



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

დოქტორანტურის საგანმანათლებლო პროგრამა მათემატიკა

გიორგი კაკულაშვილი

კვაზიკონფორმული ასახვის ინვარიანტები

მათემატიკაში დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
წარმოდგენილი დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

გრიგორი გიორგაძე

ფიზ.-მათ. მეცნ. დოქტორი,

ასოცირებული პროფესორი



Ivane Javakhishvili Tbilisi State University
Faculty of Exact and Natural Sciences Department of Mathematics

Doctoral Program: Mathematics

Giorgi Kakulashvili

Invariants of Quasiconformal Mappings

Thesis submitted for the degree of PhD in Mathematics

Scientific adviser:
Grigori Giorgadze
Doctor of Phys.-Math.Sci.
Associated professor

Tbilisi 2023

შინაარსი

აბსტრაქტი	ii
Abstract	iv
შესავალი	1
1 დამხმარე დებულებები და განმარტებები	7
1.1 ოთხკუთხედის შვარც-კრისტოფელის ასახვისა და კონფორმული მოდულის შესახებ	7
1.2 რიცხვითი გამოთვლების ზოგიერთი საკვანძო საკითხის შესახებ	14
2 კონფორმული მოდულის გამოთვლა	16
2.1 შვარც-კრისტოფელის ასახვა ოთხკუთხედისთვის	16
2.2 ოთხკუთხედის მოდული	23
2.3 განზოგადებული მოდულის წარმოდგენა ხარისხოვან მწკრივად	32
3 პარამეტრების პრობლემა ოთხკუთხედისთვის	38
3.1 შვარც-კრისტოფელის ასახვის პარამეტრების გამოთვლა	38
3.2 განზოგადებული მოდული და ოთხკუთხედის ფორმა	41
4 მაგალითები და გამოთვლები	46
4.1 მაგალითები განზოგადებული მოდულის გამოთვლაზე	46
4.2 ნატურალური რიცხვის დაყოფის ალგორითმის შესახებ	54
დასკვნა	66
ლიტერატურა	67

აბსტრაქტი

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება სიბრტყეზე ოთხი მონიშნული წერტილისთვის შვარც-კრისტოფელის ასახვის პარამეტრების პრობლემას და კონფორმული მოდულის გამოთვლას. ცნობილია, რომ $\mathbb{C} \setminus \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, $n \geq 4$ მრავალსახეობის კონფორმულად ეკვივალენტურობის კლასები ქმნიან კომპლექსურ მრავალსახეობას, რასაც $\mathbb{C} \setminus \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ მრავალსახეობის მოდული ეწოდება და მისი განზომილება $n - 3$ -ის ტოლია. შესაბამისად, ოთხკუთხედის $n = 4$ შემთხვევაში არსებობს 1 პარამეტრი, რომელიც განსაზღვრავს მის კონფორმულ მოდულს და კანონიკურ კონფორმულ ასახვას ზედა ნახევარსიბრტყეზე. ნაშრომში ამ პარამეტრს ვუწოდებთ r -ინვარიანტს. მისი საშუალებით ცალსახად განვსაზღვრავთ ოთხკუთხედის კონფორმულ მოდულს და შვარც-კრისტოფელის ასახვის პარამეტრებს.

ნაშრომში ნამდვილი დადებითი x ცვლადის და $\tau_1, \tau_2, \tau_3 > 0$ ნამდვილი დადებითი რიცხვებისთვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 < 2$ პირობას, განსაზღვრულია x ცვლადის $\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ ფუნქცია - განზოგადებული მოდული და დამტკიცებულია:

$$\begin{aligned}\varphi(r; \tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \frac{l_3}{l_4}, & \varphi\left(\frac{1}{r}; \tau_2, \tau_3, \tau_4\right) &= \frac{l_4}{l_1}, \\ \varphi(r; \tau_3, \tau_4, \tau_1) &= \frac{l_1}{l_2}, & \varphi\left(\frac{1}{r}; \tau_4, \tau_1, \tau_2\right) &= \frac{l_2}{l_3},\end{aligned}$$

სადაც ოთხკუთხედის გვერდებია l_j და შიდა კუთხეებია $\pi\tau_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, ხოლო r არის ოთხკუთხედის r -ინვარიანტი. ნაჩვენებია, რომ თუ $\tau_1 \neq 1$, $\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ მკაცრად მონოტონური ფუნქციაა, რომელიც ანალიზურია $x = 1$ წერტილში. მიღებულია რეკურსიული ფორმულა ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტებისთვის.

ფიქსირებული წვეროების და r -ინვარიანტის მქონე ოთხკუთხედისათვის ცხადად არის აგებული შესაბამისი შვარც-კრისტოფელის ასახვა, რაც მიღწეულია ოთხკუთხედისთვის პარამეტრების პრობლემის გადაჭრის გზით.

კერძოდ, დამტკიცებულია, რომ მოცემული r -ინვარიანტის და w_1, w_2, w_3, w_4 წვეროების მქონე ოთხკუთხედზე შვარც-კრისტოფელის (SC) ასახვა

$$f(z) = A + C \left(\int_{-\infty}^1 + \int_1^z \right) (1 - \zeta)^{\tau_1 - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{2} \right)^{\tau_2 - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{2+r} \right)^{\tau_3 - 1} d\zeta,$$

გადაიყვანს ქვედა ნახევარსიბრტყეს ისე, რომ

$$f(1) = w_1, f(2) = w_2, f(2+r) = w_3, f(\infty) = w_4,$$

სადაც $\tau_j, j = 1, 2, 3$ გამოისახება w_1, w_2, w_3, w_4 კომპლექსური რიცხვების საშუალებით და

$$A = -\frac{A'}{C'}, \quad C = \frac{1}{C'C''}, \quad C' = \frac{|w_1 - w_4|}{w_1 - w_4}, \quad A' = -C'w_4,$$

$$C'' = \frac{2^{1-\tau_2}}{|w_1 - w_2|} \left(1 + \frac{1}{1+r} \right)^{1-\tau_3} B(\tau_1, \tau_2) {}_2F_1 \left(\tau_1, 1 - \tau_3; \tau_1 + \tau_2; \frac{1}{1+r} \right).$$

კონფორმული მოდულის, r -ინვარიანტის და პარამეტრების გამოსათვლელად დამუშავებულია ეფექტური ალგორითმები და ყველა მათგანი რეალიზებულია პროგრამულ ენა Python-ზე. შესაბამისი ფსევდოკოდები მოყვანილია დისერტაციაში.

დისერტაცია შედგება შესავლის, დასკვნის და ოთხი თავისაგან. ძირითადი შედეგები მოყვანილია, მე-2 და მე-3 თავებში. მეოთხე თავი ეძღვნება მაგალითების განხილვას და გამოთვლების შედეგების შედარებას სამეცნიერო ლიტერატურაში არსებულ ანალოგებთან. ამ თავში, მოყვანილია აგრეთვე ნატურალური რიცხვის წარმოდგენის ალგორითმი ნატურალურ რიცხვთა ჯამად, რომელიც გამოყენებულია მე-3 თავში ძირითადი დებულების დამტკიცების დროს. აქ მოყვანილ დებულებებს, ჩვენი აზრით, დამოუკიდებელი მნიშვნელობაც აქვს.

Abstract

This dissertation focuses on the Schwarz-Christoffel parameter problem for four marked points on the plane and the calculation of the conformal modulus. It is known that the conformally equivalent classes of the manifold $\mathbb{C} \setminus S_1, S_2, \dots, S_n$, where $n \geq 4$, form a complex manifold called the $\mathbb{C} \setminus S_1, S_2, \dots, S_n$ modulus of the manifold, which has a degree of $n - 3$. Therefore, when $n = 4$ and the shape is a quadrilateral, there is a single parameter that determines its conformal modulus and the canonical conformal mapping on the upper half-plane. In this paper, we refer to this parameter as the r -invariant. Using this parameter, we can uniquely determine the conformal modulus of the quadrilateral and the Schwarz-Christoffel mapping parameters.

In this paper, we define a function $\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ for the real positive variable x and real positive numbers $\tau_1, \tau_2, \tau_3 > 0$ that satisfy the condition $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 < 2$. We prove that φ - generalized modulus satisfies the following conditions

$$\begin{aligned} \varphi(r; \tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \frac{l_3}{l_4}, & \varphi\left(\frac{1}{r}; \tau_2, \tau_3, \tau_4\right) &= \frac{l_4}{l_1}, \\ \varphi(r; \tau_3, \tau_4, \tau_1) &= \frac{l_1}{l_2}, & \varphi\left(\frac{1}{r}; \tau_4, \tau_1, \tau_2\right) &= \frac{l_2}{l_3}, \end{aligned}$$

where the sides of the quadrilateral are represented by l_j , and the interior angles are represented by $\pi\tau_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, and the r -invariant of the quadrilateral is denoted by r . We show that if $\tau_1 \neq 1$, then $\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ is a strictly monotonic function that is analytic at $x = 1$. We also derive a recursive formula for the coefficients of the power series.

For a quadrilateral with fixed vertices and an r -invariant, the corresponding Schwarz-Christoffel (SC) mapping can be clearly constructed by solving the SC parameter problem for the quadrilateral.

In particular, we prove that for a quadrilateral with a given r -invariant and vertices w_1, w_2, w_3, w_4 , the SC mapping

$$f(z) = A + C \left(\int_{-\infty}^1 + \int_1^z \right) (1 - \zeta)^{\tau_1-1} \left(1 - \frac{\zeta}{2}\right)^{\tau_2-1} \left(1 - \frac{\zeta}{2+r}\right)^{\tau_3-1} d\zeta,$$

is mapping the lower half-plane onto the quadrilateral such that

$$f(1) = w_1, f(2) = w_2, f(2+r) = w_3, f(\infty) = w_4,$$

where $\tau_j, j = 1, 2, 3$, are given by the complex numbers w_1, w_2, w_3, w_4 and

$$A = -\frac{A'}{C'}, \quad C = \frac{1}{C'C''}, \quad C' = \frac{|w_1 - w_4|}{w_1 - w_4}, \quad A' = -C'w_4,$$

$$C'' = \frac{2^{1-\tau_2}}{|w_1 - w_2|} \left(1 + \frac{1}{1+r}\right)^{1-\tau_3} B(\tau_1, \tau_2) {}_2F_1 \left(\tau_1, 1 - \tau_3; \tau_1 + \tau_2; \frac{1}{1+r} \right).$$

We implement efficient algorithms for computing the conformal modulus, r -invariant, and parameters in the Python programming language and provide the corresponding pseudocodes in the thesis.

The dissertation consists of an introduction, conclusion, and four chapters. The main results are presented in Chapters 2 and 3. Chapter 4 is devoted to discussing examples and comparing our calculation results with those in the scientific literature. This chapter also presents an algorithm for representing a natural number as a sum of natural numbers, which was used in the proof of the main theorem in Chapter 3. We believe that the ideas presented here have independent value.

შესავალი

სადისერტაციო ნაშრომში განხილულია ანალიზურ ფუნქციათა გეომეტრიული თეორიის ორი ცენტრალური ამოცანა. სახელდობრ: ა) ოთხკუთხედის კონფორმული მოდულის და ბ) შვარც-კრისტოფელის ასახვის პარამეტრების გამოთვლის პრობლემები. ორივე ამოცანა დისერტაციაში სრულად არის ამოხსნილი, დამუშავებულია ამ რიცხვითი ინვარიანტების გამოთვლის ალგორითმები. აგრეთვე, დისერტაციის ნაწილია მათი პროგრამული რეალიზაცია.

შვარც-კრისტოფელის ასახვის პარამეტრების პრობლემა, რომელიც ითვალისწინებს

$$f(z) = A + B \int^z \prod (\zeta - z_k)^{\tau_k - 1} d\zeta \quad (1)$$

ასახვაში A და B პარამეტრების გამოთვლას, არის ერთ-ერთი ცენტრალური პრობლემა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა გეომეტრიულ თეორიაში [20], [26], [34]. A -სა და B -ს გამოთვლაზე დაიყვანება მრავალი თეორიული და გამოყენებითი ამოცანა. სირთულეები წარმოიქმნება პირველივე არატრივიალურ შემთხვევაში, კერძოდ როდესაც წერტილების რაოდენობა 4-ის ტოლია. კომპლექსურ სიბრტყეზე 4 წერტილის სხვადასხვა კონფიგურაცია შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ოთხკუთხედის წვეროები, ამ კერძო შემთხვევაში (1) ფუნქცია განახორციელებს ზედა ნახევარ-სიბრტყის ასახვას მოცემულ ოთხკუთხედზე A და B პარამეტრების შერჩევის ხარჯზე.

ბუნებრივია, რომ სიბრტყეზე 4 წერტილის შემაერთებელი წირი შესაძლებელია იყოს ნებისმიერი. ამის გამო, საზოგადოდ, ოთხკუთხედი განიმარტება, როგორც ჟორდანის წირი მასზე მოცემული 4 წერტილით. ზუსტი განმარტება მოყვანილია დისერტაციის პირველ თავში. როგორც ცნობილია, ყოველთვის არსებობს გაფართოებული კომპლექსური სიბრტყის ორიენტაციის შემნახველი ისეთი კონფორმული ასახვა, რომელიც წერტილთა ორ სამეულს ერთმანეთში გადაიყვანს. ოთხი წერტილის შემთხვევაში ასეთი

კონფორმული ასახვა ყოველთვის არ არსებობს და იმისთვის, რომ ამგვარი ასახვა არსებობდეს, აუცილებელი და საკმარისია შესაბამისი ოთხკუთხედების კონფორმული მოდულები ერთმანეთის ტოლი იყოს [2], [27]. თუ Q ოთხკუთხედი მართკუთხედი a და b გვერდებით, მაშინ მისი $M(Q)$ კონფორმული მოდული არის

$$M(Q) = \frac{a}{b}. \quad (2)$$

კომპლექსური ანალიზის მრავალმხრივი გამოყენება, ძირითადად კონფორმული ასახვის უნიკალური თვისებებითაა განპირობებული. მნიშვნელოვანი მაგალითებია: აეროდინამიკის ამოცანები, ფრთის მოდელირების ჩათვლით, ტურბულენტობის ანალიზი, დიდი მოცულობის წყალსაცავის პროექტირება [34], ჰიდროდინამიკის და დრეკადობის თეორიის კონკრეტული ამოცანები [30], [37], [39]. ელექტრობის მათემატიკური თეორია ფართოდ იყენებს კონფორმულ ასახვების სპეციფიკას. მაგალითად, კონფორმული მოდულის ფიზიკური ინტერპრეტაციაა კონდენსატორის ტევადობა (იხ. [31] და იქ ციტირებული ლიტერატურა) და თუ კონდენსატორს მართკუთხედის ფორმა აქვს, მაშინ ტევადობის გამოთვლა ხდება (2) ფორმულით. უფრო ზოგადად, თუ S_1, S_2, S_3, S_4 და $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3, \tilde{S}_4$ გაფართოებულ კომპლექსურ სიბრტყეზე ოთხი წერტილის ორი კონფიგურაციაა, მაშინ $H_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ და $H_2 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3, \tilde{S}_4\}$ მრავალსახეობებს შორის არსებობს ბიჰოლომორფული ასახვა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც შესაბამისი ოთხკუთხედების კონფორმული მოდულები ერთმანეთის ტოლია. აგრეთვე ცნობილია, რომ კონფორმულად ეკვივალენტურობის კლასები ქმნიან კომპლექსურ მრავალსახეობას, რომლის განზომილება $n - 3$ -ის ტოლია და თუ ამ თვისებას დავუმატებთ იმ ფაქტს, რომ კონფორმული მოდული უწყვეტად არის დამოკიდებული წერტილების ცვლილებაზე, დავასკვნით, რომ მოდულის მიახლოებითი გამოთვლა გვაძლევს მნიშვნელოვან კონფორმულ ინვარიანტს.

სამეცნიერო ლიტერატურაში გვხვდება კონფორმული მოდულის გამოთვლის ორი მეთოდი. ერთი ეფუძნება შვარცის დიფერენციალს, რომელსაც მივყავართ, ოთხი განსაკუთრებული წერტილის მქონე, ფუქსის ტიპის მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებამდე [18], [37], [39]. ამ სახის დიფერენციალურ განტოლებებს აქვთ თავიანთი კანონიკური ფორმა, რომელსაც ჰოინის განტოლება ეწოდება. ჰოინის განტოლების ორი დამოუკიდებელი ამონახსნის ფარდობის საშუალებით გამოითვლება კონფორმული მოდული. ჰოინის განტოლება კვადრატურებში იხსნება მხოლოდ სპეციალური სახის კოე-

ფიციენტებისთვის. გარდა ამისა, იგი შეიცავს აქსესორულ პარამეტრს, რომლის გამოთვლა ცალკე ამოცანაა. ეს მიდგომა უფრო მოსახერხებელია მრუდწირული ოთხკუთხედების კონფორმული მოდულის და მასთან დაკავშირებული კონფორმული ასახვების კვლევისას [6], [11]. დისერტაციაში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ ოთხკუთხედებს, რომლის გვერდები წრფეებია. ზედა ნახევარსიბრტყის ასახვას მრავალკუთხედებზე, რომელთა გვერდები წრფეებია ახორციელებს შვარც-კრისტოფელის ასახვა, ამიტომ კვლევის ობიექტი არის შვარც-კრისტოფელის ასახვა და მასში შემავალი A და B პარამეტრების გამოთვლის ამოცანა, როდესაც მრავალკუთხედი ოთხკუთხედი.

დისერტაციის პირველ თავში გადმოცემულია ცნებები და ძირითადი დებულებები, რომლებიც, მომდევნო თავებში, კვლევების და გაღრმავების ობიექტებია. კონფორმული ასახვა თავდაპირველად გაუსის კვლევის ობიექტი იყო (1820 წ.). შემდგომ, რიმანმა თავის დისერტაციაში ჩამოაყალიბა მნიშვნელოვანი თეორემა (1851 წ.), რომელიც ცნობილია, როგორც რიმანის თეორემა არის შენახვის შესახებ. ეს არის უმნიშვნელოვანესი შედეგი ცალადბმული არეების კლასიფიკაციის თეორიაში, რომელმაც მომდევნო წლებში დასრულებული სახე მიიღო პუანკარესა და კობეს შრომებში [9], [36]. რიმანის თეორემა არაფერს ამბობს არეს საზღვარზე ჰოლომორფული ფუნქციის ყოფაქცევის შესახებ. ამიტომ, ამ თეორემის მნიშვნელოვანი გაგრძელებაა ოსგუდ-კარათეოდორის შემდეგი თეორემა.

ოსგუდ-კარათეოდორის თეორემა. თუ f კონფორმულად ასახავს D ღია ერთეულოვან დისკს შემოსაზღვრულ $U \subset \mathbb{C}$ არეზე, მაშინ f ურთიერთცალსახად გაგრძელებადია ∂D საზღვარზე და მას ასახავს U -ს ∂U საზღვარზე და ამასთან ეს ასახვა არის ჰომეომორფიზმი.

რიმანის და ოსგუდ-კარათეოდორის თეორემები არ არის კონსტრუქციული სახის, არამედ არის არსებობის თეორემები. შვარცისა (1869 წ.) და კრისტოფელის (1867 წ.) (იხ. [13]) მიერ აღმოჩენილი ფორმულა (1) საშუალებას იძლევა ზოგიერთი არესთვის კონსტრუქციულად იქნას აგებული შესაბამისი კონფორმული ასახვა.

შვარც-კრისტოფელის ფორმულა. ვთქვათ P არის არე, რომელიც შემოსაზღვრულია Γ მრავალკუთხედით, რომლის წვეროებია w_1, \dots, w_n და შიდა კუთხეებია $\pi\tau_1, \dots, \pi\tau_n$, გადანომრილი საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ვთქვათ f არის ნებისმიერი კონფორმული ასახვა H^+ ზედა ნახევარსიბრტყიდან P -ზე, ისეთი, რომ $f(\infty) = w_n$. მაშინ შვარც-კრისტოფელის ფორმულა ნახევარ-სიბრტყისთვის არის

$$f(z) = A + C \int \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - z_k)^{\tau_k - 1} d\zeta$$

რომელიმე A და C კომპლექსური მუდმივებისთვის, სადაც $w_k = f(z_k)$, $k = 1, \dots, n - 1$.

შვარც-კრისტოფელის ასახვა დღემდე კვლევის ობიექტია, განსაკუთრებით მისი პრაქტიკული გამოყენებების მიზნით. ამ საკითხს, ბოლო პერიოდში, მიეძღვნა მრავალი ნაშრომი (იხ. [28], [32] და იქ მოყვანილი ლიტერატურა). ეს ამოცანა განსაკუთრებით აქტიური გახდა კომპიუტერულ ერაში [38], რადგან (1) ასახვა არის უნივერსალური ობიექტი ყველა შესაძლო კონფორმულ ასახვათა შორის. შვარც-კრისტოფელის ასახვის პროგრამული რეალიზაციის თვალსაზრისით მნიშვნელოვანი [14], [32] შრომები და [13] მონოგრაფიაა, სადაც განხილულია საგულისხმო მაგალითები. ამ მონოგრაფიაში გადმოცემულია, აგრეთვე ყველა ის მნიშვნელოვანი ეტაპი, რომელიც დაკავშირებულია შვარც-კრისტოფელის ასახვის გამოყენებასთან პრაქტიკული ამოცანებისთვის და შეიცავს საგნის ისტორიულ მიმოხილვას.

დისერტაციის მეორე თავი ეძღვნება ოთხკუთხედის კონფორმული მოდულის გამოთვლას, რომელიც შედგება სამი პარაგრაფისგან. პირველ რიგში, მოყვანილია თეორემა შვარც-კრისტოფელის ასახვის შესახებ - თეორემა 2.1, რომელიც შემდგომ მუდმივად გამოიყენება. აქვეა მოყვანილი ორი დებულება: წინადადება 2.1 და წინადადება 2.2, რომლებიც ოთხკუთხედისთვის შვარც-კრისტოფელის ასახვას გამოსახავს ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების საშუალებით. ამ პარაგრაფში, შემოტანილია r -ინვარიანტის ცნება ოთხკუთხედისთვის და დამტკიცებულია პარაგრაფის ძირითადი დებულება - თეორემა 2.2. ამ თავის მეორე პარაგრაფში განმარტებულია განზოგადებული მოდული (განმარტება 2.2), როგორც r -ინვარიანტის ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია პარამეტრებზე. თეორემა 2.3-ში დამტკიცებულია, რომ ფიქსირებული r -ინვარიანტის მქონე ოთხკუთხედის განზოგადებული მოდული არის ოთხკუთხედის მეზობელი გვერდების შეფარდება, რომელიც, თავის მხრივ, გამოისახება ბეტა ფუნქციის და ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების საშუალებით. ამ თავის შედეგი 2.1 ამყარებს თანადობას განზოგადებული მოდულის სხვადასხვა მნიშვნელობებს შორის. ამ ფაქტს აქვს გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, კერძოდ პარამეტრების ციკლური ცვლილებისთვის მოყვანილია დამოკიდებულება განზოგადებული მოდულის სხვადასხვა მნიშვნელობებს შორის. ასეთივე ხასიათის არის წინადადება 2.3, სადაც განზოგადებული მოდულის მნიშვნელობა x -ში დაკავშირებულია მის მნიშვნელობასთან $x/(1+x)$ -ში. აქედან, როგორც შედეგი, მი-

დებულია გამოსახულება მართკუთხედის განზოგადებული მოდულისთვის. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ მართკუთხედის განზოგადებული მოდული გამოისახება იაკობის ელიფსური ფუნქციით, რაც საშუალებას იძლევა მართკუთხედის მოდული დავაკავშიროთ r -ინვარიანტთან (ფორმულა 2.12). განზოგადებული მოდულის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თვისება მოყვანილია თეორემა 2.4-ში, რომლის თანახმადაც, განზოგადებული მოდული არის მკაცრად მონოტონური ფუნქცია, რომელიც შესაძლებელია შეფასდეს $(x/(x+1))^{\alpha}$ და $(x+1)^{\alpha}$ ფუნქციების საშუალებით. განზოგადებული მოდულის ასიმპტოტური ყოფაქცევა, როდესაც არგუმენტი მიისწრაფვის ∞ -სკენ და 0 -სკენ, მოყვანილია თეორემა 2.5-ში.

მეორე თავის 2.3 პარაგრაფში გადმოცემულია განზოგადებული მოდულის წარმოდგენა ხარისხოვან მწკრივად (თეორემა 2.6). წინადადება 2.6 არის ფორმალური ხარისხოვანი მწკრივის შექცეულის აგების შესახებ. თეორემა 2.7-ში ნაჩვენებია, რომ პარალელოგრამის განზოგადებული მოდული ანალიზურია $x = 1$ წერტილში. განზოგადებული მოდული წარმოდგენილია მწკრივის სახით და აგებულია მისი შექცეული.

დისერტაციის მესამე თავი, რომელიც შედგება ორი პარაგრაფისგან, ეძღვნება შვარცკრისტოფელის ასახვის A და B პარამეტრების გამოთვლის ამოცანას, რომელიც ლიტერატურაში ცნობილია, როგორც პარამეტრების პრობლემა. განხილულია შემთხვევა, როდესაც მრავალკუთხედი ოთხკუთხედი და ეს ამოცანა სრულად არის ამოხსნილი თეორემა 3.1-ში. ამ თავის წინადადება 3.1-ში გაანალიზებულია განზოგადებული მოდულის კავშირი მოდულარულ განტოლებასთან [8], ხოლო თეორემა 3.2-ში კონფორმული მოდული წარმოდგენილია ცხადი სახით.

დისერტაციის მეოთხე თავში, განხილულია ალგორითმები, მოყვანილია ალგორითმების პროგრამული რეალიზაციის ფსევდოკოდები და რიცხვითი გამოთვლები. დისერტაციაში მოყვანილი ძირითადი შედეგების პროგრამული რეალიზაცია შესრულებულია Python 3.8-ზე და პროგრამის საწყისი კოდი არის <https://github.com/giorgi94/sc-tools> მისამართზე. კერძოდ მოყვანილია გამოთვლები, რომლებიც გამომდინარეობენ თეორემა 3.1-დან და თეორემა 2.6-დან. ამ თავში, აგრეთვე მოყვანილია დისერტაციაში მიღებული შედეგების შედარება, ბოლო პერიოდში, დარგის წამყვანი სპეციალისტების [31], [32] მიერ მიღებულ შედეგებთან.

განზოგადებული მოდულის ხარისხოვან მწკრივად წარმოდგენის ფორმულის დამტკიცების დროს (ასევე მწკრივების ანალიზისთვის მესამე თავში), ვიყენებთ ნატურალუ-

რი რიცხვების წარმოდგენას ნატურალურ რიცხვთა ჯამად [5], რისთვისაც დავამუშავეთ ამ ამოცანის ამოხსნის ორიგინალური მეთოდი, რომელიც წარმოდგენილია 4.2 პარაგრაფში. შესაძლებელია, დისერტაციაში მიღებული შედეგი განზოგადდეს სფერული ოთხკუთხედისთვის. ყველა აუცილებელი ფორმულა მოცემულია [24], [25] ნაშრომებში.

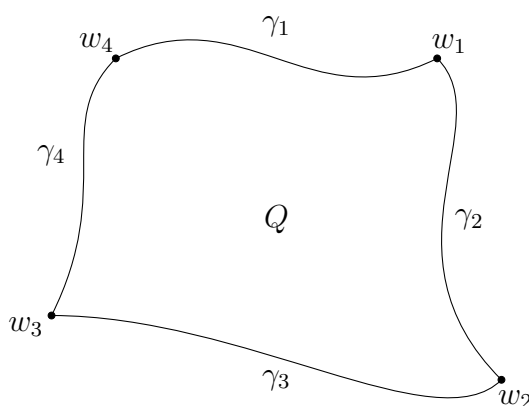
დისერტაციაში მოყვანილი ძირითადი საკითხები რეგულარულად განიხილებოდა ი. ვეკუას გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის, კომპლექსური ანალიზისა და მისი გამოყენების სემინარებზე, ამავე ინსტიტუტის გაფართოებული სემინარის ყოველწლიურ სხდომებზე. ძირითადი შედეგები მოხსენიებულ იქნა ISAAC-ის მე-13 კონგრესზე (ჯენტი, ბელგია, ონლაინ), 2021 წელს.

ძირითადი შედეგები ასახულია [16], [17], [21], [22] და [23] პუბლიკაციებში.

თავი I. დამხმარე დებულებები და განმარტებები

1.1 ოთხკუთხედის შვარც-კრისტოფელის ასახვისა და კონფორმული მოდულის შესახებ

კომპლექსურ სიბრტყეზე ოთხკუთხედი არის არე, რომელსაც აქვს ოთხი სასაზღვრო წერტილი, რომლებიც შეერთებულია ჟორდანის წირებით და ქმნიან არის საზღვარს. ასეთ ოთხკუთხედს აღვნიშნავთ $Q(w_1, w_2, w_3, w_4)$ სიმბოლოთი, სადაც w_j წვეროებია და γ_j შემაერთებელი ჟორდანის წირებია, $j = 1, 2, 3, 4$.



ნახ. 1.1: ზოგადი ოთხკუთხედი

γ_1 და γ_3 წირებს ვუწოდებთ a -გვერდებს, ხოლო γ_2 -სა და γ_4 -ს b -გვერდებს.

რიმანის თეორემიდან ანასახის შესახებ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ოთხკუთხედი კონფორმულად აისახება მართკუთხედზე. ასეთ ასახვას ვუწოდებთ *კანონიკურს*. მსგავსი მართკუთხედები კონფორმულად ეკვივალენტურია, აქედან გამომდინარე, მსგავსი ოთხკუთხედები ერთ კონფორმულ კლასშია. თუ მოცემულია მართკუთხედი $Q(a, a - ib, -ib, 0)$, მაშინ მისი მეზობელი გვერდების a/b შეფარდებას ეწოდება *კონფორმული*

მოდული. აქედან გამომდინარე, ოთხკუთხედის კონფორმული მოდულის გამოთვლა შესაძლებელია მისი კანონიკური მართკუთხედის აგებით [2], [27].

თეორემა 1.1 (რიმანის თეორემა ანასახის შესახებ). ვთქვათ D ცალადბმული არეა კომპლექსურ სიბრტყეზე, ისეთი, რომ $\mathbb{C} \setminus D \neq \emptyset$. მაშინ არსებობს უნივალენტური $f(z)$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $w = f(z)$ ასახავს D -ს $|w| < 1$ ერთეულოვან დისკზე.

თეორემა 1.1-დან გამომდინარეობს, რომ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ ორიენტირებული ნებისმიერი $Q(w_1, w_2, w_3, w_4)$ ოთხკუთხედი შეიძლება კონფორმულად აისახოს $Q'(-1/k, -1, 1, 1/k)$ არეზე, სადაც $0 < k < 1$ და Q' არის ზედა ნახევარსიბრტყეში. ამასთან, ცნობილია, რომ

$$w(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \quad (1.1)$$

ფუნქცია Q' ოთხკუთხედს კონფორმულად ასახავს მართკუთხედში.

ლეჟანდრის ტერმინოლოგიის მიხედვით, (1.1) გამოსახულების მარჯვენა მხარეს ინტეგრალს ეწოდება პირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალი [26], [27], [35]. თუ $z = 1$, მაშინ (1.1) ინტეგრალს ეწოდება სრული ელიფსური ინტეგრალი და აღინიშნება \mathcal{K} -თი:

$$\mathcal{K}(k) = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}. \quad (1.2)$$

მოცემულ გამოსახულებაში $1/\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$ -ის ბინომიალური გაშლა და წევრ-წევრად ინტეგრირება გვაძლევს $\mathcal{K}(k)$ ფუნქციის წარმოდგენას ჰიპერგეომეტრიულ ${}_2F_1(a, b; c; x)$ ფუნქციად. ეს ფუნქცია განმარტების მიხედვით არის შემდეგი მწკრივი

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j j!} x^j,$$

სადაც $|x| < 1$ [2], [4], [22]. კერძოდ,

$$\mathcal{K}(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right).$$

\mathcal{K} ფუნქციის $0 < k, l < 1$ არგუმენტებს შორის ურთიერთკავშირს ეწოდება p რიგის მოდულარული განტოლება

$$\frac{{}_2F_1(1/2, 1/2; 1; 1 - k^2)}{{}_2F_1(1/2, 1/2; 1; k^2)} = p \frac{{}_2F_1(1/2, 1/2; 1; 1 - l^2)}{{}_2F_1(1/2, 1/2; 1; l^2)}, \quad (1.3)$$

რომელიც, დიდი ხნის განმავლობაში, სხვადასხვა მიდგომით შესწავლის ობიექტი იყო (იხ. [4], [8], [19]). აღსანიშნავია, რომ (1.3) გამოსახულებაში შედარებულია $Q_1(-1/k, -1, 1, 1/k)$ და $Q_1(-1/l, -1, 1, 1/l)$ ოთხკუთხედების კონფორმული მოდულები, რაც შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{\mathcal{K}'(k)}{\mathcal{K}(k)} = M(Q_1) = pM(Q_2) = p \frac{\mathcal{K}'(l)}{\mathcal{K}(l)}, \quad (1.4)$$

სადაც $\mathcal{K}'(x) = \mathcal{K}(\sqrt{1 - x^2})$. განზოგადებული მოდულარულ განტოლებას $1/a$ სიგნატურით და p ხარისხით ეწოდება

$$\frac{{}_2F_1(a, 1 - a; 1; 1 - k^2)}{{}_2F_1(a, 1 - a; 1; k^2)} = p \frac{{}_2F_1(a, 1 - a; 1; 1 - l^2)}{{}_2F_1(a, 1 - a; 1; l^2)}, \quad (1.5)$$

ტიპის განტოლებას, სადაც $a \in (0, 1)$ [8].

ვთქვათ Q არის ოთხკუთხედი და f მისი კანონიკური ასახვაა R მართკუთხედზე, რომლის გვერდების სიგრძეებია a და b . $J_f(z) = |f'|^2$ ფუნქცია ყველგან განსაზღვრულია Q არეში უსასრულობის გარდა. აქედან გამომდინარე, R მართკუთხედის ფართობის გამომთვლელი გამოსახულებაა

$$\iint_Q |f'(z)|^2 d\sigma = ab, \quad (1.6)$$

სადაც $d\sigma = d\sigma_z = dx dy$ და $z = x + iy$.

დავახასიათოთ Q ოთხკუთხედის $M(Q) = a/b$ მოდული მისი კანონიკური კონფორმული ასახვით. ამისთვის განვიხილოთ ვერტიკალური $C'_u = \{u - iv \mid 0 < v < b\}$ წირები R მართკუთხედში და მისი წინარე სახეები $f^{-1}(C'_u) = C_u$. რადგან კონფორმული ასახვის

დროს საზღვარი გადადის საზღვარში, C_u წირს აქვს საწყისი და ბოლო წერტილები Q ოთხკუთხედის a -გვერდებზე, ამიტომ ვიღებთ ტოლობას

$$\int_{C_u} |f'(z)||dz| = b. \quad (1.7)$$

განვიხილავთ ჟორდანის წირების \mathcal{C}_a ზოგადი კლასი, რომელიც მოიცავს C_u ტიპის წირებს და აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ყოველი $C \in \mathcal{C}_a$ წირი არის Q არეში და მისი საზღვრის წერტილები a -გვერდების მოპირდაპირე გვერდებზეა.
2. \mathcal{C}_a -ში შემავალი ყოველი წირი უბან-უბან გლუვია.

ამ პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $C \in \mathcal{C}_a$ წირისთვის სამართლიანია

$$\int_C |f'(z)||dz| \geq b \quad (1.8)$$

უტოლობა და ტოლობა მიიღწევა მხოლოდ C_u ტიპის წირებისთვის.

რადგან $M(Q) = ab/b^2$, (1.6) და (1.8) გამოსახულებებიდან ვიღებთ, რომ Q ოთხკუთხედის კონფორმული მოდული არის

$$M(Q) = \frac{\iint_Q |f'(z)|^2 d\sigma}{\left(\inf_{C \in \mathcal{C}_a} \int_C |f'(z)||dz| \right)^2} \quad (1.9)$$

გამოსახულება, სადაც f' , როგორც უკვე აღვნიშნეთ, არის Q -ს კანონიკური კონფორმული ასახვა.

ფორმულა (1.9)-ით გამოვსახეთ ოთხკუთხედის მოდული კონფორმული ასახვების გამოყენებით. მოდულის ამგვარ დახასიათებაში შეგვიძლია ჩავანაცვლოთ კანონიკური ასახვა უფრო ზოგადი ფუნქციათა კლასით [27, გვ. 21]. მართლაც, თუ \mathcal{P} არის ბორელის

აზრით ზომადი, არაუარყოფითი ρ ფუნქციების სიმრავლე, რომელიც განსაზღვრულია Q ოთხკუთხედში, მაშინ ოთხკუთხედის მოდული მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$M(Q) = \inf_{\rho \in \mathcal{P}} \frac{m_\rho(Q)}{\left(\inf_{C \in \mathcal{C}_a} l_\rho(Q) \right)^2}, \quad (1.10)$$

სადაც

$$m_\rho(Q) = \iint_Q \rho^2 d\sigma, \quad l_\rho(Q) = \int_C \rho |dz|.$$

ინფინუმი მიიღება, როდესაც $\rho = |f'|$, სადაც f არის Q -ს კანონიკური კონფორმული ასახვა.

სადისერტაციო ნაშრომში ჩვენ განვიხილავთ ოთხკუთხედებს, რომლის წვეროები შეერთებულია წრფეებით და ვაჩვენებთ, რომ მოდული მონოტონური და უწყვეტია (თეორემა 2.4), თუმცა ეს სამართლიანია ზოგადი ოთხკუთხედებისთვისაც [27, გვ. 25-26].

ვთქვათ G არის არე და w ორიენტაციის შემნახავი ჰომეომორფიზმია G -ზე. ოთხკუთხედი Q , რომლის ჩაკეტვა შედის G -ში, w -თი აისახება Q' ოთხკუთხედზე. მათი მოდულების თანაფარდობას $M(Q')/M(Q)$ ეწოდება Q -ს დილატაცია w ასახვის დროს, ხოლო

$$K(G) = \sup_{Q \subset G} \frac{M(Q')}{M(Q)}$$

რიცხვს ეწოდება w -ს მაქსიმალური დილატაცია G არეში [2], [27].

თუ w არის კონფორმული, მაშინ Q და Q' ოთხკუთხედები ერთ კონფორმულ კლასშია, შესაბამისად $K(G) = 1$. მეორეს მხრივ, მტკიცდება, რომ არა აუცილებლად კონფორმული და ორიენტაციის შემნახავი ჰომეომორფიზმისთვის $K(G)$ ყოველთვის 1-ზე მეტია. შესაბამისად, K შეგვიძლია გამოვიყენოთ როგორც საზომი, რომლითაც შეგვიძლია შევაფასოთ მიღებული ასახვა რამდენად განსხვავდება კონფორმულისგან მოცემულ არეზე.

აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ Q_1 და Q_2 ორი მართკუთხედი, რომელთა მოდულებია M_1

და M_2 , შესაბამისად, მათ შორის არსებობს K -კვაზიკონფორმული ასახვა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\frac{1}{K} \leq \frac{M_1}{M_2} \leq K.$$

კონფორმული მოდულის ამ თვისებიდან და უწყვეტობიდან გამომდინარეობს, რომ ასახვის მიახლოებით გამოთვლილი მოდული ფაქტობრივად არის კვაზიკონფორმული ასახვის ინვარიანტი.

ამასთან, გლუვ ფუნქციათა სივრცეში ანალიზური ასახვები არ არიან მდგრადი, იმ აზრით, რომ მათი მცირე დეფორმაციით ვერ ვრჩებით ანალიზურ ფუნქციათა კლასში. რაც შეეხება კვაზიკონფორმულ ასახვას, ის ზემოთ მოყვანილი განმარტებით მდგრადია და ამრიგად მისთვის კონფორმული ინვარიანტობის ცნება, როდესაც კონფორმული მოდული მიახლოებითაა გამოთვლილი, უფრო ბუნებრივია.

განსაზღვრება 1.1. ორიენტაციის შემნახავ w ჰომეომორფიზმს G არეზე ეწოდება კვაზიკონფორმული, თუ მისი $K(G)$ მაქსიმალური დილატაცია არის სასრული. ამასთან, თუ $K(G) \leq K < \infty$, მაშინ w -ს ეწოდება K -კვაზიკონფორმული.

ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ კონფორმული ასახვა არის 1 - კვაზიკონფორმული. K - კვაზიკონფორმული ასახვის შექცეული K - კვაზიკონფორმულია. კომპოზიცია K_1 - კვაზიკონფორმული და K_2 - კვაზიკონფორმული ასახვების არის $K_1 K_2$ - კვაზიკონფორმული.

თეორემა 1.2 ([27, გვ. 28]). 1-კვაზიკონფორმული ასახვა $G \rightarrow G'$ არის კონფორმული.

ქვემოთ მოყვანილი თეორემა 1.3 და თეორემა 1.4 საშუალებას იძლევიან დავასკვნათ, რომ ოთხკუთხედის კონფორმული მოდულის რიცხვითი მიახლოება კორექტულად განსაზღვრული მახასიათებელია ოთხკუთხედისთვის.

თეორემა 1.3 ([27, გვ. 25]). ვთქვათ $Q_n, n = 1, 2, \dots$, არის ოთხკუთხედების მიმდევრობა, რომლებსაც არ აქვთ საერთო შიდა წერტილები და ჩაკეტვა შედის Q ოთხკუთხედში. თუ ყველა Q_n -ის a -გვერდები შედის Q -ს a -გვერდებში, მაშინ

$$\sum_n M(Q_n) \leq M(Q).$$

თეორემა 1.4 ([27, გვ. 26]). თუ Q_n ოთხკუთხედების მიმდევრობა შიგნიდან კრებადია Q ოთხკუთხედისკენ, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(Q_n) = M(Q).$$

დირიხლე-ნეიმანის ამოცანა. ვთქვათ D არის არე კომპლექსურ სიბრტყეში და ∂D შედგება ჟორდანის წირების სასრული რაოდენობისგან, ისე, რომ ყოველ წვეროზე, გარდა უსასრულობის, განსაზღვრულია ნორმალი. ვთქვათ, $\partial D = A \cup B$, სადაც A, B ორივე არის ჟორდანის წირები და ψ_A, ψ_B არის ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციები A და B სიმრავლეებზე. დირიხლე-ნეიმანის ამოცანა მდგომარეობს ისეთი u ფუნქციის პოვნაში, რომ იგი აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

1. u იყოს უწყვეტი და დიფერენცირებადი \bar{D} -ზე;
2. $u(t) = \psi_A(t), t \in A$;
- 3.

$$\frac{\partial}{\partial n} u(t) = \psi_B(t), t \in B.$$

სადაც $\partial/\partial n$ აღნიშნავს დიფერენციალს გარე ნორმალის გასწვრივ.

ვთქვათ მოცემულია Q ოთხკუთხედი, წვეროებით $w_j, j = 1, 2, 3, 4$ და γ_j გვერდებით. თუ u ფუნქცია არის დირიხლე-ნეიმანის ამოცანის ჰარმონიული ამონახსნი, ისეთი, რომ

- $u(t) = 0$, როდესაც $t \in \gamma_2$;
- $u(t) = 1$, როდესაც $t \in \gamma_4$;
- $\partial u/\partial n = 0$, როდესაც $t \in \gamma_1 \cup \gamma_3$;

მაშინ Q ოთხკუთხედის კონფორმული მოდული მოიცემა შემდეგი სახით:

$$M(Q, w_1, w_2, w_3, w_4) = \int_Q |\nabla u|^2 dm,$$

სადაც ∇ არის ლაპლასის ოპერატორი.

1.2 რიცხვითი გამოთვლების ზოგიერთი საკვანძო საკითხის შესახებ

რიცხვითი მეთოდების კლასიფიკაცია. ოთხკუთხედის კონფორმული მოდულის რიცხვითი გამოთვლებისთვის არის ორი ბუნებრივი მიდგომა:

1. მეთოდები, რომლებიც ეფუძნება მოდულის განმარტებას და იყენებენ კონფორმულ ასახვას კანონიკურ მართკუთხედზე.
2. მეთოდები, რომლებიც კანონიკური ასახვის აგების გარეშე აკეთებენ მოდულის მიახლოებით გამოთვლას.

თუ ჩვენი მიზანია გამოვთვალოთ კონფორმული მოდული, მაშინ პირველი ტიპის მეთოდები გვამძლევს საკმარისზე მეტ ინფორმაციას. მეორე ტიპის მეთოდები ეყრდნობიან დირიხლე - ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნას.

სადისერტაციო ნაშრომში პირველი ტიპის მეთოდს ვიყენებთ. ვაგებთ კონფორმულ ასახვას და შემოგვაქვს მახასიათებელი, რომელიც კანონიკური ასახვისგან დამოუკიდებლად აფასებს ოთხკუთხედის გვერდების თანაფარდობას და კონფორმულ მოდულს.

კონფორმული ასახვების, რიცხვითი გამოთვლების ნებისმიერ მეთოდში გვხვდება ჩახვევის (Crowding) ფენომენი. ამ ტერმინით აღინიშნება მდგომარეობა, როდესაც კომპიუტერი აბრუნებს არასწორ რიცხვით მნიშვნელობას. იმისთვის, რომ ავხსნათ ამის გამომწვევი მიზეზები, საჭიროა განვიხილოთ თუ როგორ გამოისახება წილადი რიცხვები კომპიუტერში.

ვთქვათ $y \in \mathbb{R}$, მაშინ იგი გამოისახება შემდეგი ფორმით

$$y = \pm m \times \beta^{e-t},$$

სადაც β არის ბაზისი, t არის სიზუსტე, e არის ექსპონენტა, რომელიც მოთავსებულია რაიმე ინტერვალში $e_{\min} \leq e \leq e_{\max}$, და m არის მანტიისა (mantissa), რომელიც აკმაყოფილებს $0 \leq m \leq \beta^{t-1}$ უტოლობას. თანამედროვე კომპიუტერები იყენებენ ბინარულ სისტემას და აქვთ 64bit პროცესორები, ამიტომ IEEE სტანდარტის მიხედვით გვაქვს

$$\beta = 2, t = 53, e_{\min} = -1021 \text{ და } e_{\max} = 1024.$$

IEEE 754 ფორმატით წარმოდგენილი რიცხვი შეზღუდულია 16 ციფრით, რადგან ამ ფორმატის მიხედვით უმცირესი რიცხვი არის $\beta^{e_{\min}-1}$, რაც მიახლოებით არის 2×10^{-308} და ცდომილება შეადგენს $2^{-53} \approx 1.11 \times 10^{-16}$. მიუხედავად ამისა, IEEE 754 ფორმატი ყველაზე გავრცელებულია თანამედროვე, ციფრულ გამოთვლით სისტემებში, რადგან იგი კარგად განსაზღვრულია და თავსებადია სხვადასხვა პლატფორმასთან და არქიტექტურასთან.

IEEE სტანდარტის გარდა არსებობს სხვადასხვა მეთოდები, რომლებიც ზრდიან სიზუსტეს. ნაშრომში მუშაობის ფარგლებში გამოვეყნეთ ზოგადი სიზუსტის არითმეტიკის ბიბლიოთეკა (MpMath) და სიმბოლური არითმეტიკის ბიბლიოთეკა (SymPy). Mpmath იყენებს c-ზე დაწერილ GMP ბიბლიოთეკას ზოგადი სიზუსტის მიღებისთვის. ჩვენი კოდი აქტიურად იყენებს ამ ბიბლიოთეკას პროგრამული გამოთვლებისთვის. სიმბოლური გამოთვლების ბიბლიოთეკა გამოვიყენეთ პარაგრაფი 4.2-ში, მიღებული შედეგების შესამოწმებლად.

თავი II. კონფორმული მოდულის გამოთვლა

2.1 შვარც-კრისტოფელის ასახვა ოთხკუთხედისთვის

ქვედა ნახევარსიბრტყის კონფორმული ასახვა მრავალკუთხედის კონტურით შემოსაზღვრულ არეზე მიიღება SC გარდაქმნის გამოყენებით (იხ. [13], გვ.10, თეორემა 2.1 და [35], გვ.25, თეორემა 1.7.1). ჩვენ წარმოვადგენთ შვარც-კრისტოფელის თეორემას შემდეგი სახით.

თეორემა 2.1. ვთქვათ P არე შემოსაზღვრულია Γ მრავალკუთხედის კონტურით, რომლის წვეროები w_1, \dots, w_n ორიენტირებულია საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით კომპლექსურ სიბრტყეზე და მისი შიდა კუთხეებია $\pi\tau_1, \dots, \pi\tau_n$. ვთქვათ f არის ასახვა ქვედა ნახევარსიბრტყიდან P არეზე ისეთი, რომ $f(\infty) = w_n$. მაშინ f -ს აქვს სახე

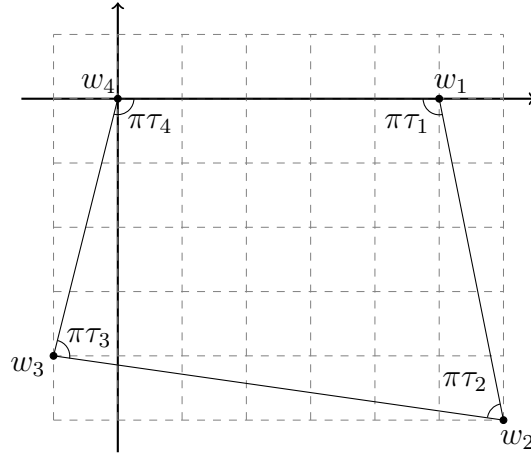
$$f(z) = \left(A + C \int_{-\infty}^{z_1} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_j} \right)^{\tau_j-1} d\zeta \right) + C \int_{z_1}^z \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_j} \right)^{\tau_j-1} d\zeta, \quad (2.1)$$

რაიმე მუდმივი კომპლექსური A და C რიცხვებისთვის, სადაც $w_k = f(z_k)$ და z_j რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას $1 = z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1} < z_n = +\infty$.

შენიშვნა 2.1. განვიხილოთ (2.1) გამოსახულების კერძო შემთხვევა, როდესაც $A = 0$, $C = 1$, $n = 4$ და დეტალურად გავანალიზოთ კონტურის აგება. ვთქვათ

$$g(z) = \int_{-\infty}^z \left(1 - \frac{\zeta}{z_1} \right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_2} \right)^{-\beta_2} \left(1 - \frac{\zeta}{z_3} \right)^{-\beta_3} d\zeta,$$

სადაც $\beta_j = 1 - \tau_j$ და $z \in \mathbb{R}$, მაშინ $\arg g'(z)$ აკეთებს ნახტომს ერთი მუდმივი მნიშვნელობიდან მეორეზე, z_1, z_2, z_3 წერტილებში, როდესაც z მოძრაობს დადებითი მიმართულებით ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე. ეს ნიშნავს, რომ



ნახ. 2.1: ოთხკუთხედი, თეორემა 2.2-დან

$$\arg \left(\left(1 - \frac{\zeta}{z_1}\right)^{-\beta_1} \left(1 - \frac{\zeta}{z_2}\right)^{-\beta_2} \left(1 - \frac{\zeta}{z_3}\right)^{-\beta_3} \right) = \begin{cases} 0, & \zeta < z_1, \\ -\pi\beta_1, & z_1 < \zeta < z_2, \\ -\pi(\beta_1 + \beta_2), & z_2 < \zeta < z_3, \\ -\pi(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3), & \zeta > z_3. \end{cases}$$

მარტივი საჩვენებელია, რომ

$$w_0 = g(-\infty) = 0, \quad w_1 = g(z_1) > 0, \quad w_1 - w_0 = l_1$$

და

$$w_2 - w_1 = e^{-\beta_1\pi i} l_2, \quad w_3 - w_2 = e^{-(\beta_1+\beta_2)\pi i} l_3, \quad w_4 - w_3 = e^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\pi i} l_4,$$

სადაც $l_j, j = 1, 2, 3, 4$, არის მრავალკუთხედის გვერდის სიგრძეები. რადგან კონტური შეკრულია, გვაქვს $w_4 = w_0$ ტოლობა.

წინადადება 2.1. თუ $z < 1, a, b > 0, c \in \mathbb{C}$ ან $z = 1, a > 0, b + c > 0$, მაშინ

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}(1-zu)^{c-1} du = B(a, b) {}_2F_1(a, 1-c; a+b; z). \quad (2.2)$$

დამტკიცება. ტოლობა (2.2) შეგვიძლია მივიღოთ ეილერის ინტეგრალური წარმოდგენის (Euler's integral representation) გამოყენებით (იხ. [4])

$$\begin{aligned} B(a, b) {}_2F_1(a, 1-c; a+b; z) &= B(a, (a+b) - a) {}_2F_1(1-c, a; a+b; z) \\ &= \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}(1-zu)^{c-1} du, \end{aligned}$$

სადაც $a + b > a > 0$. □

წინადადება 2.2. თუ $r > 0$ და $k = \sqrt{1/(1+r)}$, მაშინ

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} u^{a-1}(1+u)^{b-1}(1+ru)^{c-1} du \\ &= B(2-a-b-c, a) {}_2F_1(2-a-b-c, 1-c; 2-b-c; -r) \end{aligned} \quad (2.3)$$

და

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} u^{a-1}(1+u)^{b-1}(1+k^2u)^{c-1} du \\ &= B(2-a-b-c, a) {}_2F_1(a, 1-c; 2-b-c; 1-k^2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

სადაც $a + b + c < 2$, $a > 0$, $a + c > 0$, $c \in \mathbb{R}$.

დამტკიცება. ტოლობა (2.3)-ის დამტკიცებისთვის ვიყენებთ ცვლადთა გარდაქმნას $t = u + 1$ და ვიღებთ

$$\int_0^{+\infty} u^{a-1}(1+u)^{b-1}(1+ru)^{c-1} du = \int_1^{+\infty} t^{b-1}(t-1)^{a-1}(r+t)^{c-1} dt,$$

განმეორებით $t = 1/v$ ცვლადთა გარდაქმნა გვაძლევს ტოლობას

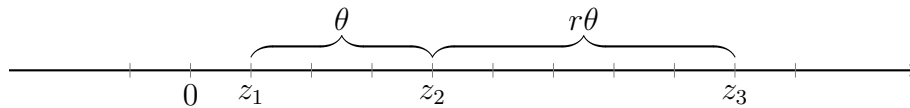
$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(\frac{1}{v}\right)^{b-1} \left(\frac{1}{v} - 1\right)^{a-1} \left(r + \frac{1}{v}\right)^{c-1} \frac{1}{v^2} dv \\
&= \int_0^1 v^{1-a-b-c} (1-v)^{a-1} (1+rv)^{c-1} dv \\
&= B(2-a-b-c, a) {}_2F_1(2-a-b-c, 1-c; 2-b-c; -r).
\end{aligned}$$

თუ (2.3) ტოლობის ორივე მხარეს $(1+r)^{1-c}$ გავამრავლებთ და გამოვიყენებთ პფაფის გარდაქმნას (იხ. [4]), მივიღებთ ტოლობას

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} u^{a-1} (1+u)^{b-1} \left(1 + \frac{u}{1+r}\right)^{c-1} du \\
&= B(2-a-b-c, a)(1+r)^{1-c} {}_2F_1(2-a-b-c, 1-c; 2-b-c; -r) \\
&= B(2-a-b-c, a) {}_2F_1\left(a, 1-c; 2-b-c; \frac{r}{1+r}\right).
\end{aligned}$$

ამით წინადადება 2.2 დამტკიცებულია. □

განვიხილოთ თეორემის 2.1-ის კერძო შემთხვევა. ვთქვათ Q არის ოთხკუთხედი, რომლის შიდა $\pi\tau_j$ კუთხეები გადანომრილია საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.



ნახ. 2.2: წინარე წვეროები

ვთქვათ

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1 + \theta, \quad z_3 = 1 + \theta + r\theta,$$

სადაც $\theta, r > 0$ არის Q ოთხკუთხედის წინარე წვეროების პარამეტრიზაცია, მაშინ შვარც-კრისტოფელის გარდაქმნა მოიცემა შემდეგი სახით:

$$f(z) = A + C \left(\int_{-\infty}^1 + \int_1^z \right) (1 - \zeta)^{\tau_1 - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{1 + \theta} \right)^{\tau_2 - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{1 + \theta + r\theta} \right)^{\tau_3 - 1} d\zeta, \quad (2.5)$$

სადაც $A, C \in \mathbb{C}$.

ქვემოთ ყველგან, თუ საწინააღმდეგო არ არის თქმული, იგულისხმება, რომ ოთხკუთხედის გვერდებს არ აქვთ თვითგადაკვეთა.

თეორემა 2.2. ვთქვათ Q ოთხკუთხედი ორიენტირებულია საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, მისი მეოთხე წვერო სათავეშია და პირველი მდებარეობს ნამდვილი ღერძის დადებით მხარეს (ნახ. 2.1). თუ Q -ს შიდა კუთხეებია $\pi\tau_1, \pi\tau_2, \pi\tau_3$ და $\pi\tau_4$, მაშინ g ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია

$$g(x) = \int_{-\infty}^x (1 - \zeta)^{\tau_1 - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{1 + \theta} \right)^{\tau_2 - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{1 + \theta + r\theta} \right)^{\tau_3 - 1} d\zeta$$

განსაზღვრავს

$$cg : \mathbb{R} \rightarrow \partial Q$$

სადაც c არის დადებითი ნამდვილი რიცხვი. ამასთან, ამ ოთხკუთხედის გვერდის სიგრძეები cl_1, cl_2, cl_3 და cl_4 გამოისახებიან შემდეგნაირად

$$\begin{aligned} l_1 &= s(r, \theta) B(\tau_4, \tau_1) {}_2F_1(\tau_4, 1 - \tau_3; \tau_4 + \tau_1; -r), \\ l_2 &= r^{\tau_3 - 1} s(r, \theta) B(\tau_1, \tau_2) {}_2F_1\left(\tau_2, 1 - \tau_3; \tau_1 + \tau_2; -\frac{1}{r}\right), \\ l_3 &= r^{\tau_2 + \tau_3 - 1} s(r, \theta) B(\tau_2, \tau_3) {}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -r), \\ l_4 &= r^{-\tau_4} s(r, \theta) B(\tau_3, \tau_4) {}_2F_1\left(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -\frac{1}{r}\right), \end{aligned}$$

სადაც

$$s(r, \theta) = \theta^{-\tau_4} (1 + \theta)^{1 - \tau_2} (1 + \theta + r\theta)^{1 - \tau_3}$$

და მეზობელი გვერდების შეფარდება არ არის დამოკიდებული θ პარამეტრზე.

დამტკიცება. ფუნქცია (2.5) ასახავს ნამდვილ რიცხვთა ღერძს ოთხკუთხედის საზღვარში, ამიტომ (2.5) ფუნქციის განსაზღვრის არეა \mathbb{R} . ცვლადთა $\zeta = 1 + u\theta$ გარდაქმნით ვიღებთ

$$\begin{aligned}
 l_2 &= |g(1 + \theta) - g(1)| \\
 &= \left| \int_1^{1+\theta} (1 - \zeta)^{\tau_1-1} \left(1 - \frac{\zeta}{1 + \theta}\right)^{\tau_2-1} \left(1 - \frac{\zeta}{1 + \theta + r\theta}\right)^{\tau_3-1} d\zeta \right| \\
 &= \int_1^{1+\theta} (\zeta - 1)^{\tau_1-1} \left(1 - \frac{\zeta}{1 + \theta}\right)^{\tau_2-1} \left(1 - \frac{\zeta}{1 + \theta + r\theta}\right)^{\tau_3-1} d\zeta du \\
 &= \frac{(1 + r)^{\tau_3-1} \theta^{-\tau_4}}{(1 + \theta)^{\tau_2-1} (1 + \theta + r\theta)^{\tau_3-1}} \int_0^1 u^{\tau_1-1} (1 - u)^{\tau_2-1} \left(1 - \frac{u}{1 + r}\right)^{\tau_3-1} du.
 \end{aligned}$$

l_3 და l_4 გამოსახულებებისთვის ვიყენებთ შემდეგ ცვლადთა გარდაქმნას $\zeta = 1 + \theta + ur\theta$ და $\zeta = 1 + \theta + vr\theta$:

$$\begin{aligned}
 l_3 &= |g(1 + \theta + r\theta) - g(1 + \theta)| \\
 &= \int_{1+\theta}^{1+\theta+r\theta} (\zeta - 1)^{\tau_1-1} \left(\frac{\zeta}{1 + \theta} - 1\right)^{\tau_2-1} \left(1 - \frac{\zeta}{1 + \theta + r\theta}\right)^{\tau_3-1} d\zeta \\
 &= \frac{r^{\tau_2+\tau_3-1} \theta^{-\tau_4}}{(1 + \theta)^{\tau_2-1} (1 + \theta + r\theta)^{\tau_3-1}} \int_0^1 u^{\tau_2-1} (1 - u)^{\tau_3-1} (1 + ru)^{\tau_1-1} du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_4 &= |g(+\infty) - g(1 + \theta + r\theta)| \\
 &= \int_{1+\theta+r\theta}^{+\infty} (\zeta - 1)^{\tau_1-1} \left(\frac{\zeta}{1 + \theta} - 1\right)^{\tau_2-1} \left(\frac{\zeta}{1 + \theta + r\theta} - 1\right)^{\tau_3-1} d\zeta \\
 &= \frac{r^{\tau_2+\tau_3-1} \theta^{-\tau_4}}{(1 + \theta)^{\tau_2-1} (1 + \theta + r\theta)^{\tau_3-1}} \int_1^{+\infty} v^{\tau_2-1} (v - 1)^{\tau_3-1} (1 + vr)^{\tau_1-1} dv \\
 &= \frac{r^{-\tau_4} \theta^{-\tau_4}}{(1 + \theta)^{\tau_2-1} (1 + \theta + r\theta)^{\tau_3-1}} \int_0^1 u^{\tau_4-1} (1 - u)^{\tau_3-1} \left(1 + \frac{u}{r}\right)^{\tau_1-1} du.
 \end{aligned}$$

(2.2) ტოლობის გამოყენება გვაძლევს

$$\begin{aligned}
l_2 &= (1+r)^{\tau_3-1} s(r, \theta) B(\tau_1, \tau_2)_2 F_1 \left(\tau_1, 1-\tau_3; \tau_1+\tau_2; \frac{1}{1+r} \right), \\
l_3 &= r^{\tau_2+\tau_3-1} s(r, \theta) B(\tau_2, \tau_3)_2 F_1 (\tau_2, 1-\tau_1; \tau_2+\tau_3; -r), \\
l_4 &= r^{-\tau_4} s(r, \theta) B(\tau_3, \tau_4)_2 F_1 \left(\tau_4, 1-\tau_1; \tau_3+\tau_4; -\frac{1}{r} \right),
\end{aligned}$$

ტოლობებს. თუ პფაფის გარდაქმნას გამოვიყენებთ l_2 -სთვის, მივიღებთ

$$l_2 = r^{\tau_3-1} c B(\tau_1, \tau_2)_2 F_1 \left(\tau_2, 1-\tau_3; \tau_1+\tau_2; -\frac{1}{r} \right).$$

l_1 -ისთვის ვიყენებთ ფორმულა (2.3)-ს და ცვლადთა გარდაქმნას $t = 1 - \zeta$:

$$\begin{aligned}
l_1 &= \int_{-\infty}^1 (1-\zeta)^{\tau_1-1} \left(1 - \frac{\zeta}{1+\theta}\right)^{\tau_2-1} \left(1 - \frac{\zeta}{1+\theta+r\theta}\right)^{\tau_3-1} d\zeta \\
&= \int_0^{\infty} t^{\tau_1-1} \left(1 - \frac{1-t}{1+\theta}\right)^{\tau_2-1} \left(1 - \frac{1-t}{1+\theta+r\theta}\right)^{\tau_3-1} dt \\
&= \frac{\theta^{(\tau_1-1)+(\tau_2-1)+(\tau_3-1)}}{(1+\theta)^{\tau_2-1} (1+\theta+r\theta)^{\tau_3-1}} \times \\
&\times \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\tau_1-1} \left(1 + \frac{t}{\theta}\right)^{\tau_2-1} \left(1+r + \frac{t}{\theta}\right)^{\tau_3-1} dt.
\end{aligned}$$

ამის შემდეგ $t = \theta v$ და $w = 1/u$ გარდაქმნებით ვიღებთ

$$\begin{aligned}
&\frac{\theta^{(\tau_1-1)+(\tau_2-1)+(\tau_3-1)+1}}{(1+\theta)^{\tau_2-1} (1+\theta+r\theta)^{\tau_3-1}} \int_0^{\infty} v^{\tau_1-1} (1+v)^{\tau_2-1} (1+r+v)^{\tau_3-1} dv \\
&= \frac{\theta^{-\tau_4}}{(1+\theta)^{\tau_2-1} (1+\theta+r\theta)^{\tau_3-1}} \int_1^{\infty} w^{\tau_2-1} (w-1)^{\tau_1-1} (r+w)^{\tau_3-1} dw \\
&= \frac{\theta^{-\tau_4}}{(1+\theta)^{\tau_2-1} (1+\theta+r\theta)^{\tau_3-1}} \int_0^1 u^{\tau_4-1} (1-u)^{\tau_1-1} (1+ru)^{\tau_3-1} du.
\end{aligned}$$

მეზობელი გვერდების შეფარდების θ პარამეტრზე დამოუკიდებლობა გამომდინარეობს შემდეგი გამოსახულებებიდან

$$\begin{aligned}\frac{l_1}{l_2} &= r^{1-\tau_3} \frac{B(\tau_4, \tau_1)}{B(\tau_1, \tau_2)} \frac{{}_2F_1(\tau_4, 1 - \tau_3; \tau_4 + \tau_1; -r)}{{}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_3; \tau_1 + \tau_2; -1/r)}, \\ \frac{l_2}{l_3} &= r^{-\tau_2} \frac{B(\tau_1, \tau_2)}{B(\tau_2, \tau_3)} \frac{{}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_3; \tau_1 + \tau_2; -1/r)}{{}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -r)}, \\ \frac{l_3}{l_4} &= r^{1-\tau_1} \frac{B(\tau_2, \tau_3)}{B(\tau_3, \tau_4)} \frac{{}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -r)}{{}_2F_1(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -1/r)}, \\ \frac{l_4}{l_1} &= r^{-\tau_4} \frac{B(\tau_3, \tau_4)}{B(\tau_4, \tau_1)} \frac{{}_2F_1(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -1/r)}{{}_2F_1(\tau_4, 1 - \tau_3; \tau_4 + \tau_1; -r)}.\end{aligned}$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

განსაზღვრება 2.1. თუ Q ოთხკუთხედის წინარე წვეროები არის $1 = z_1 < z_2 < z_3$, მაშინ Q -ს r -ინვარიანტს ვუწოდებთ $(z_3 - z_2)/(z_2 - z_1)$ ფარდობას.

2.2 ოთხკუთხედის მოდული

ამ პარაგრაფში შემოვიტანთ განზოგადებული მოდულის ცნებას, რომელიც არის წრფე-ებით შეერთებული ოთხკუთხედის ბუნებრივი ინვარიანტი. ვაჩვენებთ, რომ ამ ინვარიანტსა და კონფორმულ მოდულს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა, აგრეთვე ვაჩვენებთ განზოგადებული მოდულის კავშირს მოდულარულ განტოლებასთან.

განსაზღვრება 2.2. $x > 0$ ცვლადისთვის $\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ ფუნქციას, განსაზღვრულს

$$\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{x^{1-\tau_1} B(\tau_2, \tau_3)}{B(\tau_3, 2 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3))} \frac{{}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -x)}{{}_2F_1(\tau_4, 1 - \tau_1; 2 - \tau_1 - \tau_2; -1/x)} \quad (2.6)$$

ტოლობით, ეწოდება განზოგადებული მოდული, სადაც $\tau_1, \tau_2, \tau_3 > 0$ და $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 < 2$ ნებისმიერი ნამდვილი პარამეტრებია.

თეორემა 2.3. ვთქვათ Q ოთხკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია l_j და შიდა კუთხეებია $\pi\tau_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. მაშინ

$$\begin{aligned}\varphi(r; \tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \frac{l_3}{l_4}, & \varphi\left(\frac{1}{r}; \tau_2, \tau_3, \tau_4\right) &= \frac{l_4}{l_1}, \\ \varphi(r; \tau_3, \tau_4, \tau_1) &= \frac{l_1}{l_2}, & \varphi\left(\frac{1}{r}; \tau_4, \tau_1, \tau_2\right) &= \frac{l_2}{l_3},\end{aligned}$$

სადაც r არის Q -ს r -ინვარიანტი.

დამტკიცება. ამ თეორემის ბოლო ტოლობას დავამტკიცებთ, ხოლო დანარჩენი მიიღება ანალოგიური გზით. ეილერის გარდაქმნის გამოყენებით გვაქვს ტოლობები

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{r}; \tau_4, \tau_1, \tau_2\right) &= r^{\tau_4-1} \frac{B(\tau_1, \tau_2)}{B(\tau_2, \tau_3)} \frac{{}_2F_1(\tau_1, 1 - \tau_4; \tau_1 + \tau_2; -1/r)}{{}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_4; \tau_2 + \tau_3; -r)} \\ &= r^{\tau_4-1} \frac{B(\tau_1, \tau_2)}{B(\tau_2, \tau_3)} \frac{(1 + 1/r)^{\tau_2 + \tau_4 - 1} {}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_3; \tau_1 + \tau_2; -1/r)}{(1 + r)^{\tau_2 + \tau_4 - 1} {}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -r)} \\ &= r^{-\tau_2} \frac{B(\tau_1, \tau_2)}{B(\tau_2, \tau_3)} \frac{{}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_3; \tau_1 + \tau_2; -1/r)}{{}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -r)} = \frac{l_2}{l_3},\end{aligned}$$

რაც ამტკიცებს თეორემას. □

შედეგი 2.1. განზოგადებული მოდულისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) \varphi\left(\frac{1}{x}; \tau_2, \tau_3, \tau_4\right) \varphi(x; \tau_3, \tau_4, \tau_1) \varphi\left(\frac{1}{x}; \tau_4, \tau_1, \tau_2\right) = 1, \quad (2.7)$$

$$\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{\varphi(1/x; \tau_2, \tau_3, \tau_4)} \frac{\sin(\pi\tau_1)}{\sin(\pi\tau_2)} + \frac{\sin(\pi(\tau_2 + \tau_3))}{\sin(\pi\tau_2)}, \quad (2.8)$$

$$\varphi(x; \tau_3, \tau_4, \tau_1) = \frac{\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) \sin(\pi\tau_2) - \sin(\pi(\tau_2 + \tau_3))}{\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) \sin(\pi(\tau_1 + \tau_2)) + \sin(\pi\tau_4)}, \quad (2.9)$$

სადაც $\tau_4 = 2 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$.

დამტკიცება. თეორემა 2.3-დან გამომდინარეობს, რომ φ მოდულის მნიშვნელობები შეესაბამება ოთხკუთხედის გვერდების შეფარდებებს. ვთქვათ Q არის ამოზნექილი ოთხკუთხედი, რომლის გვერდებია $c, b, a, 1$ და შიდა კუთხეებია $\pi\tau_j, j = 1, 2, 3, 4$. მაშინ მარცხენა მხარე (2.7) ტოლობაში არის $(l_3/l_4)(l_4/l_1)(l_1/l_2)(l_2/l_3)$ გამოსახულება. ე.ი.

$$\frac{l_3 l_4 l_1 l_2}{l_4 l_1 l_2 l_3} = 1.$$

ტოლობა (2.8)-ის დამტკიცებისთვის შემოვიტანოთ აღნიშვნები

$$\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = a \quad \text{და} \quad \varphi\left(\frac{1}{x}; \tau_4, \tau_1, \tau_2\right) = \frac{b}{a},$$

სადაც x არის Q -ის r -ინვარიანტი. ვთქვათ d არის $\pi\tau_1$ კუთხის მოპირდაპირე დიაგონალი და α არის კუთხე 1-სა და მოცემულ დიაგონალს შორის. დავწეროთ სინუსების თეორემა 1, d, a სამკუთხედისათვის

$$\frac{d}{\sin(\pi\tau_3)} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin(\pi\tau_3 + \alpha)}.$$

ამ ტოლობებიდან ვიღებთ

$$\sin \alpha = \frac{a \sin(\pi\tau_3)}{d} \quad \text{და} \quad \cos \alpha = \frac{1 - a \cos(\pi\tau_3)}{d}.$$

b -ს წარმოსადგენად, მეორე სამკუთხედისთვის, გამოვიყენოთ სინუსების თეორემა

$$\begin{aligned} b &= \frac{d}{\sin(\pi\tau_1)} \sin(\pi\tau_4 - \alpha) \\ &= \frac{d}{\sin(\pi\tau_1)} (\sin \pi\tau_4 \cos \alpha - \cos \pi\tau_4 \sin \alpha) \\ &= \frac{d}{\sin(\pi\tau_1)} \left(\sin \pi\tau_4 \frac{1 - a \cos(\pi\tau_3)}{d} - \cos \pi\tau_4 \frac{a \sin(\pi\tau_3)}{d} \right) \\ &= \frac{\sin \pi\tau_4 - a \sin \pi(\tau_3 + \tau_4)}{\sin(\pi\tau_1)} = \frac{\sin \pi\tau_4 + a \sin \pi(\tau_1 + \tau_2)}{\sin(\pi\tau_1)}. \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე ვიღებთ, რომ

$$\varphi\left(\frac{1}{x}; \tau_4, \tau_1, \tau_2\right) = \frac{1}{\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3)} \frac{\sin(\pi\tau_4)}{\sin(\pi\tau_1)} + \frac{\sin(\pi(\tau_1 + \tau_2))}{\sin(\pi\tau_1)}. \quad (*)$$

მსგავსი მსჯელობა სამართლიანია ჩაზნექილი ოთხკუთხედისთვის. (*) ტოლობა გამოსახავს დამოკიდებულებას φ განზოგადებული მოდულის, როგორც x ცვლადი ფუნქციის დამოკიდებულებას პარამეტრების ცვლილებაზე. ტოლობა (2.9) პირდაპირ გამომდინარეობს (2.8)-დან. ამით შედეგი 2.1 დამტკიცებულია. \square

წინადადება 2.3. განზოგადებული მოდულისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{B(\tau_2, \tau_3) {}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; x/(1+x))}{B(\tau_3, \tau_4) {}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; 1/(1+x))}, \quad (2.10)$$

სადაც $\tau_4 = 2 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$.

დამტკიცება. განზოგადებული მოდულის განმარტების თანახმად გვაქვს ტოლობა

$$\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = x^{1-\tau_1} \frac{B(\tau_2, \tau_3) {}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -x)}{B(\tau_3, \tau_4) {}_2F_1(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -1/x)}.$$

უკანასკნელი გამოსახულების მრიცხველსა და მნიშვნელში მდგომი ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციებისთვის გამოვიყენოთ პფაფის გარდაქმნა. მივიღებთ

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -x) &= {}_2F_1(1 - \tau_1, \tau_2; \tau_2 + \tau_3; -x) \\ &= (1+x)^{\tau_1-1} {}_2F_1(1 - \tau_1, \tau_3; \tau_2 + \tau_3; x/(1+x)) \quad (*) \\ &= (1+x)^{\tau_1-1} {}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; x/(1+x)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -1/x) &= {}_2F_1(1 - \tau_1, \tau_4; \tau_3 + \tau_4; -1/x) \\ &= (1+1/x)^{\tau_1-1} {}_2F_1(1 - \tau_1, \tau_3; \tau_3 + \tau_4; 1/(1+x)) \quad (**) \\ &= (1+1/x)^{\tau_1-1} {}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; 1/(1+x)), \end{aligned}$$

(*) და (**) ტოლობებიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$\frac{{}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -x)}{{}_2F_1(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -1/x)} = x^{\tau_1-1} \frac{{}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; x/(1+x))}{{}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; 1/(1+x))},$$

რომელიც გვაძლევს (2.10) ტოლობას. ამით წინადადება 2.3 დამტკიცებულია. \square

თეორემა 2.4. φ განზოგადებული მოდული არის მკაცრად ზრდადი, როდესაც $\tau_1 < 1$ და მკაცრად კლებადი, როდესაც $\tau_1 > 1$.

დამტკიცება. (2.10) ტოლობის მრიცხველში და მნიშვნელში გვაქვს შემდეგი ფუნქციები

$${}_2F_1\left(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; \frac{x}{1+x}\right) \quad \text{და} \quad {}_2F_1\left(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; \frac{1}{1+x}\right).$$

(2.2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ მრიცხველი არის ზრდადი, ხოლო მნიშვნე-
ლი კი კლებადი, როდესაც $\tau_1 < 1$. ანალოგიური მსჯელობით ვიღებთ, რომ მრიცხვე-
ლი კლებადია და მნიშვნელი ზრდადი, როდესაც $\tau_1 > 1$. ამით თეორემა დამტკიცებუ-
ლია. \square

შედეგი 2.2. ვთქვათ $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 1/2$, მაშინ

$$\varphi \left(x; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{\mathcal{K}' \left(\sqrt{1/(1+x)} \right)}{\mathcal{K} \left(\sqrt{1/(1+x)} \right)}, \quad (2.11)$$

სადაც $\mathcal{K}(x)$ არის სრული ელიფსური ინტეგრალი და $\mathcal{K}'(x) = \mathcal{K}(\sqrt{1-x^2})$.

დამტკიცება. (2.11) ტოლობის დამტკიცებისთვის ვიყენებთ პფაფის გარდაქმნას და შემ-
დეგ ქვემოთ მოყვანილ ტოლობებს

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{1+x} \right) &= \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1/2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{x} \right), \\ \mathcal{K} \left(\sqrt{\frac{1}{1+x}} \right) &= \frac{\pi}{2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{1+x} \right) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1/2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{x} \right), \\ \mathcal{K}' \left(\sqrt{\frac{1}{1+x}} \right) &= \mathcal{K} \left(\sqrt{\frac{x}{1+x}} \right) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{x}{1+x} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{1+1/x} \right) = \frac{\pi}{2} (1+x)^{1/2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -x \right). \end{aligned}$$

ამრიგად მივიღეთ ტოლობა

$$\frac{\mathcal{K}' \left(\sqrt{1/(1+x)} \right)}{\mathcal{K} \left(\sqrt{1/(1+x)} \right)} = \sqrt{x} \frac{{}_2F_1(1/2, 1/2; 1; -x)}{{}_2F_1(1/2, 1/2; 1; -1/x)}.$$

ამით შედეგი 2.2 დამტკიცებულია. \square

შენიშვნა 2.2. r -ინვარიანტის მქონე Q ოთხკუთხედის $M(Q)$ კონფორმული მოდული
ელიფსური ინტეგრალის საშუალებით გამოისახება შემდეგნაირად

$$M(Q) = \frac{\mathcal{K}'\left(\sqrt{1/(1+r)}\right)}{\mathcal{K}\left(\sqrt{1/(1+r)}\right)}. \quad (2.12)$$

შედეგი 2.3. არსებობს გაფართოებული სიბრტყის თავის თავში ისეთი კონფორმული ასახვა, რომ $(1, a, b, \infty)$ ოთხეული გადავა $(-1/k, -1, 1, 1/k)$ ოთხეულში, სადაც

$$k = \frac{\sqrt{b-1} - \sqrt{a-1}}{\sqrt{b-1} + \sqrt{a-1}}$$

და $1 < a < b < \infty$ ნამდვილი რიცხვებია.

დამტკიცება. $(-1/k, -1, 1, 1/k)$ ოთხეული შვარც-კრისტოფელის

$$f(z) = \int_0^z \left(\zeta + \frac{1}{k}\right)^{-1/2} (\zeta + 1)^{-1/2} (\zeta - 1)^{-1/2} \left(\zeta - \frac{1}{k}\right)^{-1/2} d\zeta$$

ასახვით ისახება Q' ოთხკუთხედზე, რომლის კონფორმული მოდული არის

$$M(Q') = \frac{2\mathcal{K}(k)}{\mathcal{K}'(k)}.$$

კარგად ცნობილია შემდეგი ტოლობები

$$\mathcal{K}(x) = \frac{1}{1+x} \mathcal{K}'\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad \text{და} \quad \mathcal{K}'(x) = \frac{2}{1+x} \mathcal{K}\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

მათი შეფარდებით ვიღებთ ტოლობას

$$\frac{\mathcal{K}'(x)}{\mathcal{K}(x)} = \frac{2\mathcal{K}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{\mathcal{K}'\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}. \quad (2.13)$$

განსაზღვრება 2.1-დან გამომდინარე $(1, a, b, \infty)$ ოთხეულის შესაბამისი Q ოთხკუთხედის r -ინვარიანტი არის $(b-a)/(a-1)$. (2.13) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ Q -ს კონფორმული მოდული აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას

$$M(Q) = \frac{\mathcal{K}'\left(\sqrt{1/(1+r)}\right)}{\mathcal{K}\left(\sqrt{1/(1+r)}\right)} = \frac{2\mathcal{K}\left(\frac{\sqrt{1+r}-1}{\sqrt{1+r}+1}\right)}{\mathcal{K}'\left(\frac{\sqrt{1+r}-1}{\sqrt{1+r}+1}\right)},$$

სადაც $r = (b-a)/(a-1)$. რადგან Q და Q' ერთ კონფორმულ კლასშია, მათი კონფორმული მოდულები ტოლია $M(Q) = M(Q')$ და $k = (\sqrt{1+r}-1)/(\sqrt{1+r}+1)$.

ამით შედეგი დამტკიცებულია. □

წინადადება 2.4. თუ $a, b > 0, x \geq 0$, მაშინ

$$(1+x)^{c-1} \leq {}_2F_1(a, 1-c; a+b; -x) \leq 1,$$

სადაც $c \leq 1$.

დამტკიცება. თუ $a, b > 0, x \geq 0$ და $c \leq 1$, მაშინ

$$(1+x)^{c-1} \leq (1+xu)^{c-1} \leq 1, \quad u \in [0, 1].$$

გამოსახულება (2.2)-დან გამომდინარეობს, რომ

$${}_2F_1(a, 1-c; a+b; -x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}(1+xu)^{c-1} du,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობები

$$(1+x)^{c-1} = \frac{(1+x)^{c-1}}{B(a, b)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1} du \leq$$

$${}_2F_1(a, 1-c; a+b; -x) \leq \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1} du = 1.$$

ამით წინადადება დამტკიცებულია. □

წინადადება 2.5. თუ $\tau_1 \leq 1$, მაშინ

$$\left(\frac{x}{1+x}\right)^{1-\tau_1} \frac{B(\tau_2, \tau_3)}{B(\tau_3, \tau_4)} \leq \varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) \leq (1+x)^{1-\tau_1} \frac{B(\tau_2, \tau_3)}{B(\tau_3, \tau_4)}, \quad (2.14)$$

სადაც $\tau_4 = 2 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$.

დამტკიცება. (2.2) გამოსახულებიდან გვაქვს ტოლობები:

$${}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -x) = \frac{1}{B(\tau_2, \tau_3)} \int_0^1 u^{\tau_2-1} (1-u)^{\tau_3-1} (1+xu)^{\tau_1-1} du,$$

$$x^{\tau_1-1} {}_2F_1\left(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{B(\tau_3, \tau_4)} \int_0^1 u^{\tau_4-1} (1-u)^{\tau_3-1} (x+u)^{\tau_1-1} du.$$

ზემოთ მოყვანილი ორივე ფუნქცია არის დადებითი და მონოტონური $(0, +\infty)$ ინტერვალზე. მეორეს მხრივ, წინადადება 2.4-დან გვაქვს უტოლობები

$$(1+x)^{\tau_1-1} \leq {}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -x) \leq 1$$

და

$$(1+x)^{\tau_1-1} \leq x^{\tau_1-1} {}_2F_1\left(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -\frac{1}{x}\right) \leq x^{\tau_1-1}.$$

ამრიგად,

$$\left(\frac{x}{1+x}\right)^{1-\tau_1} \leq \frac{x^{1-\tau_1} {}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -x)}{{}_2F_1(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -1/x)} \leq (1+x)^{1-\tau_1}.$$

წინადადება 2.5 დამტკიცებულია. □

თეორემა 2.5. φ განზოგადებული მოდულის ასიმპტოტები არის

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \begin{cases} \frac{\sin((\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)\pi)}{\sin((\tau_1 + \tau_2)\pi)}, & \tau_1 + \tau_2 > 1, \\ +\infty, & \tau_1 + \tau_2 \leq 1, \end{cases}$$

და

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \begin{cases} \frac{\sin((\tau_2 + \tau_3)\pi)}{\sin(\tau_2\pi)}, & \tau_2 + \tau_3 < 1, \\ 0, & \tau_2 + \tau_3 \geq 1. \end{cases}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია

$${}_2F_1(a, 1 - c; a + b; z) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 u^{a-1} (1 - u)^{b-1} (1 - zu)^{c-1} du$$

სადაც $a, b, c > 0$ და $a + b + c < 2$. განვიხილოთ ეს ფუნქცია $z = 0$ და $z = 1$ შემთხვევებისთვის

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, 1 - c; a + b; 0) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 u^{a-1} (1 - u)^{b-1} du = 1, \\ {}_2F_1(a, 1 - c; a + b; 1) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 u^{a-1} (1 - u)^{(b+c-1)-1} du \\ &= \begin{cases} \frac{B(a, b + c - 1)}{B(a, b)}, & b + c > 1, \\ 0, & b + c \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(2.10) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{B(\tau_2, \tau_3) {}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; 1-)}{B(\tau_3, \tau_4) {}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; 0+)} \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{B(\tau_2, \tau_3) {}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; 0+)}{B(\tau_3, \tau_4) {}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; 1-)} \quad (**)$$

თუ $\tau_1 + \tau_2 > 1$, მაშინ (*) ტოლობიდან ვიღებთ

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \frac{B(\tau_2, \tau_3)}{B(\tau_3, \tau_4)} \frac{B(\tau_3, \tau_2 + \tau_1 - 1)}{B(\tau_3, \tau_2)} = \frac{B(\tau_3, \tau_2 + \tau_1 - 1)}{B(\tau_3, 2 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)} \\
&= \frac{\Gamma(\tau_3) \Gamma(\tau_2 + \tau_1 - 1) \Gamma(\tau_3 + 2 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)}{\Gamma(\tau_3 + \tau_2 + \tau_1 - 1) \Gamma(\tau_3) \Gamma(2 - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3)} \\
&= \frac{\Gamma((\tau_2 + \tau_1) - 1) \Gamma(2 - (\tau_1 + \tau_2))}{\Gamma((\tau_3 + \tau_2 + \tau_1) - 1) \Gamma(2 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3))} \\
&= \frac{-\pi \sin \pi(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)}{\sin \pi(\tau_2 + \tau_1) \pi} \\
&= \frac{\sin \pi(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)}{\sin \pi(\tau_1 + \tau_2)}.
\end{aligned}$$

მსგავსი გარდაქმნებით მიიღება, რომ როდესაც $\tau_2 + \tau_3 < 1$, მაშინ (***) იღებს შემდეგ სახეს

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \frac{B(\tau_2, \tau_3)}{B(\tau_3, \tau_4)} \frac{1}{{}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; 1 -)} \\
&= \frac{B(\tau_2, \tau_3)}{B(\tau_3, \tau_4)} \frac{B(\tau_3, \tau_4)}{B(\tau_3, \tau_4 + \tau_1 - 1)} \\
&= \frac{\Gamma(\tau_2) \Gamma(\tau_3) \Gamma(\tau_3 + \tau_4 + \tau_1 - 1)}{\Gamma(\tau_2 + \tau_3) \Gamma(\tau_3) \Gamma(\tau_4 + \tau_1 - 1)} \\
&= \frac{\Gamma(\tau_2) \Gamma(1 - \tau_2)}{\Gamma(\tau_2 + \tau_3) \Gamma(1 - (\tau_2 + \tau_3))} \\
&= \frac{\pi \sin \pi(\tau_2 + \tau_3)}{\sin \pi \tau_2 \pi} = \frac{\sin \pi(\tau_2 + \tau_3)}{\sin \pi \tau_2}.
\end{aligned}$$

ამით თეორემა სრულადაა დამტკიცებული. □

2.3 განზოგადებული მოდულის წარმოდგენა ხარისხოვან მწკრივად

ამ პარაგრაფში ავაგებთ $\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ განზოგადებული მოდულის ხარისხოვან მწკრივს $x = 1$ წერტილის მიდამოში. ფორმალური ხარისხოვანი მწკრივი, როგორც ცნობილია, არის უსასრულო ჯამი

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

კრებადობის პირობის გარეშე.

ლემა 2.1.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

ფორმალური ხარისხოვანი მწკრივის შებრუნებულია

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots,$$

სადაც მწკრივის $b_j, j = 0, 1, \dots$ კოეფიციენტები მოიცემა რეკურსიული თანადობით

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_n = -b_0 \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}.$$

დამტკიცება. ლემის პირობაში შებრუნებული ნიშნავს შებრუნებულს წერტილობრივი გამოთვლების მიმართ. ე.ი. $f(x)g(x) = 1$, ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის. განვიხილოთ f და g მწკრივების ნამრავლი

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j x^{i+j} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \dots, \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს $a_0 b_0 = 1$ და

$$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0 \Rightarrow a_0 b_n = - \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}.$$

ამით ლემა 2.1 დამტკიცებულია. □

ლემა 2.2 ([29, გვ. 411-413]). ვთქვათ

$$f(x) = x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots$$

ფორმალური ხარისხოვანი მწკრივია. მაშინ მისი შექცეულია

$$g(x) = x + b_1x^2 + b_2x^3 + \dots,$$

სადაც კოეფიციენტები გამოითვლება ტოლობით

$$b_n = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\dots+nk_n=n} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_n} \lambda(k_1, k_2, \dots, k_n) \prod_{j=1}^n a_j^{k_j},$$

სადაც

$$\lambda(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(2k_1 + 3k_2 + \dots + (n+1)k_n)!}{(1 + k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n)!k_1!k_2!\dots k_n!}.$$

ე.ი.

$$b_1 = -a_1$$

$$b_2 = 2a_1^2 - a_2$$

$$b_3 = -5a_1^3 + 5a_1a_2 - a_3$$

$$b_4 = 14a_1^4 - 21a_1^2a_2 + 6a_1a_3 + 3a_2^2 - a_4.$$

თეორემა 2.6. მოცემული τ_1, τ_2, τ_3 პარამეტრებისთვის φ განზოგადებული მოდული ანალიზურია წერტილში 1 და იშლება ხარისხოვან მწკრივად

$$\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x-1)^n, \quad (2.15)$$

სადაც

$$\varphi_n = \frac{B(\tau_2, \tau_3)}{B(\tau_3, \tau_4)} d_n, \quad d_n = \sum_{k=0}^n c_k a_{n-k}, \quad c_0 = \frac{1}{b_0}, \quad c_n = -c_0 \sum_{k=1}^n b_k c_{n-k},$$

$$a_n = \frac{(\tau_1 - n)_n B(\tau_2 + n, \tau_3)}{n! B(\tau_2, \tau_3)} {}_2F_1(n + \tau_2, 1 + n - \tau_1; n + \tau_2 + \tau_3; -1),$$

$$b_n = \frac{(\tau_1 - n)_n}{n!} {}_2F_1(\tau_4, 1 + n - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -1).$$

დამტკიცება. (2.2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$${}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -x) = \frac{1}{B(\tau_2, \tau_3)} \int_0^1 u^{\tau_2-1} (1-u)^{\tau_3-1} (1+xu)^{\tau_1-1} du$$

და

$$x^{\tau_1-1} {}_2F_1\left(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{B(\tau_3, \tau_4)} \int_0^1 u^{\tau_4-1} (1-u)^{\tau_3-1} (x+u)^{\tau_1-1} du.$$

ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციებისთვის ამ ფორმით წარმოდგენის საშუალებით ვწერთ n რიგის წარმოებულებს $x = 1$ წერტილში

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} {}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -x) \Big|_{x=1} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\tau_1)}{\Gamma(\tau_1 - n)} \frac{B(\tau_2 + n, \tau_3)}{B(\tau_2, \tau_3)} {}_2F_1(n + \tau_2, 1 + n - \tau_1; n + \tau_2 + \tau_3; -1), \\ b_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{\tau_1-1} {}_2F_1\left(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -\frac{1}{x}\right) \right) \Big|_{x=1} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\tau_1)}{\Gamma(\tau_1 - n)} {}_2F_1(\tau_4, 1 + n - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -1). \end{aligned}$$

ამრიგად, განვსაზღვრეთ a_n და b_n კოეფიციენტები ისე, რომ ზემოთ მოყვანილი ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციებისთვის ვწერთ ტეილორის გაშლას

$${}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n, \quad (*)$$

$$x^{\tau_1-1} {}_2F_1\left(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-1)^n. \quad (**)$$

ამის შემდეგ ვაგებთ (**)-ის შეზღუდულ მწკრივს

$$\frac{1}{x^{\tau_1-1} {}_2F_1(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -1/x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n, \quad (***)$$

სადაც ლემა 2.1-ის თანახმად c_n კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ რეკურსიულ თანადობას

$$c_0 = \frac{1}{b_0}, \quad c_n = -c_0 \sum_{k=1}^n b_k c_{n-k}.$$

(2.6) ფორმულის გამოყენებით φ -ის მისაღებად საკმარისია (*) და (***) გამოსახულებები გავამრავლოთ. მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{{}_2F_1(\tau_2, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; -x)}{x^{\tau_1-1} {}_2F_1(\tau_4, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; -1/x)} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n c_k a_{n-k} \right) (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-1)^n. \end{aligned}$$

ამით თეორემა 2.6 დამტკიცებულია. □

წინადადება 2.6. თუ f არის ფორმალური ხარისხოვანი მწკრივი

$$f(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \dots,$$

მაშინ

$$f^{-1}(y) = 1 + \left(\frac{y-a_0}{a_1} \right) + b_1 \left(\frac{y-a_0}{a_1} \right)^2 + b_2 \left(\frac{y-a_0}{a_1} \right)^3 + \dots,$$

იქნება მისი შექცეული მწკრივი, სადაც

$$b_n = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\dots+nk_n=n} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_n} \lambda(k_1, k_2, \dots, k_n) \prod_{j=1}^n \left(\frac{a_{j+1}}{a_1} \right)^{k_j}$$

და

$$\lambda(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(2k_1 + 3k_2 + \dots + (n+1)k_n)!}{(1+k_1+2k_2+\dots+nk_n)! k_1! k_2! \dots k_n!}.$$

დამტკიცება. ლემა 2.2-ის გამოსაყენებლად გამომდინარე გარდავქმნათ f ფუნქცია ისე, რომ პირველი წევრის კოეფიციენტი იყოს 1-ის ტოლი

$$\frac{f(x+1) - a_0}{a_1} = x + \frac{a_2}{a_1}x^2 + \frac{a_3}{a_1}x^3 + \dots \quad (*)$$

ავაგოთ ამ უკანასკნელის შექცეული g მწკრივი

$$g(x) = x + b_1x^2 + b_2x^3 + \dots, \quad (**)$$

სადაც

$$b_n = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\dots+nk_n=n} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_n} \lambda(k_1, k_2, \dots, k_n) \prod_{j=1}^n \left(\frac{a_{j+1}}{a_1} \right)^{k_j},$$

ამ პირობებში (*) და (**)-ის კომპოზიცია იქნება იგივეური. მართლაც

$$\frac{f(g(x) + 1) - a_0}{a_1} = x \Rightarrow f(g(x) + 1) = a_0 + a_1x \Rightarrow g(x) = f^{-1}(a_0 + a_1x) - 1.$$

ამით წინადადება 2.6 დამტკიცებულია. □

აღვნიშნოთ φ_τ -თი პარალელოგრამის განზოგადებული მოდული. ნათელია, რომ

$$\varphi_\tau(x) = \varphi(x; 1 - \tau, \tau, 1 - \tau).$$

თეორემა 2.7. პარალელოგრამის განზოგადებული მოდულის შექცეული არის ანალიზური წერტილში 1. თუ

$$\varphi_\tau(x) = 1 + \varphi_1(x - 1) + \varphi_2(x - 1)^2 + \varphi_3(x - 1)^3 + \dots,$$

მაშინ მისი შექცეული იქნება

$$\varphi_\tau^{-1}(y) = 1 + \psi_1(y - 1) + \psi_2(y - 1)^2 + \psi_3(y - 1)^3 + \dots,$$

სადაც

$$\psi_1 = \frac{1}{\varphi_1}, \quad \psi_{n+1} = \frac{1}{\varphi_1^{n+1}} \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} (-1)^{k_1+\dots+k_n} \lambda(k_1, k_2, \dots, k_n) \prod_{j=1}^n \left(\frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_1} \right)^{k_j}.$$

დამტკიცება. გამომდინარეობს წინადადებიდან 2.6. □

თავი III. პარამეტრების პრობლემა ოთხკუთხედისთვის

3.1 შვარც-კრისტოფელის ასახვის პარამეტრების გამოთვლა

ამ პარაგრაფში წარმოვადგენთ შვარც-კრისტოფელის (2.5) ასახვაში A და C პარამეტრების გამოთვლის ალგორითმს.

ლემა 3.1. ვთქვათ Q ოთხკუთხედს არ აქვს თვითგადაკვეთა, ორიენტირებულია საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით და წვეროები არის w_1, w_2, w_3, w_4 კომპლექსური რიცხვები, მაშინ მისი $\pi\tau_j$ შიდა კუთხეები გამოითვლება ფორმულებით

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \delta(w_4 - w_1, w_2 - w_1), \quad \tau_2 = \delta(w_1 - w_2, w_3 - w_2), \\ \tau_3 &= \delta(w_2 - w_3, w_4 - w_3), \quad \tau_4 = \delta(w_3 - w_4, w_1 - w_4),\end{aligned}\tag{3.1}$$

სადაც

$$\delta(v_1, v_2) = \frac{1}{\pi i} \log \left(\frac{\Re(v_1)\Re(v_2) + \Im(v_1)\Im(v_2)}{|v_1||v_2|} + i \frac{\Re(v_1)\Im(v_2) - \Im(v_1)\Re(v_2)}{|v_1||v_2|} \right)\tag{3.2}$$

და \log არის კომპლექსური ლოგარითმის მთავარი მნიშვნელობა.

დამტკიცება. მოვიყვანოთ დამტკიცებას მხოლოდ τ_2 -ისთვის, რადგან დანარჩენი სამი შემთხვევა ანალოგიური მსჯელობით მიიღება. $\pi\tau_2$ კუთხე, რომელიც არის w_2 წვეროსთან, მოთავსებულია

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (\Re(w_1 - w_2), \Im(w_1 - w_2)), \\ \vec{v}_2 &= (\Re(w_3 - w_2), \Im(w_3 - w_2)),\end{aligned}$$

ვექტორებს შორის, ამიტომ მათ შორის მდებარე კუთხე აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობებს

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |v_1||v_2| \cos(\pi\tau_2) \quad \text{და} \quad |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = |v_1||v_2| \sin(\pi\tau_2).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ τ_2 მოიცემა გამოსახულებით:

$$\cos(\pi\tau_2) = \frac{\Re(w_1 - w_2)\Re(w_3 - w_2) + \Im(w_1 - w_2)\Im(w_3 - w_2)}{|w_1 - w_2||w_3 - w_2|},$$

$$\sin(\pi\tau_2) = \frac{\Re(w_1 - w_2)\Im(w_3 - w_2) - \Im(w_1 - w_2)\Re(w_3 - w_2)}{|w_1 - w_2||w_3 - w_2|}.$$

რადგან $e^{\pi\tau_2 i} = \cos(\pi\tau_2) + i \sin(\pi\tau_2)$, კომპლექსური ლოგარითმის გამოყენებით მივიღებთ

$$\tau_2 = \frac{1}{\pi} \Im(\log(\cos(\pi\tau_2) + i \sin(\pi\tau_2))).$$

თუ მარჯვენა მხარე (3.2)-ში არის უარყოფითი, მაშინ კომპლექსური ლოგარითმის $2\pi i$ პერიოდულობის გამოყენებით ვწერთ

$$\delta(v_1, v_2) = \frac{1}{\pi i} \log \left(\frac{\Re(v_1)\Re(v_2) + \Im(v_1)\Im(v_2)}{|v_1||v_2|} + i \frac{\Re(v_1)\Im(v_2) - \Im(v_1)\Re(v_2)}{|v_1||v_2|} \right) + 2.$$

ამით ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 3.1. ვთქვათ Q არის r -ინვარიანტიანი ოთხკუთხედი, რომლის წვეროებია w_1, w_2, w_3, w_4 . მაშინ SC ასახვა

$$f(z) = A + C \left(\int_{-\infty}^1 + \int_1^z \right) (1 - \zeta)^{\tau_1 - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{2} \right)^{\tau_2 - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{2+r} \right)^{\tau_3 - 1} d\zeta,$$

გადაიყვანს ქვედა ნახევარსიბრტყეს Q ოთხკუთხედზე, ისე რომ შესრულდება ტოლობები

$$f(1) = w_1, f(2) = w_2, f(2+r) = w_3, f(\infty) = w_4.$$

აქ $\tau_j, j = 1, 2, 3$ მოცემულია (3.1) ფორმულებით და

$$A = -\frac{A'}{C'}, \quad C = \frac{1}{C'C''}, \quad C' = \frac{|w_1 - w_4|}{w_1 - w_4}, \quad A' = -C'w_4,$$

$$C'' = \frac{2^{1-\tau_2}}{|w_1 - w_2|} \left(1 + \frac{1}{1+r}\right)^{1-\tau_3} B(\tau_1, \tau_2) {}_2F_1\left(\tau_1, 1 - \tau_3; \tau_1 + \tau_2; \frac{1}{1+r}\right).$$

დამტკიცება. მოცემულ ოთხკუთხედს პარალელური გადატანითა და მობრუნებით გარდაქმნით ისე, რომ ოთხკუთხედის ორი წვერო (w'_4 და w'_1) მოხვდეს ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე

$$w'_4 = 0 \quad \text{და} \quad w'_1 = |w_1 - w_4|.$$

შემოვიტანოთ გარდაქმნა $w'_j = A' + C'w_j$ და დავწეროთ განტოლებათა სისტემა A' და C' პარამეტრებისთვის

$$\begin{cases} A' + C'w_4 = 0, \\ A' + C'w_1 = |w_1 - w_4|, \end{cases}$$

საიდანაც ვიღებთ, რომ

$$C' = \frac{|w_1 - w_4|}{w_1 - w_4} \quad \text{და} \quad A' = -C'w_4.$$

ამრიგად, კონფორმულად ავსახეთ Q ოთხკუთხედი Q' -ში, რაც ნიშნავს, რომ გვაქვს SC ასახვა

$$w''(z) = \left(\int_{-\infty}^1 + \int_1^z \right) (1 - \zeta)^{\tau_1-1} \left(1 - \frac{\zeta}{2}\right)^{\tau_2-1} \left(1 - \frac{\zeta}{2+r}\right)^{\tau_3-1} d\zeta,$$

რომელიც გვამღებს C'' -ის გამოსათვლელ გამოსახულებას

$$C'' = \frac{|w''(1) - w''(2)|}{|w_1 - w_2|}.$$

ამის შემდეგ, გამოვსახავთ მიღებულ წვეროებს ინტეგრალური ფორმით

$$w' = \frac{1}{C''} \left(\int_{-\infty}^1 + \int_1^z \right) (1 - \zeta)^{\tau_1-1} \left(1 - \frac{\zeta}{2}\right)^{\tau_2-1} \left(1 - \frac{\zeta}{2+r}\right)^{\tau_3-1} d\zeta,$$

და ვპოულობთ A და C კოეფიციენტებს

$$w' = A' + C'w \Rightarrow w = -\frac{A'}{C'} + \frac{1}{C'}w',$$

შესაბამისად,

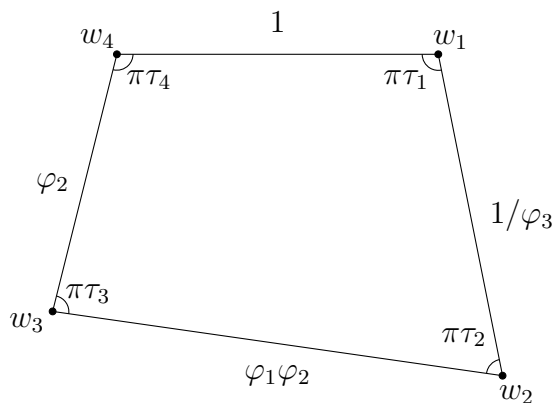
$$w = -\frac{A'}{C'} + \frac{1}{C'C''} \left(\int_{-\infty}^1 + \int_1^z \right) (1 - \zeta)^{\tau_1-1} \left(1 - \frac{\zeta}{2}\right)^{\tau_2-1} \left(1 - \frac{\zeta}{2+r}\right)^{\tau_3-1} d\zeta.$$

თეორემა 3.1 დამტკიცებულია. □

3.2 განზოგადებული მოდული და ოთხკუთხედის ფორმა

წინა პარაგრაფებში გამოვიკვლიეთ განზოგადებული მოდულის თვისებები და აღვნიშნეთ მისი მიმართება კონფორმულ მოდულთან. თეორემა 2.3-ით ვაჩვენეთ, რომ φ მოდულის შეფასება დამოუკიდებელია Q ოთხკუთხედის კომპლექსურ სიბრტყეზე მდებარეობისგან. ცხადია, რომ ყველა მსგავსი ოთხკუთხედი ერთ კონფორმულ კლასშია და მათი ფორმის შეფასებისთვის საკმარისია შიდა კუთხეები და ორი მეზობელი გვერდის თანაფარდობა. ამ პარაგრაფში გამოვიყენებთ განზოგადებული მოდულის არგუმენტების ოთხკუთხედის ფორმასთან დამოკიდებულებას.

განვიხილოთ Q ოთხკუთხედი, რომლის შიდა კუთხეებია $\pi\tau_j$, პირველი გვერდის სიგრძე 1 და მისი r -ინვარიანტი არის x .



ნახ. 3.1: ოთხკუთხედი და განზოგადებული მოდული

ნახაზზე 3.1 მოცემული φ_i არის

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3), & \varphi_2 &= \varphi(1/x; \tau_2, \tau_3, \tau_4), \\ \varphi_3 &= \varphi(x; \tau_3, \tau_4, \tau_1), & \varphi_4 &= \varphi(1/x; \tau_4, \tau_1, \tau_2).\end{aligned}$$

ზოგადობის შეუზღუდავად დავაფიქსიროთ პირველი $w_1 = 1$ და ბოლო $w_4 = 0$ წვეროები. ამის გამოყენებით დანარჩენი წვეროები გამოისახება შემდეგნაირად:

$$w_2 = 1 - \frac{1}{\varphi_3} e^{\pi\tau_1 i} \quad \text{და} \quad w_3 = \varphi_2 e^{-\pi\tau_4 i}.$$

რადგან ოთხკუთხედის ფართობი არის მისი დიაგონალების ნამრავლის ნახევარი გამრავლებული მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსზე, ამიტომ ვექტორული ფორმით ჩაწერილი ეს ფაქტი არის

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} |\vec{d}_1 \times \vec{d}_2| = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Re(w_3 - 1) & \Im(w_3 - 1) & 0 \\ \Re(w_2) & \Im(w_2) & 0 \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} \Re(w_3 - 1) & \Im(w_3 - 1) \\ \Re(w_2) & \Im(w_2) \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varphi_3} \sin \pi\tau_1 + \varphi_2 \sin \pi\tau_4 - \frac{\varphi_2}{\varphi_3} \sin \pi(\tau_1 + \tau_4) \right)\end{aligned}$$

გამოსახულება.

წინადადება 3.1. განზოგადებული მოდულარული (1.5) განტოლება $1/a$ სიგნატურით და p ხარისხით განზოგადებული მოდულის ტერმინებში ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\varphi_a \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) = p \varphi_a \left(\frac{1}{l^2} - 1 \right), \quad (3.3)$$

სადაც $\varphi_a(x) = \varphi(x, 1 - a, a, 1 - a)$.

დამტკიცება. წინადადება 3.1-ის დამტკიცებისთვის გამოვიყენოთ (2.10) ფორმულა, სა-
იდანაც მივიღებთ

$$\varphi \left(\frac{1}{k^2} - 1; \tau_1, \tau_2, \tau_3 \right) = \frac{B(\tau_2, \tau_3)}{B(\tau_3, \tau_4)} \frac{{}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_2 + \tau_3; 1 - k^2)}{{}_2F_1(\tau_3, 1 - \tau_1; \tau_3 + \tau_4; k^2)},$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi_a \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) = \frac{{}_2F_1(1 - a, a; 1; 1 - k^2)}{{}_2F_1(1 - a, a; 1; k^2)} = \frac{{}_2F_1(a, 1 - a; 1; 1 - k^2)}{{}_2F_1(a, 1 - a; 1; k^2)}.$$

ამით წინადადება 3.1 დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 3.1. წინადადება 3.1-დან გამომდინარეობს, რომ მოდულარული განტოლება აფასებს დეფორმაციის შედეგად პარალელოგრამის r -ინვარიანტის ცვლილებას. კერძოდ, განვიხილოთ Q პარალელოგრამი, რომლის r -ინვარიანტი არის x , $l_1 = l_3$, $l_2 = l_4$ და $\tau_1 = 1 - a$. ავაგოთ Q' პარალელოგრამი ისეთი, რომ $l'_1 = l'_3 = l_3/p$, $l'_2 = l'_4 = l_4$ და $\tau'_1 = \tau_1$. მაშინ

$$\varphi_a(x) = \frac{l_3}{l_4} = \frac{pl'_3}{l'_4} = p \varphi_a(y),$$

სადაც y არის Q' პარალელოგრამის r -ინვარიანტი.

წინადადება 3.2. მოდულარული განტოლების

$$\frac{{}_2F_1(a, 1 - a; 1; 1 - k^2)}{{}_2F_1(a, 1 - a; 1; k^2)} = p \frac{{}_2F_1(a, 1 - a; 1; 1 - l^2)}{{}_2F_1(a, 1 - a; 1; l^2)}$$

ამონახსნი k -ს მიმართ, როდესაც a , l და p მოცემულია, არის

$$k = \left(1 + \varphi_a^{-1} \left(p\varphi_a \left(\frac{1}{l^2} - 1 \right) \right) \right)^{-1/2}$$

გამოსახულება, სადაც φ_a^{-1} არის φ_a -ს შექცეული.

დამტკიცება. წინადადება 3.1-დან გვაქვს ცხადი ფორმულა φ_a -სა და განზოგადებული მოდულისათვის. თეორემა 2.7-დან φ_a -ის შექცეულის φ_a^{-1} გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{1}{k^2} - 1 = \varphi_a^{-1} \left(p\varphi_a \left(\frac{1}{l^2} - 1 \right) \right).$$

წინადადება 3.2 დამტკიცებულია. □

თეორემა 3.2. განვიხილოთ Q ოთხკუთხედი w_j წვეროებით და $\pi\tau_j$ შიდა კუთხეებით, $j = 1, 2, 3, 4$. მაშინ Q -ს კონფორმული მოდული არის

$$M(Q) = \varphi \left(\varphi^{-1} \left(\frac{|w_2 - w_3|}{|w_3 - w_4|}; \tau_1, \tau_2, \tau_3 \right); \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (3.4)$$

გამოსახულება, სადაც φ^{-1} არის განზოგადებული მოდულის შექცეული.

დამტკიცება. ვთქვათ x არის Q ოთხკუთხედის r -ინვარიანტი და გამოვსახოთ მისი გვერდები განზოგადებული მოდულის გამოყენებით

$$\begin{aligned} |w_4 - w_1| &= k, & |w_2 - w_1| &= k/\varphi_3, \\ |w_3 - w_2| &= k\varphi_1\varphi_2, & |w_4 - w_3| &= k\varphi_2, \end{aligned}$$

სადაც $k > 0$ არის პროპორციის კოეფიციენტი. რადგან განზოგადებული მოდულის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ r -ინვარიანტსა და ოთხკუთხედის წვეროებს შორის არის შემდეგი დამოკიდებულება

$$\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \varphi_1 = \frac{k\varphi_1\varphi_2}{k\varphi_2} = \frac{|w_3 - w_2|}{|w_4 - w_3|}.$$

რადგან φ არის მკაცრად მონოტონური ფუნქცია, ამიტომ არსებობს მისი φ^{-1} შექცეული ფუნქცია. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$x = \varphi^{-1} \left(\frac{|w_3 - w_2|}{|w_4 - w_3|}; \tau_1, \tau_2, \tau_3 \right).$$

კონფორმული მოდული რიცხობრივად არის მართკუთხედის მეზობელი გვერდების შეფარდების ტოლი, ამიტომ ვწერთ

$$M(Q) = \varphi \left(x; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

ამით თეორემა 3.2 დამტკიცებულია.

□

თავი IV. მაგალითები და გამოთვლები

4.1 მაგალითები განზოგადებული მოდულის გამოთვლაზე

თეორემა 3.1-დან გამომდინარეობს, რომ SC-სახვისთვის პარამეტრების პრობლემა დადის ოთხკუთხედის r -ინვარიანტის გამოთვლაზე. ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ თეორემა 3.1-ზე დაფუძნებული ალგორითმის პროგრამული რეალიზაციის ფსევდოკოდს.

განვიხილოთ f ფუნქცია, რომელიც არის არაუარყოფითი და მკაცრად ზრდადი, როდესაც $x \in [0, \infty)$, მაშინ მოცემული $a > 0$ რიცხვისთვის $f(x) = a$ განტოლების ამონახსნი შეგვიძლია ჩავწეროთ $x_0.\overline{x_1x_2\dots x_d}$ სახით, სადაც x_0 არის x -ის მთელი ნაწილი და d არის მძიმის შემდეგ ციფრების რაოდენობა. ეს ფაქტი ასახულია ქვემოთ მოყვანილ ფსევდოკოდში.

ალგ. 1 $g(x) = f(x) - a$ განტოლების ფსევდოკოდი.

```
1: function FindRoot( $g, d$ )
2:    $x_0 \leftarrow 0$ 
3:   loop
4:     if  $\text{sign } g(x_0) \neq \text{sign } g(x_0 + 1)$  then
5:       break
6:     else
7:        $x_0 \leftarrow x_0 + 1$ 
8:     end if
9:   end loop
10:  for  $i \in \{1, \dots, d\}$  do
11:     $x_i \leftarrow 0$ 
12:    for  $\_ \in \{0, \dots, 8\}$  do
13:      if  $\text{sign } g(x_0.\overline{x_1\dots x_i}) \neq \text{sign } g(x_0.\overline{x_1\dots(x_i + 1)})$  then
```

```

14:         break
15:     else
16:          $x_i \leftarrow x_i + 1$ 
17:     end if
18: end for
19: end for
20: return  $x_0.\overline{x_1 \dots x_d}$ 
21: end function

```

ვთქვათ Q არის ოთხკუთხედი w_1, w_2, w_3, w_4 წვეროებით და $\pi\tau_1, \pi\tau_2, \pi\tau_3, \pi\tau_4$, შიდა კუთხეებით, სადაც $\tau_1 < 1$. r -ინვარიანტის გამოსათვლელი ალგორითმის პროგრამული რეალიზაციის ფსევდოკოდი ქვემოთ არის მოყვანილია.

ალგ. 2 r -ინვარიანტის გამოსათვლელი პროგრამის ფსევდოკოდი

```

1: function FindInvariant( $w_1, w_2, w_3, w_4, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, d = 30$ )
2:    $\varphi_0 \leftarrow |w_2 - w_3|/|w_3 - w_4|$ 
3:    $g(x) := \varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3) - \varphi_0$ 
4:    $r \leftarrow \text{FindRoot}(g, d)$ 
5:   return  $r$ 
6: end function

```

მაგალითი 4.1. აქ მოყვანილია თეორემა 2.6-სა და თეორემა 2.7-ის საილუსტრაციო მაგალითი. ვთქვათ $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 1/2$, მაშინ განზოგადებული $\varphi(x; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ -ის მოდულის ხარისხოვანი მწკრივი $x = 1$ წერტილში არის

$$\begin{aligned}
\varphi(x; 0.5, 0.5, 0.5) \approx & 1 + 0.2284732905(x - 1) - 0.08813662302(x - 1)^2 \\
& + 0.04827946003(x - 1)^3 - 0.03127277573(x - 1)^4 \\
& + 0.02241699206(x - 1)^5 - 0.01718041161(x - 1)^6 \\
& + 0.01379141315(x - 1)^7 - 0.01144586284(x - 1)^8 \\
& + 0.009737374309(x - 1)^9 - 0.008442674960(x - 1)^{10} \\
& + 0.007430490326(x - 1)^{11} - 0.006619174911(x - 1)^{12} \\
& + 0.005955504769(x - 1)^{13} - 0.005403384294(x - 1)^{14} \\
& + 0.004937503063(x - 1)^{15}.
\end{aligned}$$

φ -ს შუქცეული φ^{-1} მოიცემა შემდეგნაირად

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(x; 0.5, 0.5, 0.5) \approx & 1 + 4.376879230452952(y - 1) + 7.390096283758735(y - 1)^2 \\
& + 7.237219471534163(y - 1)^3 + 5.991576168110211(y - 1)^4 \\
& + 3.728577509035313(y - 1)^5 + 1.7396270463685406(y - 1)^6 \\
& + 1.1543413391162676(y - 1)^7 + 0.04250082824813188(y - 1)^8 \\
& + 0.3292792774810219(y - 1)^9 - 0.002590010314452334(y - 1)^{10} \\
& - 0.16126267764293367(y - 1)^{11} + 0.36744094492367263(y - 1)^{12} \\
& - 0.4756371436446193(y - 1)^{13} + 0.4626527213655051(y - 1)^{14} \\
& - 0.3114696848504541(y - 1)^{15}.
\end{aligned}$$

მაგალითად, ვთქვათ

$$\varphi(x; 0.5, 0.5, 0.5) = 0.735,$$

მაშინ შექცეულის გამოყენებით x გამოსახება შემდეგნაირად

$$x = \varphi^{-1}(0.735; 0.5, 0.5, 0.5) \approx 0.24958517337181235.$$

თუ მიღებულ x -ს ჩავსვამთ თავდაპირველ განტოლებაში, მივიღებთ

$$\varphi(x; 0.5, 0.5, 0.5) \approx 0.735000000026227.$$

ამგვარად, ავაგეთ ორი მრავალწევრი, რომლის საშუალებითაც მიახლოებით გამოითვლება განზოგადებული მოდული და მისი შექცეული.

მაგალითი 4.2. ავიღოთ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით ორიენტირებული ოთხკუთხედი, რომლის წვეროებია

$$w_1 = -1 + i, \quad w_2 = 2 + 7i, \quad w_3 = 5 + 9i, \quad w_4 = 7 + 3i,$$

მაშინ თეორემა 3.1-დან გვაქვს

$$A' \approx 7.52 + 1.21i \quad C' \approx -0.97 + 0.24i.$$

ამ პარამეტრების გამოყენებით ვაგებთ ახალ წვეროებს

$$w'_1 \approx 8.25 \quad w'_2 \approx 3.88 - 5.09i \quad w'_3 \approx 0.49 - 6.3i \quad w'_4 = 0,$$

საიდანაც ვიღებთ

$$\varphi_0 = \frac{|w_2 - w_3|}{|w_3 - w_4|} \approx 0.57.$$

მოცემული ოთხკუთხედის შიდა კუთხეებს ვპოულობთ (3.1), (3.2) განტოლებების გამოყენებით და ვიღებთ

$$\tau_1 \approx 0.27, \quad \tau_2 \approx 0.83, \quad \tau_3 \approx 0.42.$$

ოთხკუთხედის r -ინვარიანტი არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი

$$\varphi(r; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \varphi_0,$$

საიდანაც ვიღებთ, რომ

$$r \approx 0.5661496570503529.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{1}{C''} \approx 1.0036$$

და

$$A = -\frac{A'}{C'} = 7 + 3i, \quad C = \frac{1}{C'C''} \approx -0.973 - 0.243i.$$

მაგალითი 4.3. ავიღოთ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულელებით ორიენტირებული Q ჩაზნექილი ოთხკუთხედი რომლის წვეროებია

$$w_1 = 2 + 5i \quad w_2 = 22 + 20i \quad w_3 = 38 - 18i \quad w_4 = 20 + 6i.$$

მისი შიდა $\pi\tau_i$ კუთხეები კვლავ გამოვთვალოთ (3.1), (3.2) ტოლობების გამოყენებით. კერძოდ,

$$\tau_1 = \delta(w_4 - w_1, w_2 - w_1) \approx 0.187,$$

$$\tau_2 = \delta(w_1 - w_2, w_3 - w_2) \approx 0.422,$$

$$\tau_3 = \delta(w_2 - w_3, w_4 - w_3) \approx 0.078,$$

$$\tau_4 = \delta(w_3 - w_4, w_1 - w_4) \approx 1.313.$$

დავწეროთ ამ ოთხკუთხედის r -ინვარიანტის განტოლება

$$\varphi(r; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{|w_2 - w_3|}{|w_3 - w_4|} \approx 1.374.$$

ამ განტოლების ამონახსნია $r \approx 2.37$. ასეთ პირობებში კონფორმული მოდული იქნება

$$M(Q) = \varphi(r; 0.5, 0.5, 0.5) \approx 1.215.$$

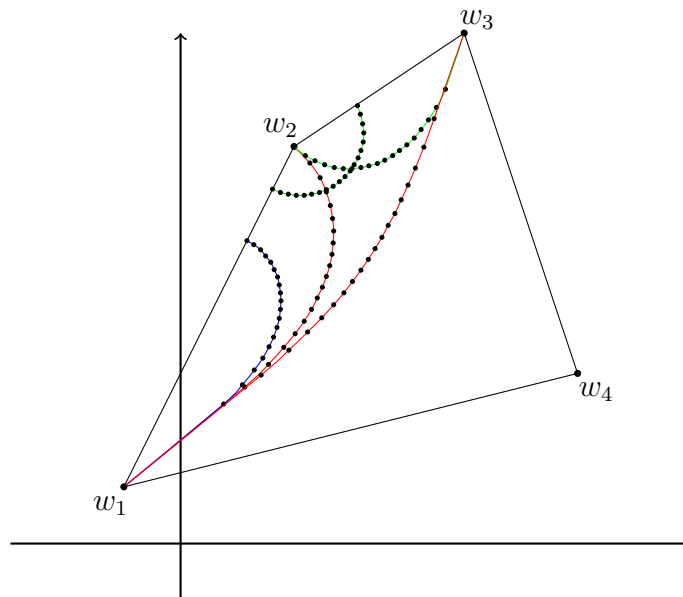
მაგალითი 4.4. როგორც ცნობილია კონფორმული ასახვით ჟორდანის წირის საზღვრის წერტილები გადადის ანასახის საზღვრის წერტილებში. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ Q ოთხკუთხედი მაგალითი 4.2-დან და

$$C(a, b) = \left\{ \frac{a+b}{2} + \frac{|b-a|}{2} e^{-\alpha i} : 0 \leq \alpha \leq \pi \right\}$$

წირები. დავწეროთ მისთვის კანონიკური კონფორმული ასახვა, რომელიც ასახავს ქვედა ნახევარ სიბრტყეს Q ოთხკუთხედზე

$$f(z) = w_1 + \int_1^z (1-\zeta)^{\tau_1-1} \left(1 - \frac{\zeta}{2}\right)^{\tau_2-1} \left(1 - \frac{\zeta}{2+r}\right)^{\tau_2-1} d\zeta,$$

f ასახავს ინტერვალს $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2+r)$ და $(2+r, +\infty)$ ოთხკუთხედის გვერდებზე. მაგალით 4.2-ში გამოვთვალეთ, რომ $r \approx 0.57$. ნახაზზე 4.1 ნაჩვენებია



ნახ. 4.1: ოთხკუთხედი და განზოგადებული მოდული

$C(1, 2)$, $C(1, 1.5)$, $C(1.8, 2.3)$, $C(2, 2.57)$ და $C(1, 2.57)$ წირების ანასახები Q ოთხკუთხედზე.

მაგალითი 4.5. სამკუთხედისთვის SC -ასახვის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციით წარმოდგენისთვის გამოვიყენოთ ტოლობა (იხ. [1])

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^a}{a} {}_2F_1 \left(1 - b, a; 1 + a; \frac{x}{\theta} \right) \right) = x^{a-1} \left(1 - \frac{x}{\theta} \right)^{b-1},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} & \int (1-t)^{a-1} \left(1 - \frac{t}{1+\theta} \right)^{b-1} dt \\ &= - \left(1 + \frac{1}{\theta} \right)^{1-b} \frac{(1-t)^a}{a} {}_2F_1 \left(1 - b, a; 1 + a; \frac{t-1}{\theta}; + \right) c. \end{aligned}$$

მაგალითად, განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია

$$g(x) = \int_{-\infty}^x (1-\zeta)^{-5/6} \left(1 - \frac{\zeta}{2} \right)^{-2/3} d\zeta,$$

რომელიც ასახავს ქვედა ნახევარსიბრტყეს ისეთ სამკუთხედში, რომ შიდა კუთხეები იქნება 30° , 60° და 90° . ზემოთ მოყვანილი განუსაზღვრელი ინტეგრალიდან ვიღებთ

$$\int (1-\zeta)^{-5/6} \left(1 - \frac{\zeta}{2} \right)^{-2/3} d\zeta = -6 \times 2^{2/3} (1-\zeta)^{1/6} {}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}; \frac{7}{6}; \zeta - 1 \right) + c,$$

საიდანაც გვაქვს

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \left(6 \times 2^{2/3} (1-\zeta)^{1/6} {}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}; \frac{7}{6}; \zeta - 1 \right) \right) = \frac{3}{2^{2/3}\pi} \Gamma \left(\frac{1}{3} \right)^3.$$

აქედან გამომდინარე g ფუნქცია არის შემდეგი გამოსახულება

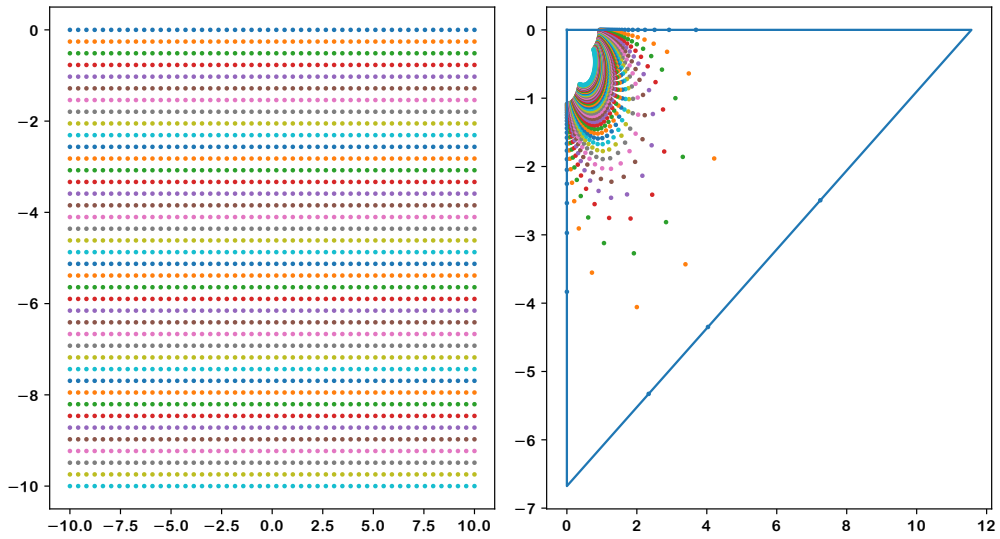
$$g(x) = -6 \times 2^{2/3} (1-x)^{1/6} {}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}; \frac{7}{6}; x - 1 \right) + \frac{3}{2^{2/3}\pi} \Gamma \left(\frac{1}{3} \right)^3.$$

ამიტომ, სამკუთხედის წვეროები იქნება

$$w_1 = g(1), \quad w_2 = g(2), \quad w_3 = g(+\infty) = 0,$$

სადაც

$$g(-\infty) = g(+\infty) = 0, \quad g(1) = \frac{3}{2^{2/3}\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3, \quad g(2) = -i \frac{\sqrt{3}}{2^{2/3}\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3.$$



ნახ. 4.2: $[0, 10] \times [-10, 0]$ ოთხკუთხედის ასახვა სამკუთხედზე

ამ ასახვის ვიზუალიზაცია მოცემულია ნახაზზე 4.2.

მაგალიტი 4.6. ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში გამოთვლილია $QM(z_1, z_2)$ ოთხკუთხედის მოდული, სადაც $Q(z_1, z_2)$ არის ოთხკუთხედი, რომლის წვეროებია 0, 1, z_1 და z_2 . აღნიშნული მაგალიტი აღებულია [31] ნაშრომიდან. დისერტაციაში დამუშავებული ალგორითმით მიღებული შედეგები შედარებულია [31]-ის გამოთვლილ შედეგებთან.

z_1	z_2	$QM(z_1, z_2)$
$7 + 5i$	$-1 + 2i$	1.17336589158553476
$8 + 3i$	$-1 + 1i$	0.71853428024897662
$5 + 5i$	$-3 + 1i$	1.00171178298845252
$7 + 4i$	$-3 + 3i$	1.17821610141749569
$5 + 5i$	$-1 + 2i$	1.27382477147819397
$7 + 5i$	$0 + 1i$	0.92223220304256214
$7 + 3i$	$1 + 2i$	1.68574560877551126
$4 + 5i$	$-2 + 1i$	1.02479880902234062

პირველ სტრიქონში მოყვანილი ოთხკუთხედის წვეროები $(-1, 2)$, $(7, 5)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$ გადავწვინოთ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. ამ ოთხკუთხედს შიდა კუთხეები აქვს 83.99° , 19.25° , 140.19° , 116.57° . ოთხკუთხედის r -ინვარიანტი არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი:

$$\varphi(r; 0.467, 0.107, 0.779) = \varphi_0,$$

სადაც

$$\varphi_0 = \frac{|(7 + 5i) - (1 + 0i)|}{|(1 + 0i) - (0 + 0i)|} = \sqrt{61} \approx 7.81.$$

რადგან φ არის მკაცრად ზრდადი ამ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და

$$r \approx 2.0246760130519346.$$

ამრიგად, ოთხკუთხედის კონფორმული მოდული არის

$$\varphi(r; 0.5, 0.5, 0.5) \approx 1.1733658915855348763.$$

მეორე სტრიქონში მოყვანილი ოთხკუთხედის წვეროები არის $(-1, 1)$, $(8, 3)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$. წვეროებიდან გამომდინარე მისი შიდა კუთხეები არის 57.53° , 10.67° , 156.8° , 135.0° . მისი გვერდის სიგრძეები არის

$$l_1 = \sqrt{2}, \quad l_2 = \sqrt{85}, \quad l_3 = \sqrt{58}, \quad l_4 = 1.$$

დავწეროთ r -ინვარიანტის ამონახსნის შესაბამის განტოლებას

$$\varphi(r; 0.3196, 0.0593, 0.8711) = \sqrt{58}.$$

რადგან φ არის მკაცრად ზრდადი ამ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და

$$r \approx 0.223864079926005.$$

ამრიგად, ოთხკუთხედის კონფორმული მოდული არის

$$\varphi(r; 0.5, 0.5, 0.5) \approx 1.1733658915855348763.$$

4.2 ნატურალური რიცხვის დაყოფის ალგორითმის შესახებ

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ არაუარყოფითი მთელი რიცხვის დანაწილების ალგორითმს (იხ. [5]). ძირითადი შედეგები მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ განზოგადებული მოდულის ხარისხოვან მწკრივად წარმოდგენაში და მოდულარული განტოლების ამონახსნის პოვნაში.

n მთელი რიცხვის k ნაწილად დაყოფა არის მისი წარმოდგენა არაუარყოფითი მთელი რიცხვების სახით, რომელთა ჯამი n -ის ტოლია. n -ის k ნაწილად დაყოფას შევუსაბამოთ სიმრავლე:

$$\mathcal{P}_k(n) = \{(n_1, n_2, \dots, n_k) : n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \ \& \ n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 0\}. \quad (4.1)$$

ამრიგად, ქვემოთ განვიხილოთ ამ სიმრავლის აგების ალგორითმი.

n არაუარყოფითი მთელი რიცხვის k ნაწილად შეზღუდული დაყოფა განმარტებით არის n -ის წარმოდგენა $n_1 + 2n_2 + \dots + kn_k = n$ სახით, $n_i \geq 0$.

$$\mathcal{D}_k(n) = \{(n_1, n_2, \dots, n_k) : n_1 + 2n_2 + \dots + kn_k = n \text{ \& } n_i \geq 0\}. \quad (4.2)$$

წინადადება 4.1. არსებობს ბიექცია $\mathcal{P}_k(n)$ და $\mathcal{D}_k(n)$ სიმრავლეებს შორის.

დამტკიცება. შემოვიღოთ f და g ფუნქციები

$$f(n_1, n_2, \dots, n_k) = (n_1 - n_2, n_2 - n_3, \dots, n_{k-1} - n_k, n_k),$$

$$g(n_1, n_2, \dots, n_k) = (n_1 + \dots + n_k, n_2 + \dots + n_k, \dots, n_{k-1} + n_k, n_k)$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები

$$(f \circ g)(n_1, n_2, \dots, n_k) = (g \circ f)(n_1, n_2, \dots, n_k) = (n_1, n_2, \dots, n_k).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ გვაქვს ურთიერთცალსახა ასახვები

$$f : \mathcal{P}_k(n) \longrightarrow \mathcal{D}_k(n) \quad \text{და} \quad g : \mathcal{D}_k(n) \longrightarrow \mathcal{P}_k(n).$$

ორ სასრულ სიმრავლეს შორის. ამით წინადადება დამტკიცებულია. □

წინადადება 4.2. დანაწილების $\mathcal{D}_k(n)$ სიმრავლე, სადაც $k > 1$ ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\mathcal{D}_k(n) = \left\{ \left(n - \sum_{s=1}^{k-1} (k-s+1)u_s, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_2, u_1 \right) : \right. \quad (4.3)$$

$$\left. 0 \leq u_1 \leq d_k(n), 0 \leq u_{j+1} \leq d_k(n; u_1, \dots, u_j) \right\},$$

სადაც

$$d_k(n) = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor, \quad d_k(n; u_1, \dots, u_j) = \left\lfloor \frac{n}{k-j} - \frac{1}{k-j} \sum_{s=1}^j (k-s+1)u_s \right\rfloor.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\mathcal{D}_k(n)$ სიმრავლის ელემენტი გამოისახება შემდეგნაირად

$$p_0 = \left(n - \sum_{s=1}^{k-1} (k-s+1)u_s, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_2, u_1 \right),$$

რადგან ამ ელემენტის ელემენტების რაოდენობა არის k და აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას

$$\left(n - \sum_{s=1}^{k-1} (k-s+1)u_s \right) + 2u_{k-1} + 3u_{k-2} + \dots + (k-1)u_2 + ku_1 = n.$$

საჭიროა ვიპოვოთ u_j პარამეტრების ცვლილების არე, ანუ ზედა და ქვედა საზღვარი. თუ $u_1 > \lfloor n/k \rfloor$, მაშინ $ku_1 > n$ და $p_0 \notin \mathcal{D}_k(n)$, შესაბამისად

$$0 \leq u_1 \leq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor.$$

გადავიტანოთ u_1 ტოლობის მარჯვენა მხარეს და მივიღებთ

$$\left(n - \sum_{s=1}^{k-1} (k-s+1)u_s \right) + 2u_{k-1} + 3u_{k-2} + \dots + (k-1)u_2 = n - ku_1,$$

ანალოგიურად, თუ $u_2 > \lfloor (n - ku_1)/(k-1) \rfloor$, მაშინ

$$(k-1)u_2 > n - ku_1 \Rightarrow (k-1)u_2 + ku_1 > n$$

და $p_0 \notin \mathcal{D}_k(n)$, საიდან ვიღებთ მეორე პარამეტრის საზღვრებს

$$0 \leq u_2 \leq \left\lfloor \frac{n - ku_1}{k-1} \right\rfloor.$$

ზემოთ მოყვანილი ორი შემთხვევიდან გამომდინარეობს, რომ u_j , სადაც $j > 1$, აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას

$$0 \leq u_j \leq \left\lfloor \frac{n - (ku_1 + (k-1)u_2 + \dots + (k-j+2)u_{j-1})}{k-j+1} \right\rfloor.$$

მართლაც, ვთქვათ

$$u_j > \left\lfloor \frac{n - (ku_1 + (k-1)u_2 + \dots + (k-j+2)u_{j-1})}{k-j+1} \right\rfloor$$

და $p_0 \in \mathcal{D}_k(n)$, მაშინ

$$\begin{aligned} (k-j+1)u_j &> n - (ku_1 + (k-1)u_2 + \dots + (k-j+2)u_{j-1}) \\ \Rightarrow (k-j+1)u_j + (k-j+2)u_{j-1} + \dots + (k-1)u_2 + ku_1 &> n, \end{aligned}$$

რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას, რომ p_0 ეკუთვნის $\mathcal{D}_k(n)$ სიმრავლეს. წინადადება 4.2 დამტკიცებულია. \square

$\mathcal{D}_k(n)$ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა აღვნიშნოთ $|\mathcal{D}_k(n)|$ სიმბოლოთი.

შედეგი 4.1. არაუარყოფითი n მთელი რიცხვისთვის $\mathcal{D}_2(n)$ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:

$$|\mathcal{D}_2(n)| = \left\lfloor 1 + \frac{n}{2} \right\rfloor. \quad (4.4)$$

დამტკიცება. წინადადება 4.2-დან გამომდინარეობს, რომ $\mathcal{D}_2(n)$ არის შემდეგი წყვილების სიმრავლე

$$\mathcal{D}_2(n) = \left\{ (n-2u, u) : 0 \leq u \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}$$

და ამრიგად, მასში ელემენტების რაოდენობა იქნება

$$|\mathcal{D}_2(n)| = \left| \left\{ (n-2u, u) : 0 \leq u \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\} \right| = 1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

შედეგი 4.1 დამტკიცებულია. \square

შედეგი 4.2. არაუარყოფითი n მთელი რიცხვისთვის $\mathcal{D}_3(n)$ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა არის

$$|\mathcal{D}_3(n)| = \left\lfloor 1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12} \right\rfloor. \quad (4.5)$$

დამტკიცება. წინადადება 4.2-დან გამომდინარეობს, რომ $\mathcal{D}_3(n)$ არის შემდეგი სამეულეების სიმრავლე

$$\mathcal{D}_3(n) = \left\{ (n - 3u_1 - 2u_2, u_2, u_1) : 0 \leq u_1 \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor, 0 \leq u_2 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} - \frac{3u_1}{2} \right\rfloor \right\},$$

შესაბამისად, მისი ელემენტების რაოდენობა იქნება

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_3(n)| &= \sum_{u_1=0}^{d_3(n)} \sum_{u_2=0}^{d_3(n; u_1)} 1 = \sum_{u_1=0}^{d_3(n)} (1 + d_3(n; u_1)) = 1 + d_3(n) + \sum_{u_1=0}^{d_3(n)} d_3(n; u_1) \\ &= 1 + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \sum_{u_1=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2} - \frac{3u_1}{2} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \\ &\quad + \sum_{u=0}^{\lfloor n/6 \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2} - \frac{3(2u)}{2} \right\rfloor + \sum_{u=0}^{\lfloor (n-3)/6 \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2} - \frac{3(2u+1)}{2} \right\rfloor \quad (*) \\ &= 1 + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \sum_{u=0}^{\lfloor n/6 \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2} - 3u \right\rfloor + \sum_{u=0}^{\lfloor (n-3)/6 \rfloor} \left\lfloor \frac{n-3}{2} - 3u \right\rfloor \\ &= 1 + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{3}{2} \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \right) \left\lfloor \frac{n+6}{6} \right\rfloor \\ &\quad + \left(\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor - \frac{3}{2} \left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor \right) \left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor. \end{aligned}$$

(4.5) ტოლობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ n -ის წარმოდგენა $n = 6k + j$ სახით და განვიხილოთ შემდეგი ერთმანეთისგან განსხვავებული ექვსი შემთხვევა:

$$n = 6k + j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j \in \{0, 1, \dots, 5\}.$$

n -ის კერძო შემთხვევებისთვის (*)-დან ვიღებთ

$$|\mathcal{D}_3(6k+0)| = 3k^2 + 3k + 1,$$

$$|\mathcal{D}_3(6k+1)| = 3k^2 + 4k + 1,$$

$$|\mathcal{D}_3(6k+2)| = 3k^2 + 5k + 2,$$

$$|\mathcal{D}_3(6k+3)| = 3k^2 + 6k + 3,$$

$$|\mathcal{D}_3(6k+4)| = 3k^2 + 7k + 4,$$

$$|\mathcal{D}_3(6k+5)| = 3k^2 + 8k + 5.$$

მოცემული ტოლობები აკმაყოფილებენ (4.5) გამოსახულებას. ამით შედეგი 4.2 დამტკიცებულია. \square

მაგალითი 4.7. თუ $n = 6k + 3$, სადაც $k \geq 0$ მთელი რიცხვია, მაშინ

$$|\mathcal{D}_3(n)| = \left\lfloor 1 + \frac{6k+3}{2} + \frac{(6k+3)^2}{12} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{13}{4} + 6k + 3k^2 \right\rfloor = 3 + 6k + 3k^2.$$

წინადადება 4.3. არაუარყოფითი n მთელი რიცხვისთვის და $k > 1$ -სთვის, სამართლიანია შემდეგი რეკურსიული თანადობა

$$|\mathcal{D}_k(n)| = \sum_{j=0}^{\lfloor n/k \rfloor} |\mathcal{D}_{k-1}(n - kj)|,$$

სადაც $|\mathcal{D}_1(n)| = 1$.

დამტკიცება. წინადადება 4.2-დან გამომდინარეობს, რომ $\mathcal{D}_k(n)$ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა გამოითვლება შემდეგი გამოსახულებით

$$|\mathcal{D}_k(n)| = \sum_{ku_1 + (k-1)u_2 + \dots + u_{k-1} \leq n} 1 = \sum_{u_1=0}^{d_k(n)} \sum_{u_2=0}^{d_k(n; u_1)} \dots \sum_{u_{k-1}=0}^{d_k(n; u_1, \dots, u_{k-2})} 1 \quad (*)$$

და ეს ტოლობა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$|\mathcal{D}_{k-1}(n - ku_1)| = \sum_{u_2=0}^{d_{k-1}(n - ku_1)} \sum_{u_3=0}^{d_{k-1}(n - ku_1; u_2)} \dots \sum_{u_{k-1}=0}^{d_{k-1}(n - ku_1; u_2, u_3, \dots, u_{k-2})} 1.$$

d_k ფუნქციის განმარტებიდან გამომდინარე ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$\begin{aligned}
d_k(n; u_1, \dots, u_j) &= \left[\frac{n}{k-j} - \frac{1}{k-j} \sum_{s=1}^j (k-s+1)u_s \right] \\
&= \left[\frac{n-ku_1}{k-j} - \frac{1}{k-j} \sum_{s=2}^j (k-s+1)u_s \right] \\
&= \left[\frac{n-ku_1}{k-j} - \frac{1}{k-j} \sum_{s=1}^{j-1} ((k-1)-s+1)u_{s+1} \right] \\
&= d_{k-1}(n-ku_1; u_2, \dots, u_j),
\end{aligned}$$

შესაბამისად,

$$|\mathcal{D}_{k-1}(n-ku_1)| = \sum_{u_2=0}^{d_k(n;u_1)} \sum_{u_3=0}^{d_k(n;u_1,u_2)} \cdots \sum_{u_{k-1}=0}^{d_k(n;u_1,u_2,u_3,\dots,u_{k-2})} 1.$$

აქედან გამომდინარე (*) გამოსახულება გადაიწერება შემდეგი სახით

$$|\mathcal{D}_k(n)| = \sum_{u_1=0}^{d_k(n)} |\mathcal{D}_{k-1}(n-ku_1)|.$$

ამით წინადადება 4.3 დამტკიცებულია. □

შედეგი 4.3. არაუარყოფითი n მთელი რიცხვისთვის $\mathcal{D}_4(n)$ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა არის

$$|\mathcal{D}_4(n)| = \left[1 + \frac{n}{2} + \frac{n}{8} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{n^2}{24} + \frac{n^3}{144} \right] \quad (4.6)$$

გამოსახულება.

დამტკიცება. წინადადება 4.3-დან გამომდინარეობს, რომ გვექნება შემდეგი 12 შემთხვევა

$$\begin{aligned}
|\mathcal{D}_4(12k+0)| &= 12k^3 + 15k^2 + 6k + 1, & |\mathcal{D}_4(12k+6)| &= 12k^3 + 33k^2 + 30k + 9, \\
|\mathcal{D}_4(12k+1)| &= 12k^3 + 18k^2 + 8k + 1, & |\mathcal{D}_4(12k+7)| &= 12k^3 + 36k^2 + 35k + 11, \\
|\mathcal{D}_4(12k+2)| &= 12k^3 + 21k^2 + 12k + 2, & |\mathcal{D}_4(12k+8)| &= 12k^3 + 39k^2 + 42k + 15,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{D}_4(12k+3)| &= 12k^3 + 24k^2 + 15k + 3, & |\mathcal{D}_4(12k+9)| &= 12k^3 + 42k^2 + 48k + 18, \\
|\mathcal{D}_4(12k+4)| &= 12k^3 + 27k^2 + 20k + 5, & |\mathcal{D}_4(12k+10)| &= 12k^3 + 45k^2 + 56k + 23, \\
|\mathcal{D}_4(12k+5)| &= 12k^3 + 30k^2 + 24k + 6 & |\mathcal{D}_4(12k+11)| &= 12k^3 + 48k^2 + 63k + 27.
\end{aligned}$$

ყველა ამ შემთხვევას აერთიანებს (4.6) ტოლობა. ამით შედეგი 4.3 დამტკიცებულია. \square

მაგალითი 4.8. თუ $n = 12k$, სადაც $k \geq 0$, მაშინ

$$\begin{aligned}
|\mathcal{D}_4(n)| &= \left[1 + \frac{12k}{2} + \frac{12k}{8} \left\lfloor \frac{12k}{2} \right\rfloor + \frac{(12k)^2}{24} + \frac{(12k)^3}{144} \right] \\
&= \left[1 + 6k + 9k^2 + 6k^2 + 12k^3 \right] \\
&= 1 + 6k + 15k^2 + 12k^3.
\end{aligned}$$

შედეგი 4.4. არაუარყოფითი n მთელი რიცხვისთვის $\mathcal{D}_5(n)$ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა გამოითვლება

$$|\mathcal{D}_5(n)| = \left[1 + \frac{11n}{24} + \frac{n}{16} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{11n^2}{144} + \frac{n^3}{96} + \frac{n^4}{2880} \right] \quad (4.7)$$

მრავალწევრით.

დამტკიცება. წინადადება 4.3-დან გამომდინარეობს, რომ გვაქვს 60 შემთხვევა, მაგრამ ფორმულის სამართლიანობის საჩვენებლად საკმარისია პირველი 5-ის განხილვა:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{D}_5(60k+0)| &= 4500k^4 + 2250k^3 + \frac{775}{2}k^2 + \frac{55}{2}k + 1, \\
|\mathcal{D}_5(60k+1)| &= 4500k^4 + 2550k^3 + \frac{1015}{2}k^2 + \frac{81}{2}k + 1, \\
|\mathcal{D}_5(60k+2)| &= 4500k^4 + 2850k^3 + \frac{1285}{2}k^2 + \frac{123}{2}k + 2, \\
|\mathcal{D}_5(60k+3)| &= 4500k^4 + 3150k^3 + \frac{1585}{2}k^2 + \frac{167}{2}k + 3, \\
|\mathcal{D}_5(60k+4)| &= 4500k^4 + 3450k^3 + \frac{1915}{2}k^2 + \frac{229}{2}k + 5.
\end{aligned}$$

ამ ტოლობების მისაღებად n გამოვსახეთ k -ს გამოყენებით. ზოგადი n -ისთვის ფორმულის მისაღებად ვაკეთებთ საპირისპიროს. თუ $n = 60k$, მაშინ

$$|\mathcal{D}_5(n)| = \frac{n^4}{2880} + \frac{n^3}{96} + \frac{31n^2}{288} + \frac{11n}{24} + 1, \quad (*)$$

და თუ $n = 60k + 1$, მაშინ

$$|\mathcal{D}_5(n)| = \frac{n^4}{2880} + \frac{n^3}{96} + \frac{31n^2}{288} + \frac{41n}{96} + \frac{1309}{2880}. \quad (**)$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ ვნახავთ, რომ პირველი სამი კოეფიციენტი არ იცვლება, მაშინ როდესაც n -ის კოეფიციენტი არის $11/24$, თუ n ლუწია და არის $41/96$, თუ n კენტია. ეს ფაქტი ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{41}{96} = \frac{44 - 3}{96} = \frac{11}{24} - \frac{3}{96}.$$

ზოგადად ნებისმიერი n -ისთვის გვაქვს გამოსახულება:

$$\frac{n^4}{2880} + \frac{n^3}{96} + \frac{31n^2}{288} + \frac{(44 - 3(n - 2 \lfloor n/2 \rfloor))n}{96} + 1. \quad (***)$$

მართლაც, ავიღოთ (***)-ის მთელი ნაწილი და მიღებული გამოსახულება შევამოწმოთ ყველა $n = 60k + j$ შემთხვევისთვის, სადაც $j \in \{0, \dots, 59\}$. შედეგი 4.4 დამტკიცებულია. \square

წინადადება 4.4. შეზღუდული დანაწილების $\mathcal{D}_k(n)$ სიმრავლე აკმაყოფილებს შემდეგ რეკურსიულ თანადობას

$$\mathcal{D}_k(n) = \bigcup_{j=0}^{\lfloor n/k \rfloor} \mathcal{D}_{k-1}(n - kj) \times \{(j)\}, \quad (4.8)$$

სადაც $\mathcal{D}_1(n) = \{(n)\}$.

დამტკიცება. $\mathcal{D}_k(n)$ სიმრავლის ნებისმიერი $p \in \mathcal{D}_k(n)$ ელემენტი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}
p &= \left(n - \sum_{s=1}^{k-1} (k-s+1)u_s, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_2, u_1 \right) \\
&= \left((n - ku_1) - \sum_{s=2}^{k-1} (k-s+1)u_s, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_2, u_1 \right) \\
&= \left((n - ku_1) - \sum_{s=1}^{k-2} (k-s)u_{s+1}, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_3, u_2 \right) \times \{(u_1)\},
\end{aligned}$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ $p \in \mathcal{D}_{k-1}(n - ku_1) \times \{(u_1)\}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ თავდაპირველი სიმრავლე დაკყავით შემდეგ ქვესიმრავლეებად

$$\mathcal{D}_{k-1}(n) \times \{(0)\}, \mathcal{D}_{k-1}(n - k) \times \{(1)\}, \dots, \mathcal{D}_{k-1}(n - k \lfloor n/k \rfloor) \times \{(\lfloor n/k \rfloor)\}.$$

ცხადია, რომ ეს ქვესიმრავლეები არ იკვეთებიან და ნებისმიერი ელემენტი $\mathcal{D}_k(n)$ სიმრავლიდან ეკუთვნის ერთ-ერთ ქვესიმრავლეს

$$p \in \mathcal{D}_k(n) \Rightarrow \exists! j (p \in \mathcal{D}_{k-1}(n - kj) \times \{(j)\}).$$

სამართლიანია აგრეთვე საპირისპირო მსჯელობაც. ვთქვათ $p \in \mathcal{D}_{k-1}(n - kj) \times \{(j)\}$, მაშინ $p = (v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, j)$, სადაც

$$v_1 + 2v_2 + \dots + (k-1)v_{k-1} = n - kj,$$

ანუ $p \in \mathcal{D}_k(n)$. □

მაგალითი 4.9. ავაგოთ $\mathcal{D}_3(9)$ სიმრავლე. 4.8 რეკურსიული თანადობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_3(9) &= \bigcup_{j=0}^3 \mathcal{D}_2(9 - 3j) \times \{(j)\} \\
&= \mathcal{D}_2(9) \times \{(0)\} \cup \mathcal{D}_2(6) \times \{(1)\} \cup \mathcal{D}_2(3) \times \{(2)\} \cup \mathcal{D}_2(0) \times \{(3)\}.
\end{aligned}$$

რეკურსიის პირველი ბიჯზე $k = 3$ დაყოფიდან დავედით $k = 2$ დაყოფაზე და ჩამოვწეროთ ეს შემთხვევები

$$\mathcal{D}_2(9) = \{(9, 0), (7, 1), (5, 2), (3, 3), (1, 4)\}$$

$$\mathcal{D}_2(6) = \{(6, 0), (4, 1), (2, 2), (0, 3)\}$$

$$\mathcal{D}_2(3) = \{(3, 0), (1, 1)\}$$

$$\mathcal{D}_2(3) = \{(0, 0)\}.$$

აქედან გამომდინარე

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3(9) = \{ & (9, 0, 0), (7, 1, 0), (5, 2, 0), (3, 3, 0), (1, 4, 0), \\ & (6, 0, 1), (4, 1, 1), (2, 2, 1), (0, 3, 1), \\ & (3, 0, 2), (1, 1, 2), \\ & (0, 0, 3)\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_3(9)$ სიმრავლის აგების შემდეგ შეგვიძლია ავაგოთ $\mathcal{P}_3(9)$ სიმრავლე, რომელსაც შემდეგი სახე აქვს

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3(9) = \{ & (9, 0, 0), (8, 1, 0), (7, 2, 0), (6, 3, 0), (5, 4, 0), \\ & (7, 1, 1), (6, 2, 1), (5, 3, 1), (4, 4, 1), \\ & (5, 2, 2), (4, 3, 2), \\ & (3, 3, 3)\}. \end{aligned}$$

წინადადება 4.5. თუ n არაუარყოფითი მთელი რიცხვია და $k > 1$, მაშინ $\mathcal{D}_k(n)$ სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა n -ის ყველა ნაშთთა კლასისათვის გამოითვლება შემდეგი $k - 1$ ხარისხის მრავალწევრით:

$$|\mathcal{D}_k(l_k b + r)| = \sum_{s=0}^{k-1} a_{r,s} b^s, \quad 0 \leq r < l_k, \quad (4.9)$$

სადაც $l_k = \text{lcm}(2, 3, \dots, k)$ არის უმცირესი საერთო ჯერადი.

დამტკიცება. წინადადებას დავამტკიცებთ მათემატიკური ინდუქციით. ფორმულა (4.4)-დან ჩანს, რომ $k = 2$ -სთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$|\mathcal{D}_2(2b)| = 1 + b, \quad |\mathcal{D}_2(2b + 1)| = 1 + b.$$

ე.ი. წინადადება სამართლიანია. დავუშვათ წინადადება სამართლიანია რომელიმე k -სთვის. მაშინ წინადადება 4.3-დან გვაქვს ტოლობა

$$|\mathcal{D}_{k+1}(n)| = \sum_{j=0}^{\lfloor n/(k+1) \rfloor} |\mathcal{D}_k(n - (k+1)j)|,$$

სადაც ჯამში თითოეული წევრი არის $k-1$ ხარისხის მრავალწევრი. ვთქვათ $n = l_{k+1}b + r$, სადაც $0 \leq r < l_{k+1}$, მაშინ

$$\left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{l_{k+1}b + r}{k+1} \right\rfloor = \frac{l_{k+1}}{k+1}b + \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor = c_1b + c_2$$

და შესაბამისად მივიღეთ გამოსახულება, რომელიც ჩაიწერება k რიგის მრავალწევრის გამოყენებით

$$\sum_{j=0}^{c_1b+c_2} j^{k-1} = \sum_{s=0}^k a_s (c_1b + c_2)^s = \sum_{s=0}^k u_s b^s,$$

სადაც a_s, u_s არის მრავალწევრის კოეფიციენტები. შესაბამისად, მივიღეთ, რომ $|\mathcal{D}_{k+1}(n)|$ არის k ხარისხის მრავალწევრი b -ს მიმართ. წინადადება დამტკიცებულია. \square

დასკვნა

ოთხკუთხედის კონფორმული მოდულის და შვარც-კრისტოფელის ასახვის პარამეტრების გამოსათვლელი ალგორითმების ასაგებად განვითარებულია ერთიანი მიდგომა. ოთხკუთხედისათვის შემოტანილია ახალი რიცხვითი ინვარიანტი, რის საშუალებითაც ჩაწერილია განზოგადებული კონფორმული მოდული, რომელიც მიღებულია მოდულარული განტოლებიდან. სპეციალური სახის ხარისხოვანი მწკრივის შებრუნებულის კოეფიციენტებისათვის შემოღებულია რეკურსიული ფორმულები და ეფექტური ალგორითმები მათ გამოსათვლელად. მოცემული ალგორითმების პროგრამული რეალიზაცია ხელმისაწვდომია <https://github.com/giorgi94/sc-tools> მისამართზე.

ლიტერატურა

- [1] Abramowitz, M., Stegun, I. A. Handbook of mathematical functions. National Bureau of Standards, 1964
- [2] Ahlfors, L. V. Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, Singapore, 1979
- [3] Anderson, G. D., Vamanamurthy, M. K., Vuorinen, M., Conformal invariants, inequalities and quasiconformal maps. Canadian Mathematical Society Series of 18 Monographs and Advanced Texts. A Wiley-Interscience Publication. J. Wiley (1997)
- [4] Andrews, G., Askey, R., Roy, R. Special Functions. Cambridge Univ. Press, (1999)
- [5] Andrews, G. E. The Theory of Partitions. Cambridge University Press, 1998.
- [6] Anselmo, T., Nelson, R., Carneiro da Cunha, B., Crowdy, D. G. Accessory parameters in conformal mapping: exploiting the isomonodromic tau function for Painleve VI. Proceedings of the Royal Society of London, A; September 2, 2018, <https://doi.org/10.1098/rspa.2018.0080>
- [7] Bell, E. T. Interpolated denumerants and lambert series. American Journal of Mathematics 65, 3 (1943), 382–386.
- [8] Berndt, B., Bhargava, S., Garvan, F. Ramanujan’s theories of elliptic functions to alternative bases. Transactions of the American Mathematical Society, 347(11), 4163-4244,(1995), doi:10.2307/2155035
- [9] Bers, L., Uniformization, moduli, and Kleinian groups, The Bulletin of the London Mathematical Society, 4 (3): 257–300, (1972), doi:10.1112/blms/4.3.257
- [10] Chernoff, H. A. note on the inversion of power series. Mathematical Tables and Other Aids to Computation. Vol. 2, No. 20, 331-335 (1947), <https://doi.org/10.2307/2002234>

- [11] Craster, R. V. Conformal mappings involving curvilinear quadrangles. *IMA J. Appl. Math.* 57, 181–191, 1996
- [12] Crowdy, D. G. The Schwarz-Christoffel mapping to bounded multiply connected polygonal domains, *Proc. Roy. Soc. A* 461, 2653-2678, (2005)
- [13] Driscoll, T. A., Trefethen, L. N. Schwarz-Christoffel mapping, (2002), Oxford University Press, <https://doi.org/10.1017/CBO9780511546808>
- [14] Driscoll, T.A. Schwarz–Christoffel Toolbox for MATLAB. <https://tobydriscoll.net/project/sc-toolbox/>. (2021)
- [15] Ewell, J. A. Recurrences for the partition function and its relatives. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* 34, 2 (2004), 619–627.
- [16] Giorgadze G. Kakulashvili G. On the Parameter Problem of the Schwarz-Christoffel Mapping and Moduli of Quadrilaterals. accepted to *Computation methods and function theory*. Springer.
- [17] Giorgadze G., Kakulashvili G. On the generalized conformal modules of quadrilaterals. *Proc. VIAM*, vol.71, 2021, p. 8-18.
- [18] Hariri, P., Klen, R., Vuorinen, M. *Conformally Invariant Metrics and Quasiconformal Mappings*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin (2020)
- [19] Heikkala, V., Vamanamurthy, M.K., Vuorinen, M. Generalized elliptic integrals. *Comput. Methods Funct. Theory* 9, 75-109 (2009). <https://doi.org/10.1007/BF03321716>.
- [20] Henrici, P. *Applied and Computational Complex Analysis*, vol. 3. John Wiley & Sons, New York (1986)
- [21] Kakulashvili G. On the Schwarz-Christoffel parameter problem. Lambert Academic Publisher, 2019.
- [22] Kakulashvili, G. On the Schwarz-Christoffel parameters problem. *Proc. I.Vekua Institute of Applied Mathematics*. 67, 56-68, (2017)
- [23] Kakulashvili, G. Computation of exterior moduli by power series. *Proc. I.Vekua Institute of Applied Mathematics*. 69, 53-59, (2019)

- [24] Kakulashvili G. Euclidean geometry analogs on the sphere Proc VIAM, vol. 68, 2018, pp. 46–67.
- [25] Kakulashvili G. On some formulas of spherical geometry Proc VIAM, vol. 67, 2017, pp. 51–55.
- [26] Kythe, P.K. Handbook of Conformal Mappings and Applications. CRC Press, Boca Raton, (2019)
- [27] Lehto, O., Virtanen, K. I. Quasiconformal mappings in the plane, Springer (1973)
- [28] Mityushev, V. Schwarz-Christoffel formula for multiply connected domains. Comput. Methods Funct. Theory 12, 449-463 (2012). <https://doi.org/10.1007/BF03321837>
- [29] Morse, P. M. Feshbach, H., Methods of theoretical physics (McGraw Hill book company, inc., 1953)
- [30] Muskhelishvili, N. I. Some Basic Problems of The Mathematical Theory of Elasticity. Springer, 1977
- [31] Nasser, M. M. S., Rainio, O., Vuorinen, M. Condenser capacity and hyperbolic perimeter. Comput. Math. Appl. 105, 54-74, (2022) <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.11.016>
- [32] Nasser, M., Rainio, O., Rasila, A., Vuorinen, M., Wallace, T., Hang Yu, Xiaohui Zhang. Polycircular domains, numerical conformal mappings, and moduli of quadrilaterals. Advances in Computational Mathematics, (2022) 48:58, <https://doi.org/10.1007/s10444-022-09975-x>
- [33] Nasyrov, S., Sugawa, T., Vuorinen, M. Moduli of quadrilaterals and quasiconformal reflection, ArXiv2111.08304, (2021)
- [34] Nehari, Z. Conformal Mapping, McGraw-Hill, New York, 1952.
- [35] Papamichael, N., Stylianopoulos, N. Numerical Conformal mapping, World Scientific, (2010)
- [36] Poincare, H. Papers on Fuchsian Functions, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [37] Polubarinova-Kochina, P. Ya. Theory of groundwater movement. Princeton University Press, 1962

- [38] Trefethen, L. N., Driscoll, T. A. Schwarz-Christoffel. mapping in the computer era. Documenta Mathematica (1998), pp. 533-542
- [39] Tsitskishvili, A. R. Conformal mapping of a half plane to a curvilinear pentagon with a cut. Differential'nye Uravneniya 12, 2044–2051,1976