფორმულის გამოყენებით განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით

$$\Delta x(t)=Y(t_0;t)\Delta x(t_0)+\varepsilon\int_{t_0}^{t}Y(\xi;t)f_u[\xi]\delta u(\xi)d\xi+\sum_{p=0}^{1}R_p, \tag{1.51}$$

სადაც $R_p=R_p(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)$, (იხ. (1.41)). ვთქვათ $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ და $\delta_2\in(0,\delta_1)$ არის იმდენად მცირე, რომ ადგილი აქვს უტოლობებს: $t_0+\tau_i<t_{10}-\delta_2$, $i=\overline{1,s}$, $t_{00}+\tau_{s0}<t_{10}-\delta_2$. $Y(\xi;t)$ არის მატრიც-ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია $[t_{00},t_{00}+\tau_{s0}]\times[t_{10}-\delta_2,t_{10}+\delta_2]\subset\Pi$. აქედან გამომდინარე,

$$Y(t_0;t)\Delta x(t_0)=\varepsilon Y(t_{00};t)\left[\delta x_0-f^{+}\delta t_0\right]+o(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{1.52}$$

(იხ. (1.50)). მსგავსი გზით, ძირეული ცვლილებების გარეშე, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$R_0=\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{0x_i}[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}+\tau_{i0}}^{t_0+\tau_{i0}}Y(\xi;t)f_{0x_i}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{i0})d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{1.53}$$

$$R_1=-\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\left[\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_{0x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi\right]\delta\tau_i$$

$$-\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}+\tau_{i0}}^{t_0+\tau_{i0}} Y(\xi;t) f_{0x_1}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{i0})d\xi \tag{1.54}$$

$$-\varepsilon\sum_{i=1}^{s} Y(t_{00}+\tau_{i0};t) f_i(\delta t_0+\delta\tau_i)+o(t;\varepsilon\delta\mu)$$

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ

$$\varepsilon\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t) f_u[\xi]\delta u(\xi)d\xi=\varepsilon\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_u[\xi]\delta u(\xi)d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{1.55}$$

(1.52)-(1.55) გამოსახულებების გათვალისწინებით (1.51) -ში, მივიღებთ (1.4)-ს, სადაც

$$\delta x(t;\delta\mu)=-Y(t_{00};t) f^{+}\delta t_0+\beta(t;\delta\mu).$$

□

თავი II. ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისათვის უწყვეტი საწყისი პირობით

2.1. ძირითადი შედეგების ფორმულირება

ყოველ $\mu=(t_0,\tau_1,...,\tau_s,\varphi,u)\in\Lambda=[a,b)\times[h_{11},h_{12}]\times...\times[h_{s1},h_{s2}]\times O\times\Omega$ ელემენტს შევუსაბამოთ სამართი დაგვიანებულ არგუმენტიანი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t)=f\big(t,x(t),x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_s),u(t)\big) \tag{2.1}$$

წყვეტილი საწყისი პირობით

$$x(t)=\varphi(t),\ t\in[\hat{\tau},t_0]. \tag{2.2}$$

განსაზღვრება 2.1. ვთქვათ $\mu=(t_0,\tau_1,...,\tau_s,\varphi,u)\in\Lambda.$ ფუნქციას $x(t)=x(t;\mu)\in O,\ t\in[\hat{\tau},t_1],$ $t_1\in(t_0,b],$ ეწოდება (2.1) განტოლების ამონახსნი (2.2) საწყისი პირობით, ან μ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_1]$ ინტერვალზე, თუ ის აკმაყოფილებს (2.2) - პირობას და აბსოლუტურად უწყვეტია $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე და აკმაყოფილებს (2.1) განტოლებას თითქმის ყველგან $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე.

შემოვიღოთ ვარიაციის სიმრავლე

$$V=\Big\{\delta\mu=(\delta t_0,\delta\tau_1,...,\delta\tau_s,\delta\varphi,\delta u):|\delta t_0|\le\alpha,|\delta\tau_i|\le\alpha,i=\overline{1,s}, \tag{2.3}$$

$$\delta\varphi=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\delta\varphi_i,\delta u=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\delta u_i,|\lambda_i|\le\alpha,\|\delta u\|\le\alpha,i=\overline{1,k}\Big\},$$

სადაც $\delta\varphi_i\in\Phi-\varphi_0,\ \ i=1,...,k$ და $\varphi_0\in\Phi$ ფიქსირებული ფუნქციებია; $\alpha>0$ ფიქსირებული რიცხვია და $\|\delta u\|=\sup\{\delta u(t):t\in I\}$.

ვთქვათ, $x_0(t)$ არის $\mu_0=(t_{00},\tau_{10},...,\tau_{s0},\varphi_0,u_0)\in\Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_{10}]$ ინტერვალზე, სადაც $t_{00},t_{10}\in(a,b),\ t_{00}<t_{10}$ და $\tau_{i0}\in(\theta_{i1},\theta_{i2}),\ i=\overline{1,s}$.

არსებობს რიცხვები $\delta_1 > 0$ და $\varepsilon_1 > 0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon, \delta\mu) \in (0, \varepsilon_1) \times V$ ელემენტისათვის $\mu_0 + \varepsilon\delta\mu \in \Lambda$ და შეესაბამება ამონახსნი $x(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრული ინტერვალზე $[\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1] \subset I_1$.

ცხადია, რომ $x(t; \mu_0)$ ამონახსნი არის $x_0(t)$ ამონახსნის გაგრძელება $[\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1]$ ინტერვალზე. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x_0(t)$ ამონახსნი განსაზღვრულია ინტერვალზე $[\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1] \subset I_1$.

განვსაზღვროთ $x_0(t) = x(t; \mu_0)$ ამონახსნის ნაზრდი:

$$\Delta x(t) = \Delta x(t; \varepsilon\delta\mu) = x(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu) - x_0(t), (t, \varepsilon, \delta\mu) \in [\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1] \times (0, \varepsilon_1) \times V \qquad (2.4)$$

თეორემა 2.1. *ვთქვათ ფუნქცია $\varphi_0(t), t \in I_1$ აბსოლუტურად უწყვეტია. ვთქვათ ფუნქციები $\dot{\varphi}_0(t)$ და $f(w, u)$, $(w, u) \in I \times O^{1+s} \times U_0$ არიან შემოსაზღვრული, სადაც $w = (t, x, x_1, ..., x_s)$. ამასთან, არსებობს სასრული ზღვრები*

$$\lim_{t \to t_{00}-} \dot{\varphi}_0(t) = \dot{\varphi}_0^-, \ \lim_{w \to w_0} f(w, u_0(t)) = f^-, \ w \in (a, t_{00}] \times O^{1+s},$$

სადაც $w_0 = (t_{00}, \varphi_0(t_{00}), \varphi_0(t_{00} - \tau_{10}), ..., \varphi_0(t_{00} - \tau_{s0}))$. მაშინ არსებობენ $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ და $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ რიცხვები ისეთი, რომ ნებისმიერი $(t, \varepsilon, \delta\mu) \in [t_{00}, t_{10} + \delta_2] \times (0, \varepsilon_2) \times V^-$, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Delta x(t; \varepsilon\delta\mu) = \varepsilon\delta x(t; \delta\mu) + o(t; \varepsilon\delta\mu), \qquad (2.5)$$

სადაც $V^- = \{\delta\mu \in V : \delta t_0 \le 0\}$ და

$$\delta x(t; \delta\mu) = Y(t_{00}; t)\left[\dot{\varphi}_0^- - f^-\right]\delta t_0 + \beta(t; \delta\mu), \qquad (2.6)$$

$$\begin{aligned}\beta(t; \delta\mu) &= Y(t_{00}; t)\delta\varphi(t_{00}) + \sum_{i=1}^{s} \int_{t_{00} - \tau_{i0}}^{t} Y(s + \tau_{i0}; t) f_{x_i}[s + \tau_{i0}]\delta\varphi(s)\, ds \\ &- \int_{t_{00}}^{t} Y(s; t)\left[\sum_{i=1}^{s} f_{x_i}[s]\dot{x}_0(s - \tau_{i0})\delta\tau_i\right] ds + \int_{t_{00}}^{t} Y(s; t) f_u[s]\delta u(s)\, ds\end{aligned} \qquad (2.7)$$

$Y(s; t)$ არის $n \times n$ მატრიც–ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$Y_s(s;t) = -Y(s;t) f_x[s] - \sum_{i=1}^{s} Y(s+\tau_{i0};t) f_{x_i}[s+\tau_{i0}],\ s \in [t_{00}, t] \tag{2.8}$$

და პირობას

$$Y(s;t) = \begin{cases} H, & s = t, \\ \Theta, & s > t. \end{cases} \tag{2.9}$$

აქ

$$f_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f,\ f_{x_i}[s] = f_{x_i}\left(s, x_0(s), x_0(s-\tau_{10}), ..., x_0(s-\tau_{s0}), u_0(s)\right),$$

H არის ერთეულოვანი მატრიცა, ხოლო Θ ნულოვანი მატრიცა.

ზოგიერთი კომენტარი. $\delta x(t;\delta\mu)$ ფუნქციას ეწოდება $x_0(t),\ t \in [t_{00}, t_{10}+\delta_2]$ ამონახსნის პირველი ვარიაცია, ხოლო (2.6) ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა;

$$-\int_{t_{00}}^{t} Y(s;t) \sum_{i=1}^{s} \left[f_{x_i}[s] \dot{x}_0(s-\tau_{i0}) \delta\tau_i \right] ds$$

შესაკრები (2.7) ფორმულაში არის $\tau_{i0}, i = \overline{1,s}$ დაგვიანების პარამეტრების ვარიაციის ეფექტი;

$Y(t_{00};t)\left[\dot{\varphi}_0^- - f^-\right]\delta t_0$ გამოსახულება არის (2.2) საწყისი პირობისა და t_{00} საწყისი მომენტის შეშფოთების ეფექტი;

გამოსახულება $Y(t_{00};t)\delta\varphi(t_{00}) + \sum_{i=1}^{s} \int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t} Y(s+\tau_{i0};t) f_{x_i}[s+\tau_{i0}] \delta\varphi(s) ds$ (2.7) ფორმულაში არის საწყისი $\varphi_0(t)$ ფუნქციის შეშფოთების ეფექტი;

$\int_{t_{00}}^{t} Y(s;t) f_u[s] \delta u(s) ds$ შესაკრები (2.7) ფორმულაში არის $u_0(t)$ მართვის ფუნქციის ვარიაციის ეფექტი.

კოშის ფორმულის გამოყენებით წრფივი დაგვიანებულ არგუმენტიანი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებისათვის დავასკვნით, რომ ფუნქცია

$$\delta x(t) = \begin{cases} \delta\varphi(t), & t \in [\hat{\tau}, t_{00}), \\ \delta x(t;\delta\mu), & t \in [t_{00}, t_{10}+\delta_2], \end{cases}$$

არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი

$$\delta\dot{x}(t)=f_x[t]\delta x(t)+\sum_{i=1}^{s}f_{x_i}[t]\delta x(t-\tau_{i0})-\sum_{i=1}^{s}f_{x_i}[t]\dot{x}_0(t-\tau_{i0})\delta\tau_i+f_u[t]\delta u(t)$$

საწყისი პირობით

$$\delta x(t)=\delta\varphi(t),\ t\in[\hat{\tau},t_{00}),\ \delta x(t_{00})=\left(\dot{\varphi}_0^{-}-f^{-}\right)\delta t_0+\delta\varphi(t_{00}).$$

ამრიგად, ამონახსნის პირველი ვარიაცია შეიძლება გამოვთვალოთ ორი გზით: პირველი — ვიპოვოთ მატრიც ფუნქცია $Y(\xi;t)$, მეორე – ვიპოვოთ ერთი წრფივი განტოლების ამონახსნი.

თეორემა 2.2. *ვთქვათ ფუნქცია $\varphi_0(t)$, $t\in I_1$ აბსოლუტურად უწყვეტია. ვთქვათ ფუნქციები $\dot{\varphi}_0(t)$ და $f(w,u)$, $(w,u)\in I\times O^{1+s}\times U_0$ არიან შემოსაზღვრული. ამასთან, არსებობს სასრული ზღვრები*

$$\lim_{t\to t_{00}+}\dot{\varphi}_0(t)=\dot{\varphi}_0^{+},\ \lim_{w\to w_0}f(w,u_0(t))=f^{+},\ w\in[t_{00},b)\times O^{1+s}.$$

მაშინ ყოველი $\hat{t}_0\in(t_{00},t_{10})$ წერტილისათვის არსებობს $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ და $\delta_2\in(0,\delta_1)$ რიცხვები ისეთი, რომ ნებისმიერი $(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[t_{00},t_{10}+\delta_2]\times(0,\varepsilon_2)\times V^{+}$, სადაც $V^{+}=\{\delta\mu\in V:\delta t_0\geq 0\}$ ადგილი აქვს (2.5) ფორმულას, სადაც

$$\delta x(t;\delta\mu)=Y(t_{00};t)\left[\dot{\varphi}_0^{+}-f^{+}\right]\delta t_0+\beta(t;\delta\mu).$$

ქვემოთ მოყვანილი თეორემა არის თეორემების 2.1 და 2.2 შედეგი.

თეორემა 2.3. *ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 2.1. და თეორემა 2.2. პირობები. ამასთან, $\dot{\varphi}_0^{-}-f^{-}=\dot{\varphi}_0^{+}-f^{+}=\hat{f}$. მაშინ ყოველი $\hat{t}_0\in(t_{00},t_{10})$ ფიქსირებული მომენტისთვის არსებობენ რიცხვები $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ და $\delta_2\in(0,\delta_1)$ რიცხვები ისეთი, რომ ნებისმიერი $(t,\varepsilon,\delta\mu)\in\left[\hat{t}_0,t_{10}+\delta_2\right]\times(0,\varepsilon_2)\times V$ ადგილი აქვს (2.5) ფორმულას, სადაც*

$$\delta x(t;\delta\mu)=Y(t_{00};t)\hat{f}\delta t_0+\beta(t;\delta\mu).$$

შევნიშნავთ, რომ, თეორემა 1.1-1.3–ის მსგავსი თეორემები სამართლიანია განტოლებისათვის

$$\dot{x}(t)=f\left(t,x(t),x(t-\tau_1),\ldots,x(t-\tau_s),u(t),u(t-\theta_1),\ldots,u(t-\theta_k)\right)$$

უწყვეტი საწყისი პირობით

$$x(t)=\varphi(t),\ t\in[\hat{\tau},t_0].$$

ამ შემთხვევაში გვექნება (იხ. თეორემა 2.1):

$$\delta x(t;\delta\mu)=Y(t_{00};t)\left[\dot{\varphi}_0^- - f^-\right]\delta t_0+\beta(t;\delta\mu), \tag{2.10}$$

$$\beta(t;\delta\mu)=Y(t_{00};t)\delta\varphi(t_{00})+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t}Y(s+\tau_{i0};t)f_{x_i}[s+\tau_{i0}]\delta\varphi(s)\,ds$$

$$-\int_{t_{00}}^{t}Y(s;t)\left[\sum_{i=1}^{s}f_{x_i}[s]\dot{x}_0(s-\tau_{i0})\delta\tau_i\right]ds+\int_{t_{00}}^{t}Y(s;t)f_u[s]\delta u(s)\,ds$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_{u_i}[\xi]\delta u(\xi-\theta_i)\,d\xi,$$

აქ

$$\lim_{w\to w_0}f\left(w,u_0(t),u_0(t-\theta_1),...,u_0(t-\theta_k)\right)=f^-,\quad w\in(a,t_{00}]\times O^{1+s},$$

$$f_{x_i}[\xi]=f_{x_i}\left(\xi,x_0(\xi),x_0(\xi-\tau_{10}),...,x_0(\xi-\tau_{s0}),u_0(\xi),u_0(\xi-\theta_1),...,u_0(\xi-\theta_k)\right).$$

შეშფოთებული განტოლების ამონახსნი გამოითვლება ფორმულით

$$x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)=x_0(t)+\varepsilon\delta x(t;\delta\mu)+o(t;\varepsilon\delta\mu),\ t\in I,$$

სადაც $\delta x(t;\delta\mu)$ არის ამონახსნის პირველი ვარიაცია.

უკანასკნელი ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ შეშფოთებული განტოლების მიახლოებული ამონახსნი ანალიზური ფორმით. ფაქტობრივად, მცირე $\varepsilon>0$ -თვის მივიღებთ

$$x(t;\mu)=x_0(t)+\varepsilon\delta x(t;\delta\mu),\ t\in[t_{00},t_{10}+\delta].$$

ქვემოთ, ნაჩვენებია, რომ უკანასკნელ ფორმულაზე დაყრდნობით, შეგვიძლია ავაგოთ შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი, სადაც განხილულია ერთი დაგვიანების შემცველი სამართი დიფერენციალური განტოლება უწყვეტი საწყისი პირობით

მაგალითი.

a) ვთქვათ, $t_{00}=0,\ t_{10}=2,\ h_{11}=0.5,\ h_{12}=1.5,\ \tau_0=1,\ \varphi_0(t)=1,$

$$u_0(t)=\begin{cases}\sqrt{2(t+1)^2+1}, & t\in[0,1),\\ \sqrt{2(t+1)^2+t^2}, & t\in[1,2].\end{cases}$$

ე.ი. ამ შემთხვევაში $\mu_0=(1,1,u_0)$.

განვიხილოთ თავდაპირველი სკალარული განტოლება

$$\dot{x}(t)=f\left(t,x(t),x(t-1),u_0(t)\right)=2x^2(t)+x^2(t-1)-u_0^2(t)+1,\ t\in[0,2],$$

საწყისი პირობით

$$x(t)=1,\ t\in[-1.5,0].$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$x_0(t)=\begin{cases}1, & t\in[-1.5,0],\\ t+1, & t\in[0,2].\end{cases}$$

ხ) შემოვიღოთ სიმრავლეები:

$$\Phi=\left\{1+2\rho_2\cos t:\rho_2\in R\right\},\quad \Omega=\left\{u_0(t)+\rho_3\sin t:\rho_3\in R\right\}.$$

ვარიაციათა სიმრავლე იქნება

$$V=\{\delta\mu=(\delta\tau,\delta\varphi,\delta u):\delta\tau=\rho_1\in(0.5,1.5)-1,\delta\varphi=2\rho_2\cos t\in\Phi-1,$$

$$\delta u=\rho_3\sin t\in\Omega-u_0,\ |\rho_i|\le\alpha,\ i=\overline{1,3}\},$$

სადაც $\alpha>0$ მოცემული რიცხვია.

ვთქვათ $\varepsilon>0$ რიცხვი იმდენად მცირეა, რომ $\forall\delta\mu\in V,\ \mu_0+\varepsilon\delta\mu\in(0.5,1.5)\times\Phi\times\Omega$

და არსებობს ამონახსნი $x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრული $[-1.5,2]$ შუალედზე.

$[0,2]$ ინტერვალზე ანალიზურად ვიპოვოთ შეშფოთებული კოშის ამოცანის ამონახსნი მეორე გზით, რომელიც გულისხმობს წრფივი განტოლების ამოხსნას (იხ. გვ. 42).

c) შეშფოთებული განტოლება

$$\dot{x}(t)=f\left(t,x(t),x(t-1-\varepsilon\rho_1),u(t)\right)=2x^2(t)+x^2(t-1-\varepsilon\rho_1)-\left[u_0(t)+\varepsilon\rho_3\sin t\right]^2+1,\ t\in[0,2]$$

შეშფოთებული საწყისი პირობით

$$x(t)=1+2\varepsilon\rho_2\cos t,\ t\in[-1.5,0].$$

ცხადია, რომ

$$f_x[t]=4x_0(t),\;\; f_y[t]=2x_0(t-1),\;\; f_u[t]=-2u_0(t).$$

ამრიგად,

$\delta x(t;\delta\mu),\; t\in[1,2]$ ფუნქციები შესაბამისად იქნება შემდეგი კოშის ამოცანის ამონახსნი (იხ. გვ. 42)

$$\begin{cases}\dot{\delta x}(t)=4x_0(t)\delta x(t)+2x_0(t-1)\delta x(t-1)-2\rho_1 x_0(t-1)\dot{x}_0(t-1)\\ \qquad -2\rho_3\sin t u_0(t),\quad t\in[0,2],\\ \delta x(t)=2\rho_2\cos t,\quad t\in[-1.5,0].\end{cases}$$

ელემენტარული გარდაქმნებით მივიღებთ

$$\delta x(t;\delta\mu)=\begin{cases}\delta x_1(t), & t\in[0,1),\\ \delta x_2(t), & t\in[1,2],\end{cases}$$

სადაც

$$\delta x_1(t)=2\left\{e^{2t(t+2)}\left(\rho_2+\int_0^t e^{-2s(s+2)}\left(2\rho_2\cos(s-1)-\rho_3\sin s\sqrt{2(s+1)^2+1}\right)ds\right)\right\},$$

$$\delta x_2(t)=\left\{e^{2\left(t^2+2t-3\right)}\left(\delta x_1(1)+\int_1^t e^{-2\left(s^2+2s-3\right)}\left[2s\delta x_1(s-1)-2\rho_3\sin s\times\sqrt{2(s+1)^2+s^2}\right)ds\right\}.$$

2.2. ლემები ამონახსნის ნაზრდის შეფასების შესახებ

ყოველ $\mu=(t_0,\tau_1,...,\tau_s,\varphi,u)\in\Lambda$ ელემენტს შევუსაბამოთ ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{y}(t)=f(t_0,\tau_1,...,\tau_s,\varphi,y,u)(t) \tag{2.11}$$

უწყვეტი საწყისი პირობით

$$y(t_0)=\varphi(t_0), \tag{2.12}$$

სადაც

$$f(t_0,\tau_1,...,\tau_s,\varphi,y,u)(t)=f\big(t,y(t),h(t_0,\varphi,y)(t-\tau_1),...,h(t_0,\varphi,y)(t-\tau_s),u(t)\big)(t)$$

და $h(t_0,\varphi,y)(t)$ ოპერატორი განისაზღვრება ფორმულით

$$h(t_0,\varphi,y)(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\in[\hat{\tau},t_0)\\ y(t), & t\in[t_0,b].\end{cases} \tag{2.13}$$

განსაზღვრება 2.1. ვთქვათ $\mu=(t_0,\tau_1,...,\tau_s,\varphi,u)\in\Lambda$. აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას $y(t)=y(t;\mu)\in O,\ \ t\in[r_1,r_2]\subset I$ ეწოდება (2.11) განტოლების ამონახსნი (2.12) საწყისი პირობით, ან μ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, განსაზღვრული $[r_1,r_2]$ ინტერვალზე, თუ $t_0\in[r_1,r_2], y(t_0)=\varphi(t_0)$ და ფუნქცია $y(t)$ აკმაყოფილებს (2.11) განტოლებას თითქმის ყველგან $[r_1,r_2]$ ინტერვალზე.

შენიშვნა 2.1. ვთქვათ $y(t;\mu),\ \ t\in[r_1,r_2]$ არის $\mu=(t_0,\tau_1,...,\tau_s,\varphi,u)\in\Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი. მაშინ ფუნქცია

$$x(t;\mu)=h(t_0,\varphi,y(\cdot;\mu))(t),t\in[\hat{\tau},r_2], \tag{2.14}$$

არის (2.1) განტოლების ამონახსნი (2.2) საწყისი პირობით (იხ. განსაზღვრება 2.1. და (2.13)).

ლემა 2.1. *ვთქვათ $y_0(t)$ არის $\mu_0=(t_{00},\tau_{10},...,\tau_{s0},\varphi_0,u_0)\in\Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[r_1,r_2]\subset(a,b)$ ინტერვალზე; ვთქვათ $t_{00}\in[r_1,r_2),\ \ \tau_{i0}\in(\theta_{i1},\theta_{i2})$, $i=\overline{1,s}$ და ვთქვათ $K_1\subset O$ არის კომპაქტური სიმრავლე, რომელიც შეიცავს $\varphi_0(I_1)\cup y_0([r_1,r_2])$ სიმრავლის მიდამოს. მაშინ არსებობს რიცხვები $\varepsilon_1>0$ და $\delta_1>0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in(0,\varepsilon_1)\times V$, გვაქვს $\mu_0+\varepsilon\delta\mu\in\Lambda$. ამასთან, ამ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი $y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრულია ინტერვალზე $[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]\subset I$.*

უფრო მეტიც,

$$\begin{cases}\varphi(t)=\varphi_0(t)+\varepsilon\delta\varphi(t)\in K_1,t\in I_1,\\ y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)\in K_1,t\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1],\end{cases} \tag{2.15}$$

და $\lim\limits_{\varepsilon\to0}y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)=y(t;\mu_0)$, თანაბრად $(t,\delta\mu)\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]\times V$.

ეს ლემა არის თეორემა 1.8 - ის შედეგი ([49], გვ. 28).

ლემა 2.2. *ვთქვათ $x_0(t)$ არის $\mu_0=(t_{00},\tau_{10},...,\tau_{s0},\varphi_0,u_0)\in\Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_{10}]$ ინტერვალზე (იხ. განსაზღვრება 2.1); ვთქვათ $t_{00},t_{10}\in(a,b),\ \ \tau_{i0}\in(\theta_{i1},\theta_{i2}),\ \ i=\overline{1,s}$ და ვთქვათ $K_1\subset O$ არის კომპაქტური სიმრავლე,*

რომელიც შეიცავს $\varphi_0(I_1)\cup x_0([t_{00},t_{10}])$ სიმრავლის მიდამოს. მაშინ არსებობს რიცხვები $\varepsilon_1>0$ და $\delta_1>0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in(0,\varepsilon_1)\times V$, გვაქვს $\mu_0+\varepsilon\delta\mu\in\Lambda$. ამასთან, ამ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი $x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრულია ინტერვალზე $[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]\subset I_1$. ამასთან,

$$x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)\in K_1,\ \ t\in[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]. \tag{2.16}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ ლემა 1.1-ში ჩავსვამთ $r_1=t_{00}$, $r_2=t_{10}$, მაშინ $x_0(t)=y_0(t)$, $t\in[t_{00},t_{10}]$ და $x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)=h(t_0,\varphi,y(\cdot,\mu_0+\varepsilon\delta\mu))(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]\times(0,\varepsilon_1)\times V$ (იხ. (2.14)). ამდენად, ლემა 2.2. წარმოადგენს ლემა 2.1-ის შედეგს (იხ. (2.15)).

შენიშვნა 2.2. ერთადერთობიდან გამომდინარეობს, რომ $y(t;\mu_0)$ ამონახსნი არის $y_0(t)$ ამონახსნის გაგრძელება $[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]$ ინტერვალზე. ლემა 2.1-დან $y_0(t)=y(t;\mu_0)$ ამონახსნის ნაზრდი განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\Delta y(t)=\Delta y(t;\varepsilon\delta\mu)=y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)-y_0(t),(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]\times(0,\varepsilon_1)\times V. \tag{2.17}$$

ცხადია,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta y(t;\varepsilon\delta\mu)=0, \tag{2.18}$$

თანაბრად $(t,\delta\mu)\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]\times V$ (იხ. ლემა 2.1).

ლემა 2.3. *ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 2.1 - ის პირობები. მაშინ არსებობს რიცხვები $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ და $\delta_2\in(0,\delta_1)$ ისეთი, რომ*

$$\max_{t\in[t_{00},t_{10}+\delta_2]}|\Delta y(t)|\le O(\varepsilon\delta\mu) \tag{2.19}$$

ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in(0,\varepsilon_2)\times V^-$. ამასთან,

$$\Delta y(t_{00})=\varepsilon\left[\delta\varphi(t_{00})+\left(\dot{\varphi}_0^- - f^-\right)\delta t_0\right]+o(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.20}$$

ლემა 2.4. *ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 2.2-ის პირობები. მაშინ არსებობს რიცხვები $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ და $\delta_2\in(0,\delta_1)$ ისეთი, რომ*

$$\max_{t\in[t_0,r_2+\delta_2]}|\Delta y(t)|\le O(\varepsilon\delta\mu)$$

ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in\ (0,\varepsilon_2)\times V^{+}$. *ამასთან,*

$$\Delta y(t_0)=\varepsilon\Big[\delta\varphi(t_{00})+\big(\dot{\varphi}_0^{+}-f^{+}\big)\delta t_0\Big]+o(\varepsilon\delta\mu).$$

ლემა 2.3 და 2.4 წარმოადგენს ლემა 1.3 და ლემა 1.4 შედეგს.

2.3. თეორემა 2.1 დამტკიცება

ლემა 2.1.-ში ვთქვათ, $r_1=t_{00}$ და $r_2=t_{10}$, მაშინ

$$x_0(t)=\begin{cases}\varphi_0(t), & t\in[\hat{\tau},t_{00}),\\ y_0(t), & [t_{00},t_{10}],\end{cases}$$

და ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in(0,\varepsilon_2)\times V^{-}$,

$$x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)=\begin{cases}\varphi(t):=\varphi_0(t)+\varepsilon\delta\varphi(t), & t\in[\hat{\tau},t_0),\\ y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu), & [t_0,t_{10}+\delta_1]\end{cases}$$

(იხ. (2.14)).

შევნიშნოთ, რომ $\delta\mu\in V^{-}$, ე.ი. $t_0<t_{00}$, აქედან გამომდინარე, გვაქვს

$$\Delta x(t)=\begin{cases}\varepsilon\delta\varphi(t), & t\in[\hat{\tau},t_0)\\ y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)-\varphi_0(t), & [t_0,t_{00}),\\ \Delta y(t), & t\in[t_{00},t_{10}+\delta_1]\end{cases}$$

(იხ. (2.4) და (2.17)). ლემა 2.3 - ით და მიმართებით $\left|y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)-\varphi_0(t)\right|\le O(\varepsilon\delta\mu)$, $t\in[t_0,t_{00}]$, გვაქვს

$$\left|\Delta x(t)\right|\le O(\varepsilon\delta\mu),(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[\hat{\tau},t_{10}+\delta_2]\times(0,\varepsilon_2)\times V^{-}, \tag{2.21}$$

$$\Delta x(t_{00})=\varepsilon\Big[\delta\varphi(t_{00})+\big(\dot{\varphi}_0^{-}-f^{-}\big)\delta t_0\Big]+o(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.22}$$

$\Delta x(t)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}(t)&=f\big(t,x_0(t)+\Delta x(t),x_0(t-\tau_1)+\Delta x(t-\tau_1),...,x_0(t-\tau_s)+\Delta x(t-\tau_s),u(t)\big)-f[t]\\ &=f_x[t]\Delta x(t)+\sum_{i=1}^{s}f_{x_i}[t]\Delta x(t-\tau_{i0})+\varepsilon f_u[t]\delta u(t)+r(t;\varepsilon\delta\mu)\end{aligned} \tag{2.23}$$

$[t_{00},t_{10}+\delta_1]$ ინტერვალზე, სადაც

$$r(t;\varepsilon\delta\mu)=f\big(t,x_0(t)+\Delta x(t),x_0(t-\tau_1)+\Delta x(t-\tau_1),...,x_0(t-\tau_s)+\Delta x(t-\tau_s),u(t)\big)$$

$$-f[t]-f_x[t]\Delta x(t)-\sum_{i=1}^{s} f_{x_i}[t]\Delta x(t-\tau_{i0})-\varepsilon f_u[t]\delta u(t), \tag{2.24}$$

$$f[t]=f\left(t,x_0(t),x_0(t-\tau_{10}),...,x_0(t-\tau_{s0}),u_0(t)\right),$$

კოშის ფორმულის გამოყენებით (2.23) განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით:

$$\Delta x(t)=Y(t_{00};t)\Delta x(t_{00})+\varepsilon\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_u[t]\delta u(t)dt+\sum_{p=0}^{1} R_p(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu),\quad t\in[t_{00},t_{10}+\delta_2], \tag{2.25}$$

სადაც

$$\begin{cases} R_0(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=1}^{s} R_{i0}(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu), \\ R_{i0}(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu)=\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\Delta x(\xi)d\xi, \\ R_1(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)r(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi \end{cases} \tag{2.26}$$

$Y(\xi;t)$ არის მატრიც-ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (2.8) განტოლებას და (2.9) პირობას. $Y(\xi;t)$ ფუნქცია უწყვეტია $\Pi=\{(\xi;t):t_{00}-\delta_2\le\xi\le t\}$, $t\in[t_{00},t_{10}+\delta_2]$ სიმრავლეზე (იხ. ლემა 2.6, გვ. 32, [49]).

ამდენად,

$$Y(t_{00};t)\Delta x(t_{00})=\varepsilon Y(t_{00};t)\left[\delta\varphi(t_{00})+\left(\dot{\varphi}_0^- - f^-\right)\delta t_0\right]+o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{2.27}$$

(იხ. (2.22)), სადაც $o(t;\varepsilon\delta\mu)=Y(t_{00};t)o(\varepsilon\delta\mu)$. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$R_{i0}(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu)=\varepsilon\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_0} Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi+\int_{t_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\Delta x(\xi)d\xi$$

$$=\varepsilon\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{2.28}$$

(იხ. (2.21)). ამდენად,

$$R_0(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu)=\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_{i0};t)f_{x_i}[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f(t;\theta,\varepsilon\delta\mu)=f\Big(t,x_0(t)+\theta\Delta x(t),x_0(t-\tau_{10})+\theta\left(x_0(t-\tau_1)-x_0(t-\tau_{10})+\Delta x(t-\tau_1)\right),...,$$
$$x_0(t-\tau_{s0})+\theta\left(x_0(t-\tau_s)-x_0(t-\tau_{s0})+\Delta x(t-\tau_s),u_0(t)+\theta\varepsilon\delta u(t)\right)\Big),$$

$$\sigma\left(t;\theta,\varepsilon\delta\mu\right)=f_x\left[t;\theta,\varepsilon\delta\mu\right]-f_x\left[t\right],\quad \rho_i\left(t;\theta,\varepsilon\delta\mu\right)=f_{x_i}\left[t;\theta,\varepsilon\delta\mu\right]-f_{x_i}\left[t\right],$$

$$\vartheta\left(t;\theta,\varepsilon\delta\mu\right)=f_u\left[t;\theta,\varepsilon\delta\mu\right]-f_u\left[t\right].$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$f\left(t,x_0\left(t\right)+\Delta x\left(t\right),x_0\left(t-\tau_1\right)+\Delta x\left(t-\tau_1\right),...,x_0\left(t-\tau_s\right)+\Delta x\left(t-\tau_s\right),u_0\left(t\right)+\varepsilon\delta u\left(t\right)\right)-f\left[t\right]$$

$$=\int_0^1\frac{d}{d\theta}f\left[t;\theta,\varepsilon\delta\mu\right]d\theta$$

$$=\int_0^1\left\{f_x\left[t;\theta,\varepsilon\delta\mu\right]\Delta x\left(t\right)+\sum_{i=1}^{s}f_{x_i}\left[t;\theta,\varepsilon\delta\mu\right]\left(x_0\left(t-\tau_i\right)-x_0\left(t-\tau_{i0}\right)+\Delta x\left(t-\tau_i\right)\right)+\varepsilon f_u\left[t;\theta,\varepsilon\delta\mu\right]\delta u\left(t\right)\right\}d\theta$$

$$=\left[\int_0^1\sigma\left(t;\theta,\varepsilon\delta\mu\right)d\theta\right]\Delta x\left(t\right)+\sum_{i=1}^{s}\left[\int_0^1\rho_i\left(t;\theta,\varepsilon\delta\mu\right)d\theta\right]\left(x_0\left(t-\tau_i\right)-x_0\left(t-\tau_{i0}\right)+\Delta x\left(t-\tau_i\right)\right)$$

$$+\varepsilon\left[\int_0^1\theta\left(t;\theta,\varepsilon\delta\mu\right)d\theta\right]\delta u\left(t\right)+f_x\left[t\right]\Delta x\left(t\right)+\sum_{i=1}^{s}f_{x_i}\left[t\right]\left(x_0\left(t-\tau_i\right)-x_0\left(t-\tau_{i0}\right)+\Delta x\left(t-\tau_i\right)\right)+\varepsilon f_u\left[t\right]\delta u\left(t\right).$$

უკანასკნელი ტოლობისათვის, როცა $t\in\left[t_{00},t_{10}+\delta_2\right]$ გვაქვს

$$R_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=\sum_{p=2}^{6}R_p\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)$$

სადაც

$$R_2\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=\int_{t_{00}}^{t}Y\left(\xi;t\right)\sigma_1\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)\Delta x\left(\xi\right)d\xi,\quad \sigma_1\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)=\int_0^1\sigma\left(\xi;\theta,\varepsilon\delta\mu\right)d\theta,$$

$$R_3\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}}^{t}Y\left(\xi;t\right)\rho_{i1}\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)\left[x_0\left(\xi-\tau_i\right)-x_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)+\Delta x\left(\xi-\tau_i\right)\right]d\xi,$$

$$\rho_{i1}\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)=\int_0^1\rho_i\left(\xi;\theta,\varepsilon\delta\mu\right)d\theta,$$

$$R_4\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}}^{t}Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\left[x_0\left(\xi-\tau_i\right)-x_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)\right]d\xi,$$

$$R_5\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}}^{t}Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\left[\Delta x\left(\xi-\tau_i\right)-\Delta x\left(\xi-\tau_{i0}\right)\right]d\xi,$$

$$R_6\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=\varepsilon\int_{t_{00}}^{t}Y\left(\xi;t\right)\vartheta_1\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)\delta u\left(\xi\right)d\xi,\ \vartheta_1\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)=\int_0^1\vartheta\left(\xi;\theta,\varepsilon\delta\mu\right)d\theta$$

(იხ. (2.24)). ფუნქცია $x_0(t)$, $[\hat{\tau}, t_{10}+\delta_2]$ აბსოლუტურად უწყვეტია, ამიტომ ყოველი ფიქსირებული ლებეგის წერტილისთვის $\xi_i \in (t_{00}, t_{10}+\delta_2)$, $\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})$ ფუნქციისთვის მივიღებთ

$$x_0(\xi_i-\tau_i)-x_0(\xi_i-\tau_{i0})=\int_{\xi_i}^{\xi_i-\varepsilon\delta\tau_i}\dot{x}_0(\varsigma-\tau_{i0})d\varsigma=-\varepsilon\dot{x}_0(\xi_i-\tau_{i0})\delta\tau_i+\gamma_i(\xi_i;\varepsilon\delta\mu) \tag{2.29}$$

სადაც

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma_i(\xi_i;\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}=0, \text{ თანაბრად } \delta\mu\in V^-. \tag{2.30}$$

ამდენად, (2.29) სამართლიანია $(t_{00}, t_{10}+\delta_2)$ ინტერვალის ყველა წერტილისათვის. (2.29)-დან და შემდეგი ფუნქციების შემოსაზღვრულობიდან გამომდინარეობს

$$\dot{x}_0(t)=\begin{cases}\dot{\varphi}_0(t), & t\in[\hat{\tau}, t_{00}),\\ f(t, x_0(t), x_0(t-\tau_{10}),\ldots, x_0(t-\tau_{s0}), u_0(t)), & t\in(t_{00}, t_{10}+\delta_2),\end{cases}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$|x_0(\xi_i-\tau_i)-x_0(\xi_i-\tau_{i0})|\le O(\varepsilon\delta\mu) \text{ და } \left|\frac{\gamma_i(\xi_i;\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}\right|\le const. \tag{2.31}$$

ცხადია, რომ

$$|\Delta x(\xi-\tau_i)-\Delta x(\xi-\tau_{i0})|=\begin{cases}o(\xi;\varepsilon\delta\mu), & \xi\in[t_{00},\rho_{i1}],\\ O(\xi;\varepsilon\delta\mu), & \xi\in[\rho_{i1},\rho_{i2}]\end{cases} \tag{2.32}$$

(იხ. (2.21)).

ვთქვათ, $\xi\in[\rho_{i2}, t_{10}+\delta_1]$, მაშინ $\xi-\tau_i\ge t_{00}$, $\xi-\tau_{i0}\ge t_{00}$. აქედან

$$|\Delta x(\xi-\tau_i)-\Delta x(\xi-\tau_{i0})|\le\int_{\xi-\tau_{i0}}^{\xi-\tau_i}|\dot{\Delta}x(s)|ds\le\int_{\xi-\tau_{i0}}^{\xi-\tau_i}L_{K_1,U_1}(\varsigma)\Big[|\Delta x(s)|$$

$$+\sum_{i=1}^{s}|x_0(\varsigma-\tau_i)-x_0(\varsigma-\tau_{i0})|+|\Delta x(\varsigma-\tau_i)|\Big]d\varsigma+\varepsilon\alpha\int_{\xi-\tau_{i0}}^{\xi-\tau_i}L_{K_1,U_1}(\varsigma)d\varsigma=o(\xi;\varepsilon\delta\mu) \tag{2.33}$$

(იხ. (2.16), (2.21), (2.23) და (2.31)). (2.21), (2.29) და (2.30)-(2.33) გამოსახულებებზე დაყრდნობით, $R_p(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu)$, $p=\overline{2,6}$ გამოსახულებებისათვის გვაქვს

$$|R_2(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu)|\le\|Y\|O(\varepsilon\delta\mu)\sigma_2(\varepsilon\delta\mu),\quad \sigma_2(\varepsilon\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_{00}+\delta_1}|\sigma_1(\xi;\varepsilon\delta\mu)|d\theta,$$

$$\left|R_3\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)\right|\le\|Y\|O\left(\varepsilon\delta\mu\right)\rho_{i2}\left(\varepsilon\delta\mu\right),\ \rho_{i2}\left(\varepsilon\delta\mu\right)=\int_{t_{00}}^{t_{00}+\delta_1}\left|\rho_{i1}\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)\right|d\xi,$$

$$R_4\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=-\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\left[\int_{t_{00}}^{t}Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\dot{x}_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)d\xi\right]\delta\tau_i+\sum_{i=1}^{s}\gamma_{i1}\left(t;\varepsilon\delta\mu\right),$$

$$\left|R_5\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)\right|=o\left(t;\varepsilon\delta\mu\right),$$

$$\left|R_6\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)\right|\le\varepsilon\|Y\|O\left(\varepsilon\delta\mu\right)\vartheta_2\left(\varepsilon\delta\mu\right),\quad \vartheta_2\left(\varepsilon\delta\mu\right)=\int_{t_{00}}^{t_{00}+\delta_1}\left|\vartheta_1\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)\right|d\xi,$$

სადაც

$$\|Y\|=\sup\left\{\left|Y\left(\xi;t\right)\right|:\left(\xi;t\right)\in\Pi\right\},\quad \gamma_{i1}\left(t;\varepsilon\delta\mu\right)=\int_{t_{00}}^{t}Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\gamma_i\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)d\xi.$$

ცხადია,

$$\left|\frac{\gamma_{i1}\left(t;\varepsilon\delta\mu\right)}{\varepsilon}\right|\le\|Y\|\int_{t_{00}}^{t_{00}+\delta_1}\left|f_{x_i}\left[\xi\right]\right|\left|\frac{\gamma_i\left(\xi;\varepsilon\delta\mu\right)}{\varepsilon}\right|d\xi.$$

ლებეგის თეორემის ძალით ზღვრის ნიშნის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ შეტანის შესახებ, გვექნება

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sigma_2\left(\varepsilon\delta\mu\right)=0,\ \lim_{\varepsilon\to0}\rho_{i2}\left(\varepsilon\delta\mu\right)=0,\ \lim_{\varepsilon\to0}\vartheta_2\left(\varepsilon\delta\mu\right)=0,\ \lim_{\varepsilon\to0}\left|\frac{\gamma_{i1}\left(t;\varepsilon\delta\mu\right)}{\varepsilon}\right|=0$$

თანაბრად $\left(t,\delta\mu\right)\in\left[t_{00},t_{10}+\delta_2\right]\times V^-$ (იხ. (2.29)). ამდენად,

$$R_p\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=o\left(t;\varepsilon\delta\mu\right),\quad p=2,3,5,6, \tag{2.34}$$

$$R_4\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=-\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\left[\int_{t_{00}}^{t}Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\dot{x}_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)d\xi\right]\delta\tau_i \tag{2.35}$$

(2.34) და (2.35) გამოსახულებებზე დაყრდნობით, მივიღებთ

$$R_1\left(t;t_{00},\varepsilon\delta\mu\right)=-\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\left[\int_{t_{00}}^{t}Y\left(\xi;t\right)f_{x_i}\left[\xi\right]\dot{x}_0\left(\xi-\tau_{i0}\right)d\xi\right]\delta\tau_i+o\left(t;\varepsilon\delta\mu\right). \tag{2.36}$$

(2.25) გამოსახულებიდან, (2.27), (2.28) და (2.36) წარმოდგენებით, მივიღებთ (2.5)-ს, სადაც $\delta x\left(t;\delta\mu\right)$ აქვს (2.6) ფორმა.

□

2.4. თეორემა 2.2 დამტკიცება

უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ $\delta\mu \in V^+$, ე.ი. $t_{00} < t_0$; აქედან გამომდინარე გვაქვს

$$\Delta x(t) = \begin{cases} \varepsilon\delta\varphi(t), & t \in [\hat{\tau}, t_{00}), \\ \varphi(t) - y_0(t), & t \in [t_{00}, t_0), \\ \Delta y(t), & t \in [t_0, t_{10} + \delta_1] \end{cases}$$

ლემა 3.4 - ის გამოყენებით, მივიღებთ

$$\Delta x(t_0) = \varepsilon\left[\delta x_0 - f^+\delta t_0\right] + o(\varepsilon\delta\mu). \tag{2.37}$$

ფუნქცია $\Delta x(t)$ აკმაყოფილებს (2.23) განტოლებას $[t_0, t_{10} + \delta_2]$ ინტერვალზე. აქედან გამომდინარე, კოშის ფორმულის გამოყენებით განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით

$$\Delta x(t) = Y(t_0;t)\Delta x(t_0) + \varepsilon\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t) f_u[\xi]\delta u(\xi)d\xi + \sum_{p=0}^{1} R_p, \tag{2.38}$$

სადაც $R_p = R_p(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)$, (იხ. (2.26)). ვთქვათ $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1)$ და $\delta_2 \in (0,\delta_1)$ არის იმდენად მცირე, რომ ადგილი აქვს უტოლობებს: $t_0 + \tau_i < t_{10} - \delta_2$, $i = \overline{1,s}$, $t_{00} + \tau_{s0} < t_{10} - \delta_2$. $Y(\xi;t)$ არის მატრიც-ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია $[t_{00}, t_{00} + \tau_{s0}] \times [t_{10} - \delta_2, t_{10} + \delta_2] \subset \Pi$. აქედან გამომდინარე,

$$Y(t_0;t)\Delta x(t_0) = \varepsilon Y(t_{00};t)\left[\delta x_0 - f^+\delta t_0\right] + o(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{2.39}$$

მსგავსი გზით, ძირეული ცვლილებების გარეშე, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\begin{aligned} R_0 &= \varepsilon\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_{i0};t) f_{0x_i}[\xi+\tau_{i0}]\delta\varphi(\xi)d\xi \\ &+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}+\tau_{i0}}^{t_0+\tau_{i0}} Y(\xi;t) f_{0x_i}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{i0})d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu) \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= -\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\left[\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_{0x_i}[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_{i0})d\xi\right]\delta\tau_i \\ &-\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}+\tau_{i0}}^{t_0+\tau_{i0}} Y(\xi;t) f_{0x_1}[\xi]\Delta x(\xi-\tau_{i0})d\xi \\ &-\varepsilon\sum_{i=1}^{s} Y(t_{00}+\tau_{i0};t) f_i(\delta t_0+\delta\tau_i) + o(t;\varepsilon\delta\mu) \end{aligned} \tag{2.41}$$

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ

$$\varepsilon\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t) f_u[\xi]\delta u(\xi)d\xi = \varepsilon\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_u[\xi]\delta u(\xi)d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{2.42}$$

(2.39)-(2.42) გამოსახულებების გათვალისწინებით (2.38) -ში, მივიღებთ (2.5)-ს, სადაც

$$\delta x(t;\delta\mu) = -Y(t_{00};t) f^{+}\delta t_0 + \beta(t;\delta\mu).$$

□

თავი III. ოპტიმალური მართვის ამოცანა წყვეტილი საწყისი პირობით. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები

3.1. ამოცანის დასმა და ძირითადი შედეგების ფორმულირება

ვთქვათ $U \subset \mathbb{R}^r$ ამოზნექილი კომპაქტური სიმრავლეა. ვთქვათ $h_{i2} > h_{i1} > 0,\ i = \overline{1,s}$ და $\theta_i > 0,\ i = \overline{1,k}$ არის მოცემული რიცხვები და $n-$განზომილებიანი ფუნქცია $f\left(t,x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k\right),\quad \left(t,x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k\right) \in I \times O^{1+s} \times U^{1+k}$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: თითქმის ყველა ფიქსირებული $t \in I$ ფუნქცია $f\left(t,\cdot\right): I \times O^{1+s} \times U^{1+k} \to \mathbb{R}^n$ უწყვეტია და უწყვეტად წარმოებადია $\left(x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k\right) \in O^{1+s} \times U^{1+k}$-ში; ყოველი ფიქსირებული $\left(x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k\right) \in O^{1+s} \times U^{1+k}$ ფუნქცია $f\left(t,x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k\right)$, მატრიცები $f_x\left(t,\cdot\right),\quad f_{x_i}\left(t,\cdot\right),\quad i = \overline{1,s}$ და $f_u\left(t,\cdot\right),\quad f_{u_i}\left(t,\cdot\right),\quad i = \overline{1,k}$ არიან ზომადი I ინტერვალზე; ნებისმიერი $K \subset O$ კომპაქტური სიმრავლისათვის არსებობს ფუნქცია $m_K\left(t\right) \in L_1\left(I,\left[0,\infty\right)\right)$ ისეთი, რომ

$$\left|f\left(t,x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k\right)\right| + \left|f_x\left(t,x,\cdot\right)\right| + \sum_{i=1}^{s}\left|f_{x_i}\left(t,x,\cdot\right)\right| + \left|f_u\left(t,x,\cdot\right)\right| + \sum_{i=1}^{k}\left|f_{u_i}\left(t,x,\cdot\right)\right| \le m_K\left(t\right)$$

ყოველი $\left(x,x_1,...,x_s,u,u_1,...,u_k\right) \in K^{1+s} \times U^{1+k}$ - თვის და თითქმის ყველა $t \in I$ -თვის.

ვთქვათ, Φ_1 არის უწყვეტი $\varphi(t) \in N,\ t \in I_1$ ფუნქციების სიმრავლე, სადაც $N \subset O$ არის ამოზნექილი კომპაქტური სიმრავლე; Ω_1 არის ზომადი $u\left(t\right) \in U,\quad t \in I_2 = \left[\hat{\theta},b\right]$, ფუნქციების სიმრავლე, სადაც $\hat{\theta} = a - \bar{\theta},\ \ \bar{\theta} = \max\left\{\theta_1,...,\theta_k\right\}$; $X_0 \subset O$ არის ამოზნექილი კომპაქტური სიმრავლე. ვთქვათ სკალარული ფუნქციები $q^i\left(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,x_1\right),\ \ i = \overline{0,l}$ არიან უწყვეტად წარმოებადი $I^2 \times \left[h_{11},h_{12}\right] \times ... \times \left[h_{s1},h_{s2}\right] \times O^2$ სიმრავლეზე.

ყოველ

$$v = \left(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,\varphi,u\right) \in A = I \times I \times \left[h_{11},h_{12}\right] \times ... \times \left[h_{s1},h_{s2}\right] \times X_0 \times \Phi_1 \times \Omega_1$$

ელემენტს, $\left[t_0,t_1\right]$ ინტერვალზე შევუსაბამოთ დაგვიანებულ არგუმენტიანი ფუნქციონალურ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}\left(t\right) = f\left(t,x\left(t\right),x\left(t-\tau_1\right),...,x\left(t-\tau_s\right),u\left(t\right),u\left(t-\theta_1\right),...,u\left(t-\theta_k\right)\right), \qquad (3.1)$$

$$t \in \left[t_0,t_1\right] \subset I,\ u \in \Omega_1,$$

წყვეტილი საწყისი პირობით

$$x\left(t\right) = \varphi\left(t\right),\ t \in \left[\hat{\tau},t_0\right),\ \ x\left(t_0\right) = x_0. \qquad (3.2)$$

(3.2) პირობას ეწოდება წყვეტილი, რადგან საზოგადოდ $x\left(t_0\right) \ne \varphi\left(t_0\right)$.

განსაზღვრება 3.1. ვთქვათ, $v=(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,\varphi,u)\in A.$ ფუნქციას $x(t)=x(t;v)\in O,$ $t\in[\hat{\tau},t_1]$ ეწოდება (3.1) განტოლების ამონახსნი (3.2) წყვეტილი საწყისი პირობით, ან v ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი და განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_1]$ ინტერვალზე, თუ ის აკმაყოფილებს (3.2) პირობას და აბსოლუტურად უწყვეტია $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე და აკმაყოფილებს განტოლებას თითქმის ყველა t - სათვის $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე.

განსაზღვრება 3.2. $v=(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,\varphi,u)\in A$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ მისი შესაბამისი ამონახსნი $x(t)=x(t;v)$ აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$q^i\left(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,x(t_1)\right)=0,\quad i=\overline{1,l}. \tag{3.3}$$

A_0 -ით აღვნიშნოთ დასაშვები ელემენტების სიმრავლე.

განსაზღვრება 3.3. $v_0=(t_{00},t_{10},\tau_{10},...,\tau_{s0},x_{00},\varphi_0,u_0)\in A_0$ ელემენტს ეწოდება ლოკალურად ოპტიმალური, თუ არსებობს ისეთი $\delta_0>0$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $v\in A_0$ ელემენტისთვის, რომლისთვისაც შესრულებულია პირობა

$$|t_{00}-t_0|+|t_{10}-t_1|+\sum_{i=1}^{s}|\tau_{i0}-\tau_i|+|x_{00}-x_0|+\|\varphi_0-\varphi\|_{I_1}+\|u_0-u\|_{I_2}\le\delta_0,$$

ადგილი აქვს უტოლობას

$$q^0\left(t_{00},t_{10},\tau_{10},...,\tau_{s0},x_{00},x_0(t_{10})\right)\le q^0\left(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,x(t_1)\right) \tag{3.4}$$

აქ

$$\|\varphi_0-\varphi\|_{I_1}=\max_{t\in I_1}|\varphi_0(t)-\varphi(t)|,\quad \|u_0-u\|_{I_2}=\sup_{t\in I_2}|u_0(t)-u(t)|.$$

(3.1)-(3.4) ამოცანას ეწოდება ოპტიმალური მართვის ამოცანა წყვეტილი საწყისი პირობით.

თეორემა 3.1. *ვთქვათ, v_0 ოპტიმალური ელემენტია, რომლისთვისაც $t_{00},t_{10}\in(a,b]$ და შესრულებული შემდეგი პირობები:*

1) $\tau_{s0}>...>\tau_{10}$ *და* $t_{00}+\tau_{s0}<t_{10}$, *სადაც* $\tau_{i0}\in(h_{i1},h_{i2})$, $i=\overline{1,s}$;

2) *ფუნქცია* $\varphi_0(t)$ *არის აბსოლუტურად უწყვეტი და* $\dot{\varphi}_0(t)$ *შემოსაზღვრულია;*

3) ფუნქცია $f_0(w)=f\left(w,u_0(t),u_0(t-\theta_1),...,u_0(t-\theta_k)\right)$, სადაც $w=(t,x,x_1,...,x_s)\in I\times O^{s+1}$ შემოსაზღვრულია;

4) არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{w\to w_0} f_0(w)=f^-,\ w\in(a,t_{00}]\times O^{s+1},$$

სადაც $w_0=\left(t_{00},x_{00},\varphi_0(t_{00}-\tau_{10}),...,\varphi_0(t_{00}-\tau_{s0})\right)$;

5) არსებობს სასრული ზღვრები

$$\lim_{(w_{1i},w_{2i})\to(w_{1i}^0 w_{2i}^0)}\left[f_0(w_{1i})-f_0(w_{2i})\right]=f_i,$$

სადაც $w_{1i},w_{2i}\in(a,b)\times O^{s+1},\ i=\overline{1,s}$,

$$w_{1i}^0=(t_{00}+\tau_{i0},x_0(t_{00}+\tau_{i0}),x_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{10}),...,x_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{i-10}),$$
$$x_{00},x_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{i+10}),...,x_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{s0})),$$
$$w_{1i}^0=(t_{00}+\tau_{i0},x_0(t_{00}+\tau_{i0}),x_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{10}),...,x_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{i-10}),$$
$$\varphi_0(t_{00}),x_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{i+10}),...,x_0(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{s0}));$$

6) არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{w\to w_{s+1}} f_0(w)=f_{s+1}^-,\ w\in(t_{00},t_{10}]\times O^{s+1},\ \ w_{s+1}=\left(t_{10},x_0(t_{10}),x_0(t_{10}-\tau_{10}),...,x_0(t_{10}-\tau_{s0})\right).$$

მაშინ არსებობს $\pi=(\pi_0,...,\pi_l)\neq 0$ ვექტორი, რომლისთვისაც $\pi_0\le 0$ და ამონახსნი $\psi(t)=(\psi_1(t),...,\psi_n(t))$ განტოლებისა

$$\dot\psi(t)=-\psi(t)f_x[t]-\sum_{i=1}^{s}\psi(t+\tau_{i0})f_{x_i}[t+\tau_{i0}],\ t\in[t_{00},t_{10}],\ \ \psi(t)=0,\ \ t>t_{10}, \tag{3.5}$$

ისეთი, რომ შესრულებულია ქვემოთ მოყვანილი პირობები:

7) პირობა t_{00} და t_{10} მომენტებისთვის:

$$\pi Q_{0t_0}\ge\psi(t_{00})f^-+\sum_{i=1}^{s}\psi(t_{00}+\tau_{i0})f_i,\ \ \pi Q_{0t_1}\ge-\psi(t_{10})f_{s+1}^-,$$

სადაც

$$Q=\left(q^0,...,q^l\right)^T,\ Q_0=Q\left(t_{00},t_{10},\tau_{10},...,\tau_{s0},x_{00},x_0(t_{10})\right),\ Q_{0t_0}=\frac{\partial}{\partial t_0}Q_0;$$

8) პირობა $\tau_{i0},i=\overline{1,s}$ დაგვიანებებისთვის,

$$\pi Q_{0\tau_{i0}} = \psi\left(t_{00}+\tau_{i0}\right) f_i + \int\limits_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{i0}} \psi\left(t\right) f_{x_i}\left[t\right]\dot{\varphi}_0\left(t-\tau_{i0}\right)dt$$

$$+\int\limits_{t_{00}+\tau_{i0}}^{t_{10}} \psi\left(t\right) f_{x_i}\left[t\right]\dot{x}_0\left(t-\tau_{i0}\right)dt,\ i=\overline{1,s};$$

9) *პირობა* x_{00} *ვექტორისთვის,*

$$\left(\pi Q_{0x_0}+\psi\left(t_{00}\right)\right)x_{00} = \max_{x_0\in X_0}\left(\pi Q_{0x_0}+\psi\left(t_{00}\right)\right)x_0,$$

10) *ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპი* $\varphi_0\left(t\right)$ *საწყისი ფუნქციისათვის,*

$$\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}} \psi\left(t+\tau_{i0}\right)f_{x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\varphi_0\left(t\right)dt = \max_{\varphi(t)\in\Phi_1}\sum_{i=1}^{s}\int\limits_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}} \psi\left(t+\tau_{i0}\right)f_{x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\varphi\left(t\right)dt;$$

11) *ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპი სამართი* $u_0\left(t\right)$ *ფუნქციისათვის,*

$$\int\limits_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)\left[f_u\left[t\right]u_0\left(t\right)+\sum_{i=1}^{k}f_{u_i}\left[t\right]u_0\left(t-\theta_{i0}\right)\right]dt$$

$$=\max_{u(t)\in\Omega_1}\int\limits_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)\left[f_u\left[t\right]u\left(t\right)+\sum_{i=1}^{k}f_{u_i}\left[t\right]u\left(t-\theta_{i0}\right)\right]dt$$

12) *პირობა* $\psi\left(t\right)$ *ფუნქციისათვის,*

$$\psi\left(t_{10}\right)=\pi Q_{0x_1}.$$

თეორემა 3.2. *ვთქვათ,* v_0 *ოპტიმალური ელემენტია, რომლისთვისაც* $t_{00},t_{10}\in\left[a,b\right)$ *და ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 3.1-ის 1), 2), 3) და 5) პირობები. ამასთან, არსებობს სასრული ზღვრები*

$$\lim_{w\to w_0} f_0\left(w\right)=f^+,\ \ w\in\left[t_{00},t_{10}\right)\times O^{s+1},$$
$$\lim_{w\to w_{s+1}} f_0\left(w\right)=f_{s+1}^+,\ \ w\in\left[t_{10},b\right)\times O^{s+1},$$

მაშინ არსებობს $\pi=\left(\pi_0,...,\pi_l\right)\neq 0$ *ვექტორი, რომლისთვისაც* $\pi_0\le 0$ *და* $\psi\left(t\right)=\left(\psi_1\left(t\right),...,\psi_n\left(t\right)\right)$ *(3.5) განტოლების ამონახსნი ისეთი, რომ 8)-12) პირობები შესრულებული. ამასთან,*

$$\pi Q_{0t_0}\le\psi\left(t_{00}\right)f^+ +\sum_{i=1}^{s}\psi\left(t_{00}+\tau_{i0}\right)f_i,\ \ \pi Q_{0t_1}\le-\psi\left(t_{10}\right)f_{s+1}^+.$$

თეორემა 3.3. *ვთქვათ, v_0 ოპტიმალური ელემენტია, რომლისთვისაც $t_{00}, t_{10} \in (a,b)$ და ვთქვათ შესრულებულია თეორემების 3.1 და 3.2 პირობები. ამასთან, $f^- = f^+ := f$, $f_{s+1}^- = f_{s+1}^+ := f_{s+1}$. მაშინ არსებობს $\pi = (\pi_0,...,\pi_l) \neq 0$ ვექტორი, რომლისთვისაც $\pi_0 \le 0$, და (3.5) განტოლების ამონახსნი ისეთი, რომ 8)-12) პირობებია შესრულებული. ამასთან,*

$$\pi Q_{0t_0} = \psi(t_{00}) f + \sum_{i=1}^{s} \psi(t_{00} + \tau_{i0}) f_i, \;\; \pi Q_{0t_1} = -\psi(t_{10}) f_{s+1}.$$

ცხადია, რომ თუ ფუნქცია $f(t, x, x_1,...,x_s, u, u_1,...,u_k)$ უწყვეტია და ფუნქციები $u_0(t), u_0(t-\theta_1),...,u_0(t-\theta_s)$ არიან უწყვეტი t_{00}, $t_{00} - \tau_{i0}$, $i = \overline{1,s}$; $t_{00} + \tau_{i0}$; $i = \overline{1,s}$; t_{10}, $t_{10} - \tau_{i0}$, $i = \overline{1,s}$ წერტილებში. მაშინ გვაქვს

$$f = f\left(t_{00}, x_{00}, \varphi_0(t_{00} + \tau_{10}),...,\varphi_0(t_{00} + \tau_{s0}), u_0(t_{00}), u_0(t_{00} - \theta_1),...,u_0(t_{00} - \theta_s)\right),$$

$$f_{s+1} = f\left(t_{10}, x_0(t_{10}), x_0(t_{10} + \tau_{10}),...,x_0(t_{10} + \tau_{s0}), u_0(t_{10}), u_0(t_{10} - \theta_1),...,u_0(t_{10} - \theta_s)\right),$$

$$f_i = f_0\left(t_{00} + \tau_{i0}, x_0(t_{00} + \tau_{i0}), x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{10}),...,x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{i-10}), x_{00},\right.$$

$$x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{i+10}),...,x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{s0})\Big) - f_0\Big(t_{00} + \tau_{i0}, x_0(t_{00} + \tau_{i0}), x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{10}),$$

$$\left. ..., x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{i-10}), \varphi_0(t_{00}), x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{i+10}),...,x_0(t_{00} + \tau_{i0} - \tau_{s0})\right).$$

წერტილოვანი მაქსიმუმის პრინციპი მართვისთვის. მარტივი გარდაქმედებით 11) პირობა შეიძლება ასე გადავწეროთ

$$\int_{t_{00}-\bar{\theta}}^{t_{10}} \left(\chi(t)\psi(t) f_u[t] + \sum_{i=1}^{k} \chi_i(t)\psi(t+\theta_i) f_{u_i}[t+\theta_i] \right) u_0(t)\,dt$$

$$\ge \int_{t_{00}-\bar{\theta}}^{t_{10}} \left(\chi(t)\psi(t) f_u[t] + \sum_{i=1}^{k} \chi_i(t)\psi(t+\theta_i) f_{u_i}[t+\theta_i] \right) u(t)\,dt, \;\; \forall u(t) \in \Omega,$$

სადაც $\chi(t)$ არის $[t_{00}, t_{10}]$ ინტერვალის მახასიათებელი ფუნქცია, ხოლო $\chi_i(t)$ არის $[t_{00} - \theta_i, t_{10} - \theta_i]$ მახასიათებელი ფუნქცია. უკანასკნელი უტოლობიდან სტანდარტული გზით მიიღება წერტილოვანი მაქსიმუმის პრინციპი

$$\left(\chi(t)\psi(t) f_u[t] + \sum_{i=1}^{k} \chi_i(t)\psi(t+\theta_i) f_{u_i}[t+\theta_i] \right) u_0(t)$$

$$\geq \left(\chi(t)\psi(t) f_u[t] + \sum_{i=1}^{k} \chi_i(t)\psi(t+\theta_i) f_{u_i}[t+\theta_i] \right) u, \ \forall u \in U$$

თითქმის ყველა $t \in \left[t_{00} - \overline{\theta}, t_{10} \right]$.

ოპტიმალური ამოცანა დამაგრებული ბოლოებით და ინტეგრალური ფუნქციონალით. განვიხილოთ ამოცანა:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_s), u(t), u(t-\theta_1), ..., u(t-\theta_k)\right), \ t \in [t_0, t_1] \subset I, u \in \Omega,$$

$$x(t) = \varphi(t), \ t \in [\hat{\tau}, t_0), \ x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0\left(t, x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_s), u(t), u(t-\theta_1), ..., u(t-\theta_k)\right) dt \to \min,$$

სადაც x_0, x_1 ფიქსირებული წერტილებია, ხოლო f^0 სკალარული ფუნქცია აკმაყოფილებს ყველა იმ პირობას სადაც აკმაყოფილებდა f ფუნქცია.

განხილული ამოცანისთვის თეორემა 3.1 მიიღებს შემდეგ სახეს:

თეორემა 3.4. *ვთქვათ, $v_0 = (t_{00}, t_{10}, \tau_{10}, ..., \tau_{s0}, \varphi_0, u_0)$ ოპტიმალური ელემენტია, რომლისთვისაც $t_{00}, t_{10} \in (a, b]$ და შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

13) $\tau_{s0} > ... > \tau_{10}$ *და* $t_{00} + \tau_{s0} < t_{10}$, *სადაც* $\tau_{i0} \in (h_{i1}, h_{i2})$, $i = \overline{1, s}$;

14) *ფუნქცია* $\varphi_0(t)$ *არის აბსოლუტურად უწყვეტი და* $\dot{\varphi}_0(t)$ *შემოსაზღვრულია;*

15) *ფუნქცია* $F_0(w) = F\left(w, u_0(t), u_0(t-\theta_1), ..., u_0(t-\theta_k)\right)$, $F = (f^0, f)^T$ *სადაც*

$w = (t, x, x_1, ..., x_s) \in I \times O^{s+1}$ *შემოსაზღვრულია;*

16) *არსებობს სასრული ზღვარი*

$$\lim_{w \to w_0} F_0(w) = F^-, \ w \in (a, t_{00}] \times O^{s+1},$$

სადაც $w_0 = \left(t_{00}, x_{00}, \varphi_0(t_{00} - \tau_{10}), ..., \varphi_0(t_{00} - \tau_{s0})\right)$;

17) *არსებობს სასრული ზღვრები*

$$\lim_{(w_{1i}, w_{2i}) \to (w_{1i}^0 w_{2i}^0)} \left[F_0(w_{1i}) - F_0(w_{2i}) \right] = F_i,$$

სადაც $w_{1i}, w_{2i} \in (a, b) \times O^{s+1}$, $i = \overline{1, s}$,

$$w_{1i}^0=\left(t_{00}+\tau_{i0},x_0\left(t_{00}+\tau_{i0}\right),x_0\left(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{10}\right),\dots,x_0\left(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{i-10}\right),\right.$$

$$\left.x_{00},x_0\left(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{i+10}\right),\dots,x_0\left(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{s0}\right)\right),$$

$$w_{1i}^0=\left(t_{00}+\tau_{i0},x_0\left(t_{00}+\tau_{i0}\right),x_0\left(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{10}\right),\dots,x_0\left(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{i-10}\right),\right.$$

$$\left.\varphi_0\left(t_{00}\right),x_0\left(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{i+10}\right),\dots,x_0\left(t_{00}+\tau_{i0}-\tau_{s0}\right)\right);$$

18) *არსებობს სასრული ზღვარი*

$$\lim_{w\to w_{s+1}}F_0\left(w\right)=F_{s+1}^-,\quad w\in\left(t_{00},t_{10}\right]\times O^{s+1},\quad w_{s+1}=\left(t_{10},x_0\left(t_{10}\right),x_0\left(t_{10}-\tau_{10}\right),\dots,x_0\left(t_{10}-\tau_{s0}\right)\right).$$

მაშინ არსებობს განტოლების

$$\dot{\psi}\left(t\right)=-\widehat{\psi}\left(t\right)F_x\left[t\right]-\sum_{i=1}^{s}\widehat{\psi}\left(t+\tau_{i0}\right)F_{x_i}\left[t+\tau_{i0}\right],\; t\in\left[t_{00},t_{10}\right],\quad \widehat{\psi}\left(t\right)=0\;,t>t_{10},$$

ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\widehat{\psi}\left(t\right)=\left(\psi_0,\psi\right)=\left(\psi_0,\psi_1\left(t\right),\dots,\psi_n\left(t\right)\right)$, $\psi_0\le 0$, *რომ შესრუ-ლებულია ქვემოთ მოყვანილი პირობები:*

19) *პირობა* t_{00} *და* t_{10} *მომენტებისთვის:*

$$\widehat{\psi}\left(t_{00}\right)F^-+\sum_{i=1}^{s}\widehat{\psi}\left(t_{00}+\tau_{i0}\right)F_i\le 0,\;\; \widehat{\psi}\left(t_{10}\right)F_{s+1}^-\le 0;$$

20) *პირობა* $\tau_{i0},i=\overline{1,s}$ *დაგვიანებებისთვის,*

$$\widehat{\psi}\left(t_{00}+\tau_{i0}\right)F_i+\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{i0}}\widehat{\psi}\left(t\right)F_{x_i}\left[t\right]\dot{\varphi}_0\left(t-\tau_{i0}\right)dt$$

$$+\int_{t_{00}+\tau_{i0}}^{t_{10}}\widehat{\psi}\left(t\right)F_{x_i}\left[t\right]\dot{x}_0\left(t-\tau_{i0}\right)dt,\;\; i=\overline{1,s};$$

21) *ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპი* $\varphi_0\left(t\right)$ *საწყისი ფუნქციისათვის,*

$$\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}\widehat{\psi}\left(t+\tau_{i0}\right)F_{x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\varphi_0\left(t\right)dt=\max_{\varphi(t)\in\Phi}\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}\widehat{\psi}\left(t+\tau_{i0}\right)F_{x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\varphi\left(t\right)dt;$$

22) *ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპი სამართი* $u_0\left(t\right)$ *ფუნქციისათვის,*

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\widehat{\psi}\left(t\right)\left[F_u\left[t\right]u_0\left(t\right)+\sum_{i=1}^{k}F_{u_i}\left[t\right]u_0\left(t-\theta_i\right)\right]dt$$

$$=\max_{u(t)\in\Omega}\int_{t_{00}}^{t_{10}}\widehat{\psi}\left(t\right)\left[F_u\left[t\right]u\left(t\right)+\sum_{i=1}^{k}F_{u_i}\left[t\right]u\left(t-\theta_i\right)\right]dt.$$

3.2. თეორემა 3.1 დამტკიცება

თეორემის დამტკიცება განხორციელდება გამყრელიძე–ხარატიშვილის მეთოდით [24,48], რომლის არსი მდგომარეობს შემდეგში: ლოკალური ოპტიმალური ელემენტის მოძებნის ამოცანა დაიყვანება ვექტორულ ტოპოლოგიურ სივრცეში სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილ სიმრავლეზე და ამოზნექილ ფილტრზე განსაზღვრული ასახვის კრიტიკული წერტილის მოძებნაზე. თუ ასახვა უწყვეტია ფილტრზე და დიფერენცირებადია კრიტიკულ წერტილში, მაშინ სამართლიანია კრიტიკულობის აუცილებელი პირობა, რომლისგანაც გამომდინარეობს ელემენტის ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობა.

3.2.1. კრიტიკულობის გამყრელიძე–ხარატიშვილის აუცილებელი პირობა

ვთქვათ $E_z = R_\upsilon^e \times E_\varsigma$ არის $z=(\upsilon,\varsigma)$ წერტილთა ლოკალურად ამოზნექლი ვექტორული ტოპოლოგიური სივრცე, რაც იმას ნიშნავს რომ ასახვები $(\lambda, z): R_\lambda^1 \times E_z \to \lambda z$ და $(z_1, z_2): E_z \times E_z \to z_1 + z_2$ არის უწყვეტი და ნებისმიერი მიდამო შეიცავს ამოზნექილ მიდამოს. ვთქვათ $\Psi_{z_0} = \{W_{z_0} : W_{z_0} \subset E_z\}$, სადაც W_{z_0} არის z_0 წერტილის ამოზნექილი მიდამო. Ψ_{z_0} ეწოდება ამოზნექილი ფილტრი. ვთქვათ $D \subset E_z$ რაიმე სიმრავლეა, ხოლო

$$P : D \to R_p^m \tag{3.6}$$

მოცემული ასახვაა.

განსაზღვრება 3.4. ვიტყვით, რომ ასახვა (3.6) განსაზღვრულია Ψ_{z_0} ფილტრზე თუ არსებობს ფილტრის ელემენტი $W_{z_0} \in \Psi_{z_0}$ ისეთი, რომ $W_{z_0} \subset D$.

განსაზღვრება 3.5. ვიტყვით, რომ ასახვა (3.6) განსაზღვრული Ψ_{z_0} ფილტრზე არის უწყვეტი Ψ_{z_0} ფილტრზე, თუ არსებობს ელემენტი $W_{z_0} \in \Psi_{z_0}$ ისეთი რომ (3.6) ასახვის შევიწროება

$$P : W_{z_0} \to R_p^m$$

უწყვეტია E_z -დან ინდუცირებულ ტოპოლოგიაში.

განსაზღვრება 3.6. ვთქვათ ასახვა (3.6) განსაზღრულია Ψ_{z_0} ფილტრზე. ვიტყვით, რომ ასახვა (3.6) კრიტიკულია Ψ_{z_0} ფილტრზე, თუ არსებობს ისეთი ელემენტი $W_{z_0} \in \Psi_{z_0}$ ისეთი რომ $W_{z_0} \subset D$ და $P(z_0) \in \partial P(W_{z_0})$.

ვთქვათ $z_i \in E_z$, $i=\overline{1,k}$ მოცემული წერტილებია. სიმრავლეს

$$L=\left\{z=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i z_i : \lambda_i \in R_\lambda^1, i=\overline{1,k}\right\}$$

ეწოდება სასრულ განზომილებიანი მრავალსახეობა წარმოქმნილი $z_i, i=\overline{1,k}$ წერტილებით. თუ $z_0 \in L$, მაშინ ვიტყვით რომ მრავალსახეობა L გადის z_0 წერტილზე და მას აღვნიშნავთ L_{z_0}-ით. ამ შემთხვევაში მრავალსახეობას ჩავწერთ შემდეგი ფორმით

$$L_{z_0}=\left\{z=z_0+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i z_i : \lambda_i \in R_\lambda^1, i=\overline{1,k}\right\} \tag{3.7}$$

ფიქსირებული $\alpha>0$-თვის სიმრავლე

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i z_i : |\lambda_i| \le \alpha, i=\overline{1,k}\right\}$$

არის $L_{z_0}-z_0$ სივრცის ნულის ამოზნექილი შემოსაზღვრული მიდამო.

ვთქვათ $X\subset R_\upsilon^e$ ლოკალურად ამოზნექილი ქვესიმრავლეა ე.ი. ნებისმიერი $V_\upsilon \subset X$ მიდამოსთვის არსებობს ისეთი ამოზნექილი მიდამო $\hat{V}_\upsilon \subset X$ ისეთი რომ $\hat{V}_\upsilon \subset V_\upsilon$. აქ V_υ აღნიშნავს X სივრცის υ წერტილის მიდამოს.

ლემა 3.1. *ვთქვათ $\hat{\upsilon}\in X$ ფიქსირებული წერტილია. შემდეგ, ვთქვათ $V_0\subset X-\hat{\upsilon}$ არის ნულის ამოზნექილი შემოსაზღვრული მიდამო და ვთქვათ $\hat{V}_0\subset X-\hat{\upsilon}$ ნულის რაიმე მიდამოა. მაშინ არსებობს $\varepsilon_0>0$ ისეთი რომ*

$$\varepsilon V_0 \subset \hat{V}_0,\ \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0).$$

განსაზღვრება 3.7. $D\subset X\times E_\varsigma$ სიმრავლეს ეწოდება სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილი, თუ ნებისმიერი $z=(\upsilon,\varsigma)\in D$ წერტილისთვის და ნებისმიერი $L_\varsigma \subset E_\varsigma$ მრავალსახეობისთვის არსებობს ამოზნექილი მიდამოები $V_\upsilon \subset X$ და $V_\varsigma \subset L_\varsigma$ ისეთი, რომ

$$V_\upsilon \times V_\varsigma \subset D.$$

ლემა 3.2. *ვთქვათ $D\subset X\times E_\varsigma$ სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილი სიმრავლეა და $z_0=(\upsilon_0,\varsigma_0)\in D$. შემდეგ, ვთქვათ $V_0\subset X-\upsilon_0$ და $V\subset L_{\varsigma_0}-\varsigma_0$ ნულის ამოზნექილი შემოსაზღვრული მიდამოებია. მაშინ არსებობს ისეთი რიცხვი $\varepsilon_0>0$ ისეთი რომ*

$$z_0+\varepsilon\delta z\in D,\ \forall(\varepsilon,\delta z)\in(0,\varepsilon_0)\times V_0\times V,\ \delta z=(\delta\upsilon,\delta\varsigma). \tag{3.8}$$

განსაზღვრება 3.8. ვიტყვით, რომ (3.6) ასახვა აქვს დიფერენციალი $z_0 = (\upsilon_0, \varsigma_0) \in D$ წერტილში, თუ არსებობს ისეთი წრფივი ასახვა

$$dP_{z_0} : E_{\delta z} = E_z - z_0 \to E_{\delta p}^m \tag{3.9}$$

რომ ნებისმიერი მრავალსახეობისთვის

$$L_{\varsigma_0} = \left\{ \varsigma = \varsigma_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta\varsigma_i : \lambda_i \in R_\lambda^1, i = \overline{1,k} \right\} \subset E_\varsigma$$

(იხ. (3.7)) ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$P(z_0 + \varepsilon\delta z) - P(z_0) = \varepsilon dP_{z_0}(\delta z) + o(\varepsilon\delta z),\ \forall(\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_0) \times V_0 \times V,$$

სადაც $V_0 \subset X - \upsilon_0$ და $V \subset L_{\varsigma_0} - \varsigma_0$ არის ნულის ამოზნექილი და შემოსაზღვრული მიდამოები; $\varepsilon_0 > 0$ არის რიცხვი, რომლისთვის შესრულებულია (3.8);

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{o(\varepsilon\delta z)}{\varepsilon} = 0,\ \text{თანაბრად}\ \delta z \in V_0 \times V\ \text{მიმართ.}$$

(3.9) -ს ეწოდება (3.6) ასახვის დიფერენციალი z_0 წერტილში.

თეორემა 3.4 (გამყრელიძე-ხარატიშვილი). *ვთქვათ (3.6) ასახვა უწყვეტია და კრიტიკული Ψ_{z_0} ფილტრზე და ამასთან დიფერენცირებადია z_0 წერტილში. მაშინ არსებობს ისეთი $\hat{W}_{z_0} \in \Psi_{z_0}$ ელემენტი და ვექტორი $\pi = (\pi_0, ..., \pi_l) \neq 0$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას*

$$\pi dP_{z_0}(\delta z) \le 0,\ \forall \delta z \in cone\left(\hat{W}_{z_0} - z_0\right),$$

სადაც $cone(A)$ აღნიშნავს A სიმრავლით წარმოქმნილ კონუსს.

3.2.2. დამხმარე დებულებები

ყოველ

$$\nu = (t_0, t_1, \tau_1, ..., \tau_s, x_0, \varphi, u) \in A = (a,b) \times (a,b) \times (h_{11}, h_{12}) \times ... \times (h_{s1}, h_{s2}) \times X_0 \times \Phi_1 \times \Omega_1$$

ელემენტს შევუსაბამოთ ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_s), u(t), u(t-\theta_1), ..., u(t-\theta_k)\right), t \in [t_0, t_1]$$

საწყისი პირობით

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [\hat{\tau}, t_0),\ x(t_0) = x_0.$$

განსაზღვრება 3.9. $\nu = (t_0, t_1, \tau_1, ..., \tau_s, x_0, \varphi, u) \in A$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი ეწოდება $[\hat{\tau}, t_1]$ ინტერვალზე განსაზღვრულ $x(t;\mu)$, $\mu = (t_0, \tau_1, ..., \tau_s, x_0, \varphi, u)$ ამონახსნს, რომელსაც აღვნიშნავთ $x(t;\nu)$-ით.

განსაზღვრებიდან გამომდინარე,

$$x_0(t) = x(t;\nu_0) = x(t;\mu_0),\ t \in [\hat{\tau}, t_{10}],$$

სადაც $\nu_0 = (t_{00}, t_{10}, \tau_{10}, ..., \tau_{s0}, x_{00}, \varphi_0, u_0)$, $\mu_0 = (t_{00}, \tau_{10}, ..., \tau_{s0}, x_{00}, \varphi_{00}, u_0)$.

ლემა 3.3. *არსებობს $\delta_1 > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ ნებისმიერ ელემენტს*

$$\nu \in V(\nu_0;\delta_1) = \left(B(t_{00};\delta_1) \cap I\right) \times \left(B(t_{10};\delta_1) \cap I\right) \times \left(B(\tau_{10};\delta_1) \cap (h_{11}, h_{12})\right) \times ...$$

$$\times \left(B(\tau_{s0};\delta_1) \cap (h_{s1}, h_{s2})\right) \times \left(B(x_{00};\delta_1) \cap O\right) \times \left(B(\varphi_0;\delta_1) \cap \Phi_0\right) \times \left(B(u_0;\delta_1) \cap \Omega_0\right)$$

შეესაბამება ამონახსნი $x(t;\nu)$, $t \in [\hat{\tau}, t_1]$. ამასთან, ყოველი $\varepsilon > 0$ - თვის, არსებობს $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \delta_1)$ რიცხვი ისეთი, რომ ნებისმიერი $\nu \in V(\nu_0;\delta)$ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left| x(t_{10};\nu_0) - x(t_1;\nu) \right| \le \varepsilon.$$

ეს ლემა არის უწყვეტობის თეორემის შედეგი (იხ. თეორემა 1.8, გვ. 28, [48]).

განვიხილოთ ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე

$$E_\nu = R^1_{t_0} \times R^1_{t_1} \times R^1_{\tau_1} \times ... R^1_{\tau_s} \times R^n_x \times C\left(I_1, R^n_x\right) \times E\left(I_2, R^r_u\right) = R^{2+s+n}_y \times E_\varsigma$$

$\nu = (y, \varsigma)$ წერტილებით, სადაც $y = (t_0, t_1, \tau_1, ..., \tau_s, x_0)^T \in R^{2+s+n}_y$, $\varsigma = (\varphi, u) \in E_\varsigma$.

ცხადია

$$X = [a, t_{00}] \times [t_{00}, t_{10}] \times [h_{11}, h_{12}] \times ... \times [h_{s1}, h_{s2}] \times O \subset R^{2+s+n}_y$$

არის ლოკალურად ამოზნექილი სიმრავლე R^{2+s+n}_y - დან ინდუცრებულ ტოპოლოგიაში.

D_0-ით აღვნიშნოთ ისეთი $\nu \in X \times \Phi_1 \times \Omega_1 \subset E_\nu$ ელემენტების სიმრავლე, რომლებსაც შეესაბამება $x(t;\nu)$ ამონახსნი. D_0 სიმრავლე არაცარიელია, ვინაიდან $\nu_0 \in D_0$.

ლემა 3.4. D_0 *სიმრავლე არის სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილი.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\widehat{\nu}=(\widehat{y},\widehat{\varsigma})$ ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია და $L_{\widehat{\varsigma}}\subset E_{\varsigma}$ არის წრფივი მრავალსახეობა, რომელიც გადის $\widehat{\varsigma}$ წერტილში, ე. ი.

$$L_{\widehat{\varsigma}}=\left\{\hat{\varsigma}+\delta\varsigma:\delta\varsigma=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\delta\varsigma_i,\lambda_i\in R_{\lambda}^{1},\delta\varsigma_i\in E_{\varsigma},i=\overline{1,p}\right\}.$$

საკმარისად მცირე $\delta>0$ რიცხვისათვის ყოველ $\nu\in V_{\widehat{y}}\times V_{\widehat{\varsigma}}$ ელემენტს შეესაბამება $x(t;\nu)$ ამონახსნი, აქ

$$V_{\widehat{y}}=\left(B(\widehat{t}_0;\delta)\cap I\right)\times\left(B(\widehat{t}_1;\delta)\cap I\right)\times\left(B(\widehat{\tau}_1;\delta)\cap(h_{11},h_{12})\right)\times...\times\left(B(\widehat{\tau}_s;\delta)\cap(h_{s1},h_{s2})\right)\times\left(B(\widehat{x}_0;\delta)\cap O\right),$$

ხოლო

$$V_{\widehat{\varsigma}}=\left\{\widehat{\varsigma}+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\delta\varsigma_i:|\lambda_i|\le\delta,i=\overline{1,p}\right\}.$$

ე.ი. ამოზნექილია სიმრავლე $V_{\widehat{y}}\times V_{\widehat{\varsigma}}\subset D_0$. ამრიგად, D_0 სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილია $X\times E_{\varsigma}$ სივრცის მიმართ.

D_0 სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ასახვა

$$S:D_0\to\mathbb{R}_x^n$$

ფორმულით $S(\nu)=x(t_1;\nu)$.

ლემა 3.5. *S ასახვის $dS_{\nu_0}(\delta\nu)$ დიფერენციალი ν_0 წერტილში გამოითვლება ფორმულით*

$$dS_{\nu_0}(\delta\nu)=\delta x(t_{10};\delta\nu)+f_{s+1}^{-}\delta t_1,\ \delta\nu=(\delta t_0,\delta t_1,\delta\tau_1,...,\delta\tau_s,\delta x_0,\delta\varphi,\delta u)\in E_{\nu}-\nu_0, \tag{3.10}$$

სადაც

$$\begin{aligned}\delta x(t_{10};\delta\nu)=\delta x(t_{10};\delta\mu)=&-\left[Y(t_{00};t_{10})f^{-}+\sum_{i=1}^{s}Y(t_{00}+\tau_{i0};t_{10})f_i\right]\delta t_0\\&-\sum_{i=1}^{s}\left[Y(t_{00}+\tau_{i0};t_{10})f_i+\int_{t_{00}}^{t_{10}}Y(t;t_{10})f_{x_i}[t]\dot{x}_0(t-\tau_{i0})dt\right]\delta\tau_i+Y(t_{00};t_{10})\delta x_0\\&+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}Y(t+\tau_{i0};t_{10})f_{x_i}[t+\tau_{i0}]\delta\varphi(t)dt+\int_{t_{00}}^{t_{10}}Y(t;t_{10})\left[f_u[t]\delta u(t)+\sum_{i=1}^{k}f_{u_i}[t]\delta u(t-\theta_i)\right]dt,\end{aligned}\tag{3.11}$$

ხოლო $\delta\mu\in E_{\mu}-\mu_0$.

დამტკიცება. ვთქვათ $L_{v_0} \subset E_v$ წრფივი მრავალსახეობაა და ვთქვათ

$$V_0 \subset X - y_0,\ \hat{V}_0 \subset L_{\varsigma_0} - \varsigma_0$$

ნულის შემოსაზღვრული ამოზნექილი მიდამოებია, სადაც $y_0 = \left(t_{00}, t_{10}, \tau_{10}, ..., \tau_{s0}, x_{00}\right)^T$, ხოლო $\varsigma_0 = \left(\varphi_0, u_0\right)$.

D_0 სიმრავლის სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილობიდან გამომდინარეობს არსებობა ისეთი მცირე რიცხვის $\varepsilon_0 > 0$, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon, \delta\nu) \in (0, \varepsilon_0) \times V_0 \times \hat{V}_0$ გვაქვს $\nu_0 + \varepsilon\delta\nu \in D_0$.

მივიღებთ

$$x\left(t_{10} + \varepsilon\delta t_1; \nu_0 + \varepsilon\delta\nu\right) - x\left(t_{10} + \varepsilon\delta t_1; \nu_0\right) = x\left(t_{10} + \varepsilon\delta t_1; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu\right) - x\left(t_{10} + \varepsilon\delta t_1; \mu_0\right)$$

$$= \Delta x\left(t_{10} + \varepsilon\delta t_1; \varepsilon\delta\mu\right) = \varepsilon\delta x\left(t_{10} + \varepsilon\delta t_1; \delta\mu\right) + o\left(t_{10} + \varepsilon\delta t_1; \varepsilon\delta\mu\right).$$

შემდეგ,

$$S\left(\nu_0 + \varepsilon\delta\nu\right) - S\left(\nu_0\right) = x\left(t_{10} + \varepsilon\delta t_1; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu\right) - x_0\left(t_{10}\right) = x\left(t_{10} + \varepsilon\delta t_1; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu\right) - x_0\left(t_{10} + \varepsilon\delta t_1\right)$$

$$+ x_0\left(t_{10} + \varepsilon\delta t_1\right) - x_0\left(t_{10}\right) = \varepsilon\delta x\left(t_{10} + \varepsilon\delta t_1; \delta\mu\right) + o\left(t_{10} + \varepsilon\delta t_1; \varepsilon\delta\mu\right) + \int_{t_{10}}^{t_{10} + \varepsilon\delta t_1} f\left[t\right]dt \tag{3.12}$$

$$= \varepsilon\left[\delta x\left(t_{10}; \delta\mu\right) + f_{s+1}^{-}\delta t_1\right] + o\left(\varepsilon\delta\mu\right),$$

სადაც $f\left[t\right] = f\left(t, x_0\left(t\right), x_0\left(t - \tau_{10}\right), \cdots, x_0\left(t - \tau_{s0}\right), u_0\left(t\right)\right)$, ხოლო $\delta x\left(t_{10}; \delta\mu\right)$ გამოითვლება ვარიაციის ფორმულით (იხ. თავი I, (1.10)).

3.2.3. P ასახვის დიფერენციალის გამოთვლა $z_0 = \left(0, \nu_0\right)$ წერტილში.

განვიხილოთ ვექტორული სივრცე

$$E_z = \mathbb{R}_{\xi}^1 \times E_\nu$$

$z = \left(\xi, \nu\right)$ წერტილებისა.

შემოვიღოთ სიმრავლეები

$$\hat{X} = \mathbb{R}_{+} \times X_0,\ \ D = \mathbb{R}_{+} \times D_0.$$

D სიმრავლე არის სასრულოდ ლოკალურად ამოზნექილი $\hat{X}\times E_\nu \subset E_z$ ქვესივრცეში (იხ. ლემა 3.4).

D სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ასახვა

$$P: D \to \mathbb{R}^{l+1}$$

ფორმულით

$$P(z)=Q\left(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,S(\nu)\right)+\left(\xi,0,...,0\right)^T.$$

სადაც $Q=\left(q^0,...,q^l\right)^T$, $Q_0=\left(t_{00},t_{10},\tau_{10},...,\tau_{s0},x_{00},x_0\left(t_{10}\right)\right)$, $Q_{0t_0}=\dfrac{\partial}{\partial t_0}Q_0$ და $S(\nu)=x\left(t_1;\nu\right)$.

ლემა 3.6. *P ასახვის დიფერენციალი z_0 წერილში გამოითვლება ფორმულით*

$$dP_{z_0}(\delta z)=\left\{Q_{0t_0}-Q_{0x_1}Y\left(t_{00},t_{10}\right)f^- -\sum_{i=1}^{s}Q_{0x_1}Y\left(t_{00}+\tau_{i0},t_{10}\right)f_i\right\}\delta t_0+\left\{Q_{0t_1}+Q_{0x_1}f_{s+1}^-\right\}\delta t_1$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\left[Q_{0\tau_i}-Q_{0x_1}Y\left(t_{00}+\tau_{i0};t_{10}\right)f_i+\int_{t_{00}}^{t_{10}}Q_{0x_1}Y\left(t;t_{10}\right)f_{x_i}[t]\dot{x}\left(t-\tau_{i0}\right)dt\right]\delta\tau_i$$

$$+\left\{Q_{0x_0}+Q_{0x_1}Y\left(t_{00};t_{10}\right)\right\}\delta x_0+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{10}}Q_{ox_1}Y\left(t+\tau_{i0};t_{10}\right)f_{x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\delta\varphi(t)dt$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_{10}}Q_{ox_1}Y\left(t;t_{10}\right)\left[f_u[t]\delta u(t)+\sum_{i=1}^{k}f_{u_i}[t]\delta u\left(t-\theta_i\right)\right]dt+\left(\delta\xi,0,...,0\right)^T, \tag{3.13}$$

$\delta z=\left(\delta\xi,\delta\nu\right)\in E_z-z_0.$

დამტკიცება. ვთქვათ $L_{\varsigma_0}\subset E_\varsigma$ ნებისმიერი წრფივი მრავალსახეობაა და ვთქვათ

$$V_0\subset X-\left(0,y_0\right)^T,\ V\subset L_{\varsigma_0}-\varsigma_0$$

ნებისმიერი შემოსაზღვრული ნულის მიდამოებია. არსებობს $\varepsilon_0>0$ რიცხვი ისეთი, რომ ნებისმიერი $\varepsilon\in\left(0,\varepsilon_0\right)$ და $\delta z\in V_0\times V$,

$$z_0+\varepsilon\delta z\in D,$$

და ადგილი აქვს (3.12) ფორმულას.

გვაქვს

$$P(z_0+\varepsilon\delta z)-P(z_0)=Q\left(t_{00}+\varepsilon\delta t_0,t_{10}+\varepsilon\delta t_1,\tau_{10}+\varepsilon\delta\tau_1,...,\tau_{s0}+\varepsilon\delta\tau_s,x_{00}+\varepsilon\delta x_0,S\left(\nu_0+\varepsilon\delta\nu\right)\right)$$

$$-Q\left(t_{00},t_{10},\tau_{10},...,\tau_{s0},x_{00},S\left(v_0\right)\right)+\varepsilon\left(\delta\xi,0,...,0\right)^T.$$

ვთქვათ $\varepsilon_0>0$ რიცხვი საკმარისად მცირეა, რომ

$$S\left(v_0\right)+t\left(S\left(v_0+\varepsilon\delta v\right)-S\left(v_0\right)\right)\in O,\ \ \forall\left(t,\varepsilon\right)\in\left(0,1\right)\times\left(0,\varepsilon_0\right),\ \ \forall\delta z\in V_0\times V,$$

სადაც $\delta z=\left(\delta\xi,\delta v\right)$ (იხ ლემა (3.2)).

გარდავქმნათ სხვაობა

$$Q\left(t_{00}+\varepsilon\delta t_0,t_{10}+\varepsilon\delta t_1,\tau_{10}+\varepsilon\delta\tau_1,...,\tau_{s0}+\varepsilon\delta\tau_s,x_{00}+\varepsilon\delta x_0,S\left(v_0+\varepsilon\delta v\right)\right)$$

$$-Q\left(t_{00},t_{10},\tau_{10},...,\tau_{s0},x_{00},S\left(v_0\right)\right)$$

$$=\int_0^1\frac{d}{dt}Q\left(t_{00}+\varepsilon t\delta t_0,t_{10}+\varepsilon t\delta t_1,\tau_{10}+\varepsilon t\delta\tau_1,...,\tau_{s0}+\varepsilon t\delta\tau_s,x_{00}+\varepsilon t\delta x_0,S\left(v_0\right)+t\left(S\left(v_0+\varepsilon\delta v\right)-S\left(v_0\right)\right)\right)dt$$

$$=\varepsilon\left[Q_{0t_0}\delta t_0+Q_{0t_1}\delta t_1+\sum_{i=1}^{s}Q_{0\tau_i}\delta\tau_i+Q_{0x_0}\delta x_0+Q_{0x_1}\delta x_1 dS_{v_0}\left(\delta v\right)\right]+\alpha\left(\varepsilon\delta z\right),$$

სადაც

$$\alpha\left(\varepsilon\delta z\right)=\varepsilon\int_0^1\Big\{\left[Q_{0t_0}\left[\varepsilon;t\right]-Q_{0t_0}\right]\delta t_0+\left[Q_{0t_1}\left[\varepsilon;t\right]-Q_{0t_1}\right]\delta t_1+\sum_{i=1}^{s}\left[Q_{0\tau_0}\left[\varepsilon;t\right]-Q_{0t_0}\right]\delta\tau_i$$

$$+\left[Q_{0x_0}\left[\varepsilon;t\right]-Q_{0x_0}\right]\delta x_0+\left[Q_{0x_1}\left[\varepsilon;t\right]-Q_{0x_1}\right]dS_{v_0}\left(\delta v\right)+Q_{0x_1}\left[\varepsilon;t\right]o\left(\varepsilon\delta v\right)\Big\}dt,$$

$$Q_{0t_0}\left[\varepsilon;t\right]=Q_{t_0}\left(t_{00}+\varepsilon t\delta t_0,t_{10}+\varepsilon t\delta t_1,\tau_{10}+\varepsilon t\delta\tau_1,...,\right.$$

$$\left.\tau_{s0}+\varepsilon t\delta\tau_s,x_{00}+\varepsilon t\delta x_0,S\left(v_0\right)+t\left(S\left(v_0+\varepsilon\delta v\right)-S\left(v_0\right)\right)\right).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[Q_{0t_i}\left[\varepsilon;t\right]-Q_{0t_i}\right]=0,\ \ i=1,2,\ \ \lim_{\varepsilon\to 0}\left[Q_{0\tau_i}\left[\varepsilon;t\right]-Q_{0\tau_i}\right]=0,\ \ i=\overline{1,s},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[Q_{0x_i}\left[\varepsilon;t\right]-Q_{0x_i}\right]=0,\ \ i=0,1,$$

აქედან გამომდინარე, $\alpha\left(\varepsilon\delta z\right)=o\left(\varepsilon\delta z\right)$. ამდენად

$$P(z_0+\varepsilon\delta z)-P(z_0)=\varepsilon\left[Q_{0t_0}\delta t_0+Q_{0t_1}\delta t_1+\sum_{i=1}^{s}Q_{0\tau_i}\delta\tau_i+Q_{0x_1}dS_{v_0}\left(\delta v\right)\right.$$

$$+\left(\delta\xi,0,\dots,0\right)^T\Big]+o\left(\varepsilon\delta z\right).$$

(3.10) და (3.11) გამოსახულებებზე დაყრდნობით მივიღებთ (3.13).

3.2.4. P ასახვა განსაზღვრულია და უწყვეტი ამოზნექილ Ψ_{z_0} ფილტრზე.

E_z სივრცეში შემოვიღოთ ამოზნექილი ფილტრი

$$\Psi_{z_0}=\left\{W(z_0;\delta):\delta\ge 0\right\},$$

სადაც

$$W\left(z_0;\delta\right)=W\left(0;\delta\right)\times W\left(t_{00};\delta\right)\times W\left(t_{10};\delta\right)\times W\left(\tau_{10};\delta\right)\times\cdots\times W\left(\tau_{s0};\delta\right)\times W\left(x_{00};\delta\right)$$

$$\times W\left(\varphi_0;\delta\right)\times W\left(u_0;\delta\right);$$

$$W\left(0;\delta\right)=\left[0,\delta\right),\ W\left(t_{00};\delta\right)=B\left(t_{00};\delta\right)\cap\left(a,t_{00}\right],\ W\left(t_{10};\delta\right)=B\left(t_{10};\delta\right)\cap\left(t_{00},t_{10}\right]\times\left(B\left(\tau_{10};\delta\right)\cap\left(h_{11},h_{12}\right)\right)$$

$$W(\tau_{i0};\delta)=B(\tau_{i0};\delta)\cap(h_{i1},h_{i2}),\ i=\overline{1,s},\ W\left(x_{00};\delta\right)=B\left(x_{00};\delta\right)\cap X_0,\ W\left(\varphi_0;\delta\right)=B\left(\varphi_0;\delta\right)\cap\Phi_1,$$

$$W\left(u_0;\delta\right)=B\left(u_0;\delta\right)\cap\Omega_1.$$

საკმარისად მცირე $\delta>0$ რიცხვისთვის

$$W\left(z_0;\delta\right)\subset D$$

ამრიგად, P ასახვა განსაზღვრულია და უწყვეტი Ψ_{z_0} ფილტრზე.

3.2.5. P ასახვის კრიტიკულობა Ψ_{z_0} ფილტრზე

ცხადია, რომ

$$P\left(z_0\right)=\left(q^0\left(t_{00},t_{10},\tau_{10},\dots,\tau_{s0},x_{00},x_0\left(t_{10}\right)\right),0,\dots,0\right)^T..$$

ნებისმიერი

$$z=\left(\xi,\nu\right)\in W\left(z_0;\frac{\delta_0}{5+s}\right)\cap\left(R_+\times\Lambda_0\right)$$

ელემენტისთვის მისი მდგენელი $\nu=\left(t_0,t_1,\tau_1,\dots,\tau_s,x_0,\varphi,u\right)\in\Lambda_0$ და აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\left|t_{00}-t_0\right|+\left|t_{10}-t_1\right|+\sum_{i=1}^{s}\left|\tau_{i0}-\tau_i\right|+\left|x_{00}-x_0\right|+\left\|\varphi_0-\varphi\right\|_{I_1}+\left\|u_0-u\right\|_{I_2}\le\delta_0,$$

ამასთან

$$P\left(z\right)=\left(q^0\left(t_0,t_1,\tau_1,\dots,\tau_s,x_0,x\left(t_1;\nu\right)+\xi\right),0,\dots,0\right)^T.$$

ელემენტი v_0 ლოკალურად ოპტიმალურია, ამიტომ ნებისმიერი

$$z=(\xi,\nu)\in W\left(z_0;\frac{\delta_0}{5+s}\right)\cap\left(R_+\times\Lambda_0\right)$$

ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$q^0\left(t_{00},t_{10},\tau_{10},...,\tau_{s0},x_{00},x_0\left(t_{10}\right)\right)\le q^0\left(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,x_0,x\left(t_1;\nu\right)\right)+\xi.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$P\left(W\left(z_0;\frac{\delta_0}{5+s}\right)\cap\left(R_+\cap\Lambda_0\right)\right)\subset R_0=\left\{p=\left(p^1,0,...,0\right)^T\in R_p^{1+l}\right\}$$

და წერტილი $P(z_0)$ არის

$$P\left(W\left(z_0;\frac{\delta_0}{5+s}\right)\cap\left(R_+\cap\Lambda_0\right)\right)$$

სიმრავლის საზღვრის წერტილი R_0 სივრცის მიმართ. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$P(z_0)\in\partial\left(P\left(W\left(z_0;\frac{\delta_0}{5+s}\right)\cap R_0\right)\right).$$

მაშასადამე ,

$$P(z_0)\in\partial\left(P\left(W\left(z_0;\frac{\delta_0}{5+s}\right)\right)\right).$$

3.2.6. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების გამოყვანა

ზემო მოყვანილი მტკიცებულებათა საფუძველზე დავასკვნით, რომ შესრულებულია თეორემა 3.4 ყველა პირობა. ამიტომ არსებობს $\pi=\left(\pi_0,...,\pi_l\right)\neq 0$ ვექტორი და

$$\hat{W}=W\left(z_0;\hat{\delta}\right)\in\Psi_{z_0}$$

ელემენტი ისეთი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\pi dP_{z_0}\left(\delta z\right)\le 0,\ \forall\delta z\in cone\left(\hat{W}-z_0\right)\tag{3.14}$$

სადაც $dP_{z_0}\left(\delta z\right)$ აქვს (3.13) სახე.

შემოვიღოთ ფუნქცია

$$\psi\left(t\right)=\pi Q_{0x_1}Y\left(t;t_{10}\right).\tag{3.15}$$

ცხადია იგი აკმაყოფილებს (1.5) განტოლებას და პირობებს

$$\psi\left(t_{10}\right)=\pi Q_{0x_1},\psi\left(t\right)=0,t>t_{10}.\tag{3.16}$$

(3.13), (3.15) და (3.16) გამოსახულებების გათვალისწინებით (3.14)-ში მივიღებთ

$$\left\{\pi Q_{0t_0}-\psi\left(t_{00}\right)f^{-}-\sum_{i=1}^{s}\psi\left(t_{00}+\tau_{i0};t_{10}\right)f_i\right\}\delta t_0+\left\{\pi Q_{0t_1}+\psi\left(t_{10}\right)f_{s+1}^{-}\right\}\delta t_1$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\left[\pi Q_{0\tau_i}-\psi\left(t_{00}+\tau_{i0};t_{10}\right)f_i-\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)f_{x_i}\left[t\right]\dot{x}\left(t-\tau_{i0}\right)dt\right]\delta\tau_i+\left\{\pi Q_{0x_0}+\psi\left(t_{00}\right)\right\}\delta x_0$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}\psi\left(t+\tau_{i0};t\right)f_{x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\delta\varphi\left(t\right)dt$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)\left[f_u[t]\delta u(t)+\sum_{i=1}^{k}f_{u_i}[t]\delta u(t-\theta_i)\right]dt+\pi_0\delta\xi\leq 0,\ \ \delta z\in cone\left(\hat{W}-z_0\right) \tag{3.17}$$

პირობა $\delta z\in cone\left(\hat{W}-z_0\right)$ ექვივალენტურია პირობების

$$\delta\xi\in coneW\left(0;\hat{\delta}\right)=R_+,\ \ \delta t_0\in cone\left(W(t_{00};\hat{\delta})-t_{00}\right)=\left(-\infty,0\right]$$

$$\delta t_1\in cone\left(W(t_{10};\hat{\delta})-t_{10}\right)=\left(-\infty,0\right],\ \delta\tau_i\in cone\left(W\left(\tau_{i0};\hat{\delta}\right)-\tau_{i0}\right)=R_{\tau_i}^{1},\ \ i=\overline{1,s};$$

$$\delta x_0\in cone\left(W\left(x_{00};\hat{\delta}\right)-x_{00}\right),\ \ \delta\varphi\in cone\left(W\left(\varphi_0;\hat{\delta}\right)-\varphi_0\right),\ \delta u\in cone\left(W\left(u_0;\hat{\delta}\right)-u_0\right).$$

ვთქვათ $\delta t_0=\delta t_1=\delta\tau_1=...=\delta\tau_s=0$ და $\delta x_0=\delta\varphi=0,\delta u=0$ (3.17)-ში, გვექნება

$$\pi_0\delta\xi\leq 0,\ \ \forall\delta\xi\in R_+.$$

საიდანაც

$$\pi_0\leq 0.$$

თუ $\delta\xi=\delta t_1=\delta\tau_1=...=\delta\tau_s=0$ და $\delta x_0=\delta\varphi=0,\delta u=0,$ მაშინ იმის გათვალისწინებით, რომ $\delta t_0\in(-\infty,0],$ (3.17)-დან საწყისი t_{00} მომენტისთვის მივიღებთ პირობას

$$\pi Q_{0t_0}\geq\psi\left(t_{00}\right)f^{-}+\sum_{i=1}^{s}\psi\left(t_{00}+\tau_{i0}\right)f_i.$$

თუ $\delta\xi=\delta t_0=\delta\tau_1=...=\delta\tau_s=0$ და $\delta x_0=\delta\varphi=0,\delta u=0$ (3.17) უტოლობაში საბოლოო t_{10} მომენტისთვის მივიღებთ პირობას

$$\pi Q_{0t_1}\geq\psi\left(t_{10}\right)f_{s+1}^{-}.$$

თუ $\delta\xi=\delta t_0=\delta t_1=0$ და $\delta x_0=\delta\varphi=0,\delta u=0$ მივიღებთ

$$+\sum_{i=1}^{s}\left[\pi Q_{0\tau_i}-\psi\left(t_{00}+\tau_{i0};t_{10}\right)f_i-\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)f_{x_i}\left[t\right]\dot{x}\left(t-\tau_{i0}\right)dt\right]\delta\tau_i\le 0,\ \forall\delta\tau_i\in\mathbb{R},i=\overline{1,s}.$$

ზემოთ მოყვანილი პირობებიდან $\tau_{i0},i=\overline{1,s}$ დაგვიანებებისთვის გვექნება

$$\pi Q_{0\tau_i}=\psi\left(t_{00}+\tau_{i0};t_{10}\right)f_i+\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)f_{x_i}\left[t\right]\dot{x}\left(t-\tau_{i0}\right)dt,i=\overline{1,s}$$

ვთქვათ $\delta\xi=\delta t_0=\delta t_1=\delta\tau_1=...=\delta\tau_s=0$ და $\delta\varphi=0,\delta u=0$ (3.17)-ში. მაშინ

$$\left(\pi Q_{0x_0}+\psi(t_{00})\right)\delta x_0\le 0,\ \ \delta x_0\in cone\left(W\left(x_{00};\hat{\delta}\right)-x_{00}\right). \tag{3.18}$$

დავამტკიცოთ ჩართვა

$$cone\left(W\left(x_{00};\hat{\delta}\right)-x_{00}\right)\supset X_0-x_{00}.$$

მართლაც, ვთქვათ $x_0\in X_0$ ნებისმიერი წერტილია. X_0 სიმრავლის ამოზნექილობიდან გამომდინარეობს,რომ ნებისმიერი $\varepsilon\in[0,1]$ - თვის, წერტილი $x_\varepsilon=x_{00}+\varepsilon\left(x_0-x_{00}\right)\in X_0$. მეორე მხრივ, საკმარისად მცირე $\varepsilon>0$ - თვის, $x_\varepsilon\in B(x_{00};\hat{\delta})$. ამრიგად

$$x_\varepsilon-x_{00}=\varepsilon\left(x_0-x_{00}\right)\in cone\left(W\left(x_{00};\hat{\delta}\right)-x_{00}\right).$$

აქედან დავასკვნით, რომ $x_0-x_{00}\in cone\left(W\left(x_{00};\hat{\delta}\right)-x_{00}\right)$. ამდენად (3.18) უტოლობა სამართლიანია $\forall\delta x_0=x_0-x_{00}\in X_0-x_{00}$, რომელიც ექვივალენტურია ტოლობის

$$\left(\pi Q_{0x_0}+\psi\left(t_{00}\right)\right)x_{00}=\max_{x_0\in X_0}\left(\pi Q_{0x_0}+\psi\left(t_{00}\right)\right)x_0.$$

ვთქვათ $\delta\xi=\delta t_0=\delta t_1=\delta\tau_1=...=\delta\tau_s=0$ და $\delta x_0=0,\delta u=0$, მაშინ გვექნება

$$\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}\psi\left(t_{00}+\tau_{i0};t\right)f_{x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\delta\varphi\left(t\right)dt\le 0,\quad \delta\varphi\in cone\left(W\left(\varphi_0;\hat{\delta}\right)-\varphi_0\right).$$

ანალოგიურად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ

$$cone\left(W\left(\varphi_0;\hat{\delta}\right)-\varphi_0\right)\supset\Phi_1-\varphi_0.$$

ამრიგად,

$$\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{10}}\psi\left(t+\tau_{i0}\right)f_{x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\varphi_0\left(t\right)dt=\max_{\varphi(t)\in\Phi_1}\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{10}}\psi\left(t+\tau_{i0}\right)f_{x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\varphi\left(t\right)dt.$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\delta\xi=\delta t_0=\delta t_1=\delta\tau_1=...=\delta\tau_s=0$ და $\delta x_0=\delta\varphi=0.$ (3.17)-დან მივიღებთ

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)\left[f_u\left[t\right]\delta u\left(t\right)+\sum_{i=1}^{k}f_{u_i}\left[t\right]\delta u\left(t-\theta_i\right)\right]dt\le 0,\ \delta u\in cone\left(W\left(u_0;\hat{\delta}\right)-u_0\right).$$

ანალოგიურად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ

$$cone\left(W\left(u_0;\hat{\delta}\right)-u_0\right)\supset\Omega_1-u_0.$$

ამდენად,

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)\left[f_u\left[t\right]u_0\left(t\right)+\sum_{i=1}^{k}f_{u_i}\left[t\right]u_0\left(t-\theta_i\right)\right]dt$$

$$=\max_{u(t)\in\Omega_1}\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)\left[f_u\left[t\right]u\left(t\right)+\sum_{i=1}^{k}f_{u_i}\left[t\right]u\left(t-\theta_i\right)\right]dt.$$

□

თავი IV. ოპტიმალური მართვის ამოცანა უწყვეტი საწყისი პირობით. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები

4.1. ამოცანის დასმა და ძირითადი შედეგების ფორმულირება

განვიხილოთ ოპტიმალური მართვის ამოცანა

$$\dot{x}(t)=f\left(t,x(t),x(t-\tau_1),...,x(t-\tau_s),u(t),u(t-\theta_1),...,u(t-\theta_k)\right), \tag{4.1}$$

$$t\in[t_0,t_1]\subset I, u\in\Omega_1,$$

$$x(t)=\varphi(t),\ t\in[\hat{\tau},t_0], \tag{4.2}$$

$$q^i\left(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,\varphi(t_0),x(t_1)\right)=0,\ i=\overline{1,l}, \tag{4.3}$$

$$q^0\left(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,\varphi(t_0),x(t_1)\right)\to\min. \tag{4.4}$$

(4.1)-(4.4) ამოცანას ეწოდება ოპტიმალური მართვის ამოცანა უწყვეტი საწყისი პირობით.

განსაზღვრება 4.1. ვთქვათ,

$$\nu=(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,\varphi,u)\in A_1=(a,b)\times(a,b)\times(\theta_{11},\theta_{11})\times...\times(\theta_{s1},\theta_{s2})\times\Phi_1\times\Omega_1$$

ფუნქციას $x(t)=x(t;\nu)\in O,\ t\in[\hat{\tau},t_1]$ ეწოდება (4.1) განტოლების ამონახსნი (4.2) უწყვეტი საწყისი პირობით, ან ν ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი და განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_1]$ ინტერვალზე, თუ ის აკმაყოფილებს (4.2) პირობას და აბსოლუტურად უწყვეტია $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე და აკმაყოფილებს განტოლებას თითქმის ყველა t - სათვის $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე.

განსაზღვრება 4.2. $\nu=(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,\varphi,u)\in A$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ მისი შესაბამისი ამონახსნი $x(t)=x(t;\nu)$ აკმაყოფილებს (4.3) სასაზღვრო პირობას.

A_0 -ით აღვნიშნოთ დასაშვები ელემენტების სიმრავლე.

განსაზღვრება 4.3. $\nu_0=(t_{00},t_{10},\tau_{10},...,\tau_{s0},\varphi_0,u_0)\in A_0$ ელემენტს ეწოდება ლოკალურად ოპტიმალური, თუ არსებობს ისეთი $\delta_0>0$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $\nu\in A_0$ ელემენტი-სთვის, რომლისთვისაც შესრულებულია პირობა

$$|t_{00}-t_0|+|t_{10}-t_1|+\sum_{i=1}^{s}|\tau_{i0}-\tau_i|+\|\varphi_0-\varphi\|_{I_1}+\|u_0-u\|_{I_2}\le\delta_0,$$

ადგილი აქვს უტოლობას

$$q^0\left(t_{00},t_{10},\tau_{10},...,\tau_{s0},\varphi_0\left(t_{00}\right),x_0\left(t_{10}\right)\right)\le q^0\left(t_0,t_1,\tau_1,...,\tau_s,\varphi\left(t_0\right),x\left(t_1\right)\right).$$

თეორემა 4.1. *ვთქვათ, v_0 ოპტიმალური ელემენტია, რომლისთვისაც $t_{00},t_{10}\in\left(a,b\right]$ და შესრულებული შემდეგი პირობები:*

1) $\tau_{s0}>...>\tau_{10}$ *და* $\tau_{i0}\in\left(h_{i1},h_{i2}\right),\ i=\overline{1,s};$

2) *ფუნქცია* $\varphi_0\left(t\right)$ *არის აბსოლუტურად უწყვეტი და* $\dot\varphi_0\left(t\right)$ *შემოსაზღვრულია;*

3) *ფუნქცია* $f_0\left(w\right)$*, სადაც* $w=\left(t,x,x_1,...,x_s\right)\in I\times O^{s+1}$ *შემოსაზღვრულია;*

4) *არსებობს სასრული ზღვრები*

$$\lim_{t\to t_{00}-}\dot\varphi_0\left(t\right)=\dot\varphi_0^-,\ \lim_{w\to w_0}f_0\left(w\right)=f^-,\ w\in\left(a,t_{00}\right]\times O^{s+1},$$

სადაც $w_0=\left(t_{00},\varphi_0\left(t_{00}\right),\varphi_0\left(t_{00}-\tau_{10}\right),...,\varphi_0\left(t_{00}-\tau_{s0}\right)\right);$

5) *არსებობს სასრული ზღვარი*

$$\lim_{w\to w_{s+1}}f_0\left(w\right)=f_{s+1}^-,\ w\in\left(t_{00},t_{10}\right]\times O^{s+1},\ \ w_{s+1}=\left(t_{10},x_0\left(t_{10}\right),x_0\left(t_{10}-\tau_{10}\right),...,x_0\left(t_{10}-\tau_{s0}\right)\right).$$

მაშინ არსებობს $\pi=\left(\pi_0,...,\pi_l\right)\ne 0$ *ვექტორი, რომლისთვისაც* $\pi_0\le 0$ *და ამონახსნი* $\psi\left(t\right)=\left(\psi_1\left(t\right),...,\psi_n\left(t\right)\right)$ *განტოლებისა*

$$\dot\psi\left(t\right)=-\psi\left(t\right)f_x\left[t\right]-\sum_{i=1}^{s}\psi\left(t+\tau_{i0}\right)f_{x_i}\left[t+\tau_{i0}\right],\ t\in\left[t_{00},t_{10}\right],\ \ \psi\left(t\right)=0,\ \ t>t_{10},\tag{4.5}$$

ისეთი, რომ შესრულებულია ქვემოთ მოყვანილი პირობები:

6) *პირობა* t_{00} *და* t_{10} *მომენტებისთვის:*

$$\pi Q_{0t_0}+\left(\pi Q_{0x_0}+\psi(t_{00})\right)\dot\varphi_0^-\ge\psi\left(t_{00}\right)f^-,\ \pi Q_{0t_1}\ge-\psi\left(t_{10}\right)f_{s+1}^-;$$

7) *პირობა* $\tau_{i0},i=\overline{1,s}$ *დაგვიანებებისთვის,*

$$\pi Q_{0\tau_{i0}}=\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_{i0}}\psi\left(t\right)f_{x_i}\left[t\right]\dot x_0\left(t-\tau_{i0}\right)dt,\ i=\overline{1,s};$$

8) *ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპი* $\varphi_0\left(t\right)$ *საწყისი ფუნქციისათვის,*

$$\left[Q_{0x_0}+\psi\left(t_{00}\right)\right]\varphi_0\left(t_{00}\right)+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}\psi\left(t+\tau_{i0}\right)f_{x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\varphi_0\left(t\right)dt$$

$$=\max_{\varphi(t)\in\Phi_1}\left[Q_{0x_0}+\psi\left(t_{00}\right)\right]\varphi\left(t_{00}\right)+\sum_{i=1}^{s}\int_{t_{00}-\tau_{i0}}^{t_{00}}\psi\left(t+\tau_{i0}\right)f_{x_i}\left[t+\tau_{i0}\right]\varphi\left(t\right)dt;$$

9) *ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპი სამართი* $u_0\left(t\right)$ *ფუნქციისათვის,*

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)\left[f_u\left[t\right]u_0\left(t\right)+\sum_{i=1}^{k}f_{u_i}\left[t\right]u_0\left(t-\theta_{i0}\right)\right]dt$$

$$=\max_{u(t)\in\Omega_1}\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi\left(t\right)\left[f_u\left[t\right]u\left(t\right)+\sum_{i=1}^{k}f_{u_i}\left[t\right]u\left(t-\theta_{i0}\right)\right]dt$$

10) *პირობა* $\psi\left(t\right)$ *ფუნქციისათვის,*

$$\psi\left(t_{10}\right)=\pi Q_{0x_1}.$$

თეორემა 4.2. *ვთქვათ,* v_0 *ოპტიმალური ელემენტია, რომლისთვისაც* $t_{00},t_{10}\in\left[a,b\right)$ *და ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 4.1-ის 1)-3) პირობები. ამასთან, არსებობს სასრული ზღვრები*

$$\lim_{t\to t_{00}+}\dot{\varphi}_0\left(t\right)=\dot{\varphi}_0^{+},\ \lim_{w\to w_0}f_0\left(w\right)=f^{+},\ w\in\left[t_{00},b\right)\times O^{s+1},$$
$$\lim_{w\to w_{s+1}}f_0\left(w\right)=f_{s+1}^{+},\ w\in\left[t_{10},b\right)\times O^{s+1},$$

მაშინ არსებობს $\pi=\left(\pi_0,...,\pi_l\right)\neq 0$ *ვექტორი, რომლისთვისაც* $\pi_0\leq 0$ *და* $\psi\left(t\right)=\left(\psi_1\left(t\right),...,\psi_n\left(t\right)\right)$ *(4.5) განტოლების ამონახსნი ისეთი, რომ თეორემა 4.1-ის 7)-10) პირობებია შესრულებული. ამასთან,*

$$\pi Q_{0t_0}+\left(\pi Q_{0x_0}+\psi(t_{00})\right)\dot{\varphi}_0^{+}\leq\psi\left(t_{00}\right)f^{+},\ \pi Q_{0t_1}\leq-\psi\left(t_{10}\right)f_{s+1}^{+}.$$

თეორემა 4.3. *ვთქვათ,* v_0 *ოპტიმალური ელემენტია, რომლისთვისაც* $t_{00},t_{10}\in\left(a,b\right)$ *და ვთქვათ შესრულებულია თეორემების 4.1 და 4.2 პირობები. ამასთან,* $\dot{\varphi}_0^{-}=\dot{\varphi}_0^{+}:=\dot{\varphi}_0$, $f^{-}=f^{+}:=f$, $f_{s+1}^{-}=f_{s+1}^{+}:=f_{s+1}$. *მაშინ არსებობს* $\pi=\left(\pi_0,...,\pi_l\right)\neq 0$ *ვექტორი, რომლისთვისაც* $\pi_0\leq 0$ *და (4.5) განტოლების ამონახსნი ისეთი, რომ 7)-10) პირობებია შესრულებული. ამასთან,*

$$\pi Q_{0t_0}+\left(\pi Q_{0x_0}+\psi(t_{00})\right)\dot{\varphi}_0=\psi\left(t_{00}\right)f,\ \pi Q_{0t_1}=-\psi\left(t_{10}\right)f_{s+1}.$$

ვარიაციის ფორმულების გამოყენებით (იხ. თავი II, (2.10)) თეორემები 4.1-4.3 მტკიცდება ანალოგიური სქემით.

დასკვნა

არაწრფივი სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის მრავალი მუდმივი დაგვიანებით, როგორც წყვეტილი ასევე უწყვეტი საწყისი პირობით დამტკიცებულია ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები საწყისი მონაცემების შეშფოთების მიმართ, როცა საწყისი მომენტისა და დაგვიანების პარამეტრების ვარიაციის ნიშნები, საზოგადოდ, ერთმანეთს არ ემთხვევა. ცალცალკე განხილულია შემთხვევა, როცა საწყისი მომენტი განიცდის ცალმხრივ და ორმხრივ ვარიაციას. ვარიაციის ფორმულებში გამოვლენილია საწყისი მომენტისა და დაგვიანებების შეშფოთების, წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობების ეფექტები. საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება საწყისი მომენტის, დაგვიანების პარამეტრების, საწყისი ვექტორის, საწყისი და მართვის ფუნქციების ერთობლიობა. დადგენილია განტოლებისა და საწყისი პირობის სახე, რომლებსაც აკმაყოფილებს ამონახსნის ვარიაცია.

ვარიაციის ფორმულები საშუალებას იძლევა მიღებული იქნეს საწყისი მონაცემების ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები, ანალიზურად აგებული იქნეს შეშფოთე-ბული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი, განხორციელდეს დიფერენციალური მოდელების სენსიტიური ანალიზი.

ოპტიმალური ამოცანებისთვის დაგვიანებებით როგორც ფაზურ კოორდინატებში ასევე მართვებში, ზოგადი სასაზღვრო პირობითა და ფუნქციონალით, ზემოაღნიშნული ვარიაციის ფორმულების გამოყენებით, მიღებულია ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები: საწყისი და საბოლოო მომენტებისთვის ტოლობისა და უტოლობი სახით; დაგვიანების პარამეტრებისთვის ტოლობის სახით; საწყისი ვექტორისთვის უტოლობის სახით; საწყისი და მართვის ფუნქციებისთვის ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპის ფორმით.

ლიტერატურა

1. Asbelev N. and Rakhmatulina L. Theory of linear abstract functional-differential equations and applications, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **8,** (1996), 2-102.
2. Agarval R., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. Non-oscillation theory of functional differential equations and applications, *Springer, New York*, 2012.
3. Alkhazishvili L., The linearized maximum principle for optimal problems with variable delays and continuous initial condition, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **29,** (2003), 153-155.
4. Arutyunov A. V. , Mardanov M. D. On the theory of the maximum principle in problems with delays, *Differ. Equ.,* 25:12 (1989), 1443–1452.
5. Ashordia M. T. On the stability of solution of linear boundary vale problems for the system of ordinary differential equations, *Bull. Georg. Nati. Acad. Sci.,* **1**(2)(1993),129-141.
6. Baker C.T.H. Retarded differential equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics* , 125 (1-2) (2000), 309-335.
7. Banks H. T. Necessary conditions for control problems with variable time lags, *SIAM J. Control Optim.*, **6** (1968),9-47.
8. Beklaryan L. A. Variational problem with retarded argument and its relation to a semi-group of self-mapping of a closed interval, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **271**(5) (1983),1034-1040.
9. Bellman R. and Cooke K. Differential difference equations, *Academic Press, New York*,1963.
10. Boccia A., Vinter R.B. The maximum principle for optimal control problems with time delays, *IFAC-PapersOnLine* **49-18** (2016), 951–955.
11. Driver R. Ordinary and delay equations, *Springer,* 1977.
12. Delay differential equations and applications, edited by Arion, O., Hbib, M. L. and Ait Dads, E., *Nato Science Series II, Mathematics, Physics and Chemistry* ,Vol. 205, Springer, 2006.
13. Dvalishvili P. and Ramishvili I. A theorem on the continuity of the minimum of an integral functional for one class of optimal problems with distributed delay in controls, *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute*, **163** (2013), 29-38.
14. El'sgolts L. E. and Norkin S. B. Introduction to the theory of differential equations with deviated argument, *Nauka, Moscow*, 1971.
15. Gabasov R., Kirillova F. The qualitative theory of optimal processes , *"Nauka", Moscow*, 1971.

16. Gamkrelidze R. V. Principles of optimal control theory, *volume 7 of Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering*, 1978.
17. Gorgodze N. Necessary conditions of optimality in neutral type optimal problems with non-fixed initial moment, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **19** (2000), 150-153.
18. Göllmann L., Maurer H. Theory and applications of optimal control problems with multiple time-delays, *Journal of Industrial & Management*, **10**(2) (2014), 413-441.
19. Halanay A. Optimal controls for systems with time –lag, *SIAM J. Control Optim.*, **6**(1968), 215-234.
20. Halanay A. Differential equations: stability, oscillations, time Lags, *Academic Press, New York and London*, 1966.
21. Hale J. Theory of functional differential equations, *Springer-Verlag New York, Heidelberg Berlin*, 1977.
22. Iordanishvili M. Local variation formulas of solutions for the nonlinear controlled differential equation with the discontinuous initial condition and with delay in the phase coordinates and controls, *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute,* **173** (2) (2019), 10-16.
23. Kharatishvili G. The maximum principle in the theory of optimal processes with delay, *Dokl. Akad.Nauk SSSR*, **136** (1)(1961) , 39-42.
24. Kharatishvili G. L., Tadumadze T. A. Formulas for the variation of a solution and optimal control problems for differential equations with retarded arguments, *J. Math. Sci. (N. Y.),* **140** (1) (2007), 1-175.
25. Kiguradze I. and Puza B. On boundary value problems for systems of linear functional differential equations, *Chechosl. Math. J.* , **47**(122)(1997), 341-373.
26. Kolmanovski V. and Myshkis A. Introduction to the theory and applications of functional differential equations, *Kluwer Academic Publishers, 1999*.
27. Koplatadze R. On oscillatory properties of solutions of functional differential equations, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **3** (1994), 2-179.
28. Koplatadze R., Chanturia T. On oscillatory solutions of functional-differential equations, Tbilisi Univ. Press, Tbilisi, 1977.
29. Machaidze Z. A. On the problem on the uniqueness of optimal control in systems with delays, *Bull. Georg. Nati. Acad. Sci.,* **78** (2)(1975),285-288.
30. Manitius A. Optimal control of hereditary systems in control theory and topics in functional analysis , *Intern. Atom. Energy Ag. Vienna*, 1976, 43-178.
31. Mardanov M. J., Mansimov K. B., Melikov T. K. Investigation of singular controls and the second order necessary optimality conditions in systems with delay, *"Elm", Baku*, 2013 .

32. Markozashvili N. I. Necessary optimality conditions for prehistory control systems, In: *Certain Problems of Mathematical Theory of Optimal Control*, *Tbilis. Univ. Press*, *Tbilisi* , 1975, 151-180.
33. Myshkis A. D. linear differential equations with retarded argument , *Nauka, Moscow*, 1972.
34. Mordukhovich B. Sh. Variation analysis and generalized differentiation II, applications. *Springer*, 2006.
35. Neustadt L. W. Optimization: A theory of necessary conditions, *Princeton Univ. Press, Princeton, New York*, 1976.
36. Nicolescu S. I. Delay effects on stability, *Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Springer*, **269**, 2001.
37. Ogustoreli N. M. Time-delay control systems, *Academic Press, New-York-London*, 1966.
38. Partsvania N. On some nonlinear boundary value problems on a finite and an infinite intervals for systems of functional differential equations, *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 67 (2016), 137-140.
39. Shavadze T. On estimation of the increment of solution for a controlled functional differential equation considering delay parameter perturbation, *Sem. I. Vekua Inst. Appl. Math., Rep.*, 41 (2015), 46-49.
40. Shavadze T. Variation Formulas of Solution for One Class of Controlled Functional Differential Equation with Several Delays and the Continuous Initial Condition, *International Workshop QUALITDE* – 2016, December 24 – 26, 2016, 206-209, Tbilisi, Georgia (
41. Shavadze T. Variation Formulas of Solutions for Nonlinear Controlled Functional Differential Equations with Constant Delay and the Discontinuous Initial Condition, *International Workshop QUALITDE* – 2017, December 24 – 26, 2017, 169-172, Tbilisi, Georgia (http://www.rmi.ge/eng/QUALITDE-2017/Shavadze_workshop_2017.pdf).
42. Shavadze T. Necessary conditions of optimality for the optimal control problem with several delays and the discontinuous initial, *Bulletin of TICMI*, **22**(2) (2018), 143-147.
43. Shavadze T. Variation formulas of solutions for controlled functional differential equations with the continuous initial condition with regard for perturbations of the initial moment and several delays, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **74** (2018), 125-140.
44. Shavadze T. Variation formulas for delay differential equations and necessary optimality conditions, *The 6 International Conference on Control and Optimization with*

Industrial Applications, 11-13 July, 2018, 352-354, Baku, Azerbaijan (http://www.coia-conf.org/upload/editor/files/COIA_2018_V1.pdf

45. Shavadze T. Necessary conditions of optimality for the optimal control problem with several delays and the continuous initial condition, *International Workshop QUALITDE* – 2018, December 1 – 3, 2018, 170-173, Tbilisi, Georgia (http://www.rmi.ge/eng/QUALITDE 2018/Shavadze_workshop_2018.pdf).
46. Shavadze T. Variation formulas of solutions for nonlinear controlled functional differential equations with local constant delays and the discontinuous initial condition, *Georgian Math. J.* (accepted, http://rmi.tsu.ge/eng/journals.htm, შესაბამისი ცნობა სტატიის გამოქვეყნებასთან დაკავშირებით დევს დისერტანტის საქმეში,).
47. Sokhadze Z. The Cauchy problem for singular functional-differential equations, *Kutaisi State University Press, Kutaisi*, 2005.
48. Tadumadze T. A. Local representations for the variation of solutions of delay differential equation, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **21**(2000), 138-141.
49. Tadumadze T. Variation formulas of solutions for functional differential equations with several constant delays and their applications in optimal control problems. *Mem . Differ. Equ. Math . Phys.,* **70** (2017), 7-97.
50. Tadumadze T. and Alkhazishvili L. Formulas of variation of solution for nonlinear controlled delay differential equation with discontinuous initial condition, *Mem. Differential Equations Math. Phys* , **29** (2003),125-150 .
51. Tadumadze T. and Alkhazishvili L. Formulas of variation of solution for non-linear controlled delay differential equation with continuous initial condition, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **31** (2004), 83-97.
52. Tadumadze T. and Nachaoui A. Variation formulas of solution for a controlled delay functional-differential equation considering delay perturbation. *TWMS J. App. Eng. Math.* V.1, N.1, 2011, 34-44 .
53. Warga J. Optimal control of differential and functional equations, *Nauka, Moscow,* 1977.

თეა შავაძის მიერ გამოქვეყნებული შრომების სია

[1] **Tamaz Tadumadze, Phridon Dvalishvili, Tea Shavadze, On the Representation of Solution of the Perturbed Controlled Differential Equation with Delay and Continuous Initial Condition, Applied and Computational Mathematics, Vol. 18, No. 3, 2019, pp. 305-315.**

[2] **T. Shavadze, Variation Formulas of Solutions for Nonlinear Controlled Functional Differential Equations with Local Constant Delays and the Discontinuous Initial Condition, Georgian Mathematical Journal, online version available: https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2080 Received February 26, 2018; revised March 17, 2018; accepted January 8, 2019.**

[3] T. Shavadze, Necessary conditions of optimality for the optimal control problem with several delays and the discontinuous initial, Bulletin of TICMI, vol. 22, No. 2, 2018, pp. 143-147.

[4] T. Shavadze, Variation Formulas of Solutions for Controlled Functional Differential Equations with the Continuous Initial Condition with Regard for Perturbations of the Initial Moment and Several Delays, Mem. Differential Equations Math. Phys. **74** (2018), pp. 125-140.

[5] T. Shavadze, Variation formulas for delay differential equations and necessary optimality conditions, The 6 International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, 11-13 July, 2018, pp. 352-354, Baku, Azerbaijan (http://www.coia-conf.org/upload/editor/files/COIA_2018_V1.pdf)

[6] T. Shavadze, Necessary Conditions of Optimality for the Optimal Control Problem with Several Delays and the Continuous Initial Condition, International Workshop QUALITDE – 2018, December 1 – 3, 2018, pp. 170-173, Tbilisi, Georgia (http://www.rmi.ge/eng/QUALITDE-2018/Shavadze_workshop_2018.pdf)

[7] T. Shavadze, Variation Formulas of Solutions for Nonlinear Controlled Functional Differential Equations with Constant Delay and the Discontinuous Initial Condition, International Workshop QUALITDE – 2017, December 24 – 26, 2017, pp. 169-172, Tbilisi, Georgia (http://www.rmi.ge/eng/QUALITDE-2017/Shavadze_workshop_2017.pdf)

[8] T. Shavadze, Variation Formulas of Solution for One Class of Controlled Functional Differential Equation with Several Delays and the Continuous Initial Condition, International Workshop QUALITDE – 2016, December 24 – 26, 2016, pp. 206-209, Tbilisi, Georgia (http://www.rmi.ge/eng/QUALITDE-2016/Shavadze_workshop_2016.pdf)

[9] T. Shavadze, On estimation of the increment of solution for a controlled functional differential equation considering delay parameter perturbation, Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Sem. I. Vekua Inst. Appl. Math., Rep., 41 (2015), 46-49.