მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი

№8

2022

ივანე ჯავახიშვილის
სახელობის თბილისის
სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა
ფაკულტეტი

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი
მასწავლებლებისა და მოსწავლეებისთვის

დაარსდა 2013 წელს;
მიეძღვნა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
95 წლის იუბილეს.

ჩვენი მიზანია მასწავლებლებსა და მოსწავლეებში მათემატიკური ცოდნის პოპულარიზაცია, მათემატიკის მასწავლებელთა პროფესიული ზრდის ხელშეწყობა, მოსწავლეთა ჩართვა მათემატიკის ლამაზ სამყაროში მოგზაურობისა და საინტერესო ამოცანების ამოხსნის პროცესში; მოგაწვდით ინფორმაციას ჩვენი წარმატებული კურსდამთავრებულების საქმიანობისა და მომავალი სტუდენტების პერსპექტივების შესახებ.

უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

სარჩევი

სარჩევი

ჟურნალი „მათემატიკა“

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი „მათემატიკა“ დაარსდა 2013 წელს, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 95 წლის იუბილესთან დაკავშირებით, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის საბჭოს გადაწყვეტილებით. ჟურნალის შექმნის იდეა ფაკულტეტის დეკანს – რამაზ ბოჭორიშვილს ეკუთვნის.

ჟურნალის მთავარი რედაქტორია თეიმურაზ ვეფხვაძე, მთავარი რედაქტორის მოადგილე – ომარ ფურთუხია.

ჟურნალში რამდენიმე განყოფილებაა, რომლებსაც სარედაქციო საბჭოს წევრები ხელმძღვანელობენ: „მათემატიკური სკოლები“ (ომარ ფურთუხია) – წარმოაჩენს იმ ქართველ მეცნიერებს, რომლებმაც დიდი წვლილი შეიტანეს ქართული მათემატიკური სკოლების ჩამოყალიბებასა და განვითარებაში; „ქართველი ავტორები“ (გია გიორგაძე) – პოპულარულ ენაზე გადმოიცემა მასალა მათემატიკური ცნებებისა და პრობლემების წარმოშობისა და განვითარების შესახებ; „თარგმანი“ (ილია თავხელიძე) – უცხოელი ავტორების სამეცნიერო-პოპულარული სტატიები; „მეთოდიკა“ (თეიმურაზ ვეფხვაძე, ქეთევან შავგულიძე) – მასალა, რომელიც ხელს შეუწყობს მასწავლებელთა პროფესიულ ზრდას; „მოსწავლეები“ (თენგიზ კოპალიანი, ბეჟან ღვაბერიძე) – მასალა, რომელიც განკუთვნილია მოსწავლეებში მათემატიკის პოპულარიზაციისთვის; მათემატიკური ოლიმპიადების მიმოხილვა, საინტერესო ამოცანები მოსწავლეებისთვის; „სტუდენტები“ (თინათინ დავითაშვილი) – წარმოაჩენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ სტუდენტებს; „კურსდამთავრებულები“ (როლანდ ომანაძე) – წარმოგვიდგენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ კურსდამთავრებულებს; „თსუ“ (რამაზ ბოჭორიშვილი, თინათინ დავითაშვილი) – დაეხმარება ახალგაზრდებს სამომავლო კარიერის დაგეგმვაში; იბეჭდება მასალა, რომელიც აღწერს სასწავლო პროგრამებს, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ჩატარებულ საინტერესო ღონისძიებებს; რუბრიკით „ჩვენი ამაგდარი პედაგოგები“ წარმოგიდგენთ ჩვენს ღვაწლმოსილ პროფესორებს.

ჟურნალი იღებს სტატიებს ჩამოთვლილი განყოფილებების მიხედვით და დადებითი რეცენზიის მიღების შემთხვევაში იბეჭდება. სტატიის წარმოდგენისას ავტორებმა უნდა დაიცვან მათთვის განკუთვნილი ინსტრუქციის მოთხოვნები.

რევაზ გამყრელიძე – 95 წელი

გია გიორგაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის
ასოცირებული პროფესორი

რევაზ გამყრელიძე და გია გიორგაძე, მთაწმინდის პანთეონი, 2011 წელი.

საქართველოს და რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიების ნამდვილ წევრს, თანამედროვეობის ერთ-ერთ უდიდეს მათემატიკოსს, მათემატიკის კლასიკოსს, აკადემიკოს რევაზ გამყრელიძეს 95 წელი შეუსრულდა.

რევაზ გამყრელიძემ, თავის მასწავლებელთან, გენიალურ ლევ პონტრიაგინთან ერთად, მათემატიკის ახალ დარგს, მართვის ოპტიმალურ თეორიას დაუდო საფუძველი.

მართვის ოპტიმალური თეორია კლასიკურ ვარიაციათა აღრიცხვის განზოგადება და მისი მეთოდების გაფართოებაა. ვარიაციათა აღრიცხვას საფუძვლად უდევს უმცირესი ქმედების პრინციპი, ოპტიმალური მართვის თეორიას კი – პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპი, რომელიც თავიდან ჰიპოთეზის სახით იყო ჩამოყალიბებული. რ. გამყრელიძემ დაამტკიცა მაქსიმუმის პრინციპი მართვის წრფივი სისტემებისათვის და აგო წრფივი სისტემების დასრულებული თეორია. ამ თეორიაში, რომელიც უკვე კლასიკურადაა აღიარებული, გამოვლენილი იყო ოპტიმალური მართვის არსი: ამოზნექილობის როლი, წრფივი სისტემების მნიშვნელობა, ოპტიმალური სინთეზის ხასიათი, რეგულარობის პირობის სახე. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, რ.გამყრელიძის მიერ აგებულმა წრფივმა თეორიამ დიდი ხნით განსაზღვრა საგნის სახე, ხოლო მისი გამჭვირვალობა და სისრულე დღემდე ნიმუშად რჩება უფრო რთული, არაწრფივი სისტემების მკვლევართათვის.

რ. გამყრელიძემ შემოიღო მართვის თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ცნება – მცოცავი ოპტიმალური რეჟიმი, რომელიც მან საფუძვლად დაუდო პირველი რიგის აუცილებელი პირობების ზოგად აქსიომატურ თეორიას ოპტიმალური ამოცანებისათვის.

მონოგრაფიას, რომელშიც აისახა ოპტიმალური მართვის მათემატიკური თეორია, იმ დროის უმაღლესი ჯილდო – ლენინური პრემია მიენიჭა.

შრომათა ციკლი, რომელიც რევაზ გამყრელიძემ ალგებრულ გეომეტრიასა და ალგებრულ ტოპოლოგიაში შეასრულა, კლასიკურადაა აღიარებული. მიუხედავად იმისა, რომ მათემატიკის ამ დარგების კვლევის მეთოდებმა არსებითი ევოლუცია განიცადეს, რ. გამყრელიძის მიერ კომპლექსური ალგებრული მრავალსახეობის მახასიათებელი კლასების მრავალსახეობის პროექციული ინვარიანტების საშუალებით გამოსახვა და ამ კლასების ალგებრულობის დამტკიცება ისეთი საკითხია, რომელსაც გვერდს ვერ აუვლის დარგის ვერცერთი სპეციალისტი.

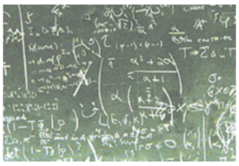
ცალკე თემაა რ.გამყრელიძის პედაგოგიური მოღვაწეობა, რომელიც დღემდე გრძელდება ბატონი რეზოს მრავალრიცხოვანი მოსწავლეების მეშვეობით უკვე მსოფლიოს მრავალ უნივერსიტეტსა და სამეცნიერო-სასწავლო ცენტრში, მათ შორის საქართველოშიც. უნივერსიტეტის დამთავრებისთანავე იგი ხელმძღვანელობდა ცნობილ სემი-

ნარს ვ.მ.ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში და ძნელად მოიძებნება მომდევნო პერიოდის გამორჩეული მათემატიკოსი, რომელიც გარკვეული დროის განმავლობაში ამ სემინარის მონაწილე არ ყოფილიყო. სამეცნიერო სემინარი საბჭოთა კავშირის (ხოლო შემდეგ რუსეთის) მეცნიერებათა აკადემიის ვ.ა.სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტში, რომელსაც რ. გამყრელიძე, ლევ პონტრიაგინის გარდაცვალების შემდეგ, როგორც მისი სამეცნიერო მემკვიდრე, ხელმძღვანელობდა, გამორჩეული იყო თავისი სტილით და აგრძელებდა იმ დიდ ტრადიციებს, რომელიც ელიტარული მოსკოვური მათემატიკური სკოლების უნიკალურობას უსვამდა ხაზს. დარგის მსოფლიოს ყველა წამყვანი სპეციალისტი თავს ვალდებულად თვლიდა და ცდილობდა ახალი შედეგებით წარმდგარიყო დარგის ფუძემდებლის, რევაზ გამყრელიძის სემინარზე. გონიერ ადამიანს, ვისაც ერთხელ მაინც მოუსმენია მისი მოხსენების ან ლექციისათვის, სპეციალისტი იქნება იგი თუ უბრალო მსმენელი, გულგრილს ვერ დატოვებს ბატონი რეზოს თხრობის ელეგანტური და აზრის განვითარების ნათელი სტილი.

ოპტიმალური მართვის საფუძვლების ცნობილი სახელმძღვანელო, რომელიც თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტმა ორჯერ გამოსცა და რომელსაც საფუძვლად დაედო თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში რ.გამყრელიძის მიერ წაკითხული ლექციათა ციკლი, ხოლო შემდეგ კი ითარგმნა ინგლისურად და გამოსცა ამერიკულმა გამომცემლობა „პლენუმ პრესმა“, არის ზოგადმათემატიკური ტრაქტატი, რომელიც მსოფლიო საუნივერსიტეტო კურსების საუკეთესო ტრადიციების მატარებელი სახელმძღვანელოა. ასეთი სახელმძღვანელოს შექმნას ხელი შეუწყო რუსული, ამერიკული და ევროპული მათემატიკური განათლების სისტემების თანმიმდევრულმა ცოდნამ. ბატონი რეზო მეგობრობდა ამერიკელ და ევროპელ იმ მეცნიერებთან, რომლებიც თავიანთი ქვეყნების სამეცნიერო და საგანმანათლებლო საქმიანობის სათავეებში იდგნენ. რამდენიმე ძველი თაობის დასავლელი მეცნიერი თავის მემუარებში მოიხსენიებს ახალგაზრდა მათემატიკოსს — რევაზ გამყრელიძეს, როგორც დასავლური ტიპის მოაზროვნეს და მეცნიერს. რევაზ გამყრელიძეს ლექციათა კურსები წაკითხული აქვს მსოფლიოს მრავალ უნივერსიტეტსა და სამეცნიერო ცენტრში. „ცივი ომის“ პერიოდში რ.გამყრელიძეს თავიანთ უნივერსიტეტებში, ლოს ანჯელესსა და ნიცაში უმასპინძლეს ლეგენდარულმა მათემატიკოსებმა რიჩარდ ბელმანმა და ჟან დიედონემ.

რ.გამყრელიძის ფართო ხედვა მეცნიერებისადმი კიდევ ერთხელ გამოვლინდა მისი მათემატიკურ მეცნიერებათა გამოცემების მთავარ რედაქტორად მუშაობის პერიოდში საბჭოთა კავშირის (ამჟამად რუსეთის) მეცნიერებათა აკადემიის სამეცნიერო-ტექნიკური ინფორმაციის სამეცნიერო-კვლევით ინსტიტუტში. მრავალტომიანი გამოცემები მათემატიკის ყველა დარგში, რომელთა თემატიკას და ავტორებს რ.გამყრელიძე არჩევდა, საკმაოდ პოპულარული გახდა შინაარსის მრავალფეროვნებისა და გადმოცემული მასალის სისრულის გამო. სერია „მათემატიკის თანამედროვე პრობლემები: ფუნდამენტური მიმართულებები“ გამომცემლობა „შპრინგერმა“ ინგლისურ ენაზე თარგმნა და გამოსცა ას ტომად! დღემდე პოპულარული გამოცემა მათემატიკურ საზოგადოებაში ცნობილია „მწვანე ენციკლოპედიის“ სახელწოდებით და ითვლება, რომ თუკი მათემატიკის რომელიმე დარგის მიღწევების გაცნობა გინდა, უნდა მიმართო გამყრელიძის „მწვანე ენციკლოპედიას“. რევაზ გამყრელიძის დიდი ავტორიტები და გავლენა მათემატიკურ საზოგადოებაზე განაპირობებდა პირველხარისხოვანი ავტორების მოზიდვას კონკრეტულ თემატიკაში. ამჟამად რევაზ გამყრელიძე მისივე დაფუძნებული რამდენიმე მაღალრეიტინგული ჟურნალის მთავარი რედაქტორია, რომელსაც გამოსცემს „შპრინგერი“. „შპრინგერი“ 2010 წლამდე აგრეთვე გამოსცემდა რევაზ გამყრელიძის ინიციატივით საქართველოში დაარსებულ ზოგადმათემატიკურ ჟურნალს „თანამედროვე მათემატიკა და მისი გამოყენება“.

საქართველოში ოპტიმალური მართვის მათემატიკური თეორიის კვალიფიციური კადრების მომზადების სფეროში მნიშვნელოვანი როლი შეასრულა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში რ.გამყრელიძის მიერ დაარ-



სებულმა კათედრამ, რომლის პირველი გამგე თვითონ იყო. ამჟამად საქართველოს უნივერსიტეტებში ამ კათედრაზე მომზადებული მრავალი პროფესორი წარმატებით მოღვაწეობს. მნიშვნელოვანია აგრეთვე რ.გამყრელიძის დამსახურება საინჟინრო მიმართულების მართვის თეორიის სპეციალისტების ჯგუფის ჩამოყალიბებაში.

რევაზ გამყრელიძეს მინიჭებული აქვს საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ანდრია რაზმაძის სახელობის პრემია.

მაქსიმუმის პრინციპის ინვარიანტული ფორმულირება, ჰამილტონური ფორმალიზმი მართვის თეორიაში, ოპტიმალური მართვის გეომეტრიული თეორია არის ამჟამად რევაზ გამყრელიძის სამეცნიერო ინტერესების სფერო. უკანასკნელ პერიოდში მისმა და მისი მოწაფეების მიერ განვითარებულმა გეომეტრიულმა მეთოდებმა გამოყენება პოვა კვანტური სისტემების მართვის თეორიაში. გამყრელიძის მეორე ვარიაციის ფორმულები, კვადრატული ასახვის ტოპოლოგიური ინვარიანტები, ქრონოლოგიური აღრიცხვა მუდმივად გვხვდება თანამედროვე მათემატიკის სხვადასხვა, ერთი შეხედვით ერთმანეთისაგან შორს მდგომ დარგში.

2017 წელს ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტმა ქართულ ენაზე გამოსცა რევაზ გამყრელიძის ცნობილი ლექციათა კურსი „ოპტიმალური მართვის თეორიის საფუძვლები“, რომელიც მან თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში წაიკითხა 1974 წელს. ეს წიგნი საფუძვლად დაედო ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტში ვარიაციათა აღრიცხვის სასწავლო კურსს, რომლის შექმნაშიც რ.გამყრელიძემ აქტიური მონაწილეობა მიიღო. 2019 წელს ცნობილმა რუსულმა გამომცემლობამ რუსულ ენაზე გამოსცა აღნიშნული წიგნის მესამე, გადამუშავებული და შესწორებული რედაქცია, რომელიც რევაზ გამყრელიძის მოსწავლეებმა და თანამშრომლებმა (გ.გიორგაძე, ა.სარიჩევი, ი.საჩკოვი) ავტორთან აქტიური თანამშრომლობით მოამზადეს.

1999 წელს ინგლისურ ენაზე გამოქვეყნდა რ.გამყრელიძის ნაშრომი „მაქსიმუმის პრინციპის აღმოჩენა“, რომელიც მომდევნო წლებში მრავალმა ევროპულმა და ამერიკულმა გამომცემლობამ შეიტანა თავის გამოცემებში. ნაშრომის რუსული თარგმანი კი შევიდა წიგნში „XX საუკუნის მათემატიკური მოვლენები“. ამ ნაშრომის ქართული ვარიანტის მომზადებაში რევაზ გამყრელიძემ აქტიური მონაწილეობა მიიღო და ნაშრომი 2018 წლის ჟურნალ „მათემატიკაში“ გამოქვეყნდა.

წელს აკადემიკოს რევაზ გამყრელიძეს 95 წელი შეუსრულდა. მხნეობას და ჯანმრთელობას ვუსურვებთ მათემატიკის ქართველ კლასიკოსს — რევაზ გამყრელიძეს!

ბიოგრაფია

დაიბადა 1927 წლის 4 თებერვალს ქუთაისში.

1945 წელს გახდა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტი. ერთი წლის შემდეგ სასწავლებლად გადავიდა მოსკოვის უნივერსიტეტში;

1950 წელს დაამთავრა მ.ვ.ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი;

1950-1953 წლებში იყო საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის ვ.მ.სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის ასპირანტი;

1953 წელს დაიცვა საკანდიდატო დისერტაცია მ.ვ.ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში აკადემიკოს ლევ პონტრიაგინის ხელმძღვანელობით;

1953 წლიდან მუშაობდა მოსკოვის უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის დიფერენციალური განტოლების კათედრაზე, 1962 წლიდან პროფესორია;

1961 წელს დაიცვა სადოქტორო დისერტაცია ვ.მ.სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტში;

1961 წლიდან რუსულენოვანი რეფერატული ჟურნალის "Математика" მთავარი რედაქტორია;

1962 წელს მიენიჭა საბჭოთა კავშირის უმაღლესი სამეცნიერო ჯილდო — ლენინური პრემია;

1969 წელს არჩეულ იქნა საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსად;

1953-1988 წლებში იყო საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის ვ.მ.სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის უმცროსი, უფროსი, მთავარი მეცნიერ-თანამშრომელი;

1968 წელს დააარსა ოპტიმალური მართვის თეორიის კათედრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, იყო კათედრის გამგე;

1980 წელს მიენიჭა საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა.რაზმაძის სახელობის პრემია;

1981 წელს არჩეულ იქნა საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტად.

1988-1997 წლებში, ლევ პონტრიაგინის გარდაცვალების შემდეგ, იყო დიფერენციალური განტოლებების განყოფილების გამგე;

1997 წლიდან დღემდე რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის მრჩეველია;

1993 წლიდან შპრინგერის ჟურნალების "Journal of Dynammical and Control Systems" და "Journal of Mathematical Sciences" დამაარსებელი და მთავარი რედაქტორია;

2003 წელს არჩეულ იქნა რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსად;

2017 წელს მიენიჭა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ივანე ჯავახიშვილის სახელობის მედალი.

სიმრავლეთა თეორიის პარადოქსები

ანა დანელია

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ასისტენტ-პროფესორი

როგორც ცნობილია, სიმრავლეთა თეორიას ეფუძნება თანამედროვე მათემატიკა. ამ თეორიის ფუძემდებლად ითვლება მეცხრამეტე საუკუნის გამოჩენილი გერმანელი მათემატიკოსი **გეორგ კანტორი** (1845-1918).

სიმრავლეთა თეორიის განვითარებისას თავი იჩინა სხვადასხვა პარადოქსმა. ერთ-ერთ ცნობილ პარადოქსზე ჩვენ ვისაუბრეთ ჟურნალის წინა ნომერში (ბანახ-ტარსკის პარადოქსი). მოცემულ სტატიაში ჩვენ განვიხილავთ სიმრავლეთა თეორიის კიდევ რამდენიმე საინტერესო პარადოქსს, რაც, ვფიქრობთ, ჩვენი პატარა მკითხველისთვის ძალიან საინტერესო და ადვილად აღქმადი იქნება. მიმოვიხილავთ სიმრავლეებთან დაკავშირებულ სხვადასხვა საკითხს, მათ შორის იმას, თუ როგორ უვლის გვერდს სიმრავლეთა თეორია პარადოქსულ სიტუაციებს.

როგორც ვიცით, არსებობს ორი ტიპის სიმრავლე: სასრული და უსასრულო. უსასრულო სიმრავლეებთან მიმართებაში ვხვდებით ერთ უცნაურ ფაქტს: სიმრავლეებს N-ს (ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე) და N $N\setminus\{1\}$-ს ერთი და იგივე სიმძლავრე აქვს, ანუ, უხეშად რომ ვთქვათ, ისინი შედგებიან „ტოლი რაოდენობის ელემენტებისგან“. რაც ეხება სასრულ სიმრავლეებს: თუ სასრულ სიმრავლეს დავუმატებთ ელემენტს, მაშინ, ცხადია, მიღებულ სიმრავლეს და თავდაპირველ სიმრავლეს არ ექნებათ ერთი და იგივე სიმძლავრე. ეს ძალიან დიდი განსხვავებაა სასრულ და უსასრულო სიმრავლეებს შორის.

გალილეო გალილეის პარადოქსი

სასრული სიმრავლის, ანუ სიმრავლის, რომლის ელემენტთა რაოდენობა სასრულია, ყოველი ქვესიმრავლე უფრო პატარაა (ანუ შედგება უფრო ცოტა რაოდენობა ელემენტებისგან), ვიდრე თვით ეს სიმრავლე. უსასრულო სიმრავლის ნაწილს კი შეიძლება იგივე „რაოდენობა“ ელემენტები ჰქონდეს. თითქოს ეს პარადოქსია, როგორ შეიძლება „მთელ“ სიმრავლეში ელემენტების იგივე „რაოდენობა“ იყოს, რაც მის „ნაწილში“.

მაგრამ, თუ შევხედავთ ამას მათემატიკური თვალსაზრისით, არავითარ პარადოქსთან არ გვაქვს საქმე. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი:

ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეში გვხვდება ისეთი რიცხვები, რომლებიც წარმოადგენენ სრულ კვადრატს, 1, 2, 4,..., 36, 49,.... აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე A-თი. ცხადია, რომ A არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის მკაცრი ქვესიმრავლე. მაგალითად, რიცხვები 5, 6, 17,... და ა.შ., არ ეკუთვნის A-ს. ამავე დროს, ყოველი ნატურალური რიხვი მიიღება როგორც კვადრატული ფესვი A სიმრავლიდან აღებული ერთი ელემენტიდან, ანუ A სიმრავლეში „იმავე რაოდენობის“ ელემენტებია, რაც N-ში.

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots & n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow & \ldots \\ 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & \ldots & n^2 & \ldots \end{array}$$

ამ ფაქტს ხშირად უწოდებენ გალილეოს პარადოქსს, ვინაიდან ამ მაგალითზე ყურადღება პირველად მან გაამახვილა.

მსგავსი მაგალითები „ტოლი რაოდენობის“ ორი სიმრავლისა, რომელთაგანაც ერთი მეორის მკაცრი ქვესიმრავლეა, ხშირად გვხვდება სასკოლო კურსშიც. განვიხილოთ ლუწ და კენტ რიცხვთა სიმრავლეები A და B. ერთობლიობაში ეს ორი სიმრავლე წარმოადგენს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს, ანუ მათი გაერთიანებაა N. თუმცა ორივე მათგანში ელემენტთა რაოდენობა იგივეა, რაც N-ში. შესაბამისობები, რომლებიც მოცემულ ურთიერთცალსახა თანადობებს ამყარებენ, მოცემულია ქვემოთ:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots & n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow & \ldots \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & \ldots & 2n, & \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots & n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow & \ldots \\ 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & \ldots & 2n-1, & \ldots \end{array}$$

ჰილბერტის სასტუმროს პარადოქსი

ქალაქის სასტუმროში, რომელშიც უსასრულო რაოდენობა ოთახებია, ყოველი ოთახი დაკავებულია. ამ დროს ქალაქში ვიზიტორი ჩამოდის და მას უნდა სასტუმროში გაჩერება. შეუძლია თუ არა სასტუმროს ადმინისტრატორს, უზრუნველყოს სტუმრის დაბინავება ისე, რომ თითოეულ ნომერში მხოლოდ ერთი სტუმარი იყოს?

ერთი შეხედვით ჩანს, რომ ეს შეუძლებელია. თუმცა ადმინისტრატორი პოულობს გამოსავალს, ვინაიდან საქმე უსასრულო სიმრავლესთან (უსასრულო რაოდენობა ოთახებთან) გვაქვს. ადმინისტრატორი იქცევა შემდეგნაირად: იგი პირველ ოთახში აბინავებს ახლად ჩამოსულ ვიზიტორს, ხოლო პირველ ოთახში მცხოვრები სტუმარი გადაჰყავს მეორეში, მეორე მესამეში და ა. შ. იმავე ლოგიკით, თუ ქალაქში ჩამოვა კიდევ ახალი ვიზიტორი, ადმინისტრატორი მასაც დააბინავებს, მიმართავს რა იმავე ხერხს. ანუ, თუ ქალაქში ჩამოვა სასრული რაოდენობა სტუმრებისა, მიუხედავად იმისა, რომ სასტუმრო სავსეა, ადმინისტრატორი მოახერხებს ყველას ცალ-ცალკე ოთახში დაბინავებას.

ისმის კითხვა, თუ ქალაქში ჩამოვა უსასრულო რაოდენობა სტუმრებისა, შეიძლება თუ არა მოხერხდეს მათი დაბინავება იმავე პრინციპით, რომ თითო ოთახში თითო სტუმარი იყოს? თურმე შეიძლება, თუმცა ამ შემთხვევაში ადმინისტრატორმა უნდა შეცვალოს მოქმედების გეგმა და იმოქმედოს შემდეგნაირად: გადაიყვანოს ყველა სტუმარი ლუწნომრიან ოთახებში (ეს შესაძლებელია. გავიხსენოთ ზემოთ მოყვანილი შესაბამისობა ლუწ რიცხვთა სიმრავლესა და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს შორის), ხოლო შემდეგ, დარჩენილ თავისუფალ კენტნომრიან ოთახებში განათავსოს ჩამოსული სტუმრები.

აქილევსისა და კუს პარადოქსი

ეს პარადოქსი ცნობილია, როგორც ზენონის პარადოქსი. აქილევსი, რომელიც ცნობილი იყო როგორც საბერძნეთის ყველაზე სწრაფი მორბენალი, ეჯიბრება სირბილში კუს. ვინაიდან იგი ასჯერ სწრაფია, ვიდრე კუ, იგი აძლევს მას ფორას 100 მეტრს, ანუ კუ იმყოფება 100 მეტრით წინ, ვიდრე აქილევსი. როდესაც აქილევსი გაირბენს 100 მეტრს და მივა იმ ადგილას, სადაც თავდაპირველად იმყოფებოდა კუ, ეს უკანასკნელი ამ დროში გადაადგილდება 1 მეტრით. როდესაც აქილევსი დაფარავს ამ 1 მეტრს, კუ ამ დროში გადაადგილდება 1 სანტიმეტრით და ა. შ. ეს პროცესი გაგრძელდება უსასრულოდ, ვინაიდან აქილევსი მეყსეულად ვერ გადაადგილდება ერთი ადგილიდან მეორეში, მას ამისთვის რაღაც დრო სულ დასჭირდება და ამ დროში კუ რაღაც მანძილს გაივლის, თუნდაც მცირეს, მაგრამ ნულისგან განსხვავებულს, ანუ იგი სულ წინ იქნება, ვიდრე აქილევსი.

არისტოტელედან დაწყებული, უამრავი მოაზროვნე ცდილობდა ამ პარადოქსის ახსნას, მაგრამ არცერთის არ იყო იდეალური. არის ეს პარადოქსი აუხსნელი? სინამდვილეში ხომ აქილევსი იოლად გადაუსწრებს კუს, ვერც კი გააცნობიერებს იმას, რომ ცნობილი პარადოქსი უკრძალავს მას ამის

გაკეთებას. ამ პარადოქსის ამოსახსნელად უნდა განვიხილოთ უსასრულო გეომეტრიული მწკრივი და გავაცნობიეროთ, რომ მისი ჯამი, ანუ უსასრულო ოპერაციებისგან (ვგულისხმობთ შეკრების ოპერაციას) მიღებული ჯამი შეიძლება იყოს სასრული რიცხვი. პარადოქსიდან მრავალი საუკუნის შემდეგ ნიუტონმა და ლეიბნიცმა შექმნეს მკაცრი მათემატიკური აპარატი, რომლიდანაც ცხადი იყო, რომ უსასრულო მწკრივის ჯამი შეიძლება სასრული რიცხვი ყოფილიყო. მანამდე ეგონათ, რომ ყოველი უსასრულო მწკრივის ჯამი აუცილებლად უსასრულობაა. ზენო იხილავდა მწკრივს $100 + 1 + 1/100 + ...$, რომელიც წარმოადგენდა აქილევსის მიერ განვლილ მანძილს კუს დაწევამდე. მას ეგონა, რომ ამ მწკრივის ჯამი უსასრულობა იყო, ვინაიდან უსასრულო ჯამი იყო. დღეისათვის სკოლის მოსწავლემაც იცის, რომ ეს მწკრივი წარმოადგენს უსასრულოდ კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას პირველი წევრით $a = 100$ და მნიშვნელით $q = 1/100$. ამიტომ ამ მწკრივის ჯამია $S = a/(1 - q) = 100/(1 - 1/100) = 10000/99$, რომელიც დაახლოებით 101 მეტრის ტოლია.

პარადოქსი დალაქზე

ერთ-ერთ სამხედრო ნაწილში ცხოვრობდა პოლკოვნიკი დალაქი. ერთხელ მეთაურმა უბრძანა მას გაეპარსა ის და მხოლოდ ის ჯარისკაცი, ვინც თავისით, რაღაც მიზეზების გამო, ვერ იპარსავდა. ეს ბრძანება აზრს მოკლებული არ იყო: თუ ჯარისკაცს თავისი თავის გაპარსვა შეეძლო, რატომ უნდა დაეკარგა დრო მის გაპარსვაზე პოლკოვნიკ დალაქს? მითუმეტეს, რომ პოლკი დიდი იყო და მარტო ეს დალაქი ვერაფერს გახდებოდა. მიიღო რა ბრძანება, დალაქს თავიდან გაუხარდა, რადგანაც ბევრ ჯარისკაცს შეეძლო თავისი თავის გაპარსვა, მაგრამ მაინც დალაქს აპარსვინებდა. დალაქი შეუდგა საქმეს. როცა მორჩა ჯარისკაცების გაპარსვას და აპირებდა თავისი თავის გაპარსვას, დაფიქრდა, ჩემს თავს რა ვუყო: მე რომ ჩემი თავი გავპარსო, ბრძანებას დავარღვევ, ვინაიდან, თუ ჩემს თავს ვიპარსავ, მაშინ დალაქმა არ უნდა გამპარსოს, ანუ მე ჩემი თავი არ უნდა გავიპარსო; მეორე მხრივ გაჩნდა მიზეზი, რომლის გამო ჩემს თავს ვერ ვპარსავ, ამიტომ უნდა გამპარსოს დალაქმა, ანუ ჩემი თავი მე უნდა გავიპარსო. ისტორიაში არაფერია ნახსენები, თუ როგორ დამთავრდა ეს ამბავი. კი მაგრამ, რა შუაშია აქ სიმრავლეთა თეორია? საქმე იმაშია, რომ მეთაურს სურდა განესაზღვრა სიმრავლე იმ ადამიანებისა, რომლებსაც დალაქი გაპარსავდა: {ის და მხოლოდ ის ადამიანები, რომლებიც თავისით არ იპარსავენ}. ერთი შეხედვით ეს ჩვეულებრივი სიმრავლეა, განისაზღვრება რამდენიმე სიტყვით. თითქოს არაფერი განსხვავება არაა ამ სიმრავლესა და, მაგალითად, შემდეგ სიმრავლეს შორის: {სკოლის ყველა მოსწავლე}, მაგრამ პირველი სიმრავლის განხილვისას ვაწყდებით გაურკვევლობას: გაურკვეველია, ეკუთვნის თუ არა ამ სიმრავლეს დალაქი?

განვიხილოთ ამ პარადოქსის მეორენაირი ვერსია. ვთქვათ, M არის შემდეგი სიმრავლე: M = {სიმრავლე იმ A სიმრავლეებისა, სადაც A არ ეკუთვნის A-ს}, ანუ M-ში ჩავრთოთ მხოლოდ ის A სიმრაავლეები, რომლებიც არ ეკუთვნიან თავის თავს. M სიმრავლე რაღაც აზრით წარმოადგენს „დალაქს" წინა პარადოქსიდან. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $M \in M$, მივდივართ დასკვნამდე, რომ $M \notin M$, და პირიქით, თუ ჩავთვლით, რომ $M \notin M$, ვღებულობთ, რომ $M \in M$. ამრიგად, სიმრავლეთა თეორიის შემქმნელები წააწყდნენ რა ამდაგვარ პარადოქსებს, მივიდნენ იმ დასკვნამდე, რომ სიმრავლის მოცემა ნებისმიერი სიტყვათა წყობით არ შეიძლება. ამან გამოიწვია აუცილებლობა სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიკის ჩამოსაყალიბებლად.

1. სიმრავლე განისაზღვრება მისი ელემენტებით: სიმრავლეები, რომლებიც ერთი და იმავე ელემენტებისგან შედგება, ერთმანეთის ტოლია. $\forall z (z \in X \ \ z \in Y) \Rightarrow X = Y.$
2. სიმრავლეთა ყველა ელემენტების ერთობლიობა წარმოადგენს სიმრავლეს, ანუ სიმრავლეთა გაერთიანება კვლავ სიმრავლეა.
3. ყოველი A A სიმრავლისთვის და ყოველი f პირობისთვის არსებობს სიმრავლე B $B = \{x : x \in A, f(x)\}$ — ქვესიმრავლე A სიმრავლის ელემენტებისა.

სხვა სიტყვებით, არ შეგვიძლია განვიხილოთ სიმრავლე იმ სიმრავლეებისა, რომ-

ლებიც არ შეიცავენ თავის თავს, არამედ შეგვიძლია ავიღოთ სიმრავლის რაიმე „ნაწილი“ — სიმრავლე მისი ელემენტებისა, რომლებიც რაიმე პირობას აკმაყოფილებენ.

4. სიმრავლე სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლისა არის სიმრავლე.
5. ვთქვათ, X სიმრავლეა, ხოლო $f(y,z)$ — ნებისმიერი ფორმულაა. მაშინ, თუ ყოველი y-თვის არსებობს და ამასთან ერთადერთი z, ისეთი, რომ ჭეშმარიტია $f(y,z)$, მაშინ არსებობს სიმრავლე ყველა ისეთი z-ებისა, რომლებისთვისაც მოიძებნება $y\in X$, ისეთი, რომ $f(y,z)$ ჭეშმარიტია.
6. არ არსებობს უსასრულო მიმდევრობა ჩალაგებული სიმრავლეებისა: ყოველი ჯაჭვი სიმრავლეებისა A_1 A_2 A_3 ... სასრულია.
7. არსებობს უსასრულო სიმრავლეები, ანუ ისეთი X სიმრავლეები, რომ X და $X\cap\{X\}$ ტოლი სიმძლავრისაა.
8. თუ გვაქვს არაცარიელ თანაუკვეთ სიმრავლეთა რაიმე ერთობლიობა, მაშინ თითოეული სიმრავლიდან შეგვიძლია ამოვარჩიოთ ერთი ელემენტი და მათი ერთობლიობა კვლავ იქნება სიმრავლე. ამ აქსიომას ამორჩევის აქსიომა ეწოდება.

თოვლის ბაბუა და კანფეტები

ახალ წელს ბავშვებთან მოვიდა თოვლის ბაბუა კანფეტებით სავსე ხურჯინით. კანფეტები ხურჯინში უსასრულოდ ბევრია და ისინი გადანომრილია ნატურალური რიცხვებით. თითოეულ კანფეტს აწერია მისი ნომერი და ყოველი ნატურალური რიცხვისთვის არის მხოლოდ ერთი კანფეტი, რომელზეც ეს ნომერი აწერია. ახალი წლის დადგომამდე ერთი წუთით ადრე თოვლის ბაბუამ ბავშვებს აჩუქა კანფეტი ნომრით 1. ნახევარი წუთით ადრე მან აჩუქა კანფეტები ნომრებით 2 და 3, მაგრამ უკან გამოართვა კანფეტი ნომრით 1. შემდეგ, მეოთხედი წუთით ადრე მან ბავშვებს დაურიგა კანფეტები ნომრით: 4, 5, 6 და 7, მაგრამ გამოართვა უკან კანფეტები ნომრით 2 და 3 და ასე შემდეგ. გულუხვი თოვლის ბაბუა ყოველ ჯერზე აძლევდა ორჯერ მეტ კანფეტს, ვიდრე წინა ჯერზე. ახალი წლის დადგომამდე $1/2^n$ წუთით ადრე იგი აძლევს ბავშვებს კანფეტებს ნომრებით: 2^n, 2^n+1,..., $2^{n+1}-1$ და უკან მიაქვს კანფეტები ნომრებით: 2^{n-1}, $2^{n-1}+1$,..., 2^n-1, რომლებიც მისცა მათ წინა ჯერზე. ამასთან, ბავშვების კანფეტების რიცხვი სწრაფად იზრდება. რამდენი კანფეტი ექნებათ მათ ახალი წლის დადგომისას? ვის ექნება კანფეტი ნომრით 1? ცხადია, იგი ექნება თოვლის ბაბუას. ვის ექნება კანფეტი ნომრით 2 და 3? ცხადია, რომ ეს კანფეტებიც ექნება თოვლის ბაბუას, მან ხომ მეოთხედი წუთით ადრე უკან წაიღო ეს კანფეტები. და ასე შემდეგ, ყოველი კონკრეტული კანფეტი თოვლის ბაბუას ექნება ხურჯინში. მაშ რა გამოდის? ყოველ ბიჯზე ბავშვებს აქვთ ორჯერ მეტი კანფეტი, ხოლო შუაღამისას ხდება კატასტროფა? სინამდვილეში აქ არაფერი პარადოქსი არაა. საქმე იმაშია, რომ უსასრულო სიმრავლეები მოწყობილია არსებითად რთულად, ვიდრე სასრული სიმრავლეები და ინტუიციამ ამ შემთხვევაში ხშირად შეიძლება მცდარ დასკვნამდე მიგვიყვანოს.

სიმეტრიული მრავალწევრები და ალგებრული განტოლებები

ელენე ხუჭუა
სსიპ სამტრედიის #12 საჯარო სკოლის მათემატიკის მასწავლებელი

სტატიაში განხილულია სიმეტრიულ მრავალწევრთა გამოყენება ერთუცნობიანი ალგებრული განტოლებების გამოკვლევაში ვიეტის ფორმულების საშუალებით, რომლებიც გამოსახავს ალგებრული განტოლების ფესვების მიმართ ძირითად სიმეტრიულ მრავალწევრებს მისივე კოეფიციენტებით (იმ პირობით, რომ მოცემულ ველში განტოლების ფესვთა რიცხვი მისი ხარისხის ტოლია). არსებითია, რომ მხოლოდ განტოლების ფესვების მიმართ სიმეტრიული მრავალწევრია ცალსახად განსაზღვრული: ნებისმიერი სხვა მრავალწევრის მნიშვნელობა, საზოგადოდ, დამოკიდებულია ფესვების ნუმერაციაზე.

სტატია შედგება ორი პარაგრაფისგან. პირველ პარაგრაფში გადმოცემულია სიმეტრიული მრავალწევრების შესახებ ძირითადი თეორემის დამტკიცება და მაგალითებზე განხილულია ამ თეორემის რამდენიმე კონკრეტული რეალიზაცია შემდგომი არსებითი გამოყენებისთვის. მეორე პარაგრაფში განხილულია კუბური განტოლებების თეორია და ნაჩვენებია მისი გამოყენება კონკრეტულ მაგალითებზე.

1. სიმეტრიული მრავალწევრები

ამ პარაგრაფში შევეხებით რამდენიმე უცნობის მრავალწევრებს. თუმცა მათთვის, ისევე როგორც ერთი უცნობის მრავალწევრთა შემთხვევაში, არსებობს შინაარსიანი თეორია. ამ სტატიაში შევეხებით მხოლოდ ერთ მნიშვნელოვან ფაქტს, რომელიც შეეხება სპეციალური სახის მრავალწევრებს, ე. წ. **სიმეტრიულ მრავალწევრებს.** დავიწყებთ იმით, რომ შემოვიტანთ რამდენიმე უცნობის მრავალწევრის ზოგად განსაზღვრებას, სადაც გამოვიყენებთ რგოლის და ერთი უცნობის მრავალწევრთა რგოლის თვისებებს და ინდუქციას, რომლის ბაზისია ერთი უცნობის მრავალწევრთა რგოლის განსაზღვრება (იხ. მაგალითად, [1, § 1, თეორემა 5], [2, § 5.4]).

ტოლობიდან:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),$$

სადაც $a_0\neq 0$ და $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ამ მრავალწევრის ყველა ფესვია მათი ჯერადობების გათვალისწინებით, გამომდინარეობს ტოლობები:

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}=(-1)^k\frac{a_k}{a_0}\quad(k=1,2,\ldots,n),\tag{1}$$

რომელსაც ეწოდება **ვიეტის ფორმულები f მრავალწევრისთვის.**

ვთქვათ, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობებია (ცვლადებია), K ველია. ინდუქციით განვსაზღვროთ $K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ რგოლი $x_1,x_2,\ldots,x_n$-ის მიმართ, როგორც $K[x_1,x_2,\ldots,x_n][x_n]$ რგოლი.

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $f\in K[x_1,x_2,\dots,x_n]$ მრავალწევრი ცალსახად წარმოიდგინება $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})x_n^k$ სახით, სადაც $f_0,f_1,f_2,\dots$ რაღაც მრავალწევრებია $x_1,x_2,\dots,x_{n-1}$ უცნობების მიმართ და მათ შორის მხოლოდ სასრული რაოდენობაა ნულისგან განსხვავებული. უდიდეს ნომერს ნულისგან განსხვავებულ f_k მრავალწევრებს შორის ეწოდება f პოლინომის **ხარისხი** x_1 უცნობის მიმართ და $\deg_{x_1} f$-ით აღინიშნება. ამგვარად, ყოველი მრავალწევრი $x_1,x_2,\dots,x_n$ უცნობების მიმართ $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ ერთწევრების სასრული ჯამია, სადაც $a\in K$ და $k_1,k_2,\dots,k_n$ მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია. ამ ერთწევრის a ელემენტს ვუწოდოთ მისი **კოეფიციენტი**, n-ეულს $(k_1,k_2,\dots,k_n)$ — ერთწევრის **ხარისხი**, k_i რიცხვს — ერთწევრის ხარისხი x_i უცნობის მიმართ, ხოლო ჯამს $k_1+k_2+\dots+k_n$ სრული ხარისხი უცნობთა ერთობლიობის მიმართ. $f\in K[x_1,x_2,\dots,x_n]$-ს ეწოდება d ხარისხის **ერთგვაროვანი** მრავალწევრი, თუ ყველა მისი ერთწევრის სრული ხარისხია d. ნებისმიერი მრავალწევრი ცალსახად წარმოიდგინება $0,1,2,\dots$ ხარისხების ერთგვაროვანი მრავალწევრების ჯამად, რომლებსაც ეწოდება მისი **ერთგვაროვანი კომპონენტები**. არანულოვანი მრავალწევრის **სრული ხარისხი** (უცნობია ერთობლიობის მიმართ) ეწოდება მისი ერთწევრების სრულ ხარისხებს შორის მაქსიმალურს ან, რაც იგივეა, მისი ერთგვაროვანი კომპონენტების ხარისხებს შორის მაქსიმუმს და $\deg f$-ით აღინიშნება.

ა მ ო ც ა ნ ა 1. დაამტკიცეთ, რომ:

$$\deg(f+g)\le\deg f+\deg g\,,\ \deg(fg)=\deg f+\deg g\,.$$

დავალაგოთ ერთწევრების ხარისხები შემდეგი წესით: $(k_1,k_2,\dots,k_n)>(l_1,l_2,\dots,l_n)$, თუ $k_1>l_1$ ან თუ მოიძებნება ნატურალური რიცხვი $s<n$, რომ:

$$k_1=l_1,k_2=l_2,\dots,k_s=l_s,k_{s+1}>l_{s+1}\,.$$

ცხადია, რომ ორი სხვადასხვა ხარისხიდან ერთი მეტია მეორეზე და ხარისხებისთვის მიმართება „>" ტრანზიტულია. ამ გაგებით უმაღლესი ხარისხის ერთწევრს ვუწოდოთ მრავალწევრის **უმაღლესი წევრი** (ასეთ დალაგებას ეწოდება ხარისხების **ლექსიკოგრაფიული დალაგება**). მრავალწევრის უმაღლესი წევრის ხარისხს ვუწოდოთ მისი **ხარისხი**. განსაზღვრებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ მრავალწევრთა ნამრავლის უმაღლესი წევრი თანამამრავლთა უმაღლესი წევრების ნამრავლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მრავალწევრი:

$$x_1^2x_2+2x_1x_2x_3+3x_1x_3^3-2x_2^2x_3+1$$

დალაგებულია ერთწევრთა ხარისხების კლების მიხედვით. აღვნიშნოთ, რომ $3x_1x_3^3$ ერთწევრი დაბალია, ვიდრე უმაღლესი $x_1^2x_2$ წევრი და აგრეთვე $2x_1x_2x_3$ ერთწევრი, თუმცა მისი სრული ხარისხი უკანასკნელი ორი ერთწევრის სრულ ხარისხებზე მეტია.

ნატურალურ $1,2,\dots,n$ **რიცხვთა ჩასმა** ეწოდება $M=\{1,2,\dots,n\}$ სიმრავლის ურთიერთცალსახა ასახვას თავის თავზე, ე. ი. ისეთ δ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია M-ზე და

ღებულობს მნიშვნელობებს M-ში, რომლისთვისაც $\delta(i) \neq \delta(j)$, თუ $i \neq j$. რამდენიმე უცნობის $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ მრავალწევრს ეწოდება **სიმეტრიული**, თუ

$$f\left(x_{\delta(1)}, x_{\delta(2)}, \ldots, x_{\delta(n)}\right) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ნებისმიერი δ ჩასმისთვის.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1. მრავალწევრები:

$$\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k},$$

სადაც $k = 1, 2, \ldots, n$ სიმეტრიულია. მათ ეწოდება **ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრები**.

2. მრავალწევრები (**ხარისხოვანი ჯამები**):

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ცხადია, სიმეტრიულია.

3. მრავალწევრი $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 + 3x_1x_2$ არაა სიმეტრიული, რადგან უცნობთა $\delta(1) = 2$, $\delta(2) = 1$, $\delta(3) = 3$ ჩასმას ის გადაჰყავს $3x_1x_2 + 3x_2x_3$ მრავალწევრში.

4. **ვანდერმონდის** დეტერმინანტი:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

(იხ. [2, III, 3.3.8]), რომელიც უცნობთა სხვაობების ყველა შესაძლო ნამრავლია, უცნობთა ნებისმიერი $x_i \leftrightarrow x_j$ გადანაცვლების შედეგად (შესაბამისი ჩასმაა δ: $\delta(i) = j$, $\delta(j) = i$, $\delta(k) = k$, როცა $i \neq k \neq j$) შეიძლება გამრავლდეს ± 1-ზე იმის ხარჯზე, რომ შეიცვლის ადგილებს მაკლები და საკლები. ასეთ შემთხვევათა რიცხვი ინვერსიათა რიცხვის ტოლია შესაბამის ჩასმაში. მაშასადამე:

$$V\left(x_{\delta(1)}, x_{\delta(2)}, \ldots, x_{\delta(n)}\right) = \operatorname{sgn}\left(\delta(1), \delta(2), \ldots, \delta(n)\right) V(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

ამგვარად, თვით ვანდერმონდის დეტერმინანტი არაა სიმეტრიული მრავალწევრი, მაგრამ ასეთია მისი კვადრატი:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n)^2 = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

5. მრავალწევრები:

$$h_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \qquad h_2 = x_1x_3 + x_2x_4, \qquad h_3 = x_1x_4 + x_2x_3$$

x_1, x_2, x_3, x_4 უცნობთა ნებისმიერი გადანაცვლების შედეგად გადანაცვლდებიან ერთიმეორეში. ამიტომ ნებისმიერი სიმეტრიული მრავალწევრი მათ მიმართ x_1, x_2, x_3, x_4 უცნობთა მიმართაც იქნება სიმეტრიული. კერძოდ, ასეთია მათი ნამრავლი:

$$h_1h_2h_3=\left(x_1x_2+x_3x_4\right)\left(x_1x_3+x_2x_4\right)\left(x_1x_4+x_2x_3\right).$$

ა მ ო ც ა ნ ა 2. დაამტკიცეთ, რომ სიმეტრიულია მრავალწევრი:

$$\left(x_1+x_2-x_3-x_4\right)\left(x_1-x_2+x_3-x_4\right)\left(x_1-x_2-x_3+x_4\right).$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. მრავალწევრი $s_2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ სიმეტრიულია. ადვილი სანახავია, რომ:

$$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2.$$

ამიტომ:

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

ალგებრული განტოლების ფესვთა კვადრატების ჯამი $a_1^2-2a_2^2$-ის ტოლია.

რადგან სიმეტრიულ მრავალწევრთა ჯამი და ნამრავლი სიმეტრიულია, ამიტომ n უცნობის სიმეტრიულ მრავალწევრთა სიმრავლე $K\left[x_1,x_2,\ldots,x_n\right]$ რგოლის ქვერგოლია.

თუ $f\left(y_1,y_2,\ldots,y_m\right)\in K\left[y_1,\mathrm{y}_2,\ldots,\mathrm{y}_m\right]$ და $p_1,p_2,\ldots,p_m$ სიმეტრიული მრავალწევრებია $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობთა მიმართ, მაშინ:

$$f\left(p_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right),p_2\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right),\ldots,p_m\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\right)$$

სიმეტრიული მრავალწევრია $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობთა მიმართ.

შემდეგი თეორემა წარმოადგენს ძირითად თეორემას სიმეტრიული მრავალწევრების შესახებ.

თ ე ო რ ე მ ა. ვთქვათ, $f\in K\left[x_1,x_2,\ldots,x_n\right]$ სიმეტრიული მრავალწევრია, მაშინ არსებობს მრავალწევრი $g\in K\left[y_1,y_2,\ldots,y_n\right]$, რომლისთვისაც

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=g\left(\sigma_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right),\sigma_2\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right),\ldots,\sigma_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\right),$$

სადაც $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ ძირითადი სიმეტრიული მრავალწევრებია და ეს წარმოდგენა ერთადერთია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $f=0$, მაშინ $g=0$. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ვთქვათ, f-ის უმაღლესი წევრია $u_1=ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$. შევნიშნოთ, რომ $k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_n$. მართლაც, თუ $k_i<k_{i+1}$ რომელიღაც i-თვის, მაშინ f შეიცავს აგრეთვე $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_i^{k_{i+1}}x_{i+1}^{k_i}\cdots x_n^{k_n}$ წევრს (ის მიიღება f-ის უმაღლესი წევრისგან δ ჩასმით: $\delta(i)=i+1$, $\delta(i+1)=i$, $\delta(j)=j$, როცა $i\neq j\neq i+1$), რომლის ხარისხი $\left(k_1,k_2,\ldots,k_n\right)$-ზე მეტია. თუ:

$$g_1=a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\cdots\sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\sigma_n^{k_n}=a\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\cdots\sigma_{n-1}^{l_{n-1}}\sigma_n^{l_n},$$

სადაც $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ ძირითადი სიმეტრიული მრავალწევრებია, g_1-ის უმაღლესი წევრი $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობთა მიმართ u_1-ის ტოლია, რადგან:

$$l_1+l_2+\cdots+l_n=k_1, l_2+l_3+\cdots+l_n=k_2,\ldots,l_n=k_n$$

და $f_1=f-g_1\left(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n\right)$ სიმეტრიულია $x_1,x_2,\ldots,x_n$ უცნობთა მიმართ, ხოლო მისი ხარისხი ნაკლებია f-ის ხარისხზე. თუ $f_1=0$, მაშინ ავიღოთ $g=g_1$. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ვთქვათ, f_1-ის უმაღლესი წევრია u_2. გასაგებია, რომ ის დაბალია u_1-ზე. იმავე წესით, როგორც u_1-თვის, არსებობს ერთწევრი $g_2\in K\left[y_1,y_2,\ldots,y_n\right]$, რომ $g_2\left(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n\right)$-ის უმაღლესი წევრი u_2-ის ტოლია. განვიხილოთ სიმეტრიული $f_2=f_1-g\left(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n\right)$ მრავალწევრი. თუ $f_2=0$, მაშინ გვექნება $g=g_1+g_2$. წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, ვღებულობთ სიმეტრიულ მრავალწევრთა $f,f_1,f_2,\ldots$ მიმდევრობას, რომელთა უმაღლესი წევრები აკმაყოფილებენ $u_1>u_2>\cdots$ უტოლობებს.

ნებისმიერი u_m ერთწევრის ნებისმიერი უცნობის ხარისხის მაჩვენებელი ამ ერთწევრში არ აღემატება x_1-ის მაჩვენებელს, რომელიც, თავის მხრივ, არ აღემატება k_1-ს. ამის გამო u_m ერთწევრთა ერთობლიობის ხარისხებისთვის არსებობს შესაძლებლობათა მხოლოდ სასრული რიცხვი, ასე რომ, ზემოთ აღწერილი პროცესი უნდა შეწყდეს. ეს ნიშნავს, რომ რომელიღაც ნატურალური M-თვის $f_M=0$. მაშინ $=g_1+g_2+\cdots+g_M$.

შენიშვნა 1. ტოლობა $l_1+l_2+\cdots+l_n=k_1$ გვიჩვენებს, რომ $\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\cdots\sigma_n^{l_n}$ ერთწევრის სრული ხარისხი σ_i-ების მიმართ $\deg_{x_1}u_1$-ის ტოლია.

შენიშვნა 2. ნებისმიერი m-თვის, $m\in\{1,2,\ldots,M\}$ შენიშვნა 1-ის თანახმად:

$$\deg g_m=\deg_{x_1}u_m\le\deg_{x_1}u_1=\deg_{x_1}f\left(=k_1\right).$$

ამგვარად,

$$\deg g=\deg_{x_1}f. \tag{2}$$

ძირითადი თეორემის დამტკიცების მიხედვით შეიძლება ნებისმიერი კონკრეტული სიმეტრიული მრავალწევრის $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$-ით გამოსახვა. პრაქტიკაში ერთგვაროვანი სიმეტრიული მრავაწევრებისთვის მოხერხებულია სხვა ხერხის გამოყენება, რომელსაც ავხსნით შემდეგ მაგალითზე.

მაგალითი 7. გამოვსახოთ $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$-ით მრავალწევრი:

$$f=\left(x_1x_2+x_3x_4\right)\left(x_1x_3+x_3x_4\right)\left(x_1x_4+x_2x_3\right)$$

მაგალითი 5-დან. თეორემის დამტკიცებაში აღნიშვნებიდან გვაქვს $u_1=x_1^3x_2x_3x_4$. გამოთვლების გარეშე კოეფიციენტებამდე სიზუსტით შეიძლება $u_2,u_3,\ldots$ ერთწევრთა შესაძლო კანდიდატთა პოვნა. ჯერ ერთი, მათი მაჩვენებლები უნდა ქმნიდნენ არაზრდად მიმდევრობას. მეორე, რადგან f ერთგვაროვანი ექვსი ხარისხის მრავალწევრია, მათი მაჩვენებელთა ჯამი უნდა იყოს 6-ის ტოლი და მესამე, ისინი უნდა იყოს u_1-ზე დაბალი. ამოვწეროთ ცხრილის სახით

მაჩვენებელთა ყველა შესაძლო ერთობლიობა, რომლებიც ამ სამ პირობას აკმაყოფილებენ, დაწყებული u_1-ის მაჩვენებლისგან. მარჯვნივ ამოვწეროთ შესაბამისი ძირითად სიმეტრიულ მრავალწევრთა ნამრავლები განუსაზღვრელი კოეფიციენტებით ძირითადი თეორემის დამტკიცების მიხედვით.

$$\begin{array}{cccc|l} 3 & 1 & 1 & 1 & \sigma_1^2\sigma_4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & a\sigma_3^2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & b\sigma_2\sigma_4 \end{array}$$

ამგვარად, $f=\sigma_1^2\sigma_4+a\sigma_3^2+b\sigma_2\sigma_4$. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ a და b კოეფიციენტები, ამ ტოლობაში x_1, x_2, x_3, x_4 უცნობებს მივცეთ რაიმე კონკრეტული მნიშვნელობები. წარმოვადგინოთ გამოთვლები ცხრილის სახით და მის მარჯვენა სვეტში ამოვწეროთ მიღებული განტოლებები:

x_1	x_2	x_3	x_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	f	
1	1	1	0	3	3	1	0	1	$a=1$
1	1	-1	-1	0	-2	0	1	8	$-2b=8$

მივიღეთ, რომ $a=1$ და $b=-4$, ასე რომ: $f=\sigma_1^2\sigma_4+\sigma_3^2-4\sigma_2\sigma_4$.

არაერთგვაროვანი სიმეტრიული მრავალწევრისთვის ეს ხერხი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მისი ყოველი ერთგვაროვანი კომპონენტისთვის და მიღებული გამოსახულებები შევკრიბოთ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. გადმოცემული თეორია ყოველგვარი ცვლილების გარეშე შეიძლება გადავიტანოთ უფრო ზოგად შემთხვევაზე, როცა K ნებისმიერი ასოციაციური, კომუტაციური რგოლია ერთეულით. იმ შემთხვევაში, როცა $K=\mathbb{Z}$, მიიღება შემდეგი შედეგი: ყოველი მთელკოეფიციენტებიანი სიმეტრიული მრავალწევრი წარმოიდგინება ძირითადი სიმეტრიული მრავალწევრების მრავალწევრებად, აგრეთვე მთელი კოეფიციენტებით.

დამტკიცებული თეორემა ვიეტის ფორმულებთან ერთად საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ ნებისმიერი სიმეტრიული მრავალწევრის მნიშვნელობა მოცემული ალგებრული განტოლების ფესვებზე. სახელდობრ, ვთქვათ, $f\in K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ სიმეტრიული მრავალწევრია და $g\in K[y_1,y_2,\ldots,y_n]$ ისეთი მრავალწევრია, რომ $f=g(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$. ვთქვათ, შემდეგ:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (a_0\neq 0)$$

ალგებრული განტოლების ფესვებია $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, მაშინ:

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=g\left(-\frac{a_1}{a_0},\frac{a_2}{a_0},\ldots,(-1)^n\frac{a_n}{a_0}\right). \tag{3}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4. ვთქვათ, $\deg_{x_1} f=k$, მაშინ $\deg g=k$ (იხ. შენიშვნა 2) და თუ (3) ტოლობას a_0^k-ზე გავამრავლებთ, მივიღებთ მის მარჯვენა მხარეს k ხარისხის ერთგვაროვან მრავალწევრს $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ კოეფიციენტების მიმართ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8. ვთქვათ:

$$x^4+px^2+qx+r=0 \tag{4}$$

განტოლების ფესვებია α_1, α_2, α_3, α_4. ვიპოვოთ მესამე ხარისხის მრავალწევრი, რომლის ფესვებია რიცხვები:

$$d_1 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4, \quad d_2 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4, \quad d_3 = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 .$$

ჩავწეროთ საძიებელი განტოლება:

$$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0$$

სახით. ვიეტის ფორმულების თანახმად:

$$a_1 = -\left(d_1 + d_2 + d_3\right), \quad a_2 = d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3, \quad a_3 = -d_1d_2d_3 .$$

გვაქვს $d_i = h_i\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\right)$, სადაც h_1, h_2, h_3 მრავალწევრებია მაგალითი 5-დან. ვპოულობთ:

$$h_1 + h_2 + h_3 = \sigma_2 ,$$

$$h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3 = \sum_{\substack{i \neq j,k \\ j<k}} x_i^2 x_j x_k = \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 ,$$

$$h_1h_2h_3 = \sigma_1^2\sigma_4 + \sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4 .$$

უკანასკნელი ტოლობა მაგალითი 7-ის შედეგია. ვიეტის ფორმულების თანახმად:

$$\sigma_1\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\right) = 0, \quad \sigma_2\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\right) = p ,$$

$$\sigma_3\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\right) = -q, \quad \sigma_4\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\right) = r .$$

მაშასადამე, $a_1 = -p$, $a_2 = -4r$, $a_3 = q^2 - 4qr$, ე. ი. საძიებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$y^3 - py^2 - 4ry + \left(4pr - q^2\right) = 0 . \tag{5}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 3. წინა მაგალითის აღნიშვნებში დაამტკიცეთ, რომ:

$$\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4\right)^2 = 4\left(d_1 - p\right),$$

$$\left(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4\right)^2 = 4\left(d_2 - p\right),$$

$$\left(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4\right)^2 = 4\left(d_3 - p\right)$$

და, გარდა ამისა,

$$\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4\right)\left(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4\right)\left(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4\right) = -8q \tag{6}$$

(იხ. ამოცანა 1).

ამ ამოცანის შედეგების გამოყენებით შეიძლება (4) განტოლების ამოხსნა დავიყვანოთ მე-(5) განტოლების ამოხსნამდე (იმ პირობით, რომ $\operatorname{char} K \neq 2$). სახელდობრ, თუ შევკრებთ სათანადო ნიშნებით ტოლობებს:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 ,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 2\sqrt{d_1 - p} ,$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 2\sqrt{d_2 - p} ,$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 2\sqrt{d_3 - p} ,$$

მივიღებთ:

$$\alpha_{1,2,3,4} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{d_1 - p} \pm \sqrt{d_2 - p} \pm \sqrt{d_3 - p}\right),$$

სადაც მინუსების რაოდენობა უნდა იყოს ლუწი. აქ კვადრატული ფესვების საწყისი მნიშვნელობები ისე უნდა ავირჩიოთ, რომ მათი ნამრავლი აღმოჩნდეს $(-q)$-ს ტოლი (იხ. ფორმულა (6)).

მე-(5) განტოლებას ეწოდება მე-(4) განტოლების **კუბური რეზოლვენტა**.

2. კუბური განტოლებები

კვადრატული განტოლებების ამოხსნის დროს საკვანძო როლს თამაშობს მისი დისკრიმინანტი. მისი ნულთან ტოლობით შეიძლება მსჯელობა ჯერადი ფესვის არსებობაზე, ხოლო მისი ნიშნის მიხედვით (ნამდვილ რიცხვითა ველის შემთხვევაში) — ნამდვილ ფესვთა რაოდენობაზე. გამოვარკვიოთ კვადრატული $\varphi = a_0x^2 + a_1x + a_2 \in \mathbb{C}[x]$ სამწევრის $D(\varphi)$ დისკრიმინანტის მნიშვნელობა. ვთქვათ, α_1, α_2 ამ სამწევრის ფესვებია, მაშინ:

$$D(\varphi) = a_1^2 - 4a_0a_2 = a_0^2\left[\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \frac{4a_2}{a_0}\right] = a_0^2\left[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2\right] = a_0^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, მიღებული ფორმულა კარგად ხსნის იმ კავშირს დისკრიმინანტისა და ფესვთა თვისებებს შორის, რომელიც ზემოთ იყო ნახსენები. სახელდობრ, გვაქვს შემდეგი სამი შესაძლებლობა:

1) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$; მაშინ $\alpha_1 - \alpha_2$ ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვია და $D(\varphi) > 0$;
2) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 = \alpha_2$; მაშინ $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ და $D(\varphi) = 0$;
3) $\alpha_1 = \bar{\alpha}_2 \notin \mathbb{R}$; მაშინ $\alpha_1 - \alpha_2$ ნულისაგან განსხვავებული წმინდა წარმოსახვითი რიცხვია და $D(\varphi) < 0$.

რაც მეტად მნიშვნელოვანია, ეს ფორმულა გვკარნახობს როგორ განვსაზღვროთ ნებისმიერი

$$\varphi = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{K}[x] \quad (a_0 \neq 0)$$

მრავალწევრის დისკრიმინანტი. ჯერ ვივარაუდოთ, რომ φ მრავალწევრს აქვს n ფესვი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$. მაშინ მისი $D(\varphi)$ **დისკრიმინანტი** განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$D(\varphi) = a_0^{2n-2}\prod_{i>j}\left(\alpha_i - \alpha_j\right)^2. \tag{7}$$

მაჩვენებელი a_0-თან არც ისე მნიშვნელოვანია; რატომ ავირჩიეთ ის ამ სახით, შემდგომ იქნება გასაგები. სხვა სიტყვებით, $D(\varphi)$ სიმეტრიული $f = \prod_{i>j}\left(x_i - x_j\right)^2$ მრავალწევრის (იხ. მაგალითი 4) მნიშვნელობაა φ-ს ფესვებზე, გამრავლებული a_0^{2n-2}-ზე. წინა პარაგრაფში აღწერილი პროცედურა საშუალებას იძლევა $D(\varphi)$ გამოვსახოთ φ-ს კოეფიციენტებით. რადგან

$\deg_{x_1} f = 2n-2$, ამიტომ, წინა პარაგრაფის შენიშვნა 4-ის ძალით, ეს გამოსახულება იქნება $2n-2$ ხარისხის რომელიღაც ერთგვაროვანი მრავალწევრი $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$ კოეფიციენტების მიმართ:

$$\Delta(\varphi) = \Delta(a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n). \tag{8}$$

ერთგვაროვანი Δ მრავალწევრის პოვნისთვის არაა აუცილებელი იმის ცოდნა, რომ φ მრავალწევრს გააჩნია n ფესვი K ველში. ეს საშუალებას იძლევა მე-(8) ფორმულით განისაზღვროს ნებისმიერი φ მრავალწევრის დისკრიმინანტი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. რადგან f-ის კოეფიციენტები მთელია, ამიტომ Δ-ს კოეფიციენტებიც მთელია (იხ. § 1, შენიშვნა 4).

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. ცნობილია, რომ (იხ. მაგალითად, [3, § 5.5]) ნებისმიერი n-ური ხარისხის $\varphi \in K[x]$ მრავალწევრისთვის არსებობს K ველის L გაფართოება, რომელშიც φ-ს გააჩნია n ფესვი. მაგალითად, თუ $K = \mathbb{R}$, მაშინ შეიძლება ავიღოთ $L = \mathbb{C}$. რადგან დისკრიმინანტის გამოთვლის ზემოთ აღწერილი პროცედურა არაა დამოკიდებული რომელ ველზე განიხილება φ მრავალწევრი (ოღონდ კი მისი კოეფიციენტები იყოს ამ ველში), ამიტომ $D(\varphi)$-თვის იქნება სამართლიანი (7) ფორმულა, თუ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ფესვებს ავიღებთ როგორც φ მრავალწევრის ფესვებს L ველში.

დისკრიმინანტის (7) განსაზღვრებიდან ცხადია, რომ $\varphi \in \mathbb{C}[x]$ მრავალწევრს ჯერადი ფესვები გააჩნია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $D(\varphi) = 0$. ეს გვიჩვენებს, რომ ჯერადი ფესვების არსებობა განსაკუთრებული გარემოებაა: თუ ნებისმიერად ავიღებთ მრავალწევრის კოეფიციენტებს, ალბათობა იმისა, რომ მას ექნება ჯერადი ფესვები, ნულის ტოლია.

ვთქვათ, ახლა φ ნამდვილკოეფიციენტებიანი კუბური მრავალწევრია და α_1, α_2, α_3 მისი კომპლექსური ფესვები. მაშინ

$$D(\varphi) = a_0^4 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2.$$

ფესვთა გადანომვრამდე სიზუსტით გვაქვს სამი შესაძლებლობა:

1) α_1, α_2, α_3 განსხვავებული ნამდვილი რიცხვებია; მაშინ $D(\varphi) > 0$;

2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = \alpha_3$; მაშინ $D(\varphi) = 0$;

3) $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_3 \notin \mathbb{R}$; მაშინ:

$$D(\varphi) = a_0^4 \left[(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \bar{\alpha}_2)\right]^2 (\alpha_2 - \bar{\alpha}_2)^2 = a_0^4 |\alpha_1 - \alpha_2|^4 (\alpha_2 - \bar{\alpha}_2)^2 < 0.$$

ამგვარად, დასკვნა იგივეა, რაც კვადრატული სამწევრის შემთხვევაში: კუბური φ მრავალწევრის ყველა ფესვი ნამდვილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $D(\varphi) \geq 0$.

ა მ ო ც ა ნ ა. დაამტკიცეთ, რომ, თუ φ ნებისმიერი ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრია, რომელსაც არ გააჩნია ჯერადი კომპლექსური ფესვები, მაშინ:

$$\operatorname{sgn} D(\varphi) = (-1)^t,$$

სადაც t ამ მრავალწევრის კომპლექსურად შეუღლებული წარმოსახვითი ფესვების წყვილთა რიცხვის ტოლია.

ვიდრე ვიპოვით კუბური მრავალწევრის დისკრიმინანტის ცხად გამოსახვას მისი კოეფიციენტების საშუალებით, მანამდე გავაკეთოთ ზოგიერთი ზოგადი შენიშვნა, რომელიც გაგვიმარტივებს გამოთვლებს.

შესაძლებელია ნებისმიერი მრავალწევრის ნორმირება მის უფროს კოეფიციენტზე გაყოფით, რაც არ შეცვლის მის ფესვებს. ნებისმიერი ნორმირებული

$$\varphi = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

მრავალწევრი ნულმახასიათებლიან ველზე (ან, უფრო ზოგადად, ველზე, რომლის მახასიათებელი n-ს არ ყოფს) უცნობის $x = y - \frac{a_1}{n}$ შეცვლის შედეგად მიიყვანება

$$\psi = y^n + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_{n-1}y + b_n$$

მრავალწევრზე, რომელშიც კოეფიციენტი y^{n-1}-თან ნულის ტოლია. ასეთი სახის მრავალწევრს ეწოდება **არასრული**. როცა $n=2$, სწორედ ამ ხერხით მიიღება კვადრატული განტოლების ამონახსნის ფორმულა. როცა $n>2$, ეს შეცვლა ვერ წყვეტს საკითხს, მაგრამ შეუძლია ამოცანის გამარტივება.

ვიპოვოთ:

$$\varphi = x^3 + px + q \tag{9}$$

არასრული კუბური მრავალწევრის (შესაბამისად, კუბური $x^3+px+q=0$ განტოლების დისკრიმინანტი. ეს განტოლება საინტერესოა, როცა $p \neq 0$. როცა $p=0$, განტოლება ადვილია) დისკრიმინანტი. წინა პარაგრაფის მაგალითი 7-ის ანალოგიურად, ვეძიოთ $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$ სიმეტრიული მრავალწევრის გამოსახვა ძირითადი σ_1, σ_2, σ_3 სიმეტრიული მრავალწევრებით. სიმეტრიული f მრავალწევრის მე-6 ხარისხის ერთგვაროვანია და მისი უმაღლესი წევრია $x_1^4x_2^2$. ამოვწეროთ იმ სიმეტრიულ მრავალწევრთა უმაღლესი წევრების მაჩვენებელთა ერთობლიობები, რომლებიც შეიძლება შეგვხვდეს იმ პროცესში, რომელიც აღწერილია ძირითადი თეორემის დამტკიცებაში და მათი შესაბამისი ძირითად სიმეტრიულ მრავალწევრთა ნამრავლები:

$$\begin{array}{ccc|c}
4 & 2 & 0 & \sigma_1^2\sigma_2^2 \\
4 & 1 & 1 & \sigma_1^3\sigma_3 \\
3 & 3 & 0 & \sigma_2^3 \\
3 & 2 & 1 & \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\
2 & 2 & 2 & \sigma_3^2
\end{array}$$

ვხედავთ, რომ:

$$f = \sigma_1^2\sigma_2^2 + a\sigma_1^3\sigma_3 + b\sigma_2^3 + c\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + d\sigma_3^2 . \tag{10}$$

არასრული (9) განტოლების $D(\psi)$ დისკრიმინანტის გამოსათვლელად (10)-ში უნდა ჩავსვათ $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = p$, $\sigma_3 = -q$. ამის გამო, a და c კოეფიციენტები არ მოახდენს გავლენას საბოლოო შედეგზე და მათი პოვნა არაა სავალდებულო. რომ ვიპოვოთ b და c კოეფიციენტები (10) ტოლობაში, x_1, x_2, x_3 უცნობებს მივანიჭოთ მომდევნო ცხრილში მითითებული მნიშვნელობები, რომლის მარჯვენა სვეტში ამოწერილია შესაბამისი განტოლებები:

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f	
1	–1	0	0	–1	0	4	$-b=4$
2	–1	–1	0	–3	2	0	$-27b+4d=0$

ამგვარად: $-b=4$, $d=-27$ და

$$D(\psi)=-4p^3-27q^2. \tag{11}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $\varphi=x^3-0.3x^2-4.3x+3.9$ მრავალწევრის ნამდვილ ფესვთა რიცხვი.

ძველი უცნობის $x=y+0.1$ შეცვლას მივყავართ არასრულ

$$\psi=y^3-4.33y+3.468$$

მრავალწევრამდე, რომლის კოეფიციენტები შეიძლება ვიპოვოთ ჰორნერის სქემით (იხ. [4, § 1, თეორემა 6]). ახლა გამოვთვალოთ $D(\varphi)=D(\psi)=4\cdot4.33^2-27\cdot3.468^2=0.013>0$. ამგვარად, φ მრავალწევრს გააჩნია სამი განსხვავებული ნამდვილი ფესვი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. ზოგადი სახის კუბური

$$\varphi=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$$

მრავალწევრის დისკრიმინანტი ტოლია:

$$D(\varphi)=a_1^2a_0^2-4a_1^3a_3-4a_0a_2^3+18a_0a_1a_2a_3-27a_0^2a_3^2.$$

გადმოვცეთ ახლა კუბური განტოლების ამოხსნის წესი. ვივარაუდოთ, რომ ძირითადი K ველი შეიცავს არატრივიალურ (ე. ი. ერთისგან განსხვავებულ) კუბურ, ვთქვათ w-ს, ფესვს ერთიდან. მაშინ — 1, w, w^{-1} ყველა კუბური ფესვია ერთიდან და ვიეტის ფორმულის თანახმად:

$$w+w^{-1}=-1. \tag{12}$$

განვიხილოთ წრფივი მრავალწევრები:

$$h_1=x_1+wx_2+w^{-1}x_3,\quad h_2=x_1+w^{-1}x_2+wx_3.$$

გადანაცვლებით $x_2\leftrightarrow x_3$ ისინი იცვლის ადგილებს, ხოლო $x_1\leftrightarrow x_2$ გადანაცვლებით h_1 მრავალწევრი გადადის wh_2-ში და h_2 გადადის $w^{-1}h_1$-ში. აქედან გამომდინარეობს, რომ მრავალწევრები $f=h_1^3+h_2^3$ და $g=h_1h_2$ სიმეტრიულია. თუ მათ გამოვსახავთ ძირითადი სიმეტრიული მრავალწევრებით, მივიღებთ:

$$f=2\sigma_1^3-9\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3,\quad g=\sigma_1^2-3\sigma_2.$$

ვთქვათ, ახლა (9) განტოლების ფესვებია α_1, α_2, α_3. აღვნიშნოთ:

$$d_1=\alpha_1+w\alpha_2+w^{-1}\alpha_3,\quad d_2=\alpha_1+w^{-1}\alpha_2+w\alpha_3.$$

წინა მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ $d_1^3+d_2^3=-27q$, $d_1d_2=-3p$ და, მაშასადამე, $d_1^3d_2^3=-27p^3$. ამგვარად, d_1^3 და d_2^3 კვადრატული

$$x^2+27qx-27p^3=0$$

განტოლების ფესვებია. მისი ამოხსნის შედეგად ვღებულობთ:

$$d_1^3 = 27\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}\right), \tag{13}$$

$$d_2^3 = 27\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}\right). \tag{14}$$

შევნიშნოთ, რომ რადიკალის ქვეშ მდგომი გამოსახულება მხოლოდ $-\frac{1}{108}$ მამრავლით განსხვავდება (9) განტოლების (11) დისკრიმინანტის მნიშვნელობისგან.

ტოლობათა:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0,$$

$$\alpha_1+w\alpha_2+w^{-1}\alpha_3=d_1,\ \alpha_1+w^{-1}\alpha_2+w\alpha_3=d_3$$

შეკრებით და (12) თანაფარდობის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ:

$$\alpha_1=\frac{1}{3}\left(d_1+d_2\right).$$

რადგან ფესვთა ნუმერაცია შეიძლება იყოს ნებისმიერი, ეს ფორმულა სინამდვილეში სამივე ფესვს იძლევა, თუ d_1-ად და d_2-ად ავიღებთ (13) და (14) კუბური ფესვების ყველა შესაძლო მნიშვნელობას, რომელიც დაკავშირებულია ზემოთ მიღებული თანაფარდობით:

$$d_1d_2=-3p. \tag{15}$$

ამგვარად, მივდივართ შემდეგ საბოლოო ფორმულამდე:

$$\alpha_{1,2,3}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}},$$

რომელსაც **კარდანოს ფორმულა** ეწოდება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4. კარდანოს ფორმულას აზრი აქვს, თუ შესაძლებელია მასში შემავალი კვადრატული და კუბური ფესვების ამოღება.

თუ $K=\mathbb{C}$, კუბური $x^3+px+q=0$ განტოლების სამივე ამონახსნს აქვს სახე: $\alpha_{1,2,3}=d_1+d_2$. თითოეულ (13) და (14) კუბურ რადიკალს აქვს სამი მნიშვნელობა. ნებისმიერი d_1-ის კომბინირება ნებისმიერ d_2-თან იძლევა d_1+d_2 ჯამის ცხრა მნიშვნელობას, მაგრამ მათ შორის მხოლოდ სამი იქნება მოცემული კუბური განტოლების ამონახსნი. ეს იქნება ის d_1+d_2 ჯამები, რომელთათვისაც შესრულებულია მე-(15) პირობა. ვთვლით, რომ ერთი ასეთი d_1, d_2 წყვილი ნაპოვნია. აღვნიშნოთ d_1', d_2' და d_1'', d_2'' საძიებო ორი წყვილი იმავე პირობით. თუ გვაქვს d_1, მაშინ $d_1'=\omega d_1$, $d_1''=\omega^2 d_1$, სადაც ω არატრივიალური $(\neq 1)$ კუბური ფესვია 1-დან. მაგალითად, $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt[3]{1}$ (იხ. [1, თეორემა 2, § 3]), ვიპოვოთ შესაბამისი d_2', d_2'' მნიშვნელობები. რადგან $\omega^3=1$, გვექნება:

$$d_1'\left(\omega^2 d_2\right)=\left(\omega d_1\right)\left(\omega^2 d_2\right)=d_1d_2,\ \text{საიდანაც}\ d_2'=\omega^2 d_2;$$

$$d_1''\left(\omega d_2\right)=\left(\omega^2 d_1\right)\left(\omega d_2\right)=d_1d_2,\ \text{საიდანაც}\ d_2''=\omega d_2.$$

ცხადია, რომ d_2, d_2' და d_2'' მე-(14) კუბური რადიკალის მნიშვნელობებია. ამგვარად, $\alpha_1 = d_1 + d_2$, $\alpha_2 = d_1' + d_2'$, $\alpha_3 = d_1'' + d_2''$ და, საბოლოოდ, მივიღებთ სამივეს ფესვს:

$$\alpha_1 = d_1 + d_2\,,\ \ \alpha_2 = \omega d_1 + \omega^2 d_2\,,\ \ \alpha_3 = \omega^2 d_1 + \omega d_2\,.$$

თუ $K = \mathbb{R}$ და კარდანოს ფორმულით ვხსნით კუბურ განტოლებას, მაშინ, საზოგადოდ, მოგვიწევს მუშაობა კომპლექსურ რიცხვებთან მაშინაც კი, როცა ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ ნამდვილი ფესვები. სწორედ ასეთია საქმის ვითარება დადებითი დისკრიმინანტის შემთხვევაში, როცა სამივე ფესვი ნამდვილია: ამ შემთხვევისათვის კვადრატული რადიკალის ქვეშ მდგომი რიცხვი უარყოფითია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ ψ მრავალწევრის ფესვები მაგალითი 1-დან. გვაქვს:

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = -\frac{1}{108} D(\psi) \approx -0.0000120\,.$$

ამგვარად, კარდანოს ფორმულაში ერთ-ერთი კუბური რადიკალის ქვეშ დგას:

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} \approx -1.734 + 0.00374i \approx 1.73400\left[\cos(\pi - 0.00200) + i\sin(\pi - 0.00200)\right]$$

რიცხვი. მეორე კუბური რადიკალის ქვეშ იქნება კომპლექსურად შეუღლებული რიცხვი. მოცემულ შემთხვევაში მე-(15) პირობა ნიშნავს, რომ კუბური ფესვების ამოღებისას საჭიროა მათი კომპლექსურად შეუღლებული მნიშვნელობების კომბინირება. კომპლექსურად შეუღლებული კომპლექსური რიცხვების შეკრების დროს მიიღება მათი გაორკეცებული ნამდვილი ნაწილი. ამგვარად:

$$\alpha_1 \approx 2\sqrt[3]{1.73400}\cos\frac{\pi - 0.00200}{3} \approx 1.20278\,,$$

$$\alpha_2 \approx 2\sqrt[3]{1.73400}\cos\frac{\pi + 0.00200}{3} \approx 1.20001\,,$$

$$\alpha_3 \approx -2\sqrt[3]{1.73400}\cos\frac{0.00200}{3} \approx -2.40277\,.$$

ლიტერატურა:

[1] ლომაძე გ. ლექციები უმაღლეს ალგებრაში. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006.

[2] ამაღლობელი მ., მაზუროვი ვ. ალგებრის კურსი, ნაწილი I. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2009.

[3] Васильев А. В., Мазуров В. Д. Высшая алгебра, часть I. Новосиб. гос. ун-т, Новосибирск, 2010.

[4] Кострикин А. И. Введение в алгебру, часть I. Физматлит. Москва, 2001.

ავტორის ელექტრონული მისამართი: elenekhuchua123@gmail.com

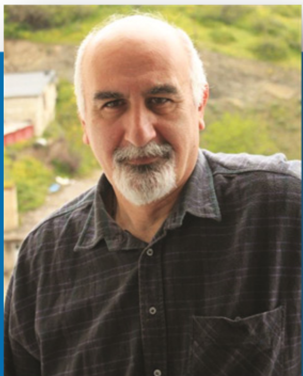
არქიმედეს გენიის პატივსაცემად

მათემატიკა — ესაა რეალური სამყაროს ანარეკლი გონების ეკრანზე — არქიმედე

პაოლო ემილიო რიჩი

International Telematic University UniNettuno
Corso Vittorio Emanuele II, 39, 00186 – Roma, Italia
e-mail: paoloemilioricci@gmail.com, p.ricci@uninettunouniversity.net

დაიცვა სადოქტორო დისერტაცია (cum laude – უმაღლესი შეფასებით) პროფესორ გაეტანო ფიკერას ხელმძღვანელობით რომის უნივერსიტეტ „La Sapienza"-ში; 40 წელი ეწეოდა პედაგოგიურ მოღვაწეობას „La Sapienza"-სა და კატანიის უნივერსიტეტებში. გარკვეული წლები მან იმოღვაწევა რომის ბიომედიცინის უნივერსიტეტ „Campus Bio-medico of Rome"-ში. ამჟამად ის არის რომის ტელემატიკის უნივერსიტეტ „UniNettuno"-ს პროფესორი. იგი მათემატიკაში რამდენიმე მნიშვნელოვანი საერთაშორისო სიმპოზიუმის მთავარი ორგანიზატორი და მსოფლიოში ჩატარებული მრავალი კონფერენციის პლენარული მომხსენებელია; არის 250-ზე მეტი სამეცნიერო ნაშრომის ავტორი/ თანაავტორი; მათემატიკასა და გამოყენებით მათემატიკაში რამდენიმე წიგნის ავტორი და რედაქტორი. 2003 წელს მას ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში გადაეცა ი.ვეკუას სახ. გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის საპატიო დოქტორის წოდება; 2015 წელს დაჯილდოვდა სიმონ სტევინის სახ. გეომეტრიის ინსტიტუტის (ზანდვორტი, ნიდერლანდები) სპეციალური პრიზით; 2016 წელს მიიღო ინდოეთის ბუნდელკხანდის უნივერსიტეტის სამეცნიერო საბჭოს ჯილდო „ცხოვრებაში მიღწეული წარმატებებისათვის" – "Lifetime Achievement Award".



სტატია ინგლისურიდან თარგმნა ილია თავხელიძემ

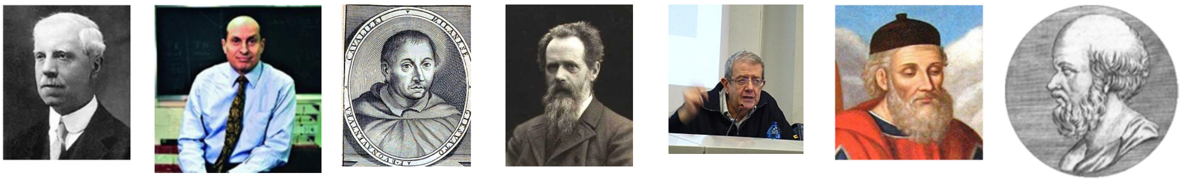
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, აკადემიკოს ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი;
1984 წ. დაჯილდოებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009 წლის ყრილობის, აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის მემორიალური ოქროს მედლით.

ანოტაცია

ნაშრომში მოცემულია არქიმედეს შრომების მოკლე მიმოხილვა, თ.ჰიტის (სურ.1ა) წიგნში მოტანილი ორივე კოდის აღწერითა და პალიმფსესტის რეკონსტრუირებული C კოდის გათვალისწინებით. არქიმედეს შედეგები გადმოცემულია თანამედროვე ფორმით, რადგან არქიმედეს გეომეტრიული მეთოდები ძლიერ განსხვავდება თანამედროვე მეთოდებისაგან. ეს მეთოდები უგულებელყოფენ უსასრულოდ მცირეთა კონცეფციას და ეფუძნებიან ამოწურვის მეთოდსა და გამორიცხვის პრინციპს: მტკიცება, რომ ესა თუ ის რიცხვი წარმოადგენს გეომეტრიული ობიექტის ზომას, მოიცავს მტკიცებებს, რომ ეს ზომა არც მეტია და არც ნაკლები ამ რიცხვზე. ორივე შედეგი მიიღება დაშვებული დებულების „reductio ad absurdum" აბსურდამდე

დაყვანით. დასკვნით ნაწილში, რეალურად აღდგენილი ანტიკითერული მექანიზმის საფუძველზე, ვეცდები გავიხსენოთ არქიმედეს დაკარგული პლანეტარიუმი.

AMS 2010 Mathematics Subject Classifications: 01A20, 97A30, 97G30, 97M50.
Keywords and phrases: History of Mathematics, Archimedes' works.



ა. სერ თომას ჰიტი უმცროსი 1861 -1940 | ბ. ბერნარდ ბოზამი 1949 | გ.ბონავენ-ტურა კავალიერი 1598 -1647 | დ. იოჰან ლუდვიგ ჰეიბერგი 1854 - 1928 | ე. ლუჩიო რუსო 1944 | ვ. დიო-დორე სიცილიელი 90-30 ძვ.წა | ზ. ერატოს-ფენე კირენელი 276 -195/194 ძვ.წა

სურ.1

1. შესავალი

„არქიმედეს მათემატიკაში შეტანილი წვლილის მოკლე ზედაპირული აღწერა — ესაა შრომა, რომელიც ნებისმიერი ავტორის შესაძლებლობებს აღემატება, რადგან არქიმედე, უპირობოდ, ყველა დროის უდიდესი მეცნიერია“ — ბ. ბოზამი (სურ.1ბ [5]).

არქიმედეს სიდიადე შეუდარებელია სხვა მეცნიერებთან. მიუხედავად იმდროინდელი ცოდნის სიმწირისა, მან მოახერხა, წრის გაზომვების განზოგადებით, გაეზომა სფერული ზედაპირის ფართობი, ფიგურა, რომელიც შეუძლებელია გაიშალოს სიბრტყეზე. მოცულობისა და ფართობის გაზომვის მისი მექანიკო-გეომეტრიული მეთოდი, 18 საუკუნით უსწრებს ბონავენტურა კავალიერისა (სურ.1გ) და უსასრულოდ მცირეთა გათვლების მეთოდებს. ამავე დროს ის ოპერირებს სხვადასხვა თვალსაჩინო მეთოდით, რომლის ორიგინალი აღმოჩენილი იყო იოჰან ლუდვიგ ჰეიბერგის (სურ.1დ) მიერ 1906 წელს.

არქიმედეს, ევდოქსისა და სხვა ელინური ეპოქის მათემატიკოსების მრავალი საუკუნის წინ ნაპოვნი უსასრულოდ მცირეთა გათვლების წინამორბედები არაა ასახული აღორძინების ხანამდე დასავლეთში მოღვაწე არაბი მათემატიკოსების ტექსტებში.

ლ.რუსომ (სურ.1ე) თავის წიგნში [4] აჩვენა, თუ როგორ შეძლო უდიდესმა სირაკუზელმა მარტივი გეომეტრიული მსჯელობით შემოეტანა მოცემულთან შედარებით უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეთა კონცეფცია.

„არქიმედე წარმოადგენს ელინისტური მეცნიერების კულმინაციას, რომელიც თავის მხრივ არის თანამედროვე მეცნიერების ჭეშმარიტი საფუძველი“. ლ. რუსო [(3]).

2. არქიმედეს ცხოვრების შემორჩენილი ფრაგმენტების გახსენება

არქიმედეს ცხოვრების შესახებ ცნობილია მხოლოდ რამდენიმე ფაქტი. ის, რომ ნამდვილად იყო სირაკუზიდან, სავარაუდოდ დაკავშირებული იყო მონარქ ჰიერონ II-თან (სურ.2ა) და იყო მოკლული ძველი წა. 212 წელს რომაელების მიერ, მარკუს კლავდიუს მარცელუსის (სურ.2 ბ) მეთაურობით, სირაკუზის დარბევის დროს. დიოდორე სიცილიელი (სურ.1 ვ) მოწმობს, რომ არქიმედე მოღვაწეობის დასაწყისში იმყოფებოდა ეგვიპტეში სტუმრად თავის მეგობრებთან: კონონ სამოსელთან (280 - 220 ძვ.წა) და ერატოსფენე კირენელთან (276 -195/194 ძვ.წა) (სურ.1.ზ). მთელი ცხოვრების განმავლობაში ის ურთიერთობდა ალექსანდრიული სკოლის მეცნიერებთან და წერილების საშუალებით აცნობინებდა მათ თავისი აღმოჩენების შესახებ. ეგვიპტეში ყოფნისას მან გამოიგონა ჰიდრავლიკური ხრახნული კონვეიერი.

მისი დაბადების თარიღი არაა ცნობილი, მაგრამ მიღებულია, რომ ეს მოხდა ძვ.წა. 287 წ., რადგან ბიზანტიელი მეცნიერი ჯონ ტზეცესი (1110 - 1180) გვატყობინებს, რომ ის გარდაიცვალა 75 წლის ასაკში. ჰიპოთეზა, რომ ის იყო სირაკუზელი ასტრონომ ფიდიასის შვილი, ეფუძნება „ფსამიტის“ ტექსტში მოტანილი გაურკვეველი ფრაზის [12] ფილოლოგ ფრიდრიხ ბლასის მიერ შემოთავაზებულ რეკონსტრუქციას. თუ ეს ჰიპოთეზა მართალია, მაშინ შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ მას მამისაგან მემკვიდრეობით გადაეცა ზუსტი მეცნიერებისადმი სიყვარული.

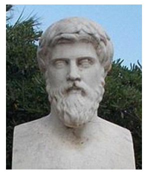
შემორჩენილი შრომებიდან და თანამედროვეებიდან ვიცით, რომ არქიმედეს შეხება ჰქონდა იმ დროის მეცნიერების ყველა მიმართულებასა (არითმეტიკა, ბრტყელი და მყარი ტანის გეომეტრია, მექანიკა, ოპტიკა, ჰიდროსტატიკა, ასტრონომია და სხვ.) და სხვადასხვა ტექნოლოგიურ გამოყენებასთან.


ა. ჰიერონ II
308 - 215 ძვ.წა


ბ. მარკუს კლავდიუს მარცელუსი
270 - 208 ძვ.წა


გ. პოლიბიუსი
200 - 118 ძვ.წა


დ. ტიტუს ლივიუსი
64/59 ძვ.წა - 12/17


ე. პლუტარქე
46 - 119


ვ. დიოფანტე ალექსანდრიელი
~201 - ~299

სურ.2

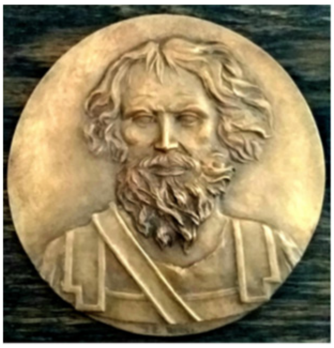
პოლიბიუსი (სურ. 2 გ), ტიტუს ლივიუსი (სურ. 2 დ) და პლუტარქე (სურ. 2 ე) იტყობინებიან, რომ მეორე პუნიკური ომის დროს (218-202 ძვ.წა), ჰიერონ II-ს თხოვნით, მან დიდი წარმატებით გაართვა თავი სამხედრო მანქანების აგებას, რომლებიც საშუალებას იძლეოდა თავი დაეცვათ რომაელების თავდასხმისაგან. აალე-ბადი სარკეები, ორთქლის ზარბაზნები, კატაპულტები და ქვის სატყორცნები, არქიმედეს „ბრჭყალი“ და „ნისკარტი“ აღწერილია პლუტარქეს მიერ „პარალელურ ბიოგრაფიებში — თავი მარცელუსი“ :

„15. მაგრამ არქიმედემ საქმეში ჩართო თავისი მანქანები, და მტერს, რომელიც უტევდა ხმელეთიდან, ენით აუწერელი ხმაურით და გამაოგნებელი სიჩქარით თავს დაატყდა ყველა ზომის ისარი და უზარმაზარი ქვის ლოდები — ისინი თავის გზაზე ანადგურებდნენ ყველაფერს და შეჰქონდათ არეულობა საბრძოლო წყობაში. ხოლო მტრის ხომალდებზე უეცრად დაიწყო ქალაქის კედლებზე დამაგრებული ხის უზარმაზარი ძელების ცვენა და ისინი დარტყმის ძალით ძირავდნენ მათ, ან რკინის ბრჭყალით ანკი წეროს მსგავსი ნისკარტით ათრევდნენ ხომალდებს ზევით და შემდგომ იღებდნენ ქიჩოთი წყლიდან და შემდგომ აგდებდნენ მათ ისევ წყალში უკვე ვერტიკალურ მდგომარეობაში, ანკი მომჭიმავი თოკების საშუალებით მოჰყავდათ ხომალდები წრიულ მოძრაობაში და შემდგომ ისროდნენ მათ ქალაქის კედლებთან არსებულ კლდეებზე, მეზღვაურები ტანჯვით სიკვდილზე იყვნენ განწირულნი. ხშირად თვალს საშინელი სანახაობა წარმოუდგებოდა: ზემოთ დაკიდებული ხომალდი სხვადასხვა მხარეს ქანაობდა, სანამ ყველა მასზე მყოფი არ აღმოჩნდებოდა გემბანიდან გადმოგდებული ან ნაფლეთებად დაგლეჯილი. შემდეგ გაცარიელებული ხომალდი იმსხვრეოდა კედელზე დარტყმით ან, როდესაც რკინის ბრჭყალი გაიხსნებოდა, ის იძირებოდა ზღვაში“.

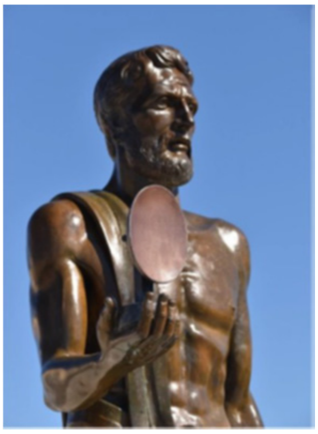
არქიმედე მოკლულ იქნა, სირაკუზის დარბევისას, რომაელი ჯარისკაცის მიერ, რომელმაც არ მოინდომა შეესრულებინა ბრძანება აეყვანა ის ცოცხლად. არქიმედეს სახელზე რომაელმა მხედართმთავარმა გამორჩეულად მოაწყო საფლავი, რადგან

მისი სახელი მანაც გაიზიარა. თვით პლუტარქე წერს, რომ არქიმედეს სიკვდილის შესახებ არსებობს სხვადასხვა ვერსია. ორი მათგანი ერთმანეთისაგან ცოტათი განსხვავდება და გვამცნობს, რომ რომაელმა ჯარისკაცმა, დაინახა რა, რომ არქიმედე თავის ფიქრებში იყო ჩაძირული და არ დაემორჩილა ბრძანებას უმალ გაჰყოლოდა მას, შესაბამისად, ის მოკლა. მესამე ვერსია კი იტყობინება, რომ რომაელი ჯარისკაცები ქუჩაში შეხვდნენ არქიმედეს, რომელსაც მარცელუსისათვის მიჰქონდა ყუთში ჩადებული სამეცნიერო ხელსაწყო, რომელიც შედგებოდა მზის საათისაგან, სფეროებისაგან და ციფერბლატებისაგან და რომელთა საშუალებით ხდებოდა მზის გაზომვა. ჯარისკაცებმა იფიქრეს, რომ მას მოჰქონდა ოქრო და მოკლეს.

არქიმედეს მიერ შექმნილი ნაშრომები არა მარტო თეორიული ხასიათისაა, არამედ მისი გამოგონებები მექანიკაში, ოპტიკაში, ჰიდრავლიკასა და ასტრონომიაში ისე აჯადოებდნენ მის თანამედროვეებს, რომ მისი ბიოგრაფიის გარკვეული მომენტები მჭიდროდ იხლართება ლეგენდებში და ძნელი ხდება რეალობისგან მათი გარჩევა.



სურ 3. პროფ. გაეტანო ფიკერას სიმპოზიუმისათვის შექმნილი არქიმედეს მედალი (Taormina 1992) მედლის ავტორი პაოლო ემილიო რიჩი



არქიმედეს ძეგლი სირაკუზაში

არქიმედეს სიკვდილი — ნ. ბარაბინოს ნახატი

სურ. 4

2.1. არქიმედეს ტრაქტატები

არქიმედეს მიღწევები შესაძლოა დაიყოს ორ ნაწილად:

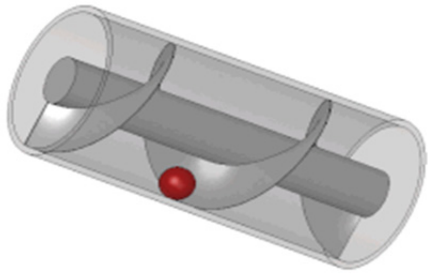
- გეომეტრიული ნაშრომები: წრეწირის გაზომვა, პარაბოლის კვადრატურა, სპირალების შესახებ, π რიცხვის აპროქსიმაცია, სფეროსა და ცილინდრის შესახებ, სილის მარცვლების დათვლა;
- ნაშრომები მექანიკაში: ჰიერონის გვირგვინი, ხრახნი, სიბრტყეების წონასწორობის შესახებ, მცურავი სხეულების შესახებ, ბერკეტი.

შემდგომ ცნობილი გახდა, რომ არქიმედემ დაწერა რიგი სხვა ნაშრომებისა, რომლებიც ამჟამად დაკარგულად ითვლება. განსაკუთრებულ ყურადღებას იმსახურებს ტრაქტატები: კატოპტრიკის შესახებ, რომლებშიც ის, სხვა პრობლემებთან ერთად, მსჯელობს, კერძოდ, სინათლის გარდატეხის შესახებ; სფეროში ჩახაზული 13 ნახევრად წესიერი მრავალწახნაგას აგების შესახებ; „სტომაქიონი" — თავსატეხი, რომლის იდეაა 14 ნაჭრისაგან ავაგოთ კვადრატი, რაც გეომეტრიული ამოცანის გარდა დაიყვანება კობინატორულ ამოცანაზე; მსხვილფეხა პირუტყვის ამოცანა, რომელიც დაკავშირებულია დიოფანტეს (სურ. 2 ვ) განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე. გარდა ამისა, ზოგიერთი ნაშრომის არაბული თარგმანიც შემორჩენილია, თუმცაღა ფორმით ვერ დასტურდება, რომ ის არქიმედეს ეკუთვნის. ამ ტიპის შრომებს განეკუთვნება წესიერ შვიდკუთხედზე წრის შემოხაზვა (უცნობი თეორემების დამტკიცებისათვის სასარგებლო), ლემების კრებული და „ბრტყელი" გეომეტრიის ელემენტების შემცველი წიგნი „წრეების შეხების შესახებ". არქიმედეს ნაშრომთა ჩამონათვალი მოტანილია თ.ჰიტის 1897 წლის წიგნში. ის ეყრდნობა ანტიკურ A და B კოდების ტრანსკრიფციას, რომლებიც ახლა გამქრალია: სფეროსა და ცილინდრის შესახებ, წრეწირის გაზომვა, კონოიდებისა და სფეროიდების შესახებ, სპირალების შესახებ, სიბრტყეების წონასწორობის შესახებ, სილის მარცვლების დათვლა, პარაბოლის კვადრატურა, მცურავი სხეულების შესახებ, ლემების წიგნი, ამოცანა მსხვილფეხა პირუტყვის შესახებ.

კონსტანტინოპოლში დაცულ და 1906 წელს იოჰან ლუდვიგ ჰეიბერგის მიერ აღიარებულ პალიმფსესტში მხოლოდ კოდექსი C არის შენარჩუნებული. ის შეიცავს, ზოგიერთ ფრაგმენტთან ერთად, წიგნებს „მცურავი სხეულები", „მეთოდიკა" და „სტომაქიონი".

კოდექს C-ში დაკარგული ხელნაწერების აღმოჩენისა და აღდგენის გასაოცარი ისტორია გადმოცემულია რევილ ნეტცისა და უილიამ ნოელის შესანიშნავ წიგნში [2].

3. ხრახნული კონვეიერი (არქიმედეს ხრახნი)



სურ. 5

ხრახნული კონვეიერი (ლოკოკინა) — ესაა წყლის ამოსაქაჩი ჰიდრავლიკური მოწყობილობა. ის სავარაუდოდ ცნობილი იყო ჯერ კიდევ ეგვიპტეში, რომლის სრულყოფა მოახდინა არქიმედემ. ოდნავ დახრილ მდგომარეობაში ის დღევანდლამდე გამოიყენება ფხვიერი მასალის (სილა, მარცვლეული, ფქვილი) გადასაადგილებლად. მის არსებობას ძველი წა. მეორე საუკუნეში ადასტურებს დიოდორე სიცილიელი. ფაქტობრივად, სპირალებისა და ხრახნების მეცნიერული შესწავლა სათავეს იღებს არქიმედეს პერიოდიდან.

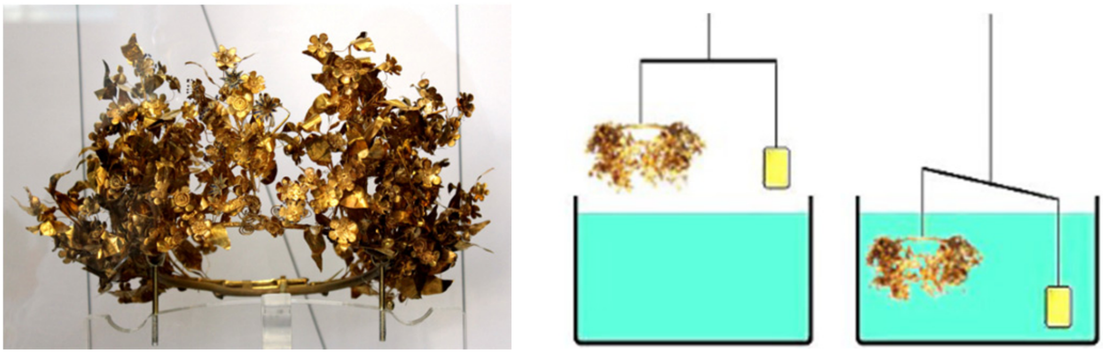
მოსკიონეს (ძვ.წა III საუკუნის საზღვაო ტექნიკოსი, მწერალი) წიგნის — ათენეოს მექანიკოსის (ნავკატრიელი — 1 ს.ძვ.წა) ვარიანტში, რომლის სათაურია *„სირაკუზის მეფე ჰიერონის საოცარი გემის შესახებ"*, — წერს: *„მან გამოიგონა მეთოდი ხრახნის საშუალებითა და მხოლოდ ერთი ადამიანის ძალისხმევით, თუნდაც ძალზე ღრმად ჩაძირული გემის ტრიუმის დაცლა. ამ გემის სახელი იყო სირაკუზია... "* (სურ.14).

დღესაც ნიდერლანდებში წყალდიდობისას ეს ხრახნი, ტექნიკურად გაუმჯობესებული, გამოიყენება დრენაჟისათვის. ხრახნის მოძრაობა საწინააღმდეგო მიმართულებით გამოიყენება, როგორც ელექტროგენერატორი. გემებისა და თვითმფრინავების თანამედროვე გამწევი პროპელერები სწორედ ამ მოწყობილობის კვლევების ევოლუციით წარმოიქმნა.

4. ოქროს გვირგვინი

ძვ. წა. პირველ საუკუნეში რომაელი არქიტექტორი მარკუს ვიტრუვიუს პოლიონი (ძვ.წა.80-15) («De Architectura Libri Decem » — წიგნი IX, 9-12) წერს, თუ როგორ გამოააშკარავა არქიმედემ გვირგვინის დამზადებისას სიყალბე (სურ. 6 ა). გვირგვინი იუველირს დაუკვეთა სირაკუზის ტირანმა ჰიერონ II. ეჭვობდა რა, რომ იუველირმა შეცვალა ოქროს ნაწილი იმავე წონის მქონე ვერცხლით, ჰიერონ II-მ სთხოვა არქიმედეს, ისე განესაზღვრა, იყო თუ არა გვირგვინი სუფთა ოქროსაგან დამზადებული, რომ არ დაეზიანებინა ნაკეთობა, რადგან ის იყო აღთქმული საჩუქარი. ვიტრუვიუსის თანახმად, არქიმედემ იპოვა გამოსავალი. მან მაშინვე შეამჩნია, რომ ნაკეთობის აუზში ჩაძირვისას გადმოდინება გაიზარდა.

გვირგვინის ტოლი მასის მქონე სუფთა ოქროს მასას ძირავდნენ პირამდე სავსე წყლიან ქოთანში. შემდეგ ამოჭქონდათ ოქრო, ქოთანი ისევ ივსებოდა წყლით და ახლა უკვე გვირგვინს ძირავდნენ წყალში. ეს რომ ყოფილიყო ვერცხლის შენადნობი, რომელიც უფრო მსუბუქია და, შესაბამისად, გვირგვინი მოცულობით იქნებოდა უფრო დიდი, ქოთნიდანაც, სათანადოდ, მეტი წყალი გადმოიღვრებოდა. ამგვარად გაიხსნებოდა სიყალბე, მაგრამ ვერ დადგინდებოდა სიყალბის მასშტაბი!



ა. ელინური ოქროს გვირგვინი ბ. სიყალბის დადგენის საშუალება

სურ. 6

ამ ტიპის გამოთვლებისათვის, ბ. ბოზამის [5] თანახმად, მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

1. ავიღოთ ორი ნებისმიერი ფორმის მასა, ერთი ვერცხლის — MS, ხოლო მეორე ოქროსი — MG.
   ორივეს წონა ტოლია C გვირგვინის;
2. ქოთანი ავავსოთ წყლით;
3. MS ვძირავთ ქოთანში და ვზომავთ გადმოღვრილ წყალს — Q_S;
4. ისევ ვავსებთ ქოთანს (თანაც ვზომავთ, რომ წყლის იგივე ოდენობა იყოს საკმარისი);
5. ვძირავთ ქოთანში C გვირგვინს და ვზომავთ გადმოღვრილი წყლის ოდენობას — Q_C.
6. იმავე პროცედურას ვატარებთ MG - სათვის და ვზომავთ გადმოღვრილი წყლის ოდენობას — Q_G.

ცხადია, თუ გვირგვინი სუფთა ოქროსია, მაშინ მივიღებთ, რომ $Q_C = Q_G$. ამ სამი გაზომვის შედეგად მიღებული Q_S, Q_C, Q_G შედეგი საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ გვირგვინში ოქროსა და ვერცხლის პროპორცია. თანამედროვე ტერმინოლოგიით, ეს ამოცანა დაიყვანება შემდეგი სისტემის ამოხსნაზე:

$$\begin{cases} \alpha Q_S + \beta Q_G = Q_C \\ \alpha + \beta = 1, \end{cases}$$

სადაც α და β ,შესაბამისად, ვერცხლისა და ოქროს წილია გვირგვინში. მაგალითად: დავუშვათ გვირგვინი იწონის 1 კგ-ს. ვერცხლის კუთრი წონა არის 10,5 კგ/დმ^3, ხოლო ოქროსი — 19,3 კგ/დმ^3. დავუშვათ გვირგვინი დამზადებულია 90% ოქროს და 10% ვერცხლისაგან. მაშინ გვირგვინში წონის 1/10 კგ ვერცხლისაა და ის ტოლია $\frac{1}{10} \cdot 10.5$ კგ.

მაშინ გვირგვინში წონის 9/10 კგ ოქროსია და ის ტოლია $\frac{9}{10} \cdot 19.3$ კგ. აქედან გვირგვინის საერთო მოცულობა Q_C იქნება (1/10 · 10,5) + (9/10 · 19,3) ≈ 0,056 დმ^3 = 56 სმ^3. ე.ი. ვერცხლის მასის Q_S საერთო მოცულობა არის 1 / 10,5 ≈ 0,095 დმ^3 = 95 სმ^3, ხოლო ოქროს მასის Q_G საერთო მოცულობა არის 1 / 19,3 ≈ 0,052 დმ^3 = 52 სმ^3. ამგვარად შესაძლოა სამი Q_C, Q_S, Q_G მოცულობის (მიახლოებითი) გაიგივება შემდეგ 56, 95, 52 სმ^3 სიდიდეებთან, ანუ, უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ, ეს გაზომვები სიყალბის ზომის დადგენის საშუალებას იძლევა.

ამგვარად, მგონი ბომენზი მართალია, როდესაც არ ეთანხმება ვიტრუვიუსთან აღწერილ მეთოდის კრიტიკას, რომელიც ნიუ იორკის უნივერსიტეტის ვებგვერდზეა ([10]).

კრიტიკის არსი ისაა, რომ ზემოთ აღწერილი მეთოდი არ იყენებს არქიმედეს ტივტივების გამოკვლევების მეთოდს. მაგრამ მხოლოდ მოვლენა, რომ სითხეში ჩაძირული სხეული იწვევს სითხის დონის ამაღლებას, რაც გამოიწვევს მის ჭურჭლიდან გადმოღვრას, არქიმედეს მიერ აბაზანაში ჩაწოლისას შემჩნეული ფაქტია, რამაც შესაძლებლობა მისცა გაეგო, თუ როგორ უნდა გამოეაშკარავებინა იუველირის სიყალბე. მეთოდით, რომელიც იყენებს ჰიდროსტატიკას (როგორც ეს ნაჩვენებია სურ. 6 ბ), კარგად ჩანს, რომ გვირგვინი, რომელიც ოქროსა და ვერცხლის შენადნობისგანაა, მოცულობით მეტია, ვიდრე იმავე წონის ოქროს მასა, და ეს ფაქტი ნათელი ხდება გაწონასწორებული სასწორის სითხეში ჩაძირვისას, — ირღვევა ბალანსი, რომელიც სიყალბეს ააშკარავებს.

5. π რიცხვის აპროქსიმაცია (მიახლოება)

π რიცხვის უხეში მიახლოებისათვის საკმარისია ერთეულად ავიღოთ რაღაც ფიქსირებული ცილინდრის (მაგალითად, კოლონის) რადიუსი. თოკის საშუალებით გავიგოთ მისი გარშემოწერილობა და შევადაროთ ის რადიუსთან. ამგვარია π რიცხვის მიახლოება ბაბილონელებთან და ეგვიპტელებთან და ეს არავითარ სიახლეს არ წარმოადგენს.

სულ სხვაა არქიმედეს მიერ შემოთავაზებული მეთოდი, რომელიც მიახლოებით ადგენს წრეწირის სიგრძეს წრეში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წესიერი მრავალკუთხედების პერიმეტრების გამოთვლის საშუალებით. გავა 16 საუკუნე, სანამ სპარსი მათემატიკოსი ალ-ქაში (1380 - 1429) შემოგვთავაზებს π რიცხვის გამოთვლის კიდევ ერთ ეფექტურ მეთოდს.

არქიმედეს ნაშრომში „წრის გაზომვა“ შემოთავაზებული მეთოდი, სინამდვილეში არის წრეწირის სიგრძის მიახლოებითი გამოთვლის პირველი ალგორითმი. მან დაიწყო იმით, რომ დაამტკიცა: — წრეწირის სიგრზე მეტია ნებისმიერი მასში ჩახაზული ამოზნექილი მრავალკუთხედის პერიმეტრსა და ნაკლებია მასზე შემოხაზული ამოზნექილი მრავალკუთხედის პერიმეტრზე. მას შემდეგ, რაც გამოთვალა წრეში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წესიერი ექვსკუთხედების პერიმეტრები, რაც მარტივი გამოსათვლელია, მან იპოვა, თუ როგორ უნდა გამოეთვალა წესიერი ამოზნექილი გაორმაგებული გვერდების მქონე (წინასთან შედარებით) მრავალკუთხედების პერიმეტრები. თანამედროვე ენაზე ეს ასე ჟღერს: აღვნიშნოთ p_k და P_k, შესაბამისად, წრეში ჩახაზული და ამავე წრეზე შემოხაზული წესიერი k-კუთხედის პერიმეტრები. რეკურსიული პროცედურა შესაძლოა აღიწეროს შემდეგნაირად:

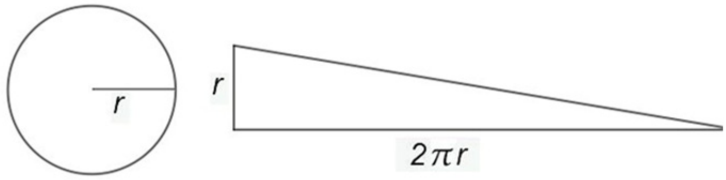
$$P_{2k} = \frac{2p_k \cdot P_k}{p_k + P_k} \qquad p_{2k} = \sqrt{p_k \cdot P_k}$$

ამ პროცედურის გამოყენებით არქიმედე ითვლის p_{12} , P_{12}, p_{24}, P_{24}, p_{48}, P_{48}, p_{96}, P_{96} და ღებულობს ზედა და ქვედა შეფასებებს, შესაბამისად, 2 × 10^4 და 4 × 10^4 სიზუსტით. დაუდგენელია, თუ რატომ გაჩერდა არქიმედე 96-კუთხედზე. აღსანიშნავია, რომ ეს პროცედურა ძალზე „მოსაბეზრებელი“ ხდება კვადრატული ფესვების გამოთვლისას. თუმცა ამ მეთოდის გამოყენება იძლევა თეორიულ საშუალებას ცდომილება იყოს იმდენად მცირე, რამდენიც იქნება სასურველი.

6. წრის გაზომვა

დებულება 1

წრე ეკვივალენტურია მართკუთხა სამკუთხედის, რომლის ერთი კათეტი რადიუსის ტოლია, ხოლო მეორე (კათეტი) წრეწირის სიგრძის კონგრუენტულია (სურ.7).



სურ. 7

დებულებები 2 და 3 ეხება π რიცხვის გამოთვლებს.

დებულება 2

წრის ფართობი ტოლია მისი დიამეტრის კვადრატის 11/14 ნაწილის.

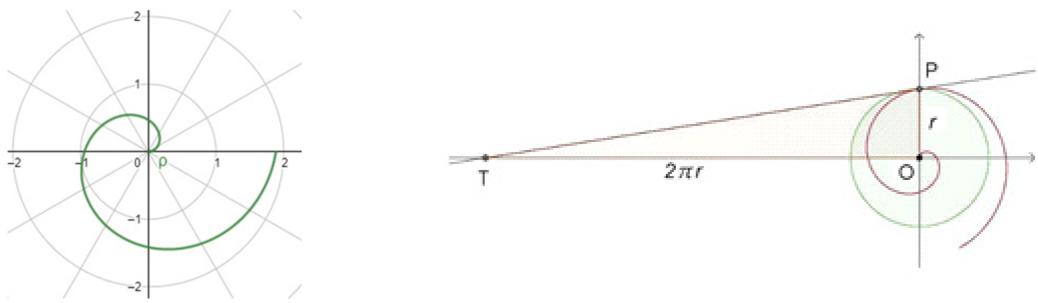
დებულება 3

ნებისმიერი წრეწირის სიგრძის შეფარდება მის დიამეტრთან ნაკლებია 3 + 1/7, მაგრამ მეტია 3 + 10/71-ზე.

7. სპირალების შესახებ

არქიმედეს სპირალი (სურ.8 ა) პირველად შეისწავლა კონონ სამოსელმა (280 - 220 ძვ.წა.), მოგვიანებით კი, არქიმედემ წიგნში „სპირალების შესახებ“ (225 ძვ.წა.) შეძლო და იპოვა სპირალების მხებები და აგრეთვე გამოთვალა სპირალის ნაწილებით შემოსაზღვრული ფიგურების ფართობები. შემდგომ მან ეს გამოიყენა წრის კვადრატურისას (ანუ მოცემული წრის ტოლდიდი კვადრატის ასაგებად) და კუთხის ტრისექციისათვის (ნებისმიერი კუთხის სამ ტოლ ნაწილად დასაყოფად). ის სპირალს ასე განსაზღვრავს:

თუ სწორი ჯოხი (ხაზი), რომლის ერთი ბოლო რჩება უძრავად, ბრუნავს თანაბრად, სანამ არ მივა საწყის მდგომარეობამდე და, ამავე დროს, სანამ ჯოხი ტრიალებს, მასზე თანაბარი სიჩქარით (სწორ ხაზზე) უძრავი ბოლოდან მოძრაობს წერტილი, მაშინ სიბრტყეზე ეს წერტილი აღწერს სპირალს.



ა. არქიმედეს სპირალი

ბ. არქიმედეს კონსტრუქცია

სურ. 8

აქ წრესთან დაკავშირებით არქიმედე იძლევა შემდეგ კონსტრუქციას (სურ. 8 ბ): დავუშვათ P არის სპირალის წერტილი, როდესაც ჯოხი ასრულებს ერთ სრულ ბრუნს. თუ ამ სპირალის მხები P წერტილში კვეთს OP წრფის მართობს T წერტილში, მაშინ OT არის OP რადიუსის მქონე წრეწირის სიგრძე.

8. სფეროსა და ცილინდრის შესახებ

დოსითეოს პელუზიელთან (ძვ.წა III საუკუნე) გაგზავნილ პირველ წიგნში „სფეროსა და ცილინდრის შესახებ“, არქიმედეს გამოყავს სფეროსა და სფერული სეგმენტების ზედაპირის ფართობისა და მოცულობის გამოსათვლელი წესები, ადარებს რა შესაბამისი კონუსებისა და ცილინდრების ზო-

მებს. კერძოდ, ძირითადი შედეგები ასე გამოიყურება:

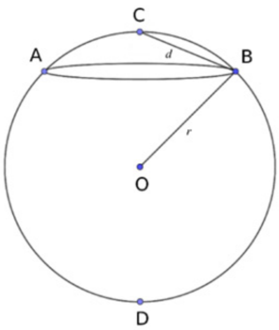
დებულება 33

ნებისმიერი სფეროს ზედაპირის ფართობი ტოლია ოთხჯერ აღებულ, მასში მოთავსებულ უდიდეს წრის ფართობზე.

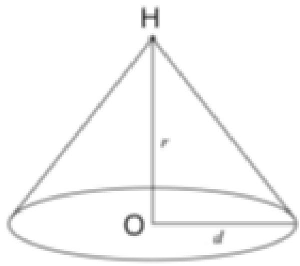
ამგვარად: სფეროს ზედაპირის ფართობი = $4 \times \pi r^2$.

ნებისმიერი სფერული სეგმენტის ზედაპირის ფართობი ტოლია იმ წრის ფართობისა, რომლის რადიუსი ტოლია იმ მონაკვეთის სიგრძისა, რომლის ერთი ბოლო არის სეგმენტის „წვერო" და მეორე ბოლო მოხაზავს ამ სეგმენტის „ფუძეს".

ამგვარად: სეგმენტის ფართობი = $\pi \times d^2$, სადაც (d = CB. იხ. სურ. 9 ა)



ა. სფერული სეგმენტი



ბ. შესაბამისი კონუსი

სურ. 9

შევნიშნოთ, რომ, როდესაც B ≡ D, მაშინ d = 2 r, სეგმენტის ზედაპირი ხდება სფეროს სრული ზედაპირი და $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$.

დებულება 34

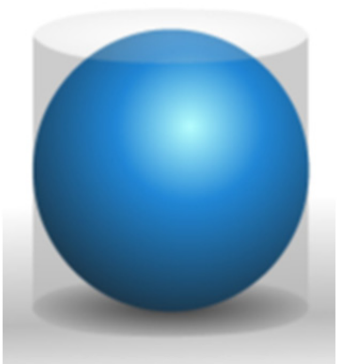
ნებისმიერი ბირთვის მოცულობა ტოლია ოთხი ისეთი კონუსის მოცულობისა, რომლის ფუძე არის სფეროს უდიდესი წრე, ხოლო სიმაღლე ბირთვის რადიუსის ტოლია.

ამგვარად: სფეროს მოცულობა = $4 \times \left(\pi r^2 \times \frac{r}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}$.

როგორც შედეგი:

ბირთვის მოცულობა შეადგენს მასზე შემოხაზული ცილინდრის ორ მესამედს და სფეროს ზედაპირის ფართობი — ამავე ცილინდრის ზედაპირის ფართობის, ფუძეების ჩათვლით, ორი მესამედია.

კერძოდ, სფერო და მასზე შემოხაზული ცილინდრი, ფუძეების გარეშე, ერთნაირი განზომილებისაა. განსაკუთრებით ლამაზი შედეგია, რომელსაც უნდა დაემშვენებინა არქიმედეს საფლავი (სურ. 10).



სურ. 10. სფერო და მასზე შემოხაზული ცილინდრი

სურ.11. ციცერონმა არქიმედეს საფლავი აღმოაჩინა. პიერ ანრი დე ვალანსიენი (1787 წ.)

დებულება 44

ნებისმიერი სფერული სექტორის მოცულობა ტოლია კონუსის მოცულობისა, რომლის ფუძის ფართობი ტოლია სფერული სეგმენტის ფართობისა, რომელსაც ის მოიცავს, ხოლო სიმაღლე ტოლია სფეროს რადიუსისა (სურ. 9 ა და 9 ბ.).

მეორე წიგნში არქიმედე აჩვენებს, თუ როგორ უნდა ამოიხსნას რამდენიმე ამოცანა, რომელთა შორისაა:

დებულება 4

სფერო სიბრტყით გავჭრათ ისე, რომ სეგმენტების მოცულობების ფარდობა იყოს მოცემული სიდიდე.

ამას გარდა, ის ამტკიცებს ექსტრემუმის შემდეგ თვისებას:

დებულება 9

სფეროს ყველა სეგმენტიდან, რომელთაც ერთნაირი ზედაპირის ფართობი აქვთ, ნახევარსფეროს უდიდესი მოცულობა გააჩნია.

Ex eadem urbe humilem homunculum a pulvere et radio excitabo, qui multis annis post fuit, Archimedem. Cuius ego quaestor ignoratum ab Syracusanis, cum esse omnino negarent, saeptum undique et vestitum vepribus et dumetis indagavi sepulcrum. Tenebam enim quosdam senariolos, quos in eius monumento esse inscriptos acceperam, qui declarabant in summo sepulcro sphaeram esse positam cum cylindro. Ego autem, cum omnia conlustrarem oculis (est enim ad portas Agrigentinas magna frequentia sepulcrorum), animum adverti columellam non multum e dumis eminentem, in qua inerat sphaerae figura et cylindri. Atque ego statim Syracusanis (erant autem principes mecum) dixi me illud ipsum arbitrari esse quod quaererem. Inmissi cum falcibus multi purgarunt et aperuerunt locum; quo cum patefactus es set aditus, ad adversam basim accessimus; apparebat epigramma exesis posterioribus partibus versiculorum dimidiatum fere. Ita nobilissima Graeciae civitas, quondam vero etiam doctissima, sui civis unius acutissimi monumentum ignorasset, nisi ab homine Arpinati didicisset. (Cic. Tusc. V 23).	იმავე ქალაქის მტვრისა და ჩალისგან საბრალო კაცუნას გავიხსენებ — არქიმედეს, რომელიც მრავალი წლის შემდეგ ცხოვრობდა. კვესტორად ყოფნისას მე სირაკუზაში მოვძებნე მისი საფლავი, სრულიად მივიწყებული — თითქოს ყველა უარყოფდა მის არსებობას — ყოველი მხრიდან ეკალბარდებით და ეკლიანი ბუჩქებით დაფარული. მე ვიცოდი რამდენიმე სენარიუსი (ექვსტერფიანი სალექსო სტრიქონი), რომლებიც მისი საფლავის ქვაზე იყო დაწერილი; წარწერის მიხედვით, საფლავის თავზე სფერო და ცილინდრი იდგა. როდესაც ყველაფერს თვალი მოვავლე — ეს ხდებოდა აგრაგანტინუსის კარიბჭესთან, სადაც მრავლადაა საფლავები — უეცრად ყურადღება მივაპყრე პატარა სვეტს, ძლივს რომ მოჩანდა ეკალბარდებში. სვეტზე სფეროსა და ცილინდრის ფიგურა იყო გამოსახული. მე მაშინვე სირაკუზელებს შევატყობინე — ჩემთან ერთად მათი უმაღლესი პირები იყვნენ — ვუთხარი, რომ ვგონებ, ეს იყო, რასაც ვეძებდი. მათ ცელებითა და ნამგლებით [კაცები] გამოგზავნეს, რომელთაც ადგილი გაასუფთავეს. როცა მისასვლელი გათავისუფლდა, საძირკველს მივუახლოვდით. გამოჩნდა წარწერა, სტრიქონთა დაბოლოებანი უკვე ნახევრად წაეშალა დროის დინებას. აი, საბერძნეთის ყველაზე განთქმულმა ქალაქმა, ამავდროულად, ყველაზე განათლებულის სახელიც რომ ჰქონდა, როგორ დაივიწყა თავისი ყველაზე გონიერი მოქალაქის საფლავი — არპინელი კაცი რომ არა, ამის შესახებ ვერც კი შეიტყობდნენ. (ლათინურიდან თარგმნა ნ. ქუთელიამ)

9. „ბრტყელი ფიგურების წონასწორობისა და სიმძიმის ცენტრის შესახებ“

„სიბრტყეთა წონასწორობის შესახებ“ (ორ წიგნად) ძირითადად ეძღვნება სწორი ხაზებითა და პარაბოლების მონაკვეთებით შემოფარგლული ბრტყელი ფიგურებისა და პარაბოლოიდების სიმძიმის ცენტრების პოვნას.

პირველ წიგნში გადმოცემულია ბერკეტის კანონი: *წონასწორობა მყარდება, როდესაც მოძრავი ძალის მომენტი უტოლდება წინააღმდეგობის ძალის მომენტს, ანუ მასზე მოდებული მექანიკური მომენტების ჯამი უნდა იყოს ნულის ტოლი.* თუ დავუშვებთ, რომ ძალები ღეროს მართობულნი არიან, გვექნება:

$$b_1 \cdot F_1 = b_2 \cdot F_2,$$

სადაც $F_1 = \left|\overrightarrow{F_1}\right|$ და $F_2 = \left|\overrightarrow{F_2}\right|$ — არის ძალები, მოდებული ღეროს ბოლოებზე, ხოლო $b_1 = \left|\overrightarrow{b_1}\right|$ და $b_2 = \left|\overrightarrow{b_2}\right|$ არის ამ ღეროს ბოლოებზე მოთავსებული წონები. გამოდის, რომ:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

ანუ მხარი და მასზე მოდებული ძალა უკუპროპორციულებია. ამ ტრაქტატზე დაყრდნობით არქიმედე ითვლება თეორიული მექანიკის ფუძემდებლად. თუმცა სიმძიმის ცენტრზე წარმოდგენები დადგენილი იყო არქიმედემდე. მან შეიტანა დიდი წვლილი ამ კონცეფციის კონუსურ კვეთებზე განვრცობაში.

10. პარაბოლის კვადრატურა

პარაბოლის კვადრატურით დასათაურებულ და დოსითეოს პელუზიუმელისადმი მიძღვნილ წიგნში არქიმედეს მიერ გამოთვლილია პარაბოლის სეგმენტის ფართობი (ანუ ფიგურისა, რომელიც პარაბოლის ნაწილით და მისი მკვეთითაა შემოსაზღვრული, სურ. 12ა, მონაკვეთი AC) — არის იმავე ფუძისა და წვეროს მქონე სამკუთხედის S ფართობის ოთხი მესამედი (იხ. სურ.12 ა, სამკუთხედი ABC).

ამ წიგნის დასაწყისში არქიმედეს შემოაქვს აქსიომა, რომელიც გამოიყენება დამტკიცებისას და გამორიცხავს უსასრულოდ მცირე რიცხვების არსებობას (ე.წ. არქიმედეს აქსიომა). ფაქტობრივად, არქიმედეს დემონსტრაციის მეთოდი, როგორც მისი თანამედროვეები, გამორიცხავს უსასრულოდ მცირე პროცედურების გამოყენებას და აღწევს იმავე შედეგებს, რასაც თანამედროვე ანალიზი.

ის იყენებს ამოწურვის მეთოდს, რომელიც ევდოქს კნიდელის (408-355 ძვ.წა.) მიერ იქნა შემოტანილი, და ფიგურის ფართობის გასაზომად თანდათანობით ავსებს მას შესაბამისი პოლიგონებით, რომლებიც თანდათან მცირდება, რათა ამოავსოს გასაზომ ფიგურაში ცარიელი ადგილები. არქიმედე, პარაბოლის AC მონაკვეთის შემთხვევაში (სურ. 12 ა), ავლებს პარაბოლის ღერძის პარალელურ წრფეებს რკალის უკიდურეს A და C წერტილებზე, ხოლო მესამე წრფე ორივე წრფის პარალელურია და მათგან თანაბრად დაშორებული. მანძილი მათ შორის აღნიშნულია h და პარაბოლასთან მისი გადაკვეთის წერტილი B ასოებით (სურ.12 ა). ასე განისაზღვრა ABC სამკუთხედი. შემდეგ ეს პროცედურა შესაძლოა გამეორდეს პარაბოლის AB და AC რკალებისათვის და, შესაბამისად, განისაზღვროს თითოეულისათვის კიდევ ორი ახალი სამკუთხედი. ამ მეთოდის გაგრძელებით პარაბოლის რკალი შეივსება უსასრულო რაოდენობის სამკუთხედებით. პარაბოლის რკალითა და მკვეთით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი ტოლია ალგორითმის შესაბამისად აგებული უსასრულო რაოდენობის სამკუთხედების ფართობების ჯამის. პარაბოლის თვისების გამოყენებით არქიმედემ დაამტკიცა, რომ ამგვარი სამკუთხედების ფართობები აკმაყოფილებენ თანადობას:

S = ფართობი ABC = 4 x
[ფართობი ADB + ფართობი BEC]

და, შესაბამისად, ყოველ ბიჯზე წინას ფართობის 1/4 ემატება აღნიშნულ ჯამს. თანამედროვე ტერმინებით გამოდის, რომ საძიებელი ფართობის პოვნა დაიყვანება ისეთი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის გამოთვლაზე, რომლის პირველი წევრია S და მნიშვნელი 1/4 , ანუ:

$$S[1 + 4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} + \cdots] = \frac{4}{3}S.$$

მაგრამ არქიმედე ამ გზას არ ირჩევს [8]. ის პირველია, ვინც დაამტკიცა, რომ, თუ მოცემულია რიცხვების მიმდევრობა $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$, სადაც $S = S_1 = 4S_2$, $S_2 = 4S_3$, . . . მაშინ ჯამი:

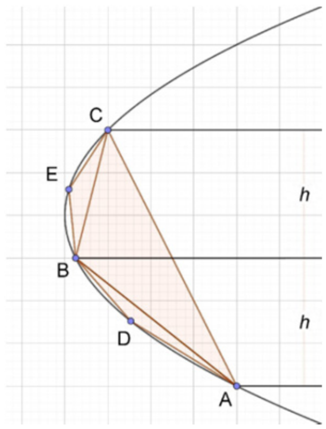
$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \frac{1}{3}S_n = \frac{4}{3}S$$

ანუ:

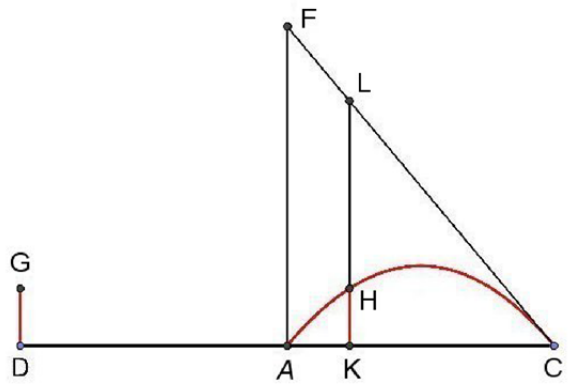
$$S \cdot \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] = \frac{4}{3}S.$$

ამ თანადობიდან, თანამედროვე მეთოდით თუ n-ს მივასწრაფებთ უსასრულობაში, გამოდის, რომ წევრი $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ხდება უსასრულოდ მცირე, პირველი წევრების ჯამი მიისწრაფვის $\frac{4}{3}S$-კენ. არქიმედე კი უბრალოდ უშვებს, რომ ამ ფიგურის ფართობი ტოლია $\frac{4}{3}S$, შემდეგ კი ამოწმებს, რომ ეს სიდიდე შეუძლებელია იყოს $\frac{4}{3}S$ -ზე მეტი ან ნაკლები.

უნდა აღინიშნოს, რომ ესაა ლიტერატურაში ცნობილი „უსასრულო“ მწკრივის პირველი შეჯამება.



ა. მათემატიკური ალგორითმი



ბ. მექანიკური პროცედურა

სურ.12. პარაბოლის სეგმენტის ფართობის გამოთვლა

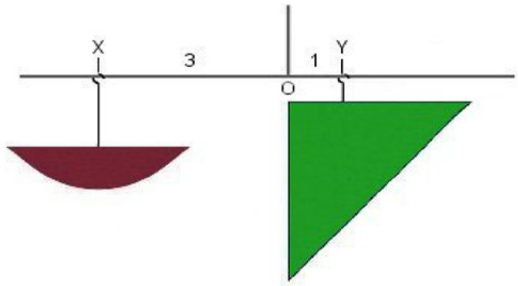
10. 1. მექანიკური პარაბოლის კვადრატურა

არქიმედე თავის წიგნში „მეთოდი“ კვლავ უბრუნდება პარაბოლური სეგმენტის ფართობის დათვლას და ამას აკეთებს ძალზე გონებამახვილური მექანიკური პროცედურის საშუალებით [2]; აჩვენებს, რომ ეს ფართობი ტოლია ჩახაზული სამკუთხედის (ABC, სურ.13ბ.) ფართობის 4/3-ისა. საერთოდ, ნაშრომის [2] ავტორები ასაბუთებენ, რომ „მეთოდში“ არქიმედე იყენებს აქტუალურ უსასრულობას, — ფაქტი, რომელსაც ადრე მეცნიერების ისტორიკოსები უარყოფდნენ.

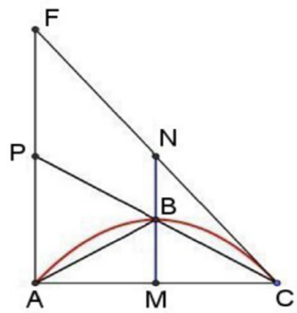
განვიხილოთ AC ფუძის მქონე პარაბოლის მონაკვეთი და სამკუთხედი AFC, სადაც AF პარალელურია პარაბოლის ღერძისა და CF ეხება პარაბოლას C წერტილში (სურ.12ბ). განვიხილოთ პარაბოლის ღერძის პარალელური წრფე KL, რომელიც პარაბოლას კვეთს H წერტილში. მაშინ სამართლიანია პროპორცია KH: HL = AK: KC და, როგორც შედეგი, ვიღებთ: KL: KH = AC: AK. აქ არქიმედეს შემოაქვს გენიალური იდეა — განიხილოს გეომეტრიული სიდიდეები, როგორც ფიზიკური სიდიდეები. ის წარმოიდგენს, რომ მონაკვეთები KH და KL არიან ერთგვაროვანი მატერიალური ძელები მასით w, რომელთა სიმძიმის ცენტრი ემთხვევა მათ გეომეტრიულ ცენტრს, რომელიც მათი სიგრძის პროპორციულია, ანუ $w_{KL}{:}\,w_{KH} = KL : KH = AC : AK$.

DC მონაკვეთი, რომლის შუა წერტილია A, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ბერკეტი A საყრდენი წერტილით. ბერკეტის პრინციპის თანახმად, რომელიც არქიმედეს მიერ ჩამოყალიბებულია წიგნში „სიბრტყეთა წონასწორობის შესახებ“, ღერო KH, გადატანილი DG პოზიციაში აწონასწორებს თავის ადგილზე დატოვებულ KL ღეროს. შემდეგ არქიმედეს შემოაქვს თავისი მეორე იდეა, რომელიც აღმოჩნდა ბონავენტურა კავალიერის მეთოდის (Geometria indivisibilibus continorum nova quadam ratione promota, Bononiae 1635) 18 საუკუნით წინმსწრები. ის განიხილავს პარაბოლურ რკალს, როგორც მძიმე პარაბოლის ღერძის პარალელურად მძიმე ღეროების გაერთიანებას.

მაშინ D-ში კონცენტრირებული პარაბოლური სეგმენტის საერთო წონა წონასწორდება AFC სამკუთხედის საერთო წონით, რომელიც ჩამოკიდებულია სიმძიმის ცენტრით, რომლის მდგომარეობა AC მონაკვეთის ერთ მესამედს შეადგენს. აქედან გამოდის, რომ პარაბოლური სეგმენტის ფართობი სამკუთხედ AFC-ს ერთი მესამედია, ანუ სურ. 13ა-ზე OX = 3OY.



ა. ბერკეტი



ბ. გეომეტრია

სურ.13. პარაბოლური სეგმენტი და სამკუთხედი

ახლა განვიხილოთ AFC სამკუთხედის AC გვერდის შუა M წერტილი. B და N წერტილები იყოს პარაბოლის ღერძის M წერტილში გამავალი პარალელის შესაბამისად პარაბოლის რკალთან და CF მხებთან გადაკვეთის წერტილები (სურ. 13 ბ.). სამკუთხედების AFC და MNC მსგავსებიდან გამოდის, რომ AFC სამკუთხედის ფართობი ორჯერ მეტია სამკუთხედ CAP ფართობზე, ხოლო CAP და CMB სამკუთხედების მსგავსება გვაძლევს, რომ სამკუთხედ CAP ფართობი ორჯერ მეტია სამკუთხედ CAB ფართობზე. საბოლოოდ კი მივიღეთ, რომ AFC სამკუთხედის ფართობი ოთხჯერ უფრო დიდია, ვიდრე სამკუთხედ ABC ფართობი, ანუ შედეგი ასეთია: პარაბოლური სეგმენტის ფართობი არის ABC სამკუთხედის ფართობის 4/3.

11. კონოიდებისა და სფეროიდების შესახებ

დისითეოს პელუზიელთან მიწერილ ნაშრომში არქიმედე ამტკიცებს 32 დებულებას, დაკავშირებულს კონუსური კვეთის თავის ღერძის გარშემო ტრიალით წარმოქმნილ სხეულებთან, რომლებიც მოიცავენ პარაბოლოიდებს, ჰიპერბოლოიდებს და სფეროიდებს, რომლებიც მიიღება ელიფსის ბრუნვით მისი დიდი ან პატარა ღერძის გარშემო.

ნაშრომის ძირითადი შედეგი არის სიბრტყეებით მოკვეთილი სეგმენტების მოცულობების კვლევა იმგვარი კონუსების საშუალებით, რომელთა ფუძეები და სიმაღლეები, შესაბამისად, სეგმენტისას ემთხვევა.

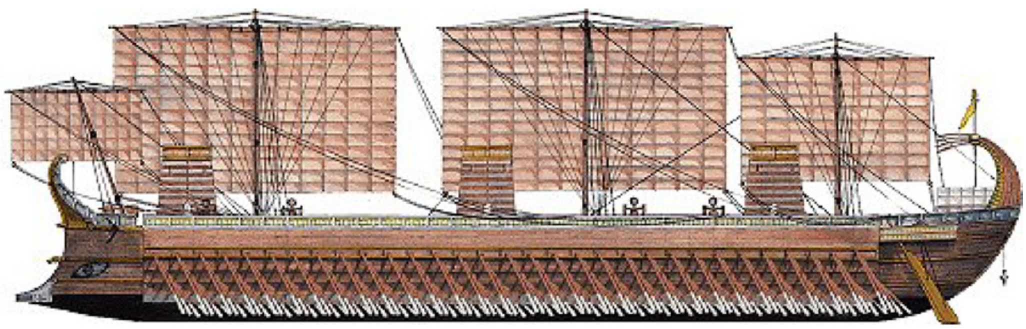
12. მცურავი სხეულების შესახებ

„მცურავი სხეულების შესახებ“ (ორ წიგნად) შემორჩენილია მხოლოდ ნაწილობრივ ბერძნულ ენაზე, დანარჩენი — ბერძნულიდან თარგმანია შუა საუკუნეების ლათინურ ენაზე. ეს არის პირველი ცნობილი ნაშრომი ჰიდროსტატიკაში და ამიტომაც არქიმედე აღიარებულია ამ სამეცნიერო მიმართულების ფუძემდებლად.

მცურავი სხეულების შესახებ ნაშრომის მიზანი არის სითხეში მოთავსებული სხვადასხვა მყარი სხეულის მდგომარეობის განსაზღვრა, მისი ფორმისა და კუთრი წონის შესაბამისად. ამ გამოკვლევებს აქვს პრაქტიკული გამოყენებითი მნიშვნელობა, რის გამოც, სინამდვილეში, ხომალდების კორპუსების დიზაინის საფუძველი გახდა.

პირველ წიგნში არქიმედე აყალიბებს რამდენიმე ზოგად პრინციპს, მაგალითად, რომ მყარი სხეული, რომელიც უფრო მკვრივია სითხეზე და მოთავსებულია მასში, ხდება უფრო მსუბუქი. არქიმედე აყალიბებს სითხეში წონასწორობის კანონს და აჩვენებს, რომ, დედამიწის სფეროს ფორ-

მიდან გამომდინარე, წყალი სიმძიმის ცენტრის გარშემო ღებულობს სფერულ ფორმას. კერძოდ, მცურავი სხეულების შესახებ ნაშრომი შეიცავს კონცეფციას, რომელიც შემდგომ არქიმედეს პრინციპის სახელითაა ცნობილი: ***„სხეული, სრულად ან ნაწილობრივ ჩაძირული სითხეში, განიცდის ბიძგს ზევით*** *(ჰიდროსტატიკურ, ამომგდები ძალის ზემოქმედებას)**, რომელიც გამოდევნილი სითხის წონის ტოლია“.*** ამ პრინციპის გარდა, არქიმედემ აღმოაჩინა, რომ სრულად ჩაძირული სხეული გამოდევნის იმ მოცულობის წყალს, რა მოცულობისაც არის თვით სხეული (ამ ფაქტის აღმოჩენისას, როგორც ამბობენ, მან იყვირა „ევრიკა“).



სურ. 14. „სირაკუზია“ — ჰიერონ II გემი

გარდა ამისა, დებულება 5 არქიმედეს ტრაქტატისა „მცურავი სხეულების შესახებ“ ამბობს:

„მცურავი სხეული გამოდევნის სითხეს, რომელსაც აქვს იგივე წონა, რაც ამ სხეულს“. ზოგიერთი ამას „ცურვის (ტივტივის) პრინციპს“ უწოდებს!

„მცურავი სხეულების შესახებ“ მეორე წიგნი შეიცავს თვალსაჩინო მათემატიკურ შედეგებს, რომელთა შორისაა დიდი სიმკვრივის სითხეში მცურავი სხვადასხვა ფორმის და სიმკვრივის პარაბოლოიდების სეგმენტების მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობის დეტალური კვლევები, რომლებიც დამოკიდებულია გეომეტრიულ და ჰიდროსტატიკურ ვარიაციაზე.

არქიმედემ დაასკვნა, რომ წონასწორული მდგომარეობა განპირობებულია არა მარტო სითხის ტიპით, არამედ ჩაძირული მყარი პარაბოლოიდის კუთრი წონით:

„მოცემულია ბრუნვის პარაბოლოიდის სწორი სეგმენტი, რომლის ღერძის სიგრძე a მეტია (3/4) p -ზე (სადაც თანამედროვე ტერმინებში წარმომქმნელი პარაბოლა ჩაიწერება, როგორც $x^2 = py$) და რომლის კუთრი წონა სითხისაზე ნაკლებია, მაგრამ მათი ფარდობა არაა ნაკლები $\frac{\left[a-\left(\frac{3}{4}\right)p\right]^2}{a^2}$ -ზე, და თუ ეს სეგმენტი ჩაძირულია სითხეში ისე, რომ მისი ღერძი მართობის მიმართ ნებისმიერი კუთხითაა დახრილი, მაგრამ ისე, რომ მისი ფუძე არ ეხება სითხის ზედაპირს, ის არ დარჩება ამ მდგომარეობაში, არამედ დაუბრუნდება იმ მდგომარეობას, რომელშიც ღერძი მართობულია“.

ითვლება, რომ „მცურავი სხეულების შესახებ“ მეორე წიგნი არქიმედეს ყველაზე ძლიერი და ორიგინალური ნაწარმოებია.

13. ფსამიტი

მეუფეო ჰელონ, არსებობენ ადამიანები, რომელთაც ჰგონიათ, რომ სილის მარცვლების რაოდენობა უსასრულოა. მე არ ვამბობ სილაზე სირაკუზის გარშემო ანკი სიცილიის სხვა რეგიონებში, მაგრამ ვსაუბრობ მთელ მის რაოდენობაზე როგორც დასახლებულ, ისე დაუსახლებელ ქვეყნებში.

სხვები ფიქრობენ, რომ, თუმცა ეს რაოდენობა არაა უსასრულო, მაგრამ მისი რაოდენობრივად წარმოდგენა შეუძლებელია.

ამ უკანასკნელებს რომ წარმოედგინათ მთელი დედამიწის სილის მასა, თანაც ამით რომ ყოფილიყო გავსებული ყველა ზღვა და ხევი მაღალი მთების სიმაღლეზე, მაშინ, რა თქმა უნდა, კიდევ უფრო ნაკლებად დაიჯერებდნენ, რომ ადვილია ამ რაოდენობაზე დიდი რიცხვის დასახელება. მე კი,

პირიქით, შევეცდები გეომეტრიული სიზუსტით დაგიმტკიცო და დაგარწმუნო, რომ რიცხვთა შორის, რომლებიც მე აღვნიშნე ზევქსიპესთან მიწერილ წიგნში, არის რიცხვები, რომლებიც უმეტესნი არიან სილის მარცვლების იმ რაოდენობაზე, რომელიც დაეტევა არა მარტო იმ სივრცეში, რომელიც დედამიწის მოცულობის ტოლია, არამედ მთელს სამყაროში (სრულად იხ. [12]).

ეს არის არქიმედეს მიმართვა უფლისწული ჰელონისადმი. კერძოდ, მას სურს აჩვენოს, რომ სამყაროს სასრული ზომები აქვს და ამისათვის საკმარისია მისი შესაბამისი მოცულობის ქვიშის მარცვლებით „ამოვსება“ და შემდეგ მათი დათვლა (აქედანაა ლათინური სათაური „არენარიუსი“, რაც ქვიშის მთვლელს ნიშნავს).

ამ მიზნით, არქიმედე, არისტარქე სამოსელის (310-230 ძვ.წა.) ჰელიოცენტრული თეორიის გამოყენებით, მსჯელობს დედამიწის, სამყაროს (სფერო რადიუსით დედამიწასა და მზეს შორის მანძილით) და უძრავ ვარსკვლავთ ცის ზომებზე [12]. შემდეგ ის დასაშვებად მიიჩნევს ციურ სხეულთა შორის მანძილების შეფასებას და ამისათვის ქმნის ძალზე დიდი რაოდენობის ჩაწერისა და შეფასებების სისტემას.

მისი ნუმერაციის მეთოდის საფუძველს ქმნის მირიადი („ბევრი“ ძველ ქართულად — ი.თ.), რომელიც უდრის 10000-ს (ესაა რიცხვი ქვიშის მარცვლებისა, რომელსაც, სავარაუდოდ, ყაყაჩოს თესლი უნდა შეიცავდეს). იმ ფაქტის გამოყენებით, რომ ორი სფეროს მოცულობების შეფარდობა ტოლია მათი რადიუსის კუბების თანაფარდობისა, ის პოულობს, ყაყაჩოს თესლიდან დაწყებული უძრავ ვარსკვლავთ ცამდე, სულ უფრო მზარდი სფეროების მოცულობების პროპორციების მიმდევრობას.

ამგვარად, არქიმედე ამტკიცებს, რომ კოსმოსში არსებული ქვიშის მარცვლების რაოდენობა 10^{51}-ზე ნაკლები, ხოლო უძრავ ვარსკვლავთ ცაში კი — 10^{63}-ზე ნაკლებია.

არქიმედეს მიერ გამოყენებული მეთოდი საშუალებას იძლევა თანდათან შემოვიტანოთ უფრო დიდი რიცხვები, რაც ძალზე რთულია ბერძნული ნუმერაციის სისტემისთვის, რომელიც ყოველთვის „უფრო“ დიდი რიცხვებისათვის ახალ სიმბოლოებს მოითხოვს [12].

14. მეთოდი – პალიმფსესტი

არაჩვეულებრივი მოვლენები, რომლებიც უკავშირდება, ბიზანტიურ კოდექსის შემცველ პალიმფსესტზე (სურათი 16) არქიმედეს ხელნაწერის „მეთოდის“ დაკარგვას და აღმოჩენას, აღწერილია რევიელ ნეტცისა და უილიამ ნოელის შესანიშნავ წიგნში [2]. ამ თავში ეს მასალაა მიმოხილული. 1840-იან წლებში კონსტანტინოპოლს ეწვია ბიბლიის შემსწავლელი კონსტანტინე ფონ ტიშენდორფი (სურ.15ა). ის დაინტერესდა ბერძნულ მართლმადიდებლურ ბიბლიოთეკაში არსებულ პალიმფსესტზე დატანილი მათემატიკური ნიშნებით.

მან სახლში წამოიღო გვერდი (ახლა ის კემბრიჯის უნივერსიტეტის ბიბლიოთეკაშია).

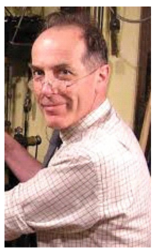

ა. კონსტანტინე ფონ ტიშენდორფი 1815-1875


ბ. გოტჰოლდ ეფრაიმ ლესინგი 1729-1781


გ. ჰიპარქე 190-120 ძვ.წა.


დ. პტოლემაოსი 100-170

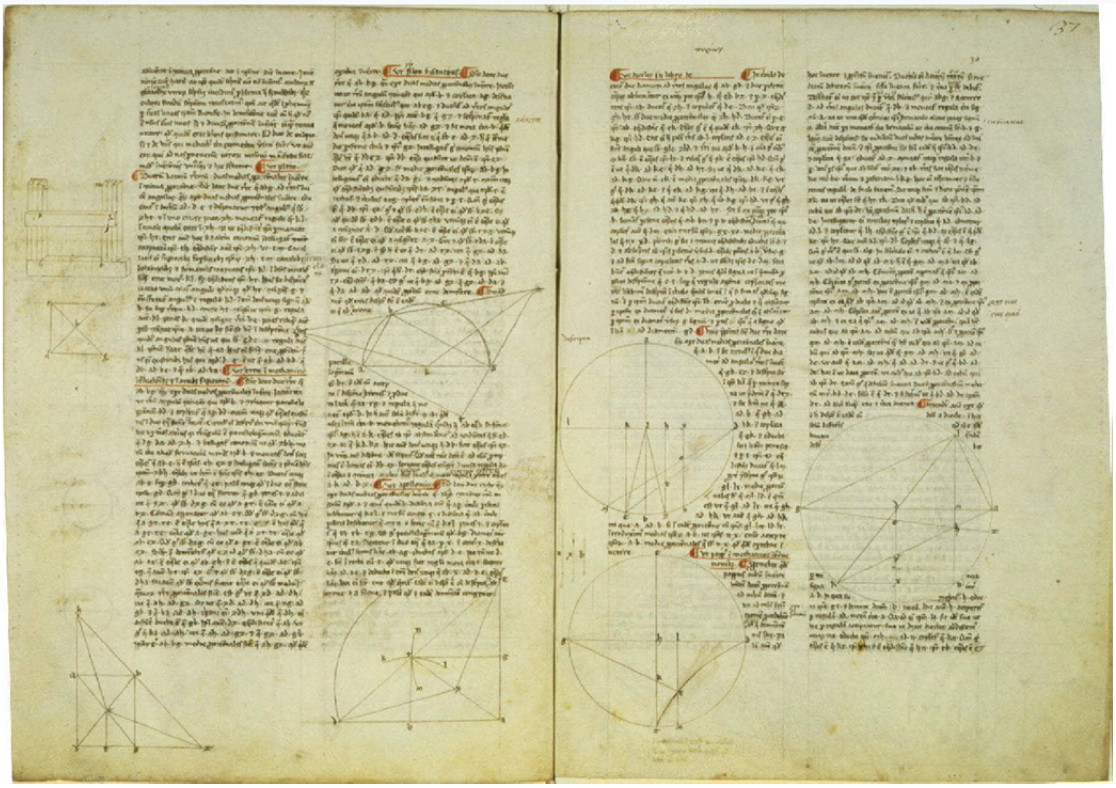

ე. დერეკ დე სოლა პრაისი 1922-1983


ვ. მაიკლ ტ. რაიტი 1948

სურ.15

1899 წელს მეცნიერმა ათანასიოს პაპადოპულოს-კერამეუსმა (1856-1912) გამოაქვეყნა დოკუმენტის ნაწილობრივი ტრანსკრიფცია. გამოკვლევის შემდეგ იოჰან ლუდვიგ ჰეიბერგი მიხვდა, რომ ეს სტრიქონები არქიმედეს ნაშრომიდანაა. როდესაც კონსტანტინოპოლში 1906 წელს ჰეიბერგმა შეისწავლა პალიმფსესტი, მან დაადასტურა, რომ ეს არის არქიმედეს ნაშრომები, რომლებიც დაკარგულად ითვლებოდა. ჰეიბერგს ნება დართეს აეღო პალიმფსესტის გვერდების ფოტომასალა. მათგან მან აწარმოა ტრანსკრიფციები, რომელიც გამოქვეყნდა 1910-1915 წლებში, არქიმედეს შრომების შესახებ წიგნში. ხელნაწერი ქალაქ კონსტანტინოპოლში იერუსალიმის მართლმადიდებლური საპატრიარქოს ბიბლიოთეკაში დარჩა. იქ ის მოიპარეს, 1919-1922 წწ. საბერძნეთ-თურქეთის ომის მომხდარი არეულობების დროს.

რამდენიმე წლის შემდეგ, პარიზში მცხოვრებმა ბიზნესმენმა და აღმოსავლეთში მოგზაურმა მარი ლუი სირიექსმა განაცხადა, რომ პალიმფსესტი ყოველგვარი დოკუმენტაციის გარეშე შეიძინა ბერისგან. ამასობაში ეს დოკუმენტი კიდევ შეიცვალა და დაემატა მინიატურები, რამაც მისი ოთხი გვერდის წაკითხვა შეუძლებელი გახადა. დოკუმენტის შენახვის ადგილის გამო, სხვა დაზიანებები გამოწვეული იყო ობითა და ტენიანობით.



სურ. 16. პალიმფსესტის ერთ-ერთი გვერდი

1998 წელს სირიექსის ქალიშვილმა კრისტის აუქციონის საშუალებით გაყიდა ეს დოკუმენტი ორ მილიონ დოლარზე მეტად, რომელიც ანონიმურმა ამერიკელმა მყიდველმა შეიძინა. შემდგომ მყიდველმა ხელნაწერი გადასცა უოლტერსის ხელოვნების მუზეუმს ბალტიმორში, სადაც ის იყო აღდგენილი და დღემდეა დაცული. მყიდველმა, ისევ ანონიმურად, დააფინანსა არქიმედეს ტექსტის გაშიფვრის პროექტი, რომელიც ძნელად იკითხებოდა. 2005 წელს ხელნაწერი ჩამოიტანეს სტენფორდის უნივერსიტეტში, სადაც სინქროტრონული სინათლის, ძლიერი რენტგენის გენერატორის საშუალებით, შესაძლებელი გახდა ტექსტის ამოტანა ზედაპირზე, ორიგინალი მელნის შემადგენელ ნივთიერებებში შავი მეტალების ნარჩენების წყალობით. გამო-

ყენებულ ტექნოლოგიებს შორის არის ისეთი, რომელიც იყენებს ერთდროულად სხვადასხვა ტალღის სიგრძეებს: ინფრაწითელ, ხილულ და ულტრაიისფერ გამოსხივებებს, ერთ მულტისპექტრულ გამოსახულებაში. შემდგომ მონაცემთა დამუშავების სხვადასხვა ტექნიკის გამოყენებამ საშუალება მოგვცა მოვხიბლულიყავით ამ 2200 წელზე მეტი ხნის წინანდელი ტექსტით.

ამრიგად, შეიძლება განვაზოგადოთ ფართობის, მოცულობის ან გეომეტრიული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის პოვნის არქიმედეს მეთოდი, დაწყებული ერთი ან რამდენიმე ჩვენთის ნაცნობი ფიგურიდან, და ეს თვისებებია:

1. ცნობილი გეომეტრიული ფიგურების საფუძველზე პროპორციის პოვნა, რომელშიც ერთ მხარესაა ფარდობა ორ მანძილს შორის, მეორე კი შესაძლოა იყოს ორ მანძილს ანკი ორ ფართობს ან მოცულობას შორის.
2. მიიჩნევა, რომ გეომეტრიულ ფიგურებს აქვთ თანაბრად განაწილებული წონა.
3. ეს ფიგურები ჩამოკიდებულია ბერკეტზე საპირისპიროდ, ისე, რომ ისინი წონასწორობაში დარჩნენ.
4. ითვლება, რომ თითოეული ორგანზომილებიანი ფიგურა შედგება მასში შემავალი, ერთმანეთის პარალელური სწორი მონაკვეთებისაგან.

ანალოგიურად ითვლება, რომ ყოველი სამგანზომილებიანი ფიგურა შედგება მასში შემავალი, ერთმანეთის პარალელური ბრტყელი და ერთი გამორჩეული ღერძის მართობული ელემენტებისაგან.

დაბოლოს, თავად არქიმედემ აღმოაჩინა მეთოდი, რომელიც მის დემონსტრაციულ პროცედურებში გამოიყენებოდა. იგი ამბობდა:

„... ზოგმა რამემ ჯერ მექანიკურად იჩინა თავი და შემდეგ ეს მე გეომეტრიულად დავამტკიცე, რადგან ამ მეთოდით ჩატარებულ კვლევას არა აქვს არავითარი მნიშვნელობა რეალური დამტკიცებისათვის. მაგრამ ეს ასეა, რა თქმა უნდა, უფრო ადვილია, საკითხებზე ამ მეთოდით გარკვეული ცოდნის მიღების შემდეგ, მტკიცებულების პოვნა, ვიდრე მათი ძიება ყოველგვარი წინასწარი ცოდნის გარეშე“.

15. მსხვილფეხა საქონლის ამოცანა

არქიმედეს მსხვილფეხა საქონლის ამოცანა შემდეგნაირად ყალიბდება [11]:

მზის ღმერთს ხარებისაგან და ძროხებისაგან შემდგარი ნახირი ჰყავდა, რომლის ერთი ნაწილი თეთრი იყო, მეორე — შავი, მესამე — ჭრელი და მეოთხე — ჟღალი. ხარებს შორის თეთრების რაოდენობა არის შავების რაოდენობის ნახევარს პლუს ერთი მესამედი და ჟღალების სრული რაოდენობა; შავების რაოდენობა არის ჭრელების ერთი მეოთხედი პლუს ერთი მეხუთედი და ჟღალების სრული რაოდენობა; ჭრელების რაოდენობა არის თეთრების ერთი მეექვსედი პლუს ერთი მეშვიდედი და ჟღალების სრული რაოდენობა; ძროხებს შორის თეთრების რაოდენობა იყო შავი ნახირის ერთ მესამედს პლუს ერთი მეოთხედი; შავი ძროხების რაოდენობა იყო ჭრელი ნახირის ერთ მეოთხედს პლუს ერთი მეხუთედი; ლაქებიანი ძროხების რაოდენობა იყო ყავისფერი ნახირის ერთ მეხუთედს პლუს ერთი მეექვსედი; ყავისფერი ძროხების რაოდენობა იყო თეთრი ნახირის ერთ მეექვსედს პლუს ერთი მეშვიდედი. როგორი იყო ნახირი და მისი შემადგენლობა?

ამოცანის ამოხსნა გულისხმობს მთელ რიცხვებში შესაბამისი დიოფანტური განტოლებების სისტემის ამოხსნას, სადაც W, X, Y და Z (შესაბამისად, თეთრი, შავი, ჭრელი და ჟღალი) ხარების რაოდენობაა, ხოლო w, x, y და z (შესაბამისად, თეთრი, შავი, ჭრელი და ჟღალი) — ძროხების რაოდენობა.

ამონახსნის უმცირესი მთელი რიცხვები მოცემულია [11]:

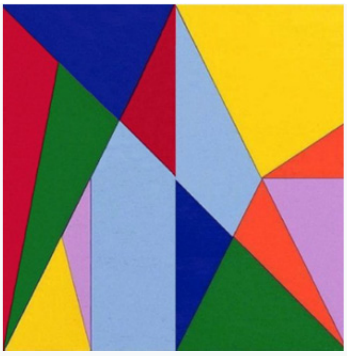
$$W = 10366482,\quad X = 7460514,$$
$$Y = 7358060,\quad Z = 4149387,$$

$$w = 7206360,\quad x = 4893246,$$
$$y = 3515820,\quad z = 5439213.$$

რიცხვები ძალიან დიდია, ამიტომ გამორიცხული არაა ხელნაწერის გადაწერისას დაშვებული უზუსტობები!

(ეს ამოცანა, 44-სტრიქონიან ლექსად დაწერილი ბერძნულ ხელნაწერში, აღმოაჩინა გოტჰოლდ ეფრაიმ ლესინგმა გერმანიაში ვოლფენბიუტელის ჰერცოგ ავგუსტის ბიბლიოთეკაში; გამოაქვეყნა გამოცემა «Beiträge zur Geschichte und Litteratur»-ში 1773 წელს. ი. თ.).

16. სტომაქიონი

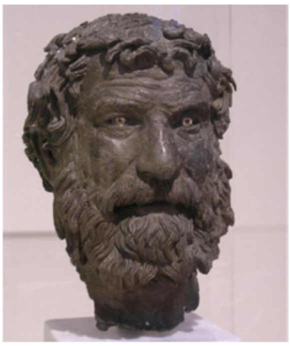


სურ. 17. სტომაქიონი — 14 ნაწილად დაჭრილი კვადრატი

სტომაქიონი — ამოცანა ეხება კვადრატს, რომელიც დაყოფილია 14 ნაწილად. თამაშის ან თავსატეხის არსია ნაწილების ისე მოწყობა, რომ მოედანი შეივსოს. სათაური მომდინარეობს გარემოებიდან, თუ რატომ აგვტკივდა ასე ძლიერ მუცელი.

თამაში ასევე შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ერთმანეთისაგან ძალზე განსხვავებული ფიგურების შესაქმნელად, მაგრამ ძირითადი მიზანია დაითვალოს რამდენი გზით შეიძლება მათი მოთავსება საწყის მოედანზე. ეს არის რთული კომბინატორული პრობლემის პირველი მაგალითი. კომპიუტერის გამოყენებით დადასტურდა (იხილეთ მაგ. [2]), რომ შესაძლო კონფიგურაციების საერთო რაოდენობაა 17152. ხელით შემოწმებისას გასათვალისწინებელია დიდი რიცხვი. იგი შედგება 536 ძირითადი ფიგურისა და 32 ფორმისაგან, რომლებიც სიბრტყის ბრუნვის შედეგად მიიღება (536 × 32 = 17152).

17. ანტიკითერული მექანიზმი და არქიმედეს სფეროები



სურ. 18

III საუკუნეში რომაული სატვირთო ხომალდი ჩაიძირა კუნძულ ანტიკითერასთან.

ტვირთი შედგებოდა ხელოვნების ძვირფასი ნიმუშებისაგან. წყალქვეშა არქეოლოგიური კვლევის შემდეგ აღმოაჩინეს ბრინჯაოს ორი ქანდაკება და იდუმალი მექანიზმის ფრაგმენტები, რომელსაც ანტიკითერული მექანიზმი ეწოდა (სურათი 18 და 19ბ). დღეს ეს აღმოჩენები ინახება ათენის არქეოლოგიურ მუზეუმში.

ანტიკითერული მექანიზმი არის ძველი ბერძნული მოწყობილობა, რომელიც აგებულია ძვ. წა. II საუკუნის ბოლოს. ცნობილია, რომ მისი საშუალებით ხდებოდა ციური სხეულების ციკლების, როგორიცაა მთვარის ფაზები და მთვარე-მზის კალენდარი, გამოთვლა და წარმოჩინება. ეს მექანიზმი ტექნიკურად უფრო რთული აგებულებისაა, ვიდრე სხვა რომელიმე ცნობილი უძველესი მოწყობილობა, რომელიც წარმოაჩენს იმ პერიოდის ტექნიკური დახვეწილობის მოულოდნელ ხარისხს.

ამ მექანიზმის საშუალებით ნაწინასწარმეტყველები მთვარისა და მზის დაბნე-

ლებები, ცხადყოფს ცაზე ელიფსურ ორბიტაზე მთვარის არაერთგვაროვანი მოძრაობის თეორიის ცოდნას. ფაქტობრივად, ეს ინსტრუმენტი ქვედა კვადრატში შეიცავს 223-განყოფილებიან სპირალს, რაც დაკავშირებულია დაბნელებების საროსის ციკლთან.

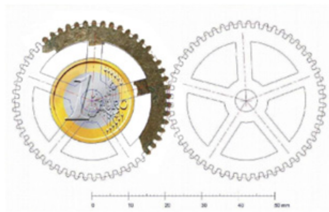
საროსის ციკლი არის 6585.322 დღის პერიოდი (223 სინოდური თვე), რის შემდეგაც დგება მზისა და მთვარის დაბნელებები, რომელიც თითქმის იმავე ადგილას მეორდება. ეს უკვე ცნობილი იყო VI საუკუნეში ქალდეველებისათვის და ასევე ჰიპარქესა და პტოლემაოსისათვის.

პირველი კვლევები ჩაატარა ფიზიკოსმა დერეკ დე სოლა პრაისმა (1922-1983), (სურ. 15ე), რომლის დასკვნებიც თავდაპირველად სადავო იყო. შემდგომი გამოკვლევები 2002-2006 წლებში მაიკლ რაიტმა (სურ. 15ვ) ჩაატარა სპეციალური ტომოგრაფით და გააკეთა მექანიზმის სამუშაო მოდელი, რომელიც ასევე აჩვენებს პლანეტების მოძრაობას (სურ.19ა.). მოწყობილობას აქვს 3 ძირითადი კვადრანტი: ერთი წინა და ორი უკანა მხარეს. რეკონსტრუირებული მოდელის ზომებია: სიმაღლე 30 სმ, სიგანე 15 სმ და სიღრმე 7,5 სმ.

პაპუს ალექსანდრიელმა (290-350) თქვა, რომ არქიმედემ დაწერა (დაკარგული) ხელნაწერი პლანეტარიუმის მოწყობაზე, სახელწოდებით *სფეროების შექმნა*, ალბათ ანტიკეთერას მსგავს მექანიზმზე.

ა. რესტავრირებული მექანიზმი

ბ. ნაპოვნი მექანიზმის ფრაგმენტები



გ. ოლბიის მექანიზმი
G. Pastore@

სურ. 19

Quod si in Scythiam aut in Brittanniam sphaeram aliquis tulerit hanc, quam nuper familiaris noster effecit Posidonius, cuius singulae conversiones idem efficiunt in sole et in luna et in quinque stellis errantibus, quod efficitur in caelo singulis diebus et noctibus, quis in illa barbaria dubitet, quin ea sphaera sit perfecta ratione; hi autem dubitant de mundo, ex quo et oriuntur et fiunt omnia, casune ipse sit effectus aut necessitate aliqua an ratione ac mente divina, et Archimedem arbitrantur plus valuisse in imitandis sphaerae conversionibus quam naturam in efficiendis; praesertim cum multis partibus sint illa perfecta quam haec simulata sollertius – (Cic. Nat. Deor., II,88)	თუკი ვინმე სკვითიიდან ან ბრიტანიიდან ამ სფეროს წამოიღებდა, რომელიც არც ისე დიდი ხნის წინ ჩვენმა მეგობარმა პოსიდონიუსმა დაამზადა და რომლის ცალკეული შემობრუნებანი ასახავს იმავე ბრუნვას, რასაც ასრულებენ მზე, მთვარე და ხუთი ცთომილი და რაც ხდება ცაზე ცალკეული დღეების ან ღამეების დროს, ბარბაროსთა მხარეში ვის გაუჩნდებოდა ეჭვი, რომ ეს სფერო სრულყოფილი გონების ნაყოფი არ არის? ისინი (იგულისხ. ეპიკურეელები) ეჭვს შეუპყრია სამყაროს შესახებ, საიდანაც წარმოიშობა და მოდის ყოველივე, რომ ან შემთხვევით თავისი თავისგან წარმოიშვა, ან რაიმე საჭიროებით, ან ღვთაებრივი გონითა და გონებით. არქიმედეს, რომელმაც ციურ ბრუნვას მიმსგავსებული სფერო დაამზადა, მეტად აფასებენ, ვიდრე ბუნებას, რომელმაც შექმნა [ციური ბრუნვა]; ცხადია, მრავალ ნაწილში შემქმნელი (იგულ. ბუნება) მეტ დახელოვნებას ამჟღავნებს, ვიდრე მისი ასლი (მიმსგავსებული რამ). (ლათინურიდან თარგმნა ნ. ქუთელიამ)

მინდა დავამთავრო ეს მოკლე მიმოხილვა ახალი ამბით, რომელიც იძლევა იმედს, რომ ნაპოვნი იქნება არქიმედეს ორიგინალური პლანეტარიუმი. 2006 წელს პატარა დაკბილული ბორბლის ფრაგმენტი (სურ. 19გ) იპოვეს ოლბიაში (სარდინია, იტალია), რომელიც არქეოლოგიური მემკვიდრეობის სამმართველოს მიერ თარიღდება ძვ.წა. III საუკუნის ბოლოდან — II საუკუნის შუა წლებამდე. ანტიკითერული მექანიზმისაგან განსხვავებით, ამ მოწყობილობის კბილანებიანი ბორბალი გაცილებით დახვეწილია და ანალოგიურია თანამედროვე მექანიზმებში გამოყენებული კბილანებისა (იხილ. ჯ. პასტორეს წიგნი [1]).

ეთიკურ სტანდარტებთან შესაბამისობა, ინტერესთა კონფლიქტი

ავტორი აცხადებს, რომ მას არავისგან და არცერთი დაწესებულებისგან არ მიუღია თანხა და რომ მას ინტერესთა კონფლიქტი არ აქვს.

ლიტერატურა

[1] Pastore, G., *The Antikythera Mechanism - The recovered Archimedes Planetarium*. (Italian), http://www.giovannipastore.it/ANTIKYTHERA.htm

[2] Netz, R., Noel, W., *The Archimedes Codex: Revealing The Secrets of the World's Greatest Palimpsest*, Orion Pub. Co., London, 2008.

[3] Russo, L., *The Forgotten Revolution: How Science was born in 300 BC and why it had to be reborn*. Springer, 2004.

[4] Russo, L., *Archimede*, (Italian), Carocci, Roma, 2019.

[5] Beaumezy, B., *Archimedes modern works*, Soc. Calc. Math., Paris, 2012.

[6] Freeth1, T. et al., Decoding the Antikythera Mechanism: Investigation of an Ancient Astronomical Calculator, *Nature*, 444 (7119), (2006), 587–591.

[7] Van Brummelen, G., (1998), Jamsh¯ıd al-K¯ash¯ı: Calculating Genius, *Mathematics in School*, **27**(4), 40–44; http://www.jstor.org/stable/30211875

[8] Heath, T.L., (1897), *The works of Archimedes*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K.

[9] Archimedes, in *Encyclopaedia Britannica*; https://www.britannica.com/biography/Archimedes, (accessed: January 18, 2021).

[10] https://www.cs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/contents.html

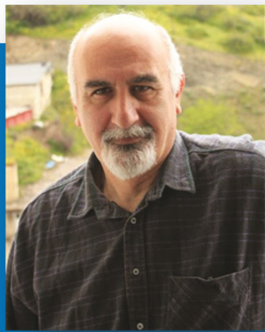
[11] Weisstein, E.W., *Archimedes' Cattle Problem*. From MathWorld – A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/ArchimedesCattleProblem.html

[12] არქიმედე — სილის მარცვლების დათვლა უძრავი ვარსკვლავთ ცის ტოლ სივრცეში (თარგმანი ი. თავხელიძე), *სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი „მათემატიკა", თსუ, №7, 2021.*

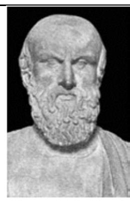
რიცხვი და დამტკიცება

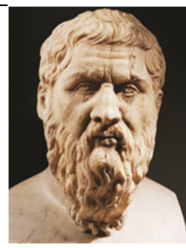
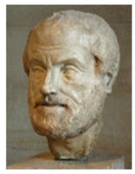
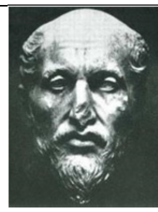
შეაგროვა და თარგმნა ილია თავხელიძემ

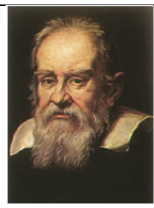
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, აკადემიკოს
ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი;
1984 წ. დაჯილდოებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009 წლის
ყრილობის, აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის
მემორიალური ოქროს მედლით.



1976 წელს დავამთავრე ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის კურსი და სრულად გავითავისე, რომ მათემატიკის ანბანი არის რიცხვები და მათი სტრუქტურა, ხოლო დამტკიცება არის ის მეთოდი, რომლითაც ადასტურებს თავის ნაფიქრს და იმკვიდრებს თავს მათემატიკოსი. ყოველთვის მაინტერესებდა სხვადასხვა ადამიანის აზრი ამ ორი ცნების შესახებ და ახლა შემოგთავაზებთ ჩემ მიერ სხვადასხვა დროს და გარემოებაში შეგროვებულ, ქართულად გადათარგმნილ და ჩაწერილ გამონათქვამებს რიცხვებისა და დამტკიცების შესახებ. აქაა ზოგიერთი გამონათქვამი, რომელსაც მე ხანდახან არც კი ვეთანხმები, მაგრამ მკითხველმა უნდა იცოდეს ამ ულამაზესი მეცნიერების საფუძვლებზე გამოთქმული სხვადასხვა მოსაზრება. ამ მხრივ განსაკუთრებით საინტერესოა არაპროფესიონალთა აზრები. წინა ნომრებში შემოგთავაზეთ გამონათქვამები მათემატიკისა და გეომეტრიის შესახებ. შემდგომ ვაპირებ წარმოგიდგინოთ ასეთივე კოლექციები: მათემატიკოსებისა, მათემატიკური კანონზომიერების, მათემატიკური განათლებისა და ა.შ. სამწუხაროდ, ამ გამონათქვამებს აკლია ციტირება, მაგრამ ჩვენი მკითხველი მე მგონი მომიტევებს. აგრეთვე მოხარული ვიქნები, თუ ჩვენს ჟურნალს გაამდიდრებთ ჩემ მიერ ვერმოძიებული ციტატებით.

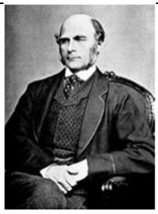
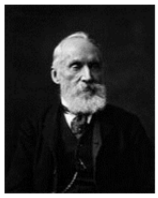
1. ყველაფერი არის რიცხვი; 2. ყველაფერი ლაგდება რიცხვების თანახმად; 3. ფორმისა და იდეის შემოქმედი არის რიცხვი, ის აგრეთვე ღმერთებისა და დემონების შემოქმედია.	**პითაგორა** 580 – 500 ძვ.წა	
„რიცხვთა სიბრძნე, როგორც მთავარი მეცნიერებათაგანი, მე ადამიანთათვის გამოვიგონე“.	**ესქილე** 525 – 456 ძვ.წა ტრაგიკოსი	
რიცხვები მართავენ სამყაროს	პითაგორელები მე-5 საუკ. ძვ.წა	
თუ არა რიცხვი და მისი არსი, არსებულთაგან რაიმეს შეცნობა შეუძლებელი იქნებოდა როგორც თავისთავად, ისე მის სხვა რამესთან მიმართებაში... ძნელი არაა იმის შემჩნევა, რომ რიცხვთა ძალა ვლინდება ადამიანთა ყველა ქმედებასა და აზრში, ყველა ხელობასა და მუსიკაში.	**ფილოლაე** 470 – 400 ძვ.წა	

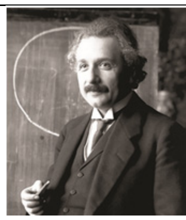
1. ადამიანის ბუნებიდან რიცხვის ცნება რომ გამოგვერიცხა, ჩვენ ვერასოდეს ვერ გავხდებოდით გონიერნი; 2. კარგი გადაწყვეტილების საფუძველი არის ცოდნა და არა რიცხვები; 3. ადამიანი ყველაზე ბრძენი ცხოველია, რადგან შეუძლია თვლა!	**პლატონი** 429 – 347 ძვ.წა	
... მათემატიკაში ...არასოდეს დამტკიცებისას არ მიმართავენ ვარაუდს, რომ ასე უკეთესია ან უარესი, საერთოდაც, არაფერს ისეთს, რომელიც ახლა გონებაშიც არ მომდის. აი, რატომაა, რომ ზოგიერთი სოფისტი, მაგალითად, არისტიპე, მათემატიკას უყურებს ზემოდან; სხვა ხელოვნებაში, ასევე ხელობებში, მაგალითად, დურგლობაში და მეწაღეობაში, ყოველთვის ეყრდნობიან ვარაუდს, რომ ასე უმჯობესია ან უარესი. მათემატიკის ხელოვნება საერთოდ არ ცნობს კარგს და ცუდს.	**არისტოტელე** 384 – 322 ძვ.წა	
1. ისევ და ისევ უნდა გავიმეოროთ პითაგორას გამონათქვამი: „უეჭველია, რომ ბუნება ყოველთვის რჩება თავისნაირი“. საქმე იმაშია, რომ: არსებობენ რიცხვები, რომელთა წყალობითაც ხმათა ჰარმონია აჯადოებს სმენას; იგივე რიცხვებია, რომლებიც თვალებს და სულს ავსებენ ჯადოსნურით; 2. უფრო სავარაუდოა იპოვო დამტკიცება, თუ თავიდან გაერკვევი ზოგიერთ ცნებაში იმის შესახებ, რასაც ეძიებ, ვიდრე წინასწარი ცოდნის გარეშე ეძებო დამტკიცება.	**არქიმედე** 287 – 212 ძვ. წა	
თუ თეორემა ვერაფრით ვერ დამტკიცდა, ის ხდება აქსიომა.	**ევკლიდე** IV – III ძვ.წა	
1. არაფერი არ არის მოსაწონი, გარდა სილამაზისა, სილამაზეში — არაფერია ფორმის გარდა, ფორმებში — არაფერია პროპორციების გარდა, პროპორციებში — არაფერია რიცხვების გარდა! 2. სილამაზის აღქმის საფუძველში ძევს რიცხვი. ოღონდ, როდესაც სიამოვნების გრძნობა გაჯერებულია რიცხვთა გარკვეული წყობით, ის კეთილგანწყობილია გარკვეულ თანაბარ ინტერვალებთან და უარყოფს უწესრიგობებს.	**(ავრელიუსი) ნეტარი ავგუსტინე** 354 – 430	
სადაც რიცხვია, იქაა სილამაზე.	**პროკლე დიადოხი** 412 – 485 ფილოსოფოსი	
და როდესაც ძლიერ შევიყვარე გამოთვლის ხელოვნება, მე მივხვდი, რომ რიცხვის გარეშე ვერავითარი ფილოსოფიური მსჯელობა ვერ შედგება მისი მთელი სიბრძნითა და დედობრივი თაყვანისცემით.	**ანანია შირაკაცი** 610 – 685 ფილოსოფოსი	
ჩვენი სამყაროს მოწყობის შეცნობა შეუძლებელია მათემატიკის ცოდნის გარეშე.	**როჯერ ბეკონი** 1212 – 1292 *Doctor Mirabilis*	

რიცხვის გარეშე შენი გონი ვერაფერს მიაღწევს.	**ნიკოლოზ კუზანელი** 1401 – 1464	
სამყაროს არსებობის მიზეზთა შორის რაც იმსახურებს შესწავლასა და ბუნების მოქმედ პირველწყაროთაგან რაც იწვევს მხილველის აღფრთოვანებას, ეს არის უმთავრესად სინათლე და მათემატიკის ღირსშესანიშნაობათა შორის არის მკვლევრის გონი, უფრო მეტი, ვიდრე სხვა დანარჩენი, რომელიც დამტკიცების უტყუარობით გამოირჩევა.	**ლეონარდო და ვინჩი** 1452 – 1519	
რიცხვთა შორის ისეთი სრულყოფილება და შეთანხმებულობაა, რომ ჩვენ დღე და ღამე უნდა ვიფიქროთ მათ გასაოგნებელ კანონზომიერებაზე.	**სიმონ სტევინი** 1548 – 1620	
1. ბუნების დიადი წიგნი მათემატიკური სიმბოლოებითაა დაწერილი; 2. ბოლოსდაბოლოს უსასრულოდ დიდი წრეწირი იგივეა, რაც წრფე.	**გალილეო გალილეი** 1564 – 1642	
მძიმე ტვირთია — ჩვენს დროში წერო მათემატიკური წიგნები... თუ არ დაიცავ საჭირო სიმკაცრეს თეორემების ჩამოყალიბებისას, გამონათქვამებში, დამტკიცებისას და შედეგების ფორმულირებისას, მაშინ წიგნი შეუძლებელი იქნება ჩაითვალოს მათემატიკურად. თუკი დავიცავთ სიმკაცრის ყველა მოთხოვნას, მაშინ წიგნის წაკითხვა საკმაოდ გაძნელდება.	**იოჰან კეპლერი** 1571 - 1630	
1. მათემატიკის სფეროს განეკუთვნება მხოლოდ ის მეცნიერებები, რომლებშიც განიხილება ან წესრიგი, ან ზომა და სრულიადაც არაა მნიშვნელოვანი, იქნება ეს რიცხვები, ფიგურები, ვარსკვლავები, ჰანგები ანდა სხვა, რაშიც იძებნება ეს ზომა; 2. მე ვთვლიდი ყველაზე უტყუარად იმ დებულებებს, რომლებიც ცხადად უკავშირდებოდა ფიგურებს, რიცხვებს და სხვა ცნებებს, და განეკუთვნებოდა არითმეტიკას, გეომეტრიას და, საერთოდ, წმინდა აბსტრაქტულ მატემატიკას... მხოლოდ მათემატიკოსებს აქვთ შესაძლებლობა მიაღწიონ უტყუარობასა და სიცხადეს, რადგან ემყარებიან იმას, რაც ყველაზე მარტივი და იოლია; 3. სრულყოფილი რიცხვები ისეთივე იშვიათია, როგორც სრულყოფილი ადამიანი.	**რენე დეკარტი კარტეზიო** 1596 – 1650	
მათემატიკის საკითხებში არ შეიძლება ყველაზე მცირე შეცდომის უგულებელყოფა.	**ბლეზ პასკალი** 1623 – 1662	
როგორც ძველი თაობა... ბუნების შესწავლისას დიდ ყურადღებას აქცევდნენ მექანიკას; ასევე, ახლა ავტორები, უგულებელყოფენ რა სუბსტანციასა და მის ფარულ თვისებებს, ცდილობენ დაუმორჩილონ ბუნების კანონები მათემატიკურ კანონებს.	**სერ ისააკ ნიუტონი** 1642 – 1725	

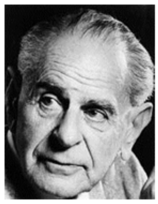
1. სიამოვნება, რომელსაც ჩვენ მუსიკით ვიღებთ, ეფუძნება თვლას, მაგრამ არაცნობიერ თვლას. მუსიკა — ეს არაცნობადი არითმეტიკაა და სხვა არაფერი; 2. ღვთიურმა სულმა იპოვა უფაქიზესი სულის მოსათქმელი ანალიზის იმ საოცრებაში, რომელიც წარმოადგენს: იდეების სამყაროს სიმახინჯეს, ორმაგი არსის მქონეს, მყოფს არსებობასა და არარსებობას შორის და რომელსაც ჩვენ ვუწოდეთ წარმოსახვითი ფესვი მინუს ერთიანიდან.	**გოტფრიდ ლაიბნიცი** 1646 – 1716	
დღეისათვის ცნობილი რიცხვთა თვისებები, უმეტესწილად აღმოჩენილია დაკვირვებებით.	**ლეონარდ ეილერი** 1707 – 1783	
1. ადამიანური ძალები ითვლება, ვითარცა ალბათობები მათემატიკაში; 2. მათემატიკური დამტკიცებები გონისათვის უცილოა.	**ჯაკომო ჯიროლამო კაზანოვა** 1725 – 1798 ავანტიურისტი	
თვლა და გამოთვლები — თავში წესრიგის საფუძველია.	**იოჰან ჰენრიხ პესტალოცი** 1746 – 1827 პედაგოგი	
აზრი, ჩაწერილიყო რიცხვები ათი ციფრის საშუალებით, იმდენად მარტივია, რამდენადაც საოცარი.	**პიერ სიმონ ლაპლასი** 1729 – 1827	
1. ხშირად ამბობენ, რომ რიცხვები მართავენ სამყაროს; ყოველ შემთხვევაში, უეჭველია, რომ რიცხვები გვიჩვენებენ როგორ იმართება ის; 2. გაცილებით მარტივია იპოვო შეცდომა, ვიდრე აღმოაჩინო ჭეშმარიტება.	**იოჰან ვოლფგანგ ფონ გოეთე** 1749 – 1832 პოეტი	
არავის ხომ არ ეპარება ეჭვი შედეგების სიზუსტეში, რომლებიც მიღებულია წარმოსახვითი რაოდენობებით, თუმცა ისინი მხოლოდ ალგებრულ ფორმებს და რაოდენობების უაზრო იეროგლიფებს წარმოადგენენ.	**ლაზარ ნიკოლა მარგარეტ კარნო** 1753 –1823 პოლიტიკოსი	
არავითარი ეჭვი არ არის, რომ ერთადერთი გზა, რომელიც შესაძლოა წარმატებით იქნეს გამოყენებული საბუნებისმეტყველო მეცნიერებაში, არის ფაქტების დაკვირვება და დაკვირვებების გამოთვლებისადმი დაქვემდებარება. მაგრამ დიდი შეცდომა იქნებოდა იმის დაშვება, რომ ჭეშმარიტების არსი მხოლოდ გეომეტრიულ დამტკიცებასა და ჩვენს გრძნობებშია... ამისათვის გულმოდგინედ უნდა დავამუშაოთ მათემატიკური მეცნიერება და ვესწრაფოთ მისი მნიშვნელობის ბუნებრივი საზღვრების გარეთ განვრცობას; არ გავერთოთ ფორმულების საშუალებით ისტორიული საკითხების შესწავლითა და ალგებრისა და ინტეგრალური აღრიცხვის ზნეობრივი საფუძვლების ძიებით.	**ოგუსტენ ლუი კოში** 1789 – 1857	

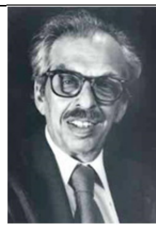
პირველადი ცნებები, საიდანაც იწყება ესა თუ ის მეცნიერება, უნდა იყოს ნათელი და დაიყვანებოდეს მინიმალურ რაოდენობაზე. მხოლოდ მაშინ შეძლებენ ისინი გახდნენ სწავლების მყარი და საკმარისი საფუძველი. ამგვარი ცნებები წარმოდგებიან გრძნობებისაგან; თანდაყოლილი — და არა დაჯერებით შემოტანილი. არაფერია იმ ცნებაზე მარტივი, რომელიც წარმოადგენს არითმეტიკის საფუძველს. ჩვენ აღვიქვამთ მარტივად, რომ ბუნებაში ყველაფერი გაზომვადია, ყველაფერი დათვლადია.	**ნიკოლოზ ლობაჩევსკი** 1792 – 1856	
ციფრების საშუალებით რისი დამტკიცებაც გინდა, იმას დაამტკიცებ.	**თომას კარლაილი** 1795 – 1881 ფილოსოფოსი	
რიცხვები ესაა ინტელექტუალური მოწმეები, რომლებიც მხოლოდ კაცობრიობის კუთვნილებაა.	**ონორე დე ბალზაკი** 1799 – 1850 მწერალი	
ღმერთი ყოველთვის არითმეტიზირებს.	**კარლ გუსტავ იაკობ იაკობი** 1804 – 1851	
კითხვაზე: „მართლა შესაძლოა თუ არა რაიმეს მიღება ან რაიმე უშუალოდ გამოყენებადია იმ აბსტრაქტული თეორიებიდან, რომლებითაც უპირატესად დაკავებულნი არიან თანამედროვე მათემატიკოსები? “ — მე შემიძლია ვუპასუხო, რომ ბერძენმა მათემატიკოსებმა შეისწავლეს კონუსური კვეთების თვისებები წმინდა გონებრივი კონსტრუქციებით დიდი ხნით ადრე, სანამ ვინმე შეძლებდა მიხვედრილიყო, რომ ეს წირები წარმოადგენენ იმ ტრაექტორიებს, რომლებზეც მოძრაობენ პლანეტები, და მე მჯერა, რომ კიდევ იქნება ნაპოვნი ამგვარი თვისებების მქონე მრავალი ფუნქცია, როგორიცაა, მაგალითად, იაკობის თეტა ფუნქცია, რომლის საშუალებით, ერთი მხრივ, შესაძლოა გავიგოთ რამდენი კვადრატით შეიძლება წარმოვადგინოთ მოცემული რიცხვი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს გავაწრფივოდ ელიფსის რკალი და, მეორე მხრივ, მოგვცემს საშუალებას ჩავწეროთ ქანქარის ჭეშმარიტი კანონი!	**კარლ ვეიერშტრასი** 1815 – 1897	
რწმენა და მათემატიკური მტკიცება — ეს ორი რამ შეუთავსებელია.	**ფიოდორ დოსტოევსკი** 1821 – 1881 მწერალი	
1. დარწმუნებული ვარ, რომ რიცხვები და ფუნქციები ანალიზში არ არიან ჩვენი სულის თავისუფალი წარმონაქმნები. მე მჯერა, რომ ისინი არიან ჩვენში ისეთივე აუცილებლობის გამო, როგორც ობიექტური რეალობის ნივთები, და ჩვენ აღმოვაჩენთ და ვიკვლევთ მათ ისევე, როგორც ამას აკეთებენ ფიზიკოსები, ქიმიკოსები და ზოოლოგები; 2. მათემატიკაში ჩვენ ყმები უფრო ვართ, ვიდრე ბატონები.	**შარლ ერმიტი** 1822 – 1901	

სადაც ეს შესაძლებელია — ითვალეთ.	**ფრენსის გალტონი** 1822–1911 ფსიქოლოგი	
ღმერთმა შექმნა მთელი რიცხვები; დანარჩენი — ადამიანის ხელთქმნილია.	**ლეოპოლდ კრონეკერი** 1823 – 1891	
ერთადერთი წირი, იმგვარად დახატული, როგორიც ბამბის ფასების მაჩვენებელი გრაფიკია, აღწერს ყოველივეს, რასაც ყურით მოისმენთ მუსიკალური ნაწარმოების შესრულებისას... ეს კი, ჩემი აზრით, მათემატიკის ძლევამოსილების შესანიშნავი მტკიცებულებაა.	**ლორდი კელვინი უილიამ ტომსონი** 1824 – 1907 ფიზიკოსი	
მე რომ მქონოდა თეორემები, მაშინ შევძლებდი საკმაოდ მარტივად მეპოვნა მათი დამტკიცება!	**ბერნხარდ რიმანი** 1826 – 1866	
1. არითმეტიკა — ადამიანთა შემეცნების ერთ-ერთი უძველესი, შესაძლოა, ყველაზე ძველიც, დარგია; ამასთან, ყველაზე ღრმა საიდუმლოებები არიან იქვე, სადღაც, მისი დანაყული ჭეშმარიტების გვერდით; 2. გეომეტრია არ იქნებოდა არაფერი, რომ არა მკაცრი დამტკიცებები.	**ჰენრი ჯონ სტეფენსენ სმიტი** 1826 – 1883	
ამგვარად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ რიცხვი მართავს მთელ სამყაროს რაოდენობრივად და არითმეტიკის ოთხი მოქმედება შესაძლოა განვიხილოთ, როგორც მათემატიკის სრული აღჭურვილობა.	**ჯეიმს კლარკ მაქსველი** 1831 – 1879 ფიზიკოსი	
მაგალითები, რომელთა რიცხვი შეიძლება გავზარდოთ რამდენითაც გვინდა, ხშირად გვიჩვენებენ, როგორ გვიჭირს ექსპერიმენტატორებს ავხსნათ ჩვენივე შედეგები მათემატიკის გარეშე.	**ლორდი რელეი** 1842 – 1919 ფიზიკოსი	
ნიუტონს და ლეიბნიცს რომ სცოდნოდათ, რომ უწყვეტი ფუნქცია არაა აუცილებლად წარმოებადი, მაშინ დიფერენციალური აღრიცხვა არასოდეს შეიქმნებოდა.	**შარლ ემილ პიკარი** 1856 – 1941	
შეუძლებელია განთავისუფლდე იმ შეგრძნებისაგან, რომ მათემატიკური ფორმულები თავისი ცხოვრებით ცხოვრობენ და თავისი აზრები გააჩნიათ; რომ ისინი ჩვენზე ჭკვიანები არიან, მეტიც, იმაზე ჭკვიანები არიან, ვინც ისინი აღმოაჩინა და რომ ვიღებთ მათგან უფრო მეტს, ვიდრე დასაწყისში იყო მათში ჩადებული.	**ჰენრიხ რუდოლფ ჰერცი** 1857 – 1894 ფიზიკოსი	

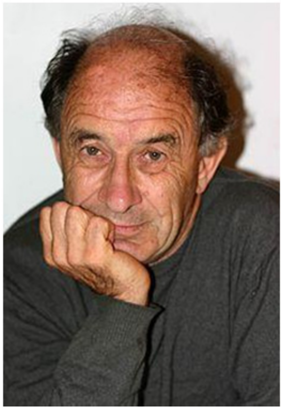
მათემატიკის იდეალი — შექმნას აღრიცხვა, რომელიც აზროვნების ნებისმიერ სფეროში გააადვილებს მსჯელობას.	**ალფრედ ნორტ უაიტხედი** 1861 – 1947	
ლოგიკის საშუალებით არავინ არაფერს არ აღმოაჩენს; სილოგიზმს შეუძლია მიიყვანოს სხვები ამა თუ იმ, ადრე ცნობილი ჭეშმარიტების აღიარებამდე, მაგრამ, როგორც აღმოჩენის იარაღი, ის უძლურია. მათემატიკოსი ხანდახან წინასწარ გამოთქვამს სრულიად არაცხად და საკმაოდ ძნელად აღსაქმელ მოსაზრებას და შემდეგ იწყებს მის დამტკიცებას. მტკიცებისას, თითქმის ყოველი ნაბიჯის გამოგონებისას, ლოგიკა კი არა, ინტუიცია, რომელიც ყოველგვარი ლოგიკის ზემოთაა, თამაშობს მთავარ როლს.	**ვლადიმირ სტეკლოვი** 1863 – 1926	
1. მათემატიკური სიმკაცრის მიზანი მდგომარეობს იმაში, რომ დაადასტუროს და დააკანონოს ინტუიციის მიღწევები; 2. გენიალური მათემატიკოსები გვთავაზობენ თეორემებს, ტალანტიანები ამტკიცებენ მათ.	**ჟაკ ადამარი** 1864 – 1963	
1. ყველა საქმეში ძალზე სასარგებლოა პერიოდულად დაუსვათ კითხვის ნიშანი იმას, რასაც ამ დრომდე თვლიდით, რომ დამტკიცება არ სჭირდებოდა; 2. ყველა ზუსტი მეცნიერება ეფუძნება მიახლოებას; 3. არაა სასურველი გჯეროდეს ჰიპოთეზის, სანამ გადაწყვეტით არ ჩათვლი მას ჭეშმარიტად.	**ბერტრან რასელი** 1872 – 1970 ფილოსოფოსი	
1. რიცხვთა ნების წინაშე ჩვენ ყველანი მონები ვართ; 2. გეთაყვანებით რა რიცხვებო, ამავე დროს მსურხართ.	**ვალერი ბრიუსოვი** 1873 – 1924 მწერალი	
მკაცრად რომ ვთქვათ, რასაც ეწოდება მათემატიკური დამტკიცება, არ არსებობს... ბოლოსდაბოლოს ჩვენ შგვიძლია მხოლოდ მივუთითოთ... ნებისმიერი დამტკიცება წარმოადგენს, რასაც მე და ლიტლვუდი ვუწოდებთ, გზას, — რიტორიკულ ჩახლართულ მსჯელობას, რომელიც ფსიქოლოგიურ ზემოქმედებაზეა გათვალისწინებული. ნახატები, რომელიც დაფაზე იხატება ლექციის დროს, მსმენელთა წარმოსახვის სტიმულაციისთვისაა განკუთვნილი.	**გოდფრი ჰაროლდ ჰარდი** 1877 – 1947	
	ჯონ იდენსორ ლიტლვუდი 1885 –1977	
1. ღმერთი არ ზრუნავს ჩვენს მათემატიკურ სიძნელეებზე. ის ინტეგრალებს ემპირიულად გამოითვლის; 2. რამდენადაც მათემატიკური კანონზომიერება მიესადაგება რეალობას, იმდენად არაზუსტია; რამდენადაც ზუსტია — იმდენად მიუსადაგია რეალობისათვის.	**ალბერტ აინშტაინი** 1879 – 1955	

ჭეშმარიტი მათემატიკა მდგომარეობს არა ხელოვნური გამოთვლების მეთოდების თავმოყრაში, არამედ გააზრების გზით მინიმალური აპარატის გამოყენებით არატრივიალური შედეგების მიღების ცოდნაში.	**ოტო ტეპლიცი** 1881 – 1940 პოეტი	
	ჰანს რადემახერი 1892 – 1969	
1. ჩვენ გვეგონა: თუ ვიცით რა არის „ერთი“, მაშინ ვიცით რა არის „ორი“, ორი ხომ ერთი და ერთია. ახლა ვხვდებით, რომ ჯერ კიდევ ბევრი რამ გვაქვს გასააზრებელი იმისათვის, რომ გავიგოთ რა არის ორი; 2. დამტკიცება – ესაა კერპი, რომლის გამოც მათემატიკოსები იტანჯებიან!	**სერ არტურ სტენლი ედინქტონი** 1882 – 1944 ასტროფიზიკოსი	
„ცხადია“ – ეს ყველაზე საშიში სიტყვაა მათემატიკაში.	**ერიკ ტემპლ ბელი** 1883 – 1960 ფანტასტი	
1. ჭეშმარიტად რეალისტური მათემატიკა ფიზიკასთან ერთად უნდა აღიქმებოდეს, როგორც ერთიანი რეალური სამყაროს თეორიული აღწერის ნაწილი და თავისი საფუძვლების ჰიპოთეტური განზოგადებების მიმართ უნდა დაიკავოს ისეთივე ჯანსაღი და ფრთხილი პოზიცია, როგორიც უკავია ფიზიკას; 2. მათემატიკის სისტემაში არის ორი შიშველი პუნქტი, რომლითაც შესაძლოა მას შეხება ჰქონდეს შეუცნობელთან. ესაა ნატურალური რიცხვების მწკრივის აგების პრინციპი და კონტინუუმის ცნება.	**ჰერმან ვეილი** 1885 – 1955	
ჩემთვის არავითარი აზრი არ აქვს განტოლებას, თუ ის არ გამოხატავს ღვთიურ აზრს.	**სრინივასა რამარუჯანი აიგენორი** 1887 – 1920	
გამოიყენეთ დიდ რიცხვთა კანონი თქვენი შფოთის განსაქარვებლად. დაუსვით შეკითხვა თქვენს თავს: რა არის ალბათობა იმისა, რომ ესა თუ ის მოვლენა საერთოდ მოხდება.	**დეილ კარნეგი** 1888 – 1955 მწერალი	
… აბსტრაქცია მათემატიკური აზროვნების ქმედითი იარაღია.	**რიხარდ კურანტი** 1888 – 1972	

1. ყველა საშუალებით უნდა ვასწავლიდეთ დამტკიცების ხელოვნებას ისე, რომ არ დავივიწყოთ მიხვედრის ხელოვნება; 2. მათემატიკა საინტერესოა მაშინ, როდესაც კვებავს ჩვენს გამომგონებლობას და მსჯელობის უნარს; 3. შესაძლოა არ არსებობს არც ელემენტარულ, არც უმაღლეს მათემატიკაში და, საერთოდ, არც სხვა სფეროში აღმოჩენები, რომლებიც არ იყო ნაპოვნი. . . ანალოგიების გარეშე; 4. ამოცანის ამოხსნის ცუდი გეგმა ხშირად სასარგებლო ხდება: მან შესაძლოა უკეთეს გზამდე მიგიყვანოთ.	**(დიერდ) ჯორჯ პოია** 1887– 1985	
ყველაზე ძნელია აითვისო ის არითმეტიკა, რომელიც თქვენი ბედნიერი საჩუქრების დათვლას შეგაძლებინებთ.	**ერიკ ხოფერი** 1898 – 1980 ფილოსოფოსი	
არსებობს დამტკიცების გაგების სამი დონე. ყველაზე დაბალ დონეზე გიჩნდებათ სასიამოვნო გრძნობა, რომ თქვენ გაიგეთ მსჯელობა. საშუალო დონე მიიღწევა, როდესაც თქვენ შეძლებთ დამტკიცების ჩამოყალიბებას. უმაღლეს დონეზე თქვენ შეიძენთ უნარს, რომ უარყოთ დამტკიცება.	**კარლ რაიმუნდ პოპერი** 1902 – 1994 ფილოსოფოსი	
1. ყველა, ვინც მიდრეკილია არითმეტიკული მეთოდებით შემთხვევითი რიცხვების მიღებისაკენ, ყოველგვარი ეჭვის გარეშე ცოდვილია; 2. მათემატიკაში ცნებებს არ შეიცნობენ, არამედ ეგუებიან მათ.	**ჯონ ფონ ნეიმანი** 1903 – 1957	
უმეტესი მათემატიკური აღმოჩენის საფუძველში არის რაღაც უბრალო იდეა: თვალსაჩინო გეომეტრიული კონსტრუქცია, ახალი ელემენტარული უტოლობა და ა.შ. მხოლოდ შესაბამისად უნდა მიუყენოთ ეს მარტივი იდეა ამოცანის ამოხსნას, რომელიც ერთი შეხედვით მიუდგომელია.	**ანდრეი კოლმოგოროვი** 1903 – 1987	
ღმერთი არსებობს – რადგან მათემატიკა არაწინააღმდეგობრივია; მაგრამ არსებობს ეშმაკიც – რადგან ჩვენ არ ძალგვიძს ამ არაწინააღმდეგობრიობის დამტკიცება!	**ანდრე ვეილი** 1906 – 1996	
დამტკიცება ითვლება მკაცრად, თუ მას ასე თვლის მათემატიკოსთა უმეტესობა.	**მორის კლაინი** 1908 – 1992	
რიცხვები აძლევენ ადამიანს საშუალებას მართოს მსოფლიო და ამაში ჩვენ გვარწმუნებს მეცნიერებისა და ტექნიკის განვითარების მიმდინარეობა დღევანდელ დღეს.	**ანატოლი დოდროდ-ნიცინი** 1910 – 1994	

1. ცივი რიცხვები, მათემატიკის გარეგნულად მშრალი ფორმულები, სავსეა მათში კონცენტრირებული აზრის შინაგანი სილამაზითა და სიმხურვალით; 2. მათემატიკა ასწავლის აზროვნების სიზუსტეს, რომელიც ლოგიკურ დამტკიცებას ექვემდებარება; ასევე ჭეშმარიტების მკაცრად დაფუძნების ცნებას და ყოველივე ეს აყალიბებს პიროვნებას, ჩემი აზრით, მეტად, ვიდრე მუსიკა.	**ალექსანდრე დ. ალექსანდროვი** 1912–1999	
მთელი ჩემი მათემატიკური უმეცრებით მე ადრე გავითავისე: ვისაც შეუძლია ათამდე დათვლა, მასვე შეუძლია უსასრულობამდე დათვლაც, თუ, რა თქმა უნდა, მას ეყოფა ამისათვის სულელობა.	**რობერტსონ დეიბისი** 1913 – 1995 ჟურნალისტი	
ღმერთს შეუძლია არ ითამაშოს კამათელით სამყაროსთან, მაგრამ მარტივ რიცხვებს რაღაც უცნაურობა სჭირთ.	**პაულ ერდოში** 1913 – 1996	
სიმკაცრე მათემატიკაში, უპირველეს ყოვლისა, ნიშნავს კეთილსინდისიერებას და სიცხადეს.	**ლიპმან ბერსი** 1914 – 1993	
დრო — უბრალოდ თვლის სისტემაა. რიცხვები — აზრის მატარებლები… ასე არაა?	**ვალტერ სვაროუ** 1927 – 2000 მსახიობი	
მათემატიკაში არ არიან ავტორიტეტები. ჭეშმარიტების ერთადერთი არგუმენტი — ესაა დამტკიცება.	**კაზიმიჟ ურბანიკი** 1930 – 2005	
ანტიკური საბერძნეთიდან მოყოლებული, ვიტყვით რა „მათემატიკა“ — ესე იგი ვამბობთ „დამტკიცება“.	**ნიკოლა ბურბაკი** 1935 – მათემატიკოსთა გაერთიანება	
კომპლექსური რიცხვები გვეხმარება, სარკის მეორე მხრიდან გადავლახოთ ნამდვილი რიცხვების ნაკლი.	**ხორხე ვაგენსბერგი** 1946 – 2018 ფიზიკოსი, ხელოვნებათმცოდნე	
არსებობს მილიონობით აკორდი, არსებობს მილიონობით რიცხვი, მაგრამ ყველას გვავიწყდება ნული. ნულის გარეშე რიცხვები — არითმეტიკაა? ცარიელი აკორდის გარეშე მუსიკა — სხვა არაფერია, თუ არა ხმაური.	**ტერი პრადჩეტი** 1945 – 2015	

„ხისტი“ და „მოქნილი“ მათემატიკური მოდელები



1937-2010
რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის ნამდვილი წევრი

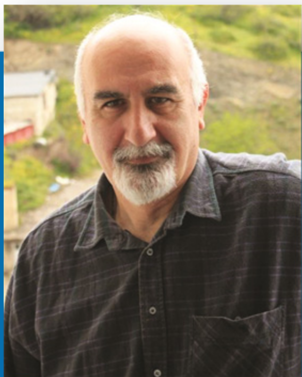
ვლადიმერ იგორის ძე არნოლდი

გამოჩენილი მათემატიკოსი

1957 წ. — მოსკოვის მათემატიკური საზოგადოების პრემია;
1965 წ. — ლენინის პრემია (ა.კოლმოგოროვთან);
1982 წ. — კრაფორდის პრემია, შვედეთი (ლ.ნირენბეგთან);
1992 წ. — ნ.ლობაჩევსკის პრემია;
1994 წ. — ჰარვის პრემია (ჰაიფა, ტექნიონი);
1999 წ. — ორდენი „სამშობლოს წინაშე ღვაწლისათვის“;
2001 წ. — ვოლფის პრემია;
2001 წ. — ჰენემანის პრემია მათემატიკურ ფიზიკაში;
2007 წ. — რუსეთის სახელმწიფო პრემია;
2007 წ. — ჩერნის მიწვეული პროფესორი;
2008 წ. — შაოს პრემია (ლ.ფადეევთან).

პარიზი (1979) — პიერ და მარი კიურის, კოვენტრი (1988) — უორიკის, ნიდერლანდები (1991) — უტრეხტის, იტალია (1991) — ბოლონიის, მადრიდი (1994) — კომპლუტენსეს, კანადა (1997) — ტორონტოს უნივერსიტეტების საპატიო დოქტორი.

სტატია აღებულია ინტერნეტიდან – http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/d62a30c8-a780-11dc-945c-d34917fee0be/09_arnold-models.pdf



რუსულიდან თარგმნა ილია თავხელიძემ

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, აკადემიკოს ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი;
1984 წ. დაჯილდოებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009 წლის ყრილობის, აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის მემორიალური ოქროს მედლით.

„ხისტი“ მოდელის მაგალითია გამრავლების ტაბულა (ცხრილი). „მოქნილი“ მოდელის უმარტივესი მაგალითია პრინციპი — „რაც უფრო ღრმად შევდივართ ტყეში, მით უფრო მეტი შეშაა“. შედარებით ცოტა ხანია, რაც აღმოაჩინეს „მოქნილი“ მოდელების მათემატიკური თეორიის სასარგებლო შესაძლებლობები. მოხსენებაში უმარტივეს მაგალითებზე ნაჩვენები იქნება, თუ როგორ შეიძლება ამ თეორიის გამოყენება ეკონომიკურ, ეკოლოგიურ და სოციოლოგიურ სფეროებში აგებულ მოდელებზე.

1. ომის ან ბრძოლის მოდელი

ორ მოწინააღმდეგეს შორის ბრძოლის უმარტივეს (ვთქვათ, ორი ჯარის შეტაკება) ლანკასტერის მოდელში სისტემის მდგომარეობა აღიწერება სიბრტყის პირველი კვად-

რანტის (x; y) წერტილებით. ამ წერტილის კოორდინატები x და y არის, შესაბამისად, მოწინააღმდეგე ჯარების რაოდენობა.

 ფრიდრიხ უილიამ ლანკასტერი 1868-1946	მოდელს აქვს ფორმა: $\{\dot{x}(t) = -by(t)\dot{y}(t) = -ax(t).$ ამ მოდელში a — X არმიის იარაღის სიძლიერეა, ხოლო b — Y არმიის.

მარტივად რომ ვთქვათ, ნავარაუდებია, რომ X არმიის ყოველი ჯარისკაცი კლავს დროის ერთეულში Y არმიის a რაოდენობის ჯარისკაცს (შესაბამისად, თითოეული Y არმიის ყოველი ჯარისკაცი X არმიის b რაოდენობის ჯარისკაცს კლავს). ასოს თაზე წერტილი აქ და შემდგომ აღნიშნავს შესაბამისი ფუნქციის წარმოებულს t დროის არგუმენტით, ანუ ასოთი აღნიშნული სიდიდის ცვლილების სიჩქარეს.

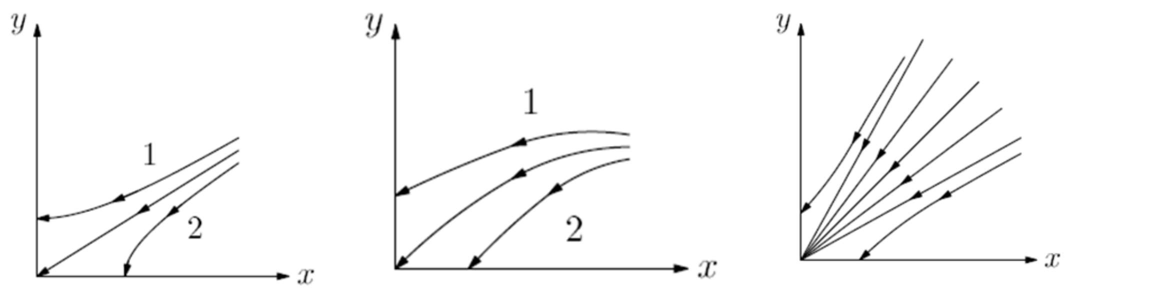
ეს არის ხისტი მოდელი, რომელიც ზუსტი ამოხსნის საშუალებას იძლევა:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{ax}, \quad \Rightarrow axdx = bydy, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ax^2 - by^2 = const.$$

X და Y არმიების რაოდენობების ევოლუცია იმ ჰიპერბოლის გასწვრივ ხდება, რომელიც სურათ1ა-ზეა მოტანილი. ჰიპერბოლის რომელი შტოს გასწვრივ წავა პროცესი, დამოკიდებულია საწყის წერტილზე (ანუ საწყის რაოდენობებზე).

ჰიპერბოლები გაყოფილია $\sqrt{a}x = \sqrt{b}y$ წრფით. თუ საწყისი წერტილი ამ წრფეზე მაღლაა (შემთხვევა 1, სურ.1ა), მაშინ ჰიპერბოლა გადის Y ღერძზე. ეს კი ნიშნავს, რომ X არმიის რაოდენობა სასრულ დროში მცირდება ნულამდე. Y არმიამ მოიგო, მოწინააღმდეგე განადგურებულია.



ა. ომის ხისტი მოდელი ბ. ომის მოქნილი მოდელი გ. ომის არარეალიზებადი მოდელი

სურ.1

თუკი საწყისი წერტილი ქვემოთაა (შემთხვევა 2, სურ.1ა), მაშინ მოგებულია არმია X. განსხვავებული შედეგების (ანუ რომელმა არმიამ მოიგო) გამყოფი მდგომარეობაა y=x წრფის გასწვრივ და ის აღნიშნავს, რომ ყველა „კმაყოფილია", ანუ ორივე არმია განადგურებულია. მაგრამ ამისათვის საჭიროა უსასრულოდ დიდი დრო: კონფლიქტი ღვივის, სანამ ორივე მონაწილე არ დაძაბუნდება.

მოდელიდან დასკვნა *შემდეგია: რიცხობრივად ორჯერ მეტ მტერთან ბრძოლის მოსაგებად საჭიროა ოთხჯერ უფრო ძლიერი იარაღი, ხოლო სამჯერ მეტ მტერთან –ცხრაჯერ უფრო ძლიერი და ა.შ.* (ამას აჩვენებს კვადრატული ფესვები წრფის განტოლებაში).

თუმცა ცხადია, რომ ჩვენი კანიბალისტური მოდელი ძალზე იდეალიზებულია და საშიში იქნებოდა მისი პირდაპირ რეალურ

სიტუაციაზე მორგება. ჩნდება კითხვა — როგორ შეიცვლება დასკვნა, თუ მოდელი გარკვეულწილად განსხვავებული იქნება? მაგალითად, a და b კოეფიციენტები შეიძლება არ იყოს მუდმივი სიდიდეები, მაგრამ შესაძლოა დამოკიდებული იყოს, ვთქვათ, x(t)-ზე და y(t)-ზე და ამ დამოკიდებულების ზუსტი ფორმა შეიძლება ჩვენთვის არ იყოს ცნობილი. ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს შემდეგ სისტემასთან:

$\{\dot{x}(t) = -b(x,y)y(t)\ \dot{y}(t) = -a(x,y)x(t)$,

რომელიც უკვე ცხადად არ იხსნება.

მაგრამ მათემატიკაში შემუშავებულია მეთოდები, რომლებიც საშუალებას იძლევა გაკეთდეს ზოგადი ხასიათის დასკვნები ისე, რომ ზუსტად არ იყოს ცნობილი a და b ფუნქციების ცხადი სახე. ამ სიტუაციაში მიღებულია საუბარი მოქნილ მოდელზე, რომელშიც ცვლილებების შეტანაა შესაძლებელი (ჩვენს მაგალითში a და b ფუნქციების არჩევის გამო).

ამ შემთხვევაში ზოგადი დასკვნა არის განცხადება საწყისი მოდელის სტრუქტურული მდგრადობის შესახებ: a და b ფუნქციების ცვლილებები შეცვლის (x,y) სიბრტყეზე მრუდებს, რომლებიც აღწერს საომარ მოქმედებებს (ისინი უკვე აღარ იქნება ჰიპერბოლები და მათი გამყოფი არ იქნება წრფე), მაგრამ ეს ცვლილება გავლენას არ ახდენს ძირითადი დასკვნის ხარისხზე.

მოდელიდან დასკვნა ასეთია, რომ არმია „X იმარჯვებს“ და „Y იმარჯვებს“ გამოყოფილია ნეიტრალური ხაზით „ორივე არმია ერთმანეთს ანადგურებს უსასრულო დროში“.

მათემატიკოსები ამბობენ, რომ, როდესაც a და b ფუნქციები იცვლება, სისტემის ტოპოლოგიური ტიპი (x; y) სიბრტყეზე არ იცვლება: მხოლოდ მისი ნეიტრალური ხაზი მრუდდება (სურ. 1 ბ).

ეს მათემატიკური დასკვნა თავისთავად ცხადია. შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ სხვა სიტუაცია. მაგალითი გამოსახულია სურ. 1გ-ზე. სტრუქტურული სტაბილურობის მათემატიკური თეორია ამტკიცებს, რომ ეს სიტუაცია შეუსრულებადია, ყოველ შემთხვევაში, არა ძალიან პათოლოგიური a და b ფუნქციებისათვის (მაგალითად, ეს არარეალიზებადი შემთხვევაა, თუ a და b არიან პოლინომები, რომლებსაც დადებითი მნიშვნელობა აქვთ ნულზე).

ჩვენ შეგვიძლია გავაკეთოთ ზოგადი დასკვნა — მისაღებია თუ არა ომის უმარტივესი მოდელი მოვლენების სავარაუდო აღწერისთვის მოდელების მთელ კლასზე, თანაც ისე, რომ ამისათვის სულაც არ იყოს აუცილებელი ხისტი მოდელის ზუსტი სახე: დასკვნები სამართლიანი იქნება მოქნილი მოდელისათვის. სინამდვილეში, მარტივი მოდელი სასარგებლო რაოდენობრივ პროგნოზსაც კი იძლევა: გამყოფი ნეიტრალური წრფის დახრა ნულში განისაზღვრება ფორმულით $\sqrt{a}x = \sqrt{b}y$, სადაც a და b — კოეფიციენტების მნიშვნელობებია ნულში.

ანუ პრინციპი „თუ მტერი ორჯერ მეტია, მაშინ მოსაგებად საჭიროა ოთხჯერ უფრო ძლიერი იარაღი“ სამართლიანია ურთიერთგამანადგურებელი ომის დასკვნით ეტაპზე, თუმცა ომის საწყის ეტაპზე რიცხვ 4-ს ალბათ კორექტირება დასჭირდება (a და b კოეფიციენტების ფორმის გათვალისწინებით). ამ კორექტირებისთვის, მოქნილი მოდელებისათვის, მათემატიკაში აგრეთვე დამუშავებულია ეფექტური მეთოდები (მიუხედავად იმისა, რომ განტოლების ამოხსნის ცხადი ფორმულა არა მხოლოდ უცნობია, არამედ — და ეს მკაცრად არის დამტკიცებული — ის საერთოდ არ არსებობს).

შეიძლება ვიფიქროთ, რომ აღწერილი მოდელი ნაწილობრივ ხსნის როგორც ნაპოლეონისა და ჰიტლერის წარუმატებლობებს, ისე ბათო ყაენის წარმატებას და მუსლიმი ფუნდამენტალისტების იმედებს.

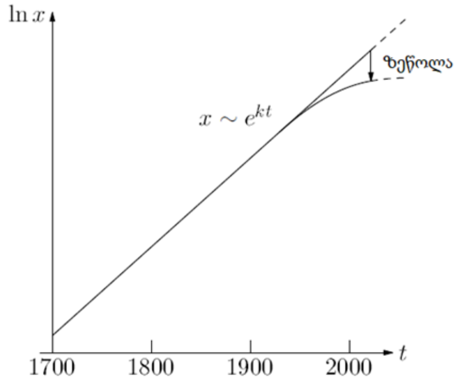
2. ოპტიმიზაცია, როგორც გზა კატასტროფისაკენ

ზრდის უმარტივესი მოდელი (მსოფლიოს მოსახლეობის ზრდისათვის) $\dot{x}(t) = kx(t)$ შემოგვთავაზა მალთუსმა. მოდელს, როგორც კარგადაა ცნობილი, მივყავართ დროთა განმავლობაში x მოსახლეობის ექსპონენციალურ (ანუ ძალიან სწრაფ) ზრდამდე. ეს ხისტი მოდელი გამოიყენება (რა თქმა უნდა, თანაც მთელი რიგი დათქმით), მაგალითად, მეცნიერების განვითარებისთვის 1700 -1950 წლებში (თუ გავზომავთ, ვთქვათ, სამეცნიერო ნაშრომების რაოდენობით) (სურ.2).

მომდევნო საუკუნეში მეცნიერების ექსპონენციალური ზრდის გაგრძელება გამოიწვევდა მსოფლიოში ქაღალდისა და მელნის ამოწურვას, თანაც, მეცნიერთა რაოდენობა მიაღწევდა მსოფლიოს მოსახლეობის ნახევარს.

ცხადია, რომ საზოგადოება (ყველა ქვეყანაში) ამას ვერ დაუშვებს და, შესაბამისად, მეცნიერების განვითარება უნდა დაითრგუნოს (რასაც ვაკვირდებით მრავალ ქვეყანაში; რუსეთში მეცნიერებათა აკადემიის რეფორმა ახლა (2004 წ.) მიმდინარეობს).

თომას რობერტ მალთუსი
1766-1834



სურ.2. მეცნიერების ზრდა

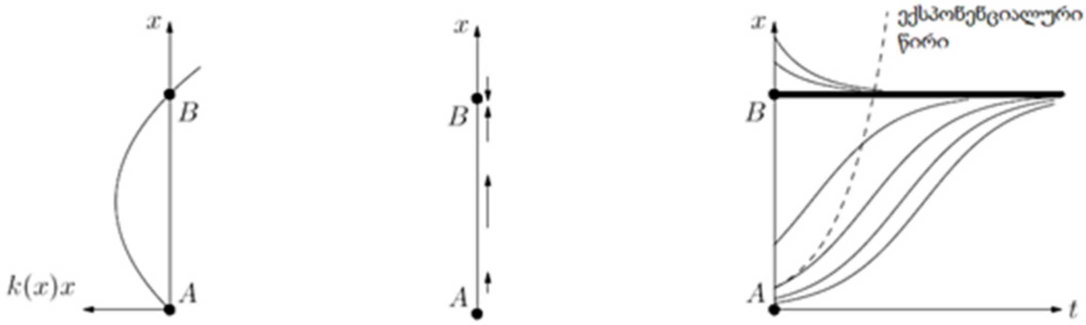
მსგავსი გაჯერების მოვლენები გვხვდება ნებისმიერ პოპულაციაში (რაც, ალბათ, მალე ელოდება კაცობრიობას): როდესაც მოსახლეობა ძალიან იზრდება, მალთუსის ხისტი მოდელი, ზრდის მუდმივი k კოეფიციენტით, ხდება მიუღებელი. ბუნებრივია, ძალიან დიდი x-სთვის კონკურენცია რესურსებზე (საკვები, გრანტები და ა.შ.) იწვევს k-ს შემცირებას და ხისტი მალთუსის მოდელი უნდა შეიცვალოს მოქნილი მოდელით:

$$\dot{x}(t) = k(x)x(t),$$

რომელიც დამოკიდებულია მოსახლეობის გამრავლების კოეფიციენტზე. ამის უმარტივესი მაგალითია კოეფიციენტის $k(x) = a - bx$ შერჩევა, რასაც მივყავართ ე.წ. ლოგისტიკურ მოდელამდე (სურ. 3):

$\dot{x}(t) = ax(t) - bx^2(t)$, მაგალითად $\dot{x}(t) = x(t) - x^2(t)$.

სისტემაში ერთეულების შერჩევით შესაძლებელია კოეფიციენტები a და b გავხადოთ 1. ხაზს გავუსვამ იმ გარემოებას, რომ დასკვნები, რომელიც ქვემოთ იქნება მოტანილი, რჩება (მუდმივების რიცხვითი მნიშვნელობების სიზუსტით) სამართლიანი a და b კოეფიციენტების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, აგრეთვე ფართო კლასის მოდელებისათვის სხვადასხვა $k(x)$-ფუნქციისათვის (კლებადი x არგუმენტის მიმართ). სხვა სიტყვებით, შემდგომი დასკვნები ეხება მთლიანად მოქნილ მოდელს და არა სპეციალურ ხისტ ლოგისტიკურ მოდელს.



სურ. 3. ლოგისტიკური მოდელი

სურ. 3-ზე მარცხნივ გამოსახულია k(x) x - ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც დადებითია A და B წერტილებს შორის. ცენტრში გამოსახულია ვექტორული ველი (*სახელდობრ, ყოველ წერტილში, რომელიც მდგომარეობას ასახავს, მოდებულია ამ მდგომარეობის ცვლილების სიჩქარის ვექტორი, ანუ $\dot{x}$. იხ., მაგალითად [10], გვ. 32*) x-ღერძზე, რომელიც წარმოადგენს სისტემის ყველა შესაძლო მდგომარეობას. ის მიუთითებს მდგომარეობის ევოლუციის სიჩქარეზე. A და B წერტილებში სიჩქარე არის ნულოვანი: ეს არის წონასწორობის მდგომარეობა. A და B წერტილებს შორის სიჩქარე დადებითია (ანუ მოსახლეობა იზრდება) და B წერტილის მერე უარყოფითი (მოსახლეობა მცირდება). სურათზე მარჯვნივ არის შედეგი — მოსახლეობის დროზე დამოკიდებულება სხვადასხვა საწყისი პირობის შემთხვევებში.

მოდელი პროგნოზირებს, რომ დროთა განმავლობაში მყარდება წონასწორობის რეჟიმი B, რომელიც მდგრადია: უფრო მეტი მოსახლეობა მცირდება, ნაკლები კი იზრდება.

ლოგისტიკური მოდელი დამაკმაყოფილებლად აღწერს მრავალრიცხოვან გაჯერების მოვლენებს. A-ს მახლობლად, როდესაც მოსახლეობა მცირეა, ის ძალიან ახლოს არის მალთუსის მოდელთან. მაგრამ x არგუმენტის საკმარისი დიდი მნიშვნელობებისათვის (სურ.3-ზე განხილულ შემთხვევაში კოეფიციენტების არჩევისთვის, კონკრეტულად ½ -ის რიგის დროს) დაიმზირება მალთუსის ზრდისგან მკვეთრი განსხვავება (მალთუსის შედეგი ნაჩვენებია სურ.3-ზე. წყვეტილი წირით): ნაცვლად იმისა, რომ x მიდიოდეს უსასრულობაში, მოსახლეობის რაოდენობა უახლოვდება B წონასწორობის მნიშვნელობას. დედამიწის მოსახლეობა ახლა 6 მილიარდს უახლოვდება. წონასწორობის მნიშვნელობა (სხვადასხვა შეფასებით) 16-20 მილიარდი ადამიანია.

ლოგისტიკური მოდელი მიღებულია ეკოლოგიაში. შეიძლება წარმოვიდგინოთ, მაგალითად, რომ $x(t)$— არის თევზის რაოდენობა ტბაში ან მსოფლიო ოკეანეებში. ახლა ვნახოთ, როგორ იმოქმედებს ამ თევზების ბედზე თევზაობა ინტენსივობით c:

$$\dot{x}(t) = x(t) - x^2(t) - c\,.$$

გათვლებით ჩანს, რომ თევზჭერის c კვოტის ზოგიერთი კრიტიკული მნიშვნელობისთვის პასუხი მკვეთრად იცვლება. ჩვენი ხისტი მოდელისათვის ეს კრიტიკული მნიშვნელობაა c = 1/4, მაგრამ ანალოგიურ მოვლენებს ადგილი აქვთ მოქნილი მოდელის შემთხვევაში:

$$\dot{x}(t) = x(t) - k(x)x(t) - c$$

(კრიტიკული მნიშვნელობა ამ შემთხვევაში არის $k(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმი).

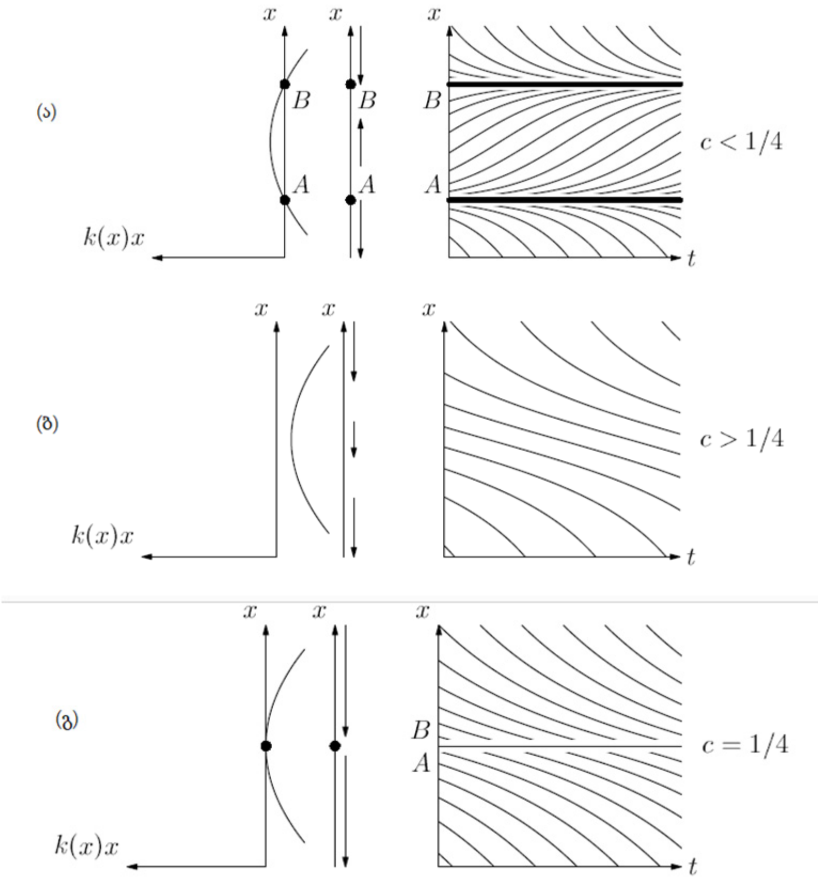
თევზის x რაოდენობის ევოლუცია t დროის განმავლობაში ნაჩვენებია სურ.4-ზე. თუ c კვოტა მცირეა, მაშინ განსხვავება (თავისუფალ პოპულაციასთან შედარებით, სადაც c = 0) შემდეგში მდგომარეობს.

სისტემას აქვს წონასწორობის ორი მდგომარეობა, A და B. მდგომარეობა B მდგრადია: პოპულაცია ამ შემთხვევაში გარკვეულწილად მცირეა, ვიდრე, როდესაც თევზჭერა არ მიმდინარეობს, მაგრამ ის აღდგენადია, თუ x-ის მნიშვნელობა წონასწორობის B მნიშვნელობიდან მცირედაა გადახრილი.

მდგომარეობა A არამდგრადია: თუ რაიმე მიზეზით (ვთქვათ, ბრაკონიერობა ან ეპიდემია) პოპულაციის რაოდენობა დავა A დონეზე თუნდაც ოდნავ დაბლა. შემდგომ პოპულაცია (თუმცა ნელა, ისიც, თუ განსხვავება A-გან მცირეა) მთლიანად განადგურდება სასრულ დროში.

ჩემი აზრით, ახლა რუსეთში მეცნიერების მდგომარეობა აღიწერება თითქმის A წერტილით: ის ჯერ კიდევ მდგრადია, მაგრამ, როგორც ფიზიკოსები ამბობენ — კვაზისტაციონარულია იმ აზრით, რომ მცირე რყევამ შესაძლოა შეუქცევად დაღუპვამდე მიგვიყვანოს.

თევზჭერის დიდი c კრიტიკული კვოტირების შემთხვევაში, პოპულაცია x გაქრება სასრულ დროში, რაც არ უნდა დიდი იყოს ის საწყის მომენტში.



სურ.4. (ა) მცირე თევზჭერა, (ბ) გადამეტებული თევზჭერა, (გ) ოპტიმალური თევზჭერა.

თევზჭერა, ეს არის მამონტების, ბიზონების და მრავალი ვეშაპის ბედი: ეკოლოგებმა დაითვალეს რამდენი სახეობა იღუპება *ყოველდღიურად* ადამიანის „მოღვაწეობის" შედეგად და ეს მაჩვენებლები შემაშფოთებელია.

ამ ტიპის მოდელები აგრეთვე აღწერენ ფირმების, კონცერნებისა და სახელმწიფოების გაკოტრებას. განადგურების საშიშროება ჩვენს მოდელში მაშინ ჩნდება, როდესაც არამდგრადი მდგომარეობა A უახლოვდება წონასწორობის B მდგომარეობას ან, როდესაც x-ის მნიშვნელობა დაეცემა თევზჭერის არარსებობის შემთხვევაში პოპულაციის საწყისი წონასწორობის მნიშვნელობის დაახლოებით ნახევრამდე.

მეჩვენება, რომ რუსეთის მოსახლეობა ჯერჯერობით არ დასულა ამ სასიკვდილო დონემდე, მაგრამ აშკარად მიდის ამისკენ. მეცნიერება კი ამჟამად რუსეთში ასეთ „გადამეტებულ" თევზჭერის პირობებთანაა სადარი. მაგალითად, სტეკლოვის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტის მთავარი მეცნიერ-თანამშრომლის (რასაც მე წარმოვადგენ) ძირითადი ხელფასი თვეში 100 ამერიკულ დოლარზე ნაკლებია. ეს კი ასჯერ ნაკლებია, ვიდრე ჩემი კოლეგების ხელფასი შეერთებულ შტატებში (და 50-ჯერ ნაკლები, ვიდრე საფრანგეთში). გასაგებია, რომ ასეთ პირობებში c-ს სიდიდე (რუსეთში მეცნიერთა რაოდენობის შემცირების სიჩქარე) იზღუდება ძირითადად დისკრიმინაციული ზომებით, რომლებიც მიიღება დასავლეთში (მაგალითად, აშშ) თავისი სამუშაო ადგილების დასაცავად, უკეთ მომზადებული უცხოელი ასპირანტებისა და დოქტორანტებისაგან (ძირითადად ჩინეთიდან და რუსეთიდან).

ზემოთ თქმულიდან ჩანს, რომ c პარამეტრის მნიშვნელობის შერჩევა უაღრესად მნიშვნელოვანია x პოპულაციის ექსპლუატაციის მართვისათვის. სწრაფვა c კვოტის გაზრდისათვის გონივრულ დამგეგმავ ორგანიზაციაში არ უნდა გასცდეს კრიტიკულ მნიშვნელობას (ჩვენს შემთხვევაში $c \leq \frac{1}{4}$). ოპტიმიზაციას მივყავართ კრიტიკული მნიშვნელობის c =1/4 არჩევასთან. ამ დროს ექსპლუატაციაში მყოფი პოპულაცია ჯერ არ განადგუ-

რებულა, მაგრამ დროის ერთეულზე გათვლილი ექსპლუატაციის შემოსავალი აღწევს მაქსიმუმს, შესაძლოა, c =1/4 მნიშვნელობას (უფრო მაღალი შემოსავალი ჩვენს პოპულაციაში დიდი ხნის განმავლობაში შეუძლებელია, ვინაიდან ზრდის მაქსიმალური სიჩქარე ექსპლუატაციაში არმყოფისთვისაც კი არის ¼).

სურ.4 (გ) შემთხვევიდან ვხედავთ, რა მოხდება ამგვარი „ოპტიმალური“ არჩევანის c =1/4 დროს. როგორიც არ უნდა იყოს საწყისი პოპულაცია $x > \frac{1}{2}$, დროთა განმავლობაში ის გავა წონასწორობის რეჟიმზე A = B = 1/2. თუმცა ეს სტაციონარული პოპულაცია არასტაბილურია. X-ის შემთხვევით მცირე შემცირებაც კი იწვევს პოპულაციის სრულ განადგურებას სასრულ დროში.

შესაბამისად, *გეგმის პარამეტრების ოპტიმიზაციამ შეიძლება გამოიწვიოს* (და იწვევს ხშირ შემთხვევაში, რომელთაგან ჩვენი მოდელი ყველაზე მარტივი მაგალითია) *დაგეგმილი სისტემის სრული განადგურება წარმოქმნილი ოპტიმიზაციის არასტაბილურობის გამო.*

ჩვენი მოქნილი მოდელი, თავისი აშკარა პრიმიტიულობით, საშუალებას იძლევა წარმოვადგინოთ აღნიშნულ ბოროტებასთან ბრძოლის საშუალება. თურმე, სტაბილურობა აღდგება, თუ ხისტი დაგეგმვა შეიცვლება უკუკავშირით. სხვა სიტყვებით — გადაწყვეტილება ექსპლუატაციის ოდენობის შესახებ (დაჭერის კვოტები, საგადასახადო წნეხი და ა.შ.) უნდა იქნეს მიღებული არა დირექტივის საშუალებით (c = const.), არამედ სისტემის მიღწეული მდგომარეობიდან გამომდინარე:

$$c = kx,$$

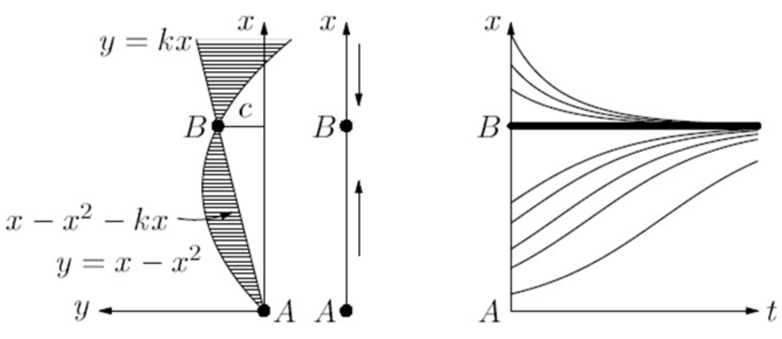
სადაც პარამეტრი k (დიფერენციალური კვოტა) არჩევადია.

ამ შემთხვევაში მოდელი ღებულობს სახეს (სურ.5):

$$\dot{x}(t) = x(t) - x^2(t) - kx(t).$$

თუ $k < 1$, დროთა განმავლობაში მყარდება წონასწორობის მდგომარეობა B, რომელიც მდგრადია. საშუალო გრძელვადიანი „შემოსავალი“ c = kx ამ მდგომარეობაში ოპტიმალურია, როდესაც წრფე y = kx გადის $y = x - x^2$ პარაბოლის წვეროზე ანუ, როდესაც k = ½ .

დიფერენციალური k კვოტის ამგვარი არჩევის შემთხვევაში, საშუალო „შემოსავალი“ c = 1/4 აღწევს ჩვენი სისტემის მაქსიმალურ შესაძლო მნიშვნელობას. მაგრამ, ხისტად დაგეგმილი სისტემისგან განსხვავებით, სისტემა უკუკავშირით k კოეფიციენტის ოპტიმალური მნიშვნელობისათვის არის მდგრადი (შემთხვევითი მცირე შემცირება k-სთან მიმართებით წონასწორობის x=B დონესთან, იწვევს სისტემის საკუთარი შესაძლებლობებით ავტომატურ აღდგენას).



სურ.5. მდგრადი სისტემა უკუკავშირით

უფრო მეტიც, კოეფიციენტის მცირე გადახრა ოპტიმალურიდან k = ½ არ იწვევს სისტემის თვითგანადგურებას (როგორც ოპტიმალურიდან მცირედი გადახრით მოხდა ხისტი გეგმის შემთხვევაში), არამედ მხოლოდ „შემოსავლის“ მცირე შემცირებას.

ასე რომ, *უკუკავშირის შემოღება* (ანუ გადაწყვეტილებების მიღების გათვალისწინება რეალური სიტუაციიდან გამომდინარე და არა მხოლოდ დაგეგმილის თანახმად) *ახდენს სისტემის სტაბილიზაციას, რომელიც უკუკავშირის გარეშე დაიშლებოდა პარამეტრების ოპტიმიზაციის დროს.*

ყოველივე ზემოთქმული რჩება სამართლიანად მოქნილი მოდელისთვისაც (კოეფიციენტების შესაბამისი გადაანგარიშებით). ხაზგასმით მინდა აღვნიშნო, რომ ზუსტად ეს დამოუკიდებლობა ხისტი მოდელების დეტალებისგან (რომლებიც, როგორც წესი, კარგად არ არის ცნობილი) ხდის მოქნილ მოდელირებას სასარგებლოს.

მოქნილი მოდელირების ხისტით შეცვლას, ჩვეულებრივ, მივყავართ რთულ მრავალსაფეხურიან იერარქიაში მყოფ მათემატიკურ კონსტრუქციებთან, რომელთა შესწავლა შესანიშნავი მასალაა დიდი რაოდენობით დისერტაციებისთვის, მაგრამ, რომლის რეალური ფასეულობა ხშირად არ აღემატება მარტივ (თუმცა, მათემატიკური გამოთვლების გარეშე, არაცხად) დასკვნებს, რომლებიც ეფუძნება უმარტივესი მოდელების ანალიზს, რომელთა მსგავსებიც ზემოთ არის აღწერილი.

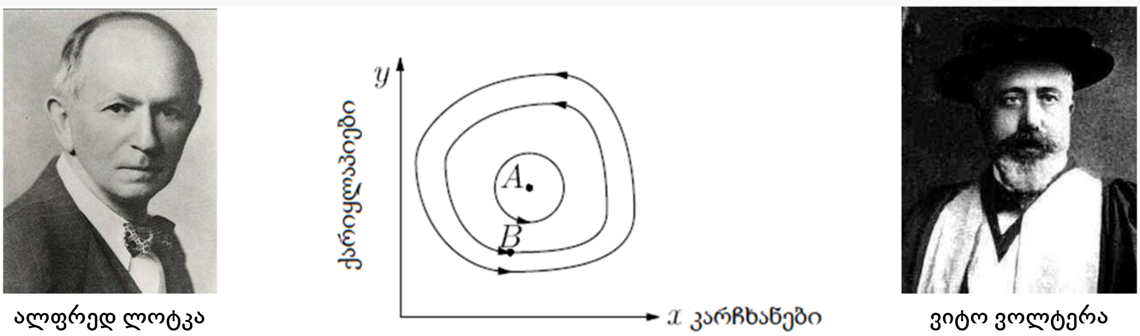
3. ხისტი მოდელები, როგორც მცდარი პროგნოზის გზა

მნიშვნელოვანია, რომ უმარტივესი მოდელი იყოს სტრუქტურულად მდგრადი, ანუ ისეთი, რომ დასკვნებმა გაუძლოს პარამეტრებისა და მოდელის აღმწერი ფუნქციების მცირე ცვლილებას. ზემოთ აღწერილ მოდელს აქვს სტრუქტურული მდგრადობის ეს თვისება. ასეთი თვისების არმქონე მოდელის მაგალითია ცნობილი ლოტკა-ვოლტერას მოდელი — ბრძოლა არსებობისთვის (სურ. 6):

$$\{\dot{x}(t) = ax(t) - cx(t)y(t)\ \dot{y}(t) =$$
$$= -by(t) + dx(t)y(t).$$

ამ მოდელში x არის კარჩხანის რაოდენობა, ხოლო y — ქარიყლაპიების რაოდენობა (მსურველს შეუძლია ივარაუდოს, რომ x — მშრომელთა და y — ორგანიზებულ დანაშაულში მონაწილეთა რაოდენობებია). კოეფიციენტი a აღწერს კარჩხანის ბუნებრივი ნამატის მაჩვენებელს ქარიყლაპიების არარსებობის შემთხვევაში; b არის ქარიყლაპიების ბუნებრივი სიკვდილიანობის მაჩვენებელი კარჩხანის არარსებობის შემთხვევაში.

ურთიერთქმედების ალბათობა კარჩხანასა და ქარიყლაპიებს შორის პროპორციულია როგორც კარჩხანის, ისე ქარიყლაპიების რაოდენობების (xy). ურთიერთქმედების თითოეული აქტი ამცირებს კარჩხანის პოპულაციას, მაგრამ ხელს უწყობს ქარიყლაპიების პოპულაციის ზრდას (−cxy და dxy წევრები განტოლების მარჯვენა მხარეს).



ალფრედ ლოტკა
1880-1949

ვიტო ვოლტერა
1860-1940

სურ.6. კარჩხანისა და ქარიყლაპიის პოპულაციების ევოლუცია — ლოტკა-ვოლტერას მოდელი.

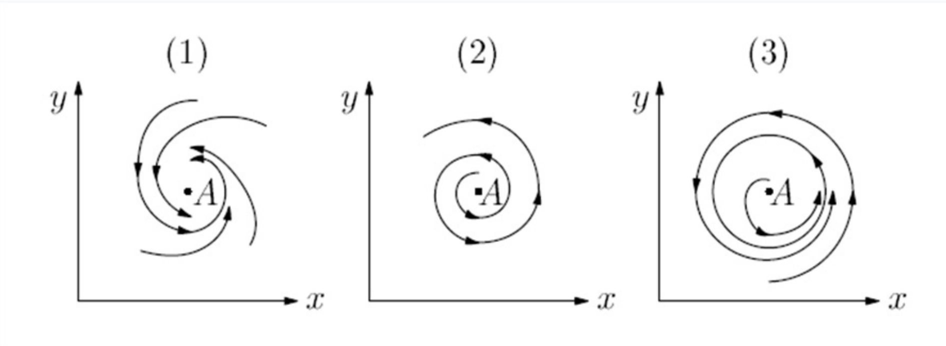
ამ ხისტი მოდელის ანალიზი აჩვენებს, რომ არსებობს წონასწორობის მდგომარეობა A (სურ.6). ყველა სხვა საწყის (B) მდგომარეობას მივყავართ კარჩხანისა და ქარიყლაპიების რაოდენობების პერიოდულ რყევამდე ისე, რომ რაღაც დროის გავლის შემდეგ სისტემა უბრუნდება B მდგომარეობას.

მოდელში მცირე ცვლილების შეტანისას:

$$\{\dot{x}(t) = ax(t) - cx(t)y(t) + \varepsilon f(x,y)$$
$$\dot{y}(t) = -by(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x,y),$$
$$\varepsilon \ll 1.$$

მარჯვენა მხარეებს ემატება მცირე წევრები (რომლებიც ითვალისწინებენ, მაგალითად, პოპულაციების კონკურენციას კარჩხა-

ნისა საკვებისათვის და ქარიყლაპიებისა კარჩხანისათვის). შედეგად, დასკვნა სისტემის პერიოდულობის შესახებ (სისტემა დაუბრუნება B მდგომარეობას), რომელიც სამართლიანია ლოტკა-ვოლტერას ხისტი მოდელისათვის, კარგავს ძალას. f და g მცირე შესწორების ტიპზეა დამოკიდებული მომავლის განვითარების 3 სცენარი (სურ.7), რომლებიც უკვე სტრუქტურულად მდგრადებია.



სურ.7. არსებობისათვის ბრძოლის მოქნილი, სტრუქტურულად მდგრადი მოდელი

პირველ შემთხვევაში წონასწორობის მდგომარეობა A მდგრადია. ნებისმიერ სხვა საწყის პირობებს დიდი ხნის შემდეგ მივყავართ ზუსტად ამ მდგომარეობამდე.

მეორე შემთხვევაში სისტემა „იშლება“. წონასწორობის მდგომარეობა არამდგრადია. ევოლუციას მივყავართ ბანდიტების (ქარიყლაპიების) მკვეთრ ზრდამდე, შემდეგ კი მათ თითქმის სრულ განადგურებამდე (რადგან მათ იმდენად გაძარცვეს მშრომელები, რომ გასაძარცვი აღარავინაა, ანუ კარჩხანები გაქრა). ამგვარი სისტემა საბოლოოდ გადის x და y მონაცემების იმდენად დიდ ან მცირე მნიშვნელობებზე, რომ მოდელი აღარაა გამოყენებადი: იცვლება ევოლუციის კანონები, ე.ი. ხდება რევოლუცია.

მესამე შემთხვევაში — სისტემაში არამდგრადი წონასწორობის მდგომარეობით A, დროთა განმავლობაში მყარდება პერიოდული რეჟიმი C (რომელშიც, ვთქვათ, რადიკალები და კონსერვატორები პერიოდულად ცვლიან ერთმანეთს). საწყისი ხისტი ლოტკა-ვოლტერას მოდელისგან განსხვავებით, ამ მოდელში მყარდება მდგრადი პერიოდული რეჟიმი და ის არ არის დამოკიდებული საწყის პირობაზე. თავდაპირველად მცირე გადახრა მდგრადი A მდგომარეობიდან იწვევს A-ს გარშემო არა მცირე რყევებს, როგორც ეს ლოტკა-ვოლტერას მოდელშია, არამედ საგრძნობ რყევას განსაზღვრული ამპლიტუდით (რომელიც არაა დამოკიდებული გადახრის სიმცირეზე). სხვა სტრუქტურულად მდგრადი სცენარებიც არის შესაძლებელი (მაგალითად, რამდენიმე განსხვავებული პერიოდული რეჟიმით).

დასკვნა: *ხისტი მოდელი ყოველთვის უნდა იქნეს გამოკვლეული მიღებული შედეგების სტრუქტურულ მდგრადობაზე, მოდელის მცირე ცვლილებებთან მიმართებაში* (რომელიც მოდელს აქცევს მოქნილად).

ლოტკა-ვოლტერას მოდელის შემთხვევაში, იმის შეფასებისათვის, თუ რომელი, 1-3 (ან სხვა შესაძლო), სცენარიდან იქნება რეალიზებული, აუცილებელია დამატებით ინფორმაცია ამ სისტემის შესახებ (ანუ ჩვენს ფორმულაში f და g მცირე შესწორებების ფორმის შესახებ).

მოქნილი მოდელების მათემატიკური თეორია მიუთითებს სახელდობრ რომელი ინფორმაციაა ამისათვის საჭირო. ამ ინფორმაციის გარეშე ხისტმა მოდელმა შეიძლება გამოიწვიოს თვისობრივად მცდარი პროგნოზი. ხისტი მოდელების საფუძველზე გამოტანილი დასკვნების ნდობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი დასტურდება მათი სტრუქტურული მდგრადობის კვლევით.

4. მრავალსაფეხურიანი მართვის შემცველი ხიფათი

ამ ნაწილში აღწერილი ფენომენი კარგად არის ცნობილი ტექნიკური სისტემების მართვის თეორიაში. ის შეინიშნება ზოგად სიტუაციაშიც, მაგრამ აქ მე მას აღვწერ ყველაზე

მარტივი მოდელის საშუალებით, ჩავანაცვლებ რა ტექნიკურ ტერმინებს ადამიანურით.

დავუშვათ, რომელიღაც X პროდუქტის წარმოებას ხელმძღვანელობს რომელიღაც მმართველი, რომელიც გადაწყვეტილებას იღებს წარმოების სიჩქარის შესახებ:

$$\dot{x}(t) = y(t).$$

თავის მხრივ, y მმართველის ქცევას ხელმძღვანელობს მეორე რანგის მმართველი, რომელიც იღებს გადაწყვეტილებებს იმის შესახებ, თუ როგორ უნდა შეიცვალოს წარმოების სიჩქარე:

$$\dot{y}(t) = z(t).$$

თავის მხრივ, z მმართველის ქცევას ხელმძღვანელობს მესამე რანგის მმართველი და ა.შ. გენერალურ (n რანგის) მმართველამდე.

ჩვენი მოდელის ფარგლებში გენერალური მმართველი ახდენს უკუკავშირს: მისი გადაწყვეტილება არ ემყარება უფროსების ბრძანების შესრულების სურვილს (წინა რანგის მმართველებისაგან განსხვავებით), არამედ ემყარება ბიზნესის ინტერესებს. მაგალითად, მას შეიძლება სურს მიაღწიოს X არგუმენტისათვის რაღაც X დონეს და ის დადებითი მიმართულებით გავლენას ახდენს წინა რანგის მმართველის პოზიციაზე, თუ X-თვის დონე არ არის მიღწეული, და ნეგატიური მიმართულებით — თუ დონე გადაჭარბებულია.

მაგალითად, როდესაც n = 3, ამ ტიპის უმარტივეს მოდელს აქვს სახე:

$$\{\dot{x}(t) = y(t) \quad \dot{y}(t) = z(t)$$

$$\dot{z}(t) = -k(x - X), \quad k > 0.$$

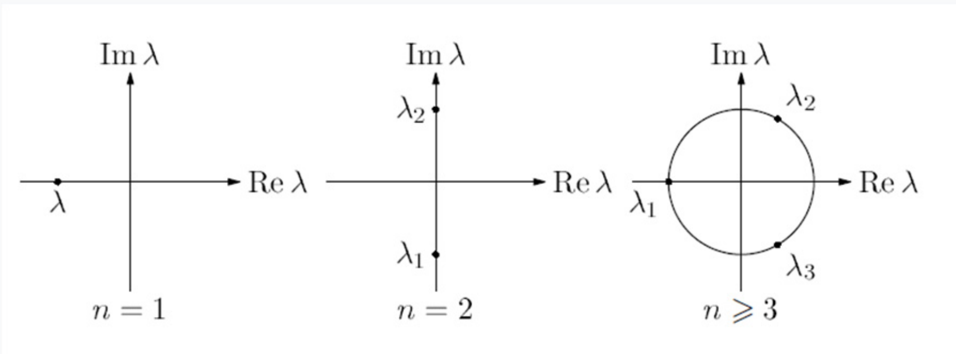
ეს სისტემა შეიძლება გადაიწეროს n-რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების სახით:

$$x^{(n)}(t) = -k(x - X).$$

ამ (ხისტი) მოდელის განტოლება მარტივად იხსნება ცხადი სახით.

$$\lambda^n = -k$$

მახასიათებელი განტოლების λ ფესვების რეალური ნაწილების ნიშანი განსაზღვრავს მოცემული სისტემის წონასწორობის მდგომარეობის (x = X, y =....= z = ::: = 0) მდგრადობას.



სურ.8. მრავალსაფეხურიანი მმართველობის არამდგრადობა

ეს ფესვები, კომპლექსური რიცხვები, ნაჩვენებია სურ. 8-ზე. ეს ფესვები ქმნის კომპლექსური λ ცვლადის სიბრტყეზე წესიერი n-კუთხედის წვეროებს. თუ n> 3, ზოგიერთი წვერო აუცილებლად მოხვდება (არამდგრად) მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში (Re> 0). როდესაც n = 1, ფესვი λ = −k მდებარეობს მდგრადობის ნახევარსიბრტყეში, ხოლო, თუ n = 2, ფესვები $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k}$ არიან მდგრადობის საზღვარზე.

დასკვნა: *მრავალსაფეხურიანი მართვის ჩვენ მიერ აღწერილი მოდელი, როდესაც n> 3 არამდგრადია. ორდონიან მართვას მივყავართ პერიოდულ რყევებამდე, მაგრამ არ იწვევს რყევების კატასტროფულ ზრდას, რომელიც ხდება სამი და უფრო მეტი დონის მქონე მართვის შემთხვევებში.*

რეალურ წონასწორობას უზრუნველყოფს მხოლოდ ერთი დონის მართვა, რომელშიც მმართველი პირი უფრო მეტად დაინტერესებულია საქმით, ვიდრე შემდეგი მმართველის გულის მოგებით.

ამ ხისტი მოდელის მარტივი ანალიზის საფუძველზე ზემოთ გაკეთებული დასკვნები

სინამდვილეში ვერ უძლებს სტრუქტურულ მდგრადობაზე გამოცდას, გარდა n = 2 შემთხვევისა: ორდონიანი მართვა შეიძლება იყოს მდგრადიც და არამდგრადიც, საქმის ორგანიზების დეტალების გათვალისწინებით, რაც ჩვენ დასაწყისშივე უგულებელვყავით მარტივი მოდელის შედგენისას.

გრძელვადიანი და მუდმივი მრავალსაფეხურიანი მართვის სისტემის ფუნქციონირება მგონი ხსნის საბჭოთა კავშირში დირექტივების შეუსრულებლობას, სხვადასხვა რანგის მმართველთა და „ჩრდილოვანი“ სისტემის არსებობით გამოწვეული ინტერესებიდან გამომდინარე. ამგვარი რეალური დაინტერესების გარეშე (რომელიც თანამედროვე პირობებში უკვე არაა აუცილებელი უზრუნველყოფილი იყოს კორუფციით) მრავალსაფეხურიანი მენეჯმენტი ყოველთვის იწვევს განადგურებას.

საბედნიეროდ, ცენტრალური ბანკის დამოუკიდებლობის საჭიროება უკვე კარგადაა გასაგები, მაგრამ მრავალსაფეხურიანი („ადმინისტრაციული“) მართვა ბევრ სხვა შემთხვევაში შენარჩუნებულია.

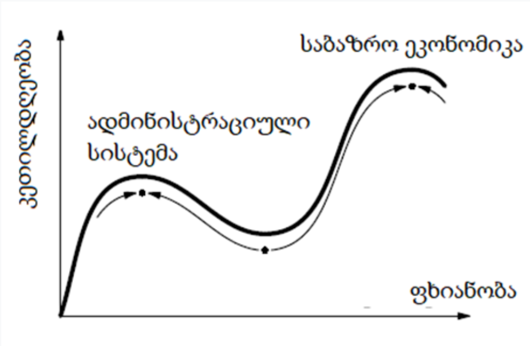
5. გარდაქმნის (პერესტროიკის) მათემატიკური მოდელი

გარდაქმნის ყველაზე მარტივ და ზოგად მათემატიკურ მოდელებს, რომლებიც ძლიერად არაწრფივია, მივყავართ დასკვნებამდე, რომლებიც შეიძლება მოულოდნელი აღმოჩნდეს მმართველებისათვის, რომლებიც მიჩვეული არიან წრფივ სისტემებს, რომელთა შედეგებიც ძალისხმევის პროპორციულია.

მე აქ მოვიტან ამ დასკვნების აღწერას ჩემი წიგნის „კატასტროფების თეორია“ [1] მესამე გამოცემიდან (წინა გამოცემებში ამ დასკვნების განთავსება ვერ შევძელი, მიზეზთა გამო — რომელიც გაქრა. იმედი მაქვს, არა მხოლოდ დროებით — თავად პერესტროიკის გამო).

განვიხილოთ არაწრფივი სისტემა, რომელიც იმყოფება ჩამოყალიბებულ მგდრად მდგომარეობაში, რომელიც ცუდად არის მიჩნეული, რადგან ჩანს სისტემის უკეთესი მდგრადი მდგომარეობა (თავისთავად, საბაზრო ეკონომიკა არ არის პანაცეა: დებრეს ცნობილი თეორემის თანახმად, პრინციპში, მან შესაძლოა მიგვიყვანოს არამდგრადობამდე ანდა ნებისმიერ ქაოსამდე) (სურ.9).

აი, ზოგიერთი უმარტივესი დასკვნა:



სურ. 9. გარდაქმნის თეორიის თვალსაზრისით დანახული გარდაქმნა

1. უკეთესი მდგომარეობისკენ თანდათანობით სვლას მივყავართ სისტემის მდგომარეობის გაუარესებასთან. უკეთესი მდგომარეობისკენ თანაბარი მოძრაობისას გაუარესების სიჩქარე იზრდება.
2. ცუდი მდგომარეობიდან უკეთესი მდგომარეობისკენ მოძრაობისას სისტემის წინააღმდეგობა ცვლილებების მიმართ იზრდება.
3. წინააღმდეგობის მაქსიმუმი მიიღწევა უფრო ადრე, ვიდრე ყველაზე ცუდი შესაძლო მდგომარეობა. წინააღმდეგობის მაქსიმუმის გავლის შემდეგ მდგომარეობა უარესდება.
4. ყველაზე ცუდ მდგომარეობასთან მიახლოებით გარდაქმნის მიმდინარეობისადმი წინააღმდეგობა, დაწყებული გარკვეული მომენტიდან, იწყებს შემცირებას და, როგორც კი ყველაზე ცუდ მდგომარეობას გადაივლის, არა მხოლოდ მთლიანად ქრება, არამედ სისტემა იწყებს უკეთესი მდგომარეობისაკენ სწრაფვას.
5. გაუარესების ოდენობა, რომელიც საჭიროა საუკეთესო მდგომარეობაზე გადასასვლელად, შედარებადია საბოლოო გაუმჯობესებასთან და იზრდება სისტემის სრულყოფის შესაბამისად. სუსტად განვითარებულ სისტემას შეუძლია უკეთეს მდგომარეობაში გადასვლა თითქმის წინასწარი გაუარესების გარეშე, იმ დროს, როდესაც განვითარებული სისტემა, თავისი მდგრადობის გამო, ასეთ თანდათა-

ნობით, უწყვეტ გაუმჯობესებას არ ექვემდებარება.

6. თუ შესაძლებელი ხდება სისტემის მყისიერი, ნახტომისეული და არა უწყვეტი გადასვლა ცუდი მდგრადი მდგო-მარეობიდან კარგ მგდომარეობასთან საკმარისად ახლოს, მაშინ ის თვითონ იწყებს განვითარებას კარგი მდგომარეობისაკენ.

არაწრფივი სისტემების ფუნქციონირების ამ ობიექტური კანონების უგულებელყოფა დაუშვებელია. ზემოთ ჩამოთვლილია მხოლოდ უმარტივესი თვისობრივი დასკვნები. თეორია ასევე წარადგენს რაოდენობრივ მოდელებს, მაგრამ თვისობრივი დასკვნები უფრო მნიშვნელოვანი და, ამავე დროს, უფრო საიმედოა: ისინი ნაკლებადაა დამოკიდებული სისტემის ფუნქციონირების დეტალებზე, რომლის მოწყობაც და რიცხვითი პარამეტრები შეიძლება არ იყოს კარგად ცნობილი.

ნაპოლეონი აკრიტიკებდა ლაპლასს „უსასრულოდ მცირეთა სულისკვეთების შემოღების მცდელობის გამო“ (*ჩემმა ფრანგმა კოლეგებმა ამიხსნეს, რომ ლაპლასი, როდესაც იყო შინაგან საქმეთა მინისტრი, ითხოვდა, რომ ყველა ხარჯის ანგარიში კაპიკის სიზუსტით ყოფილიყო წესრიგში — ვ.ა.).* გარდაქმნების მათემატიკური თეორია — ეს არის თანამედროვე უსასრულო მცირეთა ანალიზის ნაწილი, რომლის გარეშეც შეგნებული მართვა რთული და ნაკლებად ცნობილი არაწრფივი სისტემებისა პრაქტიკულად შეუძლებელია.

მოქნილი მოდელირების თეორია — ესაა არასაიმედო მოდელების ანალიზის საფუძველზე შედარებით საიმედო დასკვნების მიღების ხელოვნება. ქვემოთ მოცემულია კიდევ ერთი მოდელი, რომელიც ხსნის საკმაოდ მოულოდნელ დაკვირვებად კანონებს.

6. ორიანის ხარისხებში პირველი ციფრების სტატისტიკა და მსოფლიოს გადაკეთება

2^n რიცხვის პირველ ციფრად ერთიანი დაახლოებით 6-ჯერ უფრო ხშირად გვხვდება, ვიდრე ცხრიანი. ასევე ნაწილდება პირველი ციფრები მსოფლიოს ქვეყნების მოსახლეობის რაოდენობისა და ფართობების გამომსახველ რიცხვებში (სავარაუდოა, რომ პირველი ციფრები რიცხვებში, რომლებიც, ვთქვათ, კომპანიების დასაქმებულთა რაოდენობას ან მათ კაპიტალს ასახავს, ექვემდებარება იმავე განაწილებას, მაგრამ, საჭირო მონაცემების არქონის გამო, დასკვნებისაგან თავს შევიკავებ).

ქვემოთ შემოთავაზებული სავარაუდო ახსნა უმარტივესი ხისტი მოდელის დაფიქსირებით იქცევა თეორემად (მეჩვენება, რომ ამგვარი თეორემები შეიძლება დამტკიცდეს ფართო კლასის სხვადასხვა ხისტი მოდელებისათვის, ასე რომ, მთელი თეორია, როგორც ჩანს, გამართლდება მოქნილი მოდელების შემთხვევაშიც).

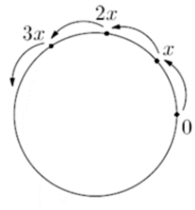
2^n $n=0,1,2,\ldots$ რიცხვების პირველი ციფრების მიმდევრობა:

$$1,2,4,8,1,3,6,1,2,5,1,\ldots$$

შეიცავს ძალიან ბევრ ერთიანს. შესაძლებელია გამოთვლების გაგრძელებით შემოწმება, რომ ერთიანები ასიპტოტურად შეადგენენ ამ მიმდევრობის დაახლოებით 30%. ეს შედეგი ჰ.ვეილის თეორემიდან (დამტკიცებულია დაახლოებით 100 წლის წინ) გამომდინარეობს, რომლის თანახმადაც nx რიცხვების, როდესაც x ირაციონალურია, წილადური ნაწილები $\{nx\}$ თანაბრათაა განაწილებული 0-დან 1-მდე (a რიცხვის წილადური ნაწილი $\{a\}$ არის სხვაობა a რიცხვსა და $[a]$ - უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება ამ რიცხვს (მთელ ნაწილს), შორის, ანუ $\{a\} = a - [a]$).

ვეილის თეორემა ნიშნავს, რომ, თუ წერტილი ხტუნაობს წრეწირეზე სიგრძით 1 ნაბიჯებით, რომელიც მის სიგრძესთან არათანაზომადია (სურ. 10), მაშინ თითოეულ რკალში ხტომაში გატარებული დროის წილი არის რკალის სიგრძის პროპორციული (და არ არის დამოკიდებული წრეზე რკალის მდებარეობაზე).

ჰერმან ვეილი 1885-1955



ვეილის თეორემისათვის

სურ.10

i რიცხვის პირველი ციფრი განისაზღვრება, თუ lg i და lg(i + 1) წერტილებს შორის მონაკვეთებიდან რომელში მოხვდება ამ რიცხვის ლოგარითმის (მანტისა) წილადური ნაწილი (აქ და შემდგომ ლოგარითმები არის ათობითი).

რადგან $lg\, lg\, 2^n = nlg2$, ხოლო რიცხვი x = lg 2 ირაციონალურია, ვეილის თეორემა უზრუნველყოფს $lg\, lg\, 2^n$ წერტილების თანაბარ განაწილებას 0-დან 1-მდე ინტერვალზე. შესაბამისად, 2^n ათობით სისტემაში ჩაწერილ რიცხვებში პირველი i ციფრის წილი არის lgi-დან lg (i + 1)-მდე სეგმენტის სიგრძე p_i. ჩვენ ამ გზით მივიღებთ 2^n რიცხვების პირველი ციფრების შემდეგ სტატისტიკას (პროცენტებში):

ცხრილი 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$100p_i$	30	17	12	10	8	7	6	5	5

მაგალითად, ერთიანის წილი არის $p_1 = lg2 \approx 0{,}30103...$, რაც ექვსჯერ აღემატება ცხრიანის წილს.

პირველი ციფრების ასეთივე განაწილება დამახასიათებელია ნებისმიერი გეომეტრიული პროგრესიისათვის (მაგალითად, 3^n). გამონაკლისია, რა თქმა უნდა, პროგრესია 10^n $((\sqrt{10})^n)$ . . . და, ზოგადად, პროგრესიები $(\sqrt{10})^{\frac{p}{q}}$, სადაც p და q მთელი რიცხვებია.

ოცი წლის წინ ნ.ნ. კონსტანტინოვმა მიაპყრო ჩემი ყურადღება იმ ფაქტს, რომ მსოფლიოს ქვეყნების მოსახლეობის რაოდენობის ამსახველი რიცხვების პირველი ციფრები ექვემდებარებიან იმავე უცნაურ განაწილებას: ერთიანები დაახლოებით ექვსჯერ მეტია ცხრიანზე. აი, მაშინდელი ჩემი ამ ფენომენის ახსნა. განვიხილოთ ფიქსირებული ქვეყნის წლების მიხედვით მოსახლეობის რაოდენობის ამსახველი რიცხვების მიმდევრობა.

მალთუსის თეორიის თანახმად, ეს რიცხვები ქმნიან გეომეტრიულ პროგრესიას. ვეილის თეორემის თანახმად, პირველი ციფრები გადანაწილებულია ისე, როგორც პირველი ციფრები ორის ხარისხებისათვის. ახლა გადავიდეთ ერთსა და იმავე წელს სხვადასხვა ქვეყნის მოსახლეობის სტატისტიკურ მონაცემებზე. „ერგოდული პრინციპის" თანახმად, დროებითი საშუალოები შესაძლოა შეიცვალოს სივრცული საშუალოებით: პირველი ციფრების სტატისტიკა იგივე უნდა დარჩეს, რაც იყო ერთი ქვეყნისთვის.

(ერგოდული პრინციპი — იგივე მოსაზრებაა, რომლის თანახმად ტყეში ხის ევოლუციის შესწავლისათვის სულაც არაა აუცილებელი ლოდინი, თუ ის თესლიდან როდის ამოვა, გაიზრდება და მოკვდება, არამედ ამისათვის შეიძლება უბრალოდ სხვადასხვა ასაკის ხეზე დაკვირვება. აქ ჩვენ ეს პრინციპი გამოვიყენეთ საწინააღმდეგო მიმართულებით, გამოვთვალეთ ქვეყნების მიხედვით სტატისტიკა, ერთი ქვეყნის ევოლუციის ცოდნის საფუძველზე).

კონტროლისთვის მე შევადარე ჩემს ბიბლიოთეკაში თაროზე წიგნების გვერდების რაოდენობა, მდინარეების სიგრძეები და მთების სიმაღლეები. ყველა ამ შემთხვევაში მიღებული რიცხვების პირველ ციფრებს შორის ერთიანისა და ცხრიანის წილები აღმოჩნდა ცხრილ1-თან ძალზე ახლოს. წიგნები, მთები და მდინარეები გეომეტრიული პროგრესიით არ იზრდება, მალთუსის თეორია მათ მიმარ-

თებაში მიუღებელია. ამიტომ განსხვავება პირველი ციფრების სტატისტიკებს შორის, რომელიც გამოხატავს მოსახლეობის რაოდენობას და, მაგალითად, მდინარეების სიგრძეებს, ერთგვარი თავისებური დადასტურებაა მალთუსის ფორმულის (რომლის მიხედვითაც მოსახლეობის რაოდენობა ან იზრდება გეომეტრიული პროგრესიით, ან იკლებს, როგორც ჩვენ ამას ვხედავთ რუსეთში).

ამასთან, ათი წლის წინ, მ. ბ. სევრიუკმა აღმოაჩინა, რომ არა მხოლოდ მოსახლეობა, არამედ მსოფლიოს ქვეყნების ტერიტორიების ამსახველი რიცხვების პირველი ციფრების განაწილებაც ექვემდებარება ამ უცნაურ კანონს, როგორც ორის ხარისხების შემთხვევაშია. ეს განაწილება შესაძლოა მოგეჩვენოთ ნაკლებად უცნაურად, თუ შენიშნავთ, რომ ესაა ერთადერთი განაწილება, რომელიც არაა დამოკიდებული, ზომათა რა ერთეულებში იზომება ფართობი (კვადრატული კილომეტრი, კვადრატული მილი, კვადრატული ფუტი, კვადრატული დუიმი და ა.შ.). სავარაუდოდ, მალთუსის თეორია ფართობებისათვის არაგამოყენებადია. ასე რომ, ჩნდება შეკითხვა — როგორ ავხსნათ ტერიტორიების ეს ქცევა?

ცხრილი 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$100p_i$	29	21	10	11	6	6	8	3	6

აღმოჩნდა, რომ მსოფლიოს გადანაწილების მთელ რიგ მოდელებს ზუსტად მივყავართ ასეთ განაწილებასთან. უმარტივესი მოდელი (რომლისთვისაც მითითებული განაწილების დამყარება — თეორემა) ასეთია: დროის ერთეულში ქვეყანა 50% ალბათობით იყოფა ნახევარზე და 50% ალბათობით ერთიანდება იმავე ფართობის მქონე სხვა ქვეყანასთან. ეს ხისტი მოდელი ზუსტი მათემატიკური კვლევის საშუალებას იძლევა, რომელიც აჩვენებს, რომ დროის წილი, რომლის განმავლობაში ტერიტორიის მაჩვენებლის პირველი ციფრი იქნება ერთიანი (შესაბამისად, i), შეადგენს $lg2 \approx 0{,}30103$ (შესაბამისად, $\lg(i+1) - \lg i$).

კომპიუტერული ექსპერიმენტები (ჩატარებული მ.ვ. ხესინას მიერ ტორონტოში და ფ.აიკარდის მიერ ტრიესტში 1997 წლის ზაფხულში) აჩვენებენ, რომ იგივე განაწილება ყალიბდება დიდი რაოდენობის სხვა მოდელებში. მაგალითად, შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ დროის ერთეულში ნებისმიერი ქვეყანა (x_k ფართობით) ალბათობით ½ ერთიანდება შემთხვევით შერჩეულ სხვა ქვეყანასთან (და ქმნის ქვეყანას ფართობით $x_k + x_l$), იმავდროულად, ალბათობით ½ იყოფა ორ თანაბარ ნაწილად.

დაახლოებით ასი ქვეყნის ტერიტორიით დაწყებული, თქვათ, $x_k = k$, შეიძლება უკვე ასი ბიჯის მერე მივიღოთ საკმაოდ კარგი მიახლოება ჩვენს სტანდარტულ განაწილებასთან.

თანაბარ ნაწილად დაყოფა შესაძლოა შეიცვალოს px_k და $(1 - p)\ x_k$ ნაწილებად დაყოფით (კვებეკი, უკრაინა, ...); გაერთიანებისა და გაყოფის ალბათობები შეიძლება შეირჩეს განსხვავებულად — რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები არ არის მგრძნობიარე ამგვარი ცვლილებების მიმართ. მოდელში შესაძლებელია ქვეყნების გეოგრაფიული მდებარეობაც კი გაითვალისწინოთ და გაერთიანების შესაძლებლობა მიეცეს მხოლოდ მეზობლებს (უნდა უგულებელვყოთ ერთ დროს აღმოსავლეთ პრუსიის არსებობა, ახლა — კალინინგრადის ოლქი). რიცხვით ექსპერიმენტებს მივყავართ იმავე განაწილებასთან (მსოფლიოს გეოგრაფიის მოდელირება ტარდება წრის, სფეროს, სეგმენტის თუ მართკუთხედის მიხედვით).

ამრიგად, ჩვენი განაწილება, ჩანს, რომ მოქნილი მოდელის თვისებაა, მაგრამ იმის დამტკიცება, რომ ის განხორციელდება კონკრეტული რეალიზაციით რაიმე ხისტი მოდელის ფარგლებში — რთული მათემატიკური პრობლემაა და ჯერ კიდევ შორსაა მისი ამოხსნა.

მათემატიკა, ისევე როგორც ფიზიკა, ექსპერიმენტული მეცნიერებაა, რომელიც ფიზიკისგან განსხვავდება მხოლოდ იმით, რომ

მათემატიკაში ექსპერიმენტი ძალზე იაფია. როგორც ჩანს, ამიტომ არის, რომ რუსეთის აკადემიის მათემატიკის განყოფილების ბიუჯეტი ორმოცჯერ ნაკლებია, ვიდრე ფიზიკის განყოფილებების ბიუჯეტი (და, შესაბამისად, ჩვენი მათემატიკოსების პროდუქტიულობაც რამდენჯერმე მეტია).

7. მათემატიკა და მათემატიკური განათლება თანამედროვე მსოფლიოში

«No star wars – no mathematics», (*„არა ვარსკვლავურ ომებს — არა მათემატიკას“*),— ამბობენ ამერიკელები. ის სამწუხარო ფაქტი, რომ სამხედრო დაპირისპირების (დროებით?) შეწყვეტით შეწყდა მათემატიკის, ისევე, როგორც ყველა ფუნდამენტური მეცნიერების, დაფინანსება, თანამედროვე ცივილიზაციის სირცხვილია, რომელიც ცნობს მხოლოდ „გამოყენებით“ მეცნიერებებს [*მსგავსი ფსევდოსპირიტუალური მეცნიერებების განუწყვეტელი დაფინანსება, როგორებიცაა პარაფსიქოლოგია და ანტიისტორიული სისულელეები (აკადემიკოს ა.ტ. ფომენკოს — 1997 წელს რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის მათემატიკის დეპარტამენტის აკადემიკოსი — მდივნის მოადგილე ჯერ კიდევ ელოდება ახსნას —* ვ.ა.)], რომელიც, თავის მხრივ, იქცევა, როგორც ღორი მუხის ქვეშ.

სინამდვილეში, არ არსებობს არავითარი გამოყენებითი მეცნიერებები და არც ოდესმე არსებობდა, როგორც ეს ასზე მეტი წლის წინ ლუი პასტერმა აღნიშნა (რომელიც, რთულია დაეჭვდე, რომ კაცობრიობისათვის არასაჭირო საქმიანობით იყო დაკავებული). პასტერის თქმით, არსებობს მხოლოდ მეცნიერების გამოყენება.

მე-18 საუკუნის მმართველებისთვისა და სამხედრო ლიდერებისთვის ქარვისა და კატის ბეწვთან ექსპერიმენტები ჩანდა უსარგებლო. სინამდვილეში მათ შეცვალეს ჩვენი სამყარო მას შემდეგ, რაც ფარადეიმ და მაქსველმა დაწერეს ელექტრომაგნეტიზმის თეორიის განტოლებები. ფუნდამენტური მეცნიერების ამ მიღწევებმა გადაიხადა კაცობრიობის ყველა ხარჯი ასობით წლით წინმსწრებად. თანამედროვე მმართველთა უარი ამგვარ ხარჯებზე, ჩემი თვალსაზრისით — საოცრად ახლომხედველი პოლიტიკაა, რისთვისაც დაინტერესებული ქვეყნები უდავოდ დაისჯებიან ტექნოლოგიის და, შესაბამისად, ეკონომიკური (ასევე სამხედრო) ჩამორჩენით.

კაცობრიობა მთლიანობაში (რომლის წინაშეა უმძიმესი მალთუსის კრიზისის პირობებში გადარჩენის ამოცანა) ალბათ დიდ ფასს გადაიხდის ახლომხედველ-ეგოისტური პოლიტიკის გამო, რომელსაც ახორციელებენ მისი შემადგენელი ქვეყნები.

მათემატიკური საზოგადოება ატარებს თავის პასუხისმგებლობას მთავრობებისაგან და, მთლიანად, საზოგადოებისაგან ყველგან განხორციელებული ზეწოლისთვის, რომლის მიზანია მათემატიკური კულტურის, როგორც ადამიანის კულტურის განუყოფელი ნაწილის, და განსაკუთრებით კი მათემატიკის განათლების განადგურება.

საუბედუროდ, მათემატიკის ყველა დონეზე უშინაარსო და ფორმალიზებული სწავლება გახდა სისტემის ნაწილი. გაიზარდა პროფესიონალი მათემატიკოსებისა და მასწავლებლების მთელი თაობები, რომლებმაც მხოლოდ იციან ეს და არც წარმოუდგენიათ მათემატიკის სხვა სწავლების შესაძლებლობა.

ფორმალიზებული სწავლების ყველაზე დამახასიათებელი თვისების მაჩვენებელია არამოტივირებული განმარტებების სიმრავლე და გაუგებარი (თუმცა ლოგიკურად უნაკლო) დამტკიცებები. მაგალითების სიმწირე, მნიშვნელოვანი შემთხვევების ანალიზის ნაკლებობა და მათემატიკური თეორიების გამოყენების ზღვარის არმიწოდება, ილუსტრაციებისა და ნახაზების არარსებობა — მათემატიკური ტექსტების ისეთივე ნაკლია, როგორც არამათემატიკური გამოყენებებისა და მათემატიკური ცნებების არარსებობა.

პუანკარეც კი აღნიშნავდა, რომ წილადების სწავლების მხოლოდ ორი გზა არსებობს — დაჭრა (გონებრივად მაინც) ან ნამცხვარი, ან ვაშლი. სწავლების სხვა ნებისმიერი მეთოდით (აქსიომატური ან ალგებრული) მოსწავლეები ამჯობინებენ დაამატონ მრიცხველს მრიცხველები და მნიშვნელს მნიშვნელები.

მათემატიკა არის ექსპერიმენტული მეცნიერება — ნაწილი თეორიული ფიზიკისა და

საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ოჯახის წევრი. ყველა ამ მეცნიერების აგებისა და სწავლების ძირითადი პრინციპები გამოყენებადია მათემატიკისთვისაც. მკაცრი ლოგიკური მსჯელობის ხელოვნება და ამ გზით საიმედო დასკვნების მიღების უნარი არ უნდა დარჩეს შერლოკ ჰოლმსის პრივილეგიად — თითოეული მოსწავლე უნდა დაეუფლოს ამ უნარს. რეალური სიტუაციების ადეკვატური მათემატიკური მოდელების შედგენის უნარი უნდა წარმოადგენდეს მათემატიკური განათლების განუყოფელ ნაწილს. წარმატება მოაქვს არა იმდენად მზა რეცეპტების გამოყენებას (ხისტი მოდელები), რამდენადაც რეალური სამყაროს ფენომენებთან მათემატიკურ მიდგომას. მთელი თავისი უზარმაზარი სოციალური მნიშვნელობით გამოთვლებში (და computer science) არ არის მათემატიკის ძალა და მათემატიკის სწავლება არ უნდა დავიდეს გამოთვლების რეცეპტებამდე.

რუსეთის ისტორიაში იყო პრემიერმინისტრი (გრაფი ს.ვიტე — დაბადებულია თბილისში — ი.თ.) მათემატიკური განათლებით (დაამთავრა მათემატიკაში ჩებიშევის „სკოლა“ სანკტ-პეტერბურგის უნივერსიტეტში). აი როგორ აღწერს ის განსხვავებას ხისტ და მოქნილ მათემატიკურ მოდელირებას შორის [12 ტ.3, თ.5]:

გრაფი სერგეი ვიტე
1849-1915
რუსეთის პრემიერმინისტრი
1903-1906

„მათემატიკოსებს შორის ორი ბუნების ადამიანია: 1) მათემატიკოს-ფილოსოფოსები, ანუ უმაღლესი მათემატიკური აზრის მატარებელი მათემატიკოსები, რომელთათვისაც ციფრები და გამოთვლები არის ხელობა; ამ სახის მათემატიკოსებისთვის ციფრებს და გამოთვლებს არ აქვს არავითარი მნიშვნელობა, ისინი გატაცებულნი არიან არა ციფრებითა და გამოთვლებით, არამედ თვით მათემატიკური იდეებით. ერთი სიტყვით, ეს მათემატიკოსები არიან, ასე ვთქვათ, წმინდა ფილოსოფიური მათემატიკოსები; 2) პირიქით, არსებობენ ისეთი მათემატიკოსები, რომლებიც მათემატიკის ფილოსოფიას, მათემატიკურ იდეებს არ ეხებიან და მათემატიკის მთელ არსს ხედავენ გამოთვლებში, ციფრებსა და ფორმულებში...
ფილოსოფოს-მათემატიკოსები, რომლებსაც მე ვეკუთვნი, ყოველთვის „ზიზღით დაჰყურებენ“ გამომთვლელ-მათემატიკოსებს და, პირიქით, გამომთვლელ-მათემატიკოსებიც, რომელთა შორისაც ბევრი ცნობილი მეცნიერია, უყურებენ ფილოსოფოს-მათემატიკოსებს, როგორც, რაღაც აზრით, „შერეკილებს“.

ახლა ჩვენ ვიცით, რომ ვიტეს მიერ აღწერილ განსხვავებებს აქვს ფიზიოლოგიური საფუძველი. ჩვენი ტვინი შედგება ორი ნახევარსფეროსაგან. მარცხენა — პასუხისმგებელია მრავალწევრების გამრავლებაზე, ენების შესწავლაზე, ჭადრაკის თამაშზე, ინტრიგებზე, სილოგიზმების თანმიმდევრობაზე, ხოლო მარჯვენა — სივრცით ორიენტაციაზე, ინტუიციაზე და ყველაფერზე, რაც აუცილებელია რეალური ცხოვრებისათვის. ვიტეს ტერმინოლოგიით, გამომთვლელ-მათემატიკოსებს ჰიპერტროფიული აქვთ მარცხენა ნახევარსფერო, ჩვეულებრივ, მარჯვენას ნაკლებად განვითარების გამო. ამ დაავადებაშია მათი ძალა (გავიხსენოთ ნაბოკოვის „ლუჟინის დაცვა“). მაგრამ ამ ტიპის მათემატიკოსების დომინირებამ მიგვიყვანა აქსიომატურ-სქოლასტიკური მათემატიკით გადაჯერებამდე, განსაკუთრებით სწავლების პროცესში (მათ შორის საშუალო სკოლა), რომელზეც საზოგადოება ბუნებრივად და კანონიერად მკვეთრად უარყოფითად რეაგირებს. შედეგად მივიღეთ საყოველთაოდ დაკვირვებული ზიზღი მათემატიკის მიმართ და ყველა მმართველის სწრაფვა, სკოლაში თავს გადამხდარი დამცირებისათვის სამაგიეროს გადახდისათვის, — მისი ამოძირკვის სურვილი.

მოქნილი მოდელირება მოითხოვს ტვინის ორივე ნახევარსფეროს ჰარმონიულ მუშაობას. უნივერსიტეტის დამთავრების შემდეგ ვიტემ ვერ იპოვა თავისი სპეციალობით სამუშაო და მიიღო კერძო კომპანიის შეთავაზება გამხდარიყო რკინიგზაზე სამხრეთ-დასავლეთის მიმართულების მმართველი. ამ პოსტის დასაკავებლად მიმავალ გზაზე მას თითო კვირით უნდა გაეტარებინა სტაჟირება მისადმი დაქვემდებარებული ყველა განსხვავებული თანამდებობის პირის პოზიციაზე

(როგორებიცაა: მეისრე, ლიანდაგის დარაჯი, ბარგის გამცემი, მოლარე, ცეცხლფარეში, მემანქანე, სადგურის უფროსი ...) — შეუფასებელი გამოცდილება მომავალი პრემიერმინისტრისთვის.

ერთხელ ყირიმში, ვიტეს ბრძანებით, მის მონაკვეთზე სამეფო მატარებლის სვლა შეანელეს.

ალექსანდრე III-ის აღშფოთების მიუხედავად, მემანქანე დაემორჩილა არა მეფის ბრძანებას, არამედ მისი მონაკვეთის უფროსის ბრძანებას. როდესაც მატარებელი გადავიდა შემდეგ მონაკვეთზე, რომელიც აღარ ექვემდებარებოდა ვიტეს, სიჩქარე, ბუნებრივია, გაზარდეს. მალე სამეფო მატარებელი რელსებიდან გადავიდა და გადატრიალდა (კატასტროფა ბოროკის სადგურთან). მეფეს გაახსენდა მონაკვეთის ურჩი უფროსის სახელი და ვიტე დაინიშნა მინისტრად (როგორც ჩანს, რკინიგზის, 1892) და მოგვიანებით ის გახდა პრემიერმინისტრი. მთელი გრანდიოზული ეპოქა „კაპიტალიზმის განვითარება რუსეთში" უკავშირდება მის სახელს, მათ შორის — ახლაც მოქმედი სარკინიგზო ქსელის მშენებლობა.

ვიტე უკეთ ერკვეოდა ქვეყნის რეალურ ცხოვრებაში და ეკონომიკისა და ტექნოლოგიის პრობლემებში, ვიდრე პოლიტიკურ ინტრიგებში (რომლის მიმართაც განსაკუთრებული ნიჭი აქვთ ტვინის მარცხენა ნახევარსფეროს განვითარებით გამორჩეულ ადამიანებს). ძალაუფლებაში რასპუტინის მსგავსი ფიგურების მოსვლასთან ერთად ის გადააყენეს. ვიტე კვლავ მოიწვიეს ხელისუფლებაში პოლიტიკოსების მიერ შექმნილი კრიტიკული სიტუაციების შედეგების აღმოსაფხვრელად (რუსეთ-იაპონიის ომი, 1905 წლის რევოლუცია). მე კი ვთვლი, ვიტე რომ დარჩენილიყო რუსეთის მმართველად შემდეგი ათი წლის განმავლობაში, ჩვენი ისტორია სულ სხვანაირი იქნებოდა: არ იქნებოდა არც მსოფლიო ომი, არც არანაირი რევოლუცია და ჩვენ ახლა ფინელებივით ან შვედებივით ვიცხოვრებდით.

რა თქმა უნდა, ვიტეს ძალა სულაც არ იყო მათემატიკის („გამოთვლების") გამოყენება, არამედ მისი ძალა იყო აზროვნების სტილი, რომელსაც ის ფილოსოფიურ მათემატიკას უწოდებს და რომელიც მათემატიკური განათლების მქონე ადამიანს აიძულებს (შეგნებულად ან შეუგნებლად) იფიქროს სამყაროს ყველა რეალიებზე მოქნილი მათემატიკური მოდელირების დახმარებით.

იდეა ამგვარი აზროვნების საჭიროების შესახებ წარმატების მისაღწევად ნებისმიერ ეკონომიკურ ან სამრეწველო საქმიანობაში (გამონაკლისია, ალბათ, პოლიტიკური ინტრიგები) უკვე ასი წლის წინ კარგად იყო გააზრებული [13, 113 გვ.]

„ადამიანური ლოგიკა, რომელიც არ იყენებს მათემატიკურ სიმბოლოებს, ხშირად იხლართება ვერბალურ განმარტებებში, რის გამოც აკეთებს მცდარ დასკვნებს — და ამ შეცდომის, რომელიც სიტყვების მუსიკის მიღმაა, გამოვლენას ძალზე დიდი შრომა და დაუსრულებელი, ხშირად უნაყოფო, დავა და კამათი სჭირდება".

სამწუხაროდ, ახლა ისევ აქტუალურია მათემატიკური ეკონომიკის კლასიკოსის, პარეტოს [14] სიტყვები:

„ეკონომისტები, რომლებმაც არ იციან მათემატიკა, არიან იმ ადამიანის პოზიციაში, რომელსაც სურს ამოხსნას განტოლებათა სისტემა ისე, რომ არც კი იცის რას წარმოადგენს ის, და არც ის იცის, რას წარმოადგენს სისტემაში შემავალი თითოეული განტოლება".

დასკვნები: ფუნდამენტური მეცნიერების და, კერძოდ, მათემატიკის დაგეგმილი ჩახშობა (ამერიკული მონაცემებით მათ ამისათვის დასჭირდებათ 10 -15 წელი) მოუტანს კაცობრიობას (და ცალკეულ ქვეყნებს) ზიანს, რომელიც სადარია ინკვიზიციის ხანძრებით გამოწვეული სტაგნაციისა დასავლეთის ცივილიზაციაში (და ესპანეთში).

მათემატიკური განათლება უნდა გახდეს თითოეული მოსწავლის კულტურის განუყოფელი ნაწილი, მაგრამ ეს არავითარ შემთხვევაში არ უნდა დავიდეს რეცეპტებზე (იქნება ეს გამრავლების ტაბულა თუ Windows 95).

მათემატიკური განათლების მთავარი მიზანი უნდა იყოს სამყაროს რეალური მოვლენების მათემატიკური გამოკვლევის უნარის განვითარება, რომელიც ასე კარგად აღწერა ვიტემ თავის ფილოსოფოს-მათემატიკოსის

დახასიათებაში და მანვე ბრწყინვალედ გამოიყენა, საერთოდ, თავის არამათემატიკურ საქმიანობაში. მოქნილი მათემატიკური მოდელების შექმნისა და გამოკვლევის ხელოვნება ამ უნარის ყველაზე მნიშვნელოვანი ნაწილია.

ლიტერატურა

[1] В. И. Арнольд. Теория катастроф. М.: Наука, 1990, 128 с.

[2] Т. Постон, И. Стюарт. Теория катастроф и ее приложения.М.: Мир, 1980, 608 с.

[3] Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Изд. 2-е. М.: Наука, 1969, 424 с.

[4] Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 5-е. М.: Наука, 1982, 331 с.

[5] Р. С. Гутер, А. Р. Янпольский. Дифференциальные уравнения. Изд. 2-е. М.: Высшая школа, 1976, 304 с.

[6] М. В.Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 2-е. М.: Наука, 1985, 448 с.

[7] В. В. Амелькин. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука, 1987, 160 с.

[8] Н. П. Векуа. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и приложения в механике. М.: Наука, 1987, 256 с.

[9] И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 6-е. М.: Наука, 1970, 279 с.

[10] Д. Эрроусмит, К. Плейс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Пер. С англ. под ред. Н. Х. Розова. М.: Мир, 1986, 240 с.

[11] В. И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971, 240 с.

Автор благодарит Д. С. Шмерлинга за пополнение списка литературы.

[12] Сергей Юльевич Витте. Воспоминания. Мемуары. В 3 томах. Том 1-3.

[13] Арнольд В.Ф. Политико-экономические этюды. Одесса, 1904.

[14] V.Pareto. Anwendung der Mathematik auf National-okonimie. Encyclopedie der Mathematischen Wissenschaften, Band I, Heft 7, S. 1114.

ბოლოთქმა: ვლადიმერ არნოლდი ჩემი ერთ-ერთი უსაყვარლესი (ჩვეულებრივი დიფერენციალური გატოლებების) ლექტორი იყო და მე ვამაყობ, რომ საგანი მას უმაღლეს ქულაზე ჩავაბარე. ნაწარმოების თარგმნისას კიდევ ერთხელ დავრწმუნდი, რომ, სტუდენტობისა და ასპირანტურაში სწავლის დროს, 1971-1979 წლებში, ცხოვრებაში ძალიან გამიმართლა, რადგან მასწავლიდა მეცნიერთა მსოფლიოო ვარსკვლავთა ნაკრები! ამ სტატიის გადათარგმნა გადავწყვიტე, რათა ახალგაზრდა თაობამ ტექსტის ყურადღებით წაკითხვისას აღმოაჩინოს, რომ მაღალი განათლებისა და ერუდიციის მქონე ადამიანს შეუძლია ურთულესი და ფაქიზი პრობლემების შესახებ პირდაპირი და ხმამაღალი საუბარი, ძალიან რბილად და ზუსტად. აგრეთვე მსურს ახალგაზრდა თაობამ კარგად გაითავისოს, თუ რა საკითხებზე, დაუღალავად და სერიოზული მეცნიერების საფუძველზე, ფიქრობენ, მუშაობენ და იღებენ შესაბამის გადაწყვეტილებებს იმპერიები, თანაც, მათემატიკის როგორ და რა სახის გამოყენებაზეა საუბარი! ამასთან, დავსძენ, რომ გავბედე და ორიგინალურ ტექსტს დავუმატე ზოგიერთი პიროვნების სურათი და კომენტარი.

ეთიკურ სტანდარტებთან შესაბამისობა, ინტერესთა კონფლიქტი

მთარგმნელი აცხადებს, რომ მას არავისგან და არცერთი დაწესებულებისგან არ მიუღია თანხა და რომ მას ინტერესთა კონფლიქტი არა აქვს.

მათემატიკა უფრო მეტია, ვიდრე სიზუსტე და დამტკიცებები

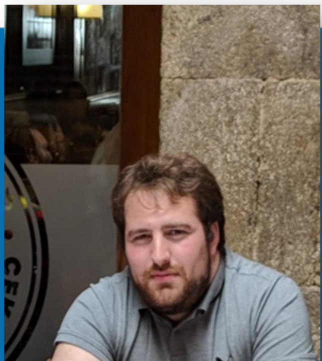
ტერენს ტაო

ტერენს ჩი-შენ ტაო (დაბ. 1975 წლის 17 ივლისს) ჩინური წარმოშობის ავსტრალიელ-ამერიკელი მათემატიკოსია; ამჟამად მოღვაწეობს კალიფორნიის უნივერსიტეტში (UCLA). სამეცნიერო წრეებში იგი ჩვენი დროის ერთ-ერთ საუკეთესო მათემატიკოსად ითვლება.

სხვა მრავალ მიღწევასთან ერთად, ტერენს ტაო არის 2006 წლის ფილდსის მედლის ლაურეატი, 2006 წლის მაკარტურის სტიპენდიანტი და 2014 წლის მათემატიკურ გარღვევათა ჯილდოს მფლობელი.

მისი კვლევითი ინტერესები მოიცავს ჰარმონიულ ანალიზს, კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებს, ალგებრულ კომბინატორიკას, ალბათობის თეორიასა და ანალიზურ რიცხვთა თეორიას.

ტერენს ტაო არის 300-ზე მეტი სამეცნიერო ნაშრომის თანაავტორი. მის სამეცნიერო მიდგომას ხშირად ამსგავსებენ პოლ ერდოშისას, იმ აზრით, რომ ორივე მათგანის საქმიანობა ძირითადად კონცენტრირებულია თანამშრომლობაზე, სხვადასხვა თეორიის შედეგების დაკავშირებაზე, ამოუხსნელი პრობლემების გადაჭრაზე და არა ახალი თეორიების დაფუძნებაზე.



მთარგმნელი: გიორგი რუხაია

დაბ. 1992 წლის 8 ოქტომბერს. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის ბაკალავრიატის კურსდამთავრებული. მან სწავლა განაგრძო გერმანიაში, ბონის უნივერსიტეტში, სადაც 2017 წელს მოიპოვა მათემატიკის მაგისტრის ხარისხი. გიორგი რუხაიამ 2021 წელს დაიცვა სადოქტორო ნაშრომი გამოყენებითი მათემატიკის მიმართულებით პარიზის დოფინის უნივერსიტეტში (Univesite Paris Dauphine – Universite PSL). იგი ამ ნაშრომზე მუშაობდა საფრანგეთის ავტომატიკისა და ინფორმატიკის ეროვნულ კვლევით ინსტიტუტში (INRIA), ევროკავშირის მარია კიურის სახელობის გრანტის ROMSOC-ის ფარგლებში.

ყველა მასშტაბური გალაქტიკური ცივილიზაციის ისტორია გადის განვითარების სამ გამორჩეულ და ადვილად აღსაქმელ ფაზას – გადარჩენის, შეცნობის და დახვეწის. ისინი ასევე ცნობილია, როგორც „რა“, „რატომ“ და „სად“ ფაზები. მაგალითად, პირველი ფაზა ხასიათდება კითხვით: „რა ვჭამოთ?“, მეორე – „რატომ ვიკვებებით?“, ხოლო მესამე – „სად ვისამხროთ?“.

(დუგლას ადამსი, „ავტოსტოპერის გზამკვლევი გალაქტიკაში“)

მათემატიკური განათლება უხეშად შეიძლება დავყოთ სამ ეტაპად:

- პირველი ეტაპი – „სიზუსტემდელი“ – როდესაც მათემატიკა ისწავლება არაფორმალური, ინტუიციური ფორმით, მაგალითებზე, ბუნდოვან ცნებებსა და „ხელებით ახსნაზე“ დაყრდნობით (მაგალითად, კალკულუსი იწყება მხების, ფართობის, ცვლილების რიგისა და მსგავსი ცნებების საშუალებით). ძირითადი აქ-

ცენტი კეთდება გამოთვლებზე და არა თეორიაზე. ეს ეტაპი ძირითადად სკოლასა და ბაკალავრიატის საწყის წლებს მოიცავს.

- მეორე ეტაპი — „სიზუსტის“ — როდესაც მსმენელი სწავლობს მათემატიკის „სწორად კეთებას“; სჭირდება, რომ იფიქროს და იმუშაოს ბევრად უფრო დიდი სიზუსტით და ფორმალობით (მაგალითად, კალკულუსის ეფსილონ-დელტა ტერმინებში გააზრებით). ამ დროს უკვე ძირითადი აქცენტი კეთდება თეორიაზე და მსმენელს მოეთხოვება აბსტრაქტული მათემატიკური ობიექტებით თავისუფლად მანიპულირება ისე, რომ არ კონცენტრირდეს, თუ „რას ნიშნავს“ ესა თუ ის ობიექტი. ეს ეტაპი ძირითადად ბაკალავრიატის დამამთავრებელ და მაგისტრატურის წლებს მოიცავს.
- მესამე ეტაპი — „სიზუსტის მიღმური“ — რომლის დროსაც მსმენელი უკვე კომფორტულად გრძნობს თავს მის მიერ არჩეული დარგის მკაცრ საფუძვლებთან და მზადაა განაახლოს და გააუმჯობესოს მისი „სიზუსტემდელი“ ინტუიცია ამ დარგზე. მაგრამ, ამჯერად, ინტუიცია უკვე გამოწრთობილია მკაცრი თეორიით (მაგალითად, ამ ეტაპზე მსმენელს შეუძლია სწრაფად და ზუსტად შეასრულოს ვექტორული ალგებრის გამოთვლები სკალარულთან ანალოგიით, ან არაფორმალურად და არამკაცრად გამოიყენოს უსასრულოდ მცირე ობიექტები, რიგის შეფასებები და სხვ. ხოლო შემდეგ, როდესაც დასჭირდება, შეუძლია ეს არაფორმალური გამოთვლები მკაცრ მსჯელობაში გადაიყვანოს). ახლა უკვე აქცენტი კეთდება ცოდნის გამოყენებაზე, ინტუიციასა და „დიდ სურათზე“. ეს ეტაპი ძირითადად დოქტორანტურასა და შემდგომ წლებს მოიცავს.

საზოგადოდ ცნობილია პირველიდან მეორე ეტაპზე გადასვლის ტრავმატულობა. მაგალითად, „დაამტკიცეთ“ ტიპის შეკითხვები ბაკალავრიატის ბევრი სტუდენტისთვის „წყევლა“ ხდება (ასევე იხილეთ ბლოგპოსტი „მათემატიკა უფრო მეტია, ვიდრე ნიშნები, გამოცდები და მეთოდები“*). თუმცა მეორიდან მესამე ეტაპზე გადასვლაც ასევე არსებითია და ყურადღების მიღმა არ უნდა დარჩეს.

რა თქმა უნდა, ზუსტი აზროვნება არსებითად მნიშვნელოვანია, რამდენადაც იგი ბევრი გავრცელებული შეცდომისა და მცდარი წარმოდგენის თავიდან აცილების მეთოდოლოგიას იძლევა. სამწუხაროდ, ამას შეუძლია გამოიწვიოს გაუთვალისწინებელი უკუშედეგი — „ბუნდოვანი“ ან „ინტუიციური“ აზროვნების (როგორიცაა ევრისტიკა, მაგალითებიდან ექსტრაპოლაცია ან სხვა დარგებთან, ვთქვათ, ფიზიკასთან ანალოგიის დაჭერა) უარყოფა, როგორც „არაზუსტის“. ხშირად მათემატიკოსი უარს ამბობს მის პირვანდელ ინტუიციაზე და შეუძლია მათემატიკის მხოლოდ ფორმალურად სწავლა, რაც მას ზედმეტად აყოვნებს განვითარების მეორე ეტაპზე (სხვა პრობლემების გარდა, ამან შეიძლება გავლენა იქონიოს მათემატიკური სტატიების კითხვის უნარზეც; მეტისმეტად სწორხაზოვანმა აზროვნებამ შესაძლოა „კომპილაციის პრობლემა“* წარმოქმნას, თუკი სტატიაში თუნდაც ერთი არასწორი სიმბოლო ან მცირე ორაზროვნება იქნება).

ზუსტი აზროვნების დანიშნულება არის არა ყველანაირი ინტუიციის განადგურება, არამედ მცდარი ინტუიციის დაძლევა და ჯანსაღი ინტუიციის წინ წამოწევა. ჩახლართულ მათემატიკურ პრობლემებთან ნაყოფიერი მიდგომა მხოლოდ ზუსტი აზროვნებისა და ჯანსაღი ინტუიციის კომბინირებითაა შესაძლებელი. პირველი საჭიროა მნიშვნელოვანი დეტალების სწორად აღსაქმელად, ხოლო მეორე — ზოგადი სურათის დასანახად. ერთ-ერთი მათგანის უქონლობით შესაძლოა სიბნელეში ხელის ცეცების მდგომარეობაში აღმოჩნდეთ (რამაც შეიძლება ბევრი რამ გასწავლოთ, თუმცა მეტისმეტად არაეფექტურია). ასე რომ, როდესაც ზუსტ მათემატიკურ აზროვნებასთან თავს კომფორტულად იგრძნობთ, უნდა დაუბრუნდეთ თქვენს ინტუიციას ამ საკითხზე და მოშორების ნაცვლად გამოიყენოთ თქვენი ახლად შეძენილი უნარები მის გამოსაცდელად და დასახვეწად (ამის ერთ-ერთი გზაა „საკუთარი თავისათვის სულელური შეკითხვების დასმა“*, ასევე „საკუთარი დარგის ხელახლა სწავლა“*).

იდეალური მდგომარეობაა, როდესაც ყველა ევრისტიკული მსჯელობა ბუნებრივად აჩენს შესაბამის მკაცრ ანალოგს და პირიქით. ამ დროს თქვენ შეძლებთ მათემატიკის პრობლემების დასაძლევად თქვენი ტვინის ორივე ნახევარსფეროს გამოყენებას, ისევე, როგორც იყენებთ მათ „რეალური ცხოვრების“ პრობლემების გადაჭრისას.

ასევე იხილეთ:

- ბილ თურნსტონის სტატია „დამტკიცებებსა და პროგრესზე მათემატიკაში“. https://arxiv.org/abs/math/9404236
- ანრი პუანკარეს „ინტუიცია და ლოგიკა მათემატიკაში“. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Poincare_Intuition/
- სტეფან ფრაის გამოსვლა, სადაც იგი საუბრობს მსგავს ფენომენზე, რომ ენა უფრო მეტია, ვიდრე გრამატიკა და მართლწერა. https://www.youtube.com/watch?v=J7E-aoXLZGY
- კოლბერგის მორალური განვითარების ეტაპები ბმულზე: https://en.wikipedia.org/wiki/Lawrence_Kohlberg%27s_stages_of_moral_development

(სადაც, სხვა საკითხებთან ერთად, საუბარია იმაზე, რომ მორალი უფრო მეტია, ვიდრე ტრადიციები და სოციალური თანხმობა).

Post Scriptum: ალბათ ღირს აღნიშვნა, რომ ამ სამივე ეტაპზე მათემატიკოსმა შესაძლოა დაუშვას ფორმალური შეცდომები მათემატიკურ შრომებში, თუმცა ამ შეცდომების ბუნება ხშირად შეესაბამება იმ ეტაპს, რომელზედაც ის იმყოფება.

- „სიზუსტემდელი“ ეტაპის მათემატიკოსები ხშირად შეცდომებს უშვებენ იმის გამო, რომ არ ესმით მათემატიკური ფორმალიზმის მუშაობის პრინციპები და ხშირად ბრმად იყენებენ ფორმალურ წესებს ან ევრისტიკულ მსჯელობას. ამ დროს მათ უჭირთ ასეთი შეცდომების დაფიქსირება და გასწორება, მაშინაც კი, როდესაც ამ შეცდომებზე ვინმე ცხადად მიუთითებს.
- „სიზუსტის“ ეტაპის მათემატიკოსები ასევე უშვებენ შეცდომებს ფორმალურ მსჯელობებში, რადგანაც ჯერ კიდევ სრულყოფილად არ არიან დაუფლებულნი ფორმალურ აზროვნებას ან/და ინტუიციის უქონლობის გამო ვერ ახდენენ „შინაარსის შემოწმებას“ ისეთი შეცდომებისადმი, როგორიცაა, მაგალითად, არასწორი ნიშანი ან რაიმე მათემატიკური აპარატის გამოყენებისას არასწორი დაშვება. თუმცა, მითითების შემთხვევაში, ასეთი შეცდომების გამოსწორება მათთვის უკვე პრობლემას აღარ წარმოადგენს.
- „სიზუსტის მიღმური“ ეტაპის მათემატიკოსებიც არ არიან შეუცდომელნი და ისინიც უშვებენ ფორმალურ შეცდომებს. თუმცა ეს ხშირად იმიტომ ხდება, რომ მათ არ სჭირდებათ ფორმალიზმი მაღალი დონის მათემატიკური მსჯელობის ჩამოყალიბებისათვის და ძირითადად ინტუიციას მიჰყვებიან, რომელსაც შემდეგ შესაძლოა არასწორადაც „თარგმნიან“ ფორმალურ მათემატიკურ ენაზე.

ამ შეცდომებს შორის არსებულმა განსხვავებამ შესაძლოა მიგვიყვანოს „სიზუსტის მიღმური“ მათემატიკოსის მიერ ჩამოყალიბებული მსჯელობის ისეთ ფენომენთან (ახალბედა მათემატიკოსისთვის შესაძლოა საკმაოდ დამაბნეველთანაც), როდესაც ეს მსჯელობა ლოკალურად შეიცავს აცდენებსა და შეცდომებს, მაგრამ, ზოგადად, საკმაოდ გამართულია, ხოლო მცირე შეცდომები, გარკვეული პროგრესირების შემდეგ, ბათილდებიან სხვა შეცდომებით. შედარებისთვის, „სიზუსტემდელი“ ან „სიზუსტის“ ეტაპის მათემატიკოსების მსჯელობებში, რომლებსაც არ აკონტროლებს მყარი ინტუიცია, მცირე შეცდომები თანდათან პროგრესირებენ ისეთ მასშტაბებზე, რომ ბოლოს მსჯელობა სრულ უაზრობამდე მიდის. ასეთი შეცდომების განხილვისა და სტატიებში მათი კომპენსირების შესახებ იხილეთ პოსტი „ლოკალური და გლობალური შეცდომები მათემატიკაში და როგორ ვიპოვოთ ისინი“*.

* რამდენადაც ავტორი ამ სტატიას აქვეყნებს ელექტრონულ გვერდზე, მას აქვს საშუალება სიტყვებს მიაბას მისამართების ბმულები. გამოყენებული სათაურების შესაბამის ბმულებს

(ორიგინალებს ინგლისურ ენაზე) აქ გთავაზობთ:

- „მათემატიკა უფრო მეტია, ვიდრე ნიშნები, გამოცდები და მეთოდები“: https://terrytao.wordpress.com/career-advice/theres-more-to-mathematics-than-grades-and-exams-and-methods/
- „კომპილაციის პრობლემა“: https://terrytao.wordpress.com/advice-on-writing-papers/on-compilation-errors-in-mathematical-reading-and-how-to-resolve-them/
- „საკუთარი თავისათვის სულელური შეკითხვების დასმა“: https://terrytao.wordpress.com/career-advice/ask-yourself-dumb-questions-and-answer-them/
- „საკუთარი დარგის ხელახლა სწავლა“: https://terrytao.wordpress.com/career-advice/learn-and-relearn-your-field/
- „ლოკალური და გლობალური შეცდომები მათემატიკაში და როგორ ვიპოვოთ ისინი“: https://terrytao.wordpress.com/advice-on-writing-papers/on-local-and-global-errors-in-mathematical-papers-and-how-to-detect-them/

წყარო: https://terrytao.wordpress.com/career-advice/theres-more-to-mathematics-than-rigour-and-proofs/

იმპლიკაცია და ლოგიკური გამომდინარეობა

თეიმურაზ ვეფხვაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი; ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი; მათემატიკურ განათლებაში სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტის დირექტორი

განათლების რეფორმა საქართველოში 20 წელზე მეტია მიმდინარეობს. 2018-2024 წლის მესამე თაობის ეროვნული სასწავლო გეგმა დაწყებით და საბაზო საფეხურზე ამოქმედებულია და მისი დანერგვის პროცესი ხორციელდება. 2022 წლიდან საშუალო საფეხურის (X-XII კლასები) საგნობრივი სტანდარტების შესაბამისი სახელმძღვანელოების შედგენის პროცესი დაიწყო. საშუალო საფეხურის საგნობრივი სტანდარტები იმ ძირითადი მახასიათებლების გათვალისწინებითაა შედგენილი, რომლებიც საშუალო საფეხურის მისიასა და მიზანს პასუხობს:

- მოსწავლემ ინფორმირებული არჩევანი გააკეთოს;
- მოემზადოს უმაღლესი განათლების მისაღებად ან შრომით ბაზარზე გასასვლელად;
- გამოიმუშავოს მაღალი აკადემიური უნარები, რომლებიც დაკავშირებულია XXI საუკუნისთვის საჭირო კომპეტენციების გამომუშავებასთან.

მათემატიკური განათლების პრიორიტეტული ღირებულება მოსწავლის ინტელექტუალური განვითარებაა.

ლოგიკური აზროვნების განვითარება ითვლება სასკოლო მათემატიკური განათლების ძირითად ღირებულებად. დღეს სკოლაში საშუალო საფეხურიდან ბრუნდება ლოგიკური მიმართულება. მათემატიკის სტანდარტი საშუალო საფეხურზე სხვა მიმართულებებთან ერთად (რიცხვები და რიცხვებზე მოქმედებები, ალგებრა, გეომეტრია, სტატისტიკა და ალბათობა) ითვალისწინებს ლოგიკის საწყისებსაც. ამ სტანდარტის მიხედვით შედგენილი X კლასის სახელმძღვანელოებით უნდა ისწავლებოდეს მათემატიკა საშუალო სკოლაში. 2022-2023 სასწავლო წლიდან სტანდარტში ძირითად სამიზნე ცნებებად მითითებულია გამონათქვამები და ლოგიკური ოპერაციები გამონათქვამებზე, ხოლო შედეგების მიღწევების ინდიკატორებად მოხსენებულია, რომ, მოსწავლემ გამონათქვამების და მათზე ოპერაციების გამოყენებით, დებულებების პირდაპირი და არაპირდაპირი მეთოდების ფლობით უნდა შეძლოს ლოგიკური დასკვნების გამოტანა.

ლოგიკის საწყისების სწავლების პროცესში მასწავლებელი შეიძლება შეხვდეს სირთულეებს ზოგიერთი ოპერაციის შემოტანის ახსნის პროცესში. ეს დაკავშირებულია იმ შემთხვევებთან, როცა რთული გამონათქვამების ჭეშმარიტობისა და მცდარობის საკითხის განხილვისას შინაარსისგან „აბსტრაქცია“ ხდება. ისეთ პირობით წინადადებებსაც ვიხილავთ და მათ ჭეშმარიტ მნიშვნელობებზე ვმსჯელობთ, რომლებისთვისაც პირობასა და დასკვნას შორის შინაარსობრივი კავშირი არ არის. ასეთი შემთხვევები გვაქვს

გამონათქვამთა იმპლიკაციის განხილვისას, როცა ვიხილავთ კავშირს: „თუ ... მაშინ“ და თითქოს ამ კავშირის ინტუიციურ გააზრებას ვუპირისპირდებით. ამასთანავე, მნიშვნელოვანია ამ ოპერაციასა და ლოგიკურ გამომდინარეობას შორის განსხვავების გააზრება.

ორი, p და q გამონათქვამის იმპლიკაცია არის რთული გამონათქვამი, რომელიც ასე წარმოიდგინება: „თუ p, მაშინ q“. აქ p პირობაა, q — დასკვნა; მიღებული წინადადება — პირობითი წინადადებაა. მოსწავლეებისთვის შეიძლება გასაგები იყოს აღნიშნული კავშირით შეერთების გამოყენებით მიღებული გამონათქვამების მცდარობა, როცა p ჭეშმარიტია, q მცდარია. მაგრამ სხვა შემთხვევაში, ამ კავშირის აღქმის შესაბამისად, ნებისმიერი p და q-თვის, მიღებული გამონათქვამების ჭეშმარიტობას ვერ განვსაზღვრავთ. მაგალითად, არ არის ცხადი, ჭეშმარიტად თუ მცდარად მივიჩნიოთ გამონათქვამები:

(1) თუ 2+3=5, მაშინ თბილისი საქართველოს დედაქალაქია;

(2) თუ 2+3≠5, მაშინ თბილისი საქართველოს დედაქალაქია;

(3) თუ 2+3≠5, მაშინ ხაშური საქართველოს დედაქალაქია.

მოსწავლეები მიჩვეულები არიან, რომ წინადადების პირობასა და დასკვნას შორის გარკვეული (როგორც წესი, მიზეზობრივი) კავშირია. ლოგიკაში (1) — (3) ტიპის წინადადებებიც განიხილება, ისინი ორ გამონათქვამზე ოპერაციის ჩატარებით (იმპლიკაციით) მიიღება და მიღებული გამონათქვამებიდან ყველა ჭეშმარიტია; მაშასადამე, ზემოთქმულიდან გამომდინარე, იმპლიკაციას ასე განვსაზღვრავთ: იმპლიკაცია, „თუ p, მაშინ q“, მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p ჭეშმარიტია, ხოლო q — მცდარია. „თუ p, მაშინ q“ ასე ჩაიწერება: $p \to q$. ჭეშმარიტების მნიშვნელობათა ცხრილი ასე გამოიყურება („ჭ“ — ჭეშმარიტია, „მ“ — მცდარია):

p	q	$p \to q$
ჭ	ჭ	ჭ
მ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	მ
მ	მ	ჭ

ამ ცხრილის ერთ-ერთ გამართლებად მიჩნეულია ჩვენი სურვილი, რომ გამონათქვამი: „თუ p და q (კონუქცია), მაშინ q“ (იხ., მაგ., [1]): მართლაც, შემთხვევა, როცა p და q, ორივე ჭეშმარიტია, ამართლებს ჩვენი ცხრილის პირველ სტრიქონს. რადგან, თუ p ჭეშმარიტია და q ჭეშმარიტია, მაშინ „p და q“ ჭეშმარიტია. თუ p მცდარია და q ჭეშმარიტია, მაშინ „p და q“ მცდარია, მაშინ, როცა q ჭეშმარიტია. ეს შემთხვევა მეორე სტრიქონს შეესაბამება. თუ p მცდარია და q მცდარია, მაშინ „p და q“ მცდარია და q მცდარია. ეს გვაძლევს მეოთხე სტრიქონს.

ჭეშმარიტების მნიშვნელობათა ცხრილის მოცემული სახით განსაზღვრის მიზანშეწონილობას კიდევ უფრო ამტკიცებს შემდეგი წინადადების განხილვა: „ნებისმიერი x-სთვის, თუ x კენტი დადებითი მთელი რიცხვია, მაშინ x^2 კენტი დადებითი მთელი რიცხვია“. ეს ჭეშმარიტი გამონათქვამია. ამასთანავე, ცხადია, არ გვსურს განვიხილოთ კონტრმაგალითების სახით, ჩვენი ზოგადი დებულების მიმართ, შემთხვევები, როცა x არ არის კენტი მთელი დადებითი რიცხვი. იგი უზრუნველყოფილია ცხრილის მეორე და მეოთხე სტრიქონით. ყოველი შემთხვევა, როცა x და x^2 კენტი მთელი დადებითი რიცხვებია, ასაბუთებს ზოგად დებულებას და შეესაბამება ცხრილის პირველ სტრიქონს.

მოსწავლეებისთვის შეიძლება უფრო გასაგები იყოს კონკრეტული მაგალითების განხილვა. მაგალითად, განვიხილოთ ჭეშმარიტი წინადადება: „თუ n ნატურალური რიცხვი იყოფა 4-ზე, მაშინ ეს ნატურალური რიცსვი იყოფა 2-ზე“. ამ წინადადების ჭეშმარიტების აღიარება მიგვიყვანს იმის აღიარებამდე, რომ ჭეშმარიტად ჩავთვალოთ წინადადებები: „თუ 16 იყოფა 4-ზე, მაშინ 16 იყოფა 2-ზე“; „თუ 18 იყოფა 4-ზე, მაშინ 18 იყოფა 2-ზე“, „თუ 17 იყოფა 4-ზე, მაშინ 17 იყოფა 2-ზე“. ისინი ჭეშმარიტების მნიშვნელობათა ცხრილის პირველ, მეორე და მეოთხე სტრიქონებს შეესაბამება. მცდარი წინადადება, რომელიც ცხრილის მესამე სტრიქონს შეესაბამება, n-ის არცერთი მნიშვნელობისთვის არ მიიღება, რადგან n-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის წარმოდგენილი წინადადება ჭეშმარიტია.

მოსწავლეებთან შეიძლება ისეთი მაგალითებიც განვიხილოთ, რომლებიც მათემატიკას არ უკავშირდება. მაგალითად, როცა ვამბობთ: „თუ თავისუფალი დრო მექნება, მაშინ სასეირნოდ წავალ“ და დავსვამთ კითხვას: რა შემთხვევაში შეიძლება რომ ვიტყუებოდე? პასუხი ნათელია — როცა თავისუფალი დრო მქონდა, მაგრამ სასეირნოდ არ წავედი. ყველა სხვა შემთხვევაში არ ვიტყუები, ე.ი. სიმართლეს ვამბობ.

საინტერესოა ასეთი მაგალითიც: „თუ დღეს ოთხშაბათია, მაშინ ხვალ ხუთშაბათია“. კვირის რომელ დღეს არის ეს წინადადება ჭეშმარიტი? შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ კვირის ნებისმიერ დღეს. მაგალითად, სამშაბათსაც, ანუ მაშინ, როცა პირობა მცდარია.

კიდევ უფრო მეტი სიძნელეების წინაშე აღმოჩნდება მოსწავლე, როცა მათთან ლოგიკურ გამომდინარეობაზე ვიწყებთ საუბარს და ვამბობთ: „A-დან გამომდინარეობს B“. როცა ვამბობთ, რომ ერთი წინადადება A გამომდინარეობს მეორე B წინადადებიდან, მაშინ ვგულისხმობთ ყველა იმ შემთხვევას, როცა A ჭეშმარიტია, B წინადადებაც ჭეშმარიტია. ეს იმას ნიშნავს, რომ A და B წინადადებების შესაბამისად ფორმულებში არ გვაქვს ელემენტარული გამონათქვამების (ცვლადების — p, q, z) ისეთი მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც პირველი წინადადება — A — ჭეშმარიტია, ხოლო მეორე — B — მცდარია. მაგალითად, წინადადებებიდან: „მე წავალ კინოში“ — გამომდინარეობს წინადადება: „მე წავალ კინოში ან თეატრში“, რადგან შესაბამის ფორმულებში, მაგალითად, p და $p \vee q$, შეუძლებელია ვიპოვოთ მათი ისეთი მნიშვნელობები, როცა p ჭეშმარიტია, ხოლო $p \vee q$ მცდარია. აქ $A = p$, $B = p \vee q$ და გვაქვს: **A-დან ლოგიკურად გამომდინარეობს B.** ეს წინადადება ასე ჩაიწერება:

$$A \models B.$$

მაშასადამე, იმის დასამტკიცებლად, რომ A-დან არ გამომდინარეობს B, საკმარისია ვიპოვოთ ამ ფორმულებში (A,B) შემავალი ცვლადების ისეთი მნიშვნელობები, როცა A ჭეშმარიტია, B — მცდარი.

შევნიშნოთ, რომ იმპლიკაცია არის ერთ-ერთი ოპერაცია გამონათქვამეზე, ლოგიკური გამომდინარეობა — მიმართება გამონათქვამებს შორის.

იმპლიკაციასა და ლოგიკურ გამომდინარეობას შორის კავშირი შემდეგი თეორემით შეიძლება წარმოვადგინოთ.

თეორემა (იხ., მაგ., [2]). $A \models B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \to B$ ტავტოლოგიაა (A და B-ში შემავალი ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის ჭეშმარიტი გამონათქვამია).

დამტკიცება: ორი თეორემაა დასამტკიცებელი: $A \models B$ ლოგიკური გამომდინარეობისათვის აუცილებელია და **საკმარისი**, რომ იმპლიკაცია $A \to B$ იყოს ტავტოლოგია.

აუცილებლობა. ვთქვათ, $A \models B$. იმპლიკაციის ჭეშმარიტების მნიშვნელობათა ცხრილში $A \to B$ გამონათქვამი მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A ჭეშმარიტია, B მცდარია. მაგრამ $A \models B$ დაშვების თანახმად, ასეთი შემთხვევა არ გვექნება. მაშასადამე, $A \to B$ ყოველთვის იღებს ჭეშმარიტების მნიშვნელობას.

საკმარისობა: ვთქვათ, $A \to B$ ტავტოლოგიაა; განვიხილოთ ცხრილის ის სტრიქონი, როცა A იღებს ჭეშმარიტების მნიშვნელობას. რადგან $A \to B$ იღებს ჭეშმარიტების მნიშვნელობებს მხოლოდ, ამიტომ იმპლიკაციის ცხრილიდან გამომდინარეობს, რომ B იღებს ჭეშმარიტების მნიშვნელობას, მაშასადამე, $A \models B$.

ლიტერატურა

1. Elliot Mendelson. Introduction to Mathematical Logic. D. Van Nostrand Company, INC. New Jersey, Toronto, New York, London, 2015.
2. Robert R. Stoll. Sets, Logic, Axiomatic Theories. W.H. Freeman and Company, San Francisco and London, 1961.

ნორჩი ქართველი მათემატიკოსები საერთაშორისო ოლიმპიადებში

გიორგი ჭელიძე

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების ლიდერი,
ასოცირებული პროფესორი,
ქუთაისის საერთაშორისო უნივერსიტეტი

გივი ნადიბაიძე

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების თანალიდერი,
ასისტენტ-პროფესორი,
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

62-ე საერთაშორისო ოლიმპიადა მათემატიკაში პანდემიის გამო ჩატარდა დისტანციურად 2021 წლის 14-24 ივლისის პერიოდში. საორგანიზაციო კომიტეტი მუშაობდა რუსეთის ქალაქ სანკტ-პეტერბურგში ბრიტანელი მათემატიკოსის, ჯეფ სმიტის ხელმძღვანელობით. ასპარეზობაში მონაწილეობა მიიღო 107-მა ქვეყანამ და გუნდები ტრადიციულად 6-6 მოსწავლისაგან შედგებოდა. საქართველოს ნაკრებს წარმოადგენდნენ: მიხეილ კვინიკაძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), ანა ონოფრიშვილი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), ზაურ ბოკელავაძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), გიორგი ამბოკაძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი), თორნიკე ბერია (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-10 კლასი) და დემეტრე გელაშვილი, (თბილისის ი. ვეკუას სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი).

საქართველოს მოსწავლეთა ნაკრები გუნდი მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადებში მონაწილეობს 1993 წლიდან. 2021 წლის ოლიმპიადაზე საქართველო ოცდამეცხრედ მონაწილეობდა და ქართველმა მოსწავლეებმა ამჯერადაც წარმატებებს მიაღწიეს. გუნდის ხუთმა წევრმა დაიმსახურა ჯილდო: 1 ვერცხლი (მიხეილ კვინიკაძე, კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი); 3 ბრინჯაო (დემეტრე გელაშვილი, თბილისის ი. ვეკუას სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი; ანა ონოფრიშვილი, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი; ზაურ ბოკელავაძე, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი) და 1 სიგელი (თორნიკე ბერია, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-10 კლასი).

ქვემოთ დიაგრამაზე ნაჩვენებია 2021 წლის მონაწილეთა შედეგები:

Contestant [♀♂]	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Total	Rank		Award
								Abs.	Rel.	
Team results	**23**	**0**	**2**	**35**	**14**	**0**	**74**	**41**	**62.26%**	**S, B, B, B, HM**
Mikheili Kvinikadze	7	0	1	7	7	0	22	63	89.97%	Silver medal
Demetre Gelashvili	1	0	0	7	7	0	15	180	71.04%	Bronze medal
Ana Onoprishvili	7	0	1	7	0	0	15	180	71.04%	Bronze medal
Zauri Bokelavadze	6	0	0	7	0	0	13	268	56.80%	Bronze medal
Tornike Beria	1	0	0	7	0	0	8	348	43.85%	Honourable mention
Giorgi Ambokadze	1	0	0	0	0	0	1	499	19.42%	

Leader: **George Chelidze**
Deputy leader: **Givi Nadibaidze**

საქართველოს ოლიმპიური ნაკრების ფორმირება მოხდა ორი შესარჩევი ტურის შედეგის საფუძველზე. შესარჩევ წერებს ადმინისტრირებას უწევდა შოთა რუსთაველის სახელობის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი. მკაცრად რეგლამენტირებულ 2-ტურიან წერით გამოცდებში მონაწილეობის უფლება კი მოიპოვა რესპუბლიკური სასკოლო მათემატიკური ოლიმპიადის ტურების შედეგებზე დაყრდნობით გამოვლენილმა საუკეთესო მოსწავლეებმა. შესარჩევი წერების საფუძველზე დაკომპლექტდა 6-მოსწავლიანი ნაკრები.

შოთა რუსთაველის სახელობის ეროვნული სამეცნიერო ფონდიდან ამ პროცესს ადმინის-ტრირებას უწევდა ქალბატონი მაკა ქაჯაია, ხოლო განათლების, მეცნიერებისა და კულტურის სამინისტროდან პროცესს კურირებდა ქალბატონი ნინო ცანდიშვილი. ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების დაკომპლექტების შემდეგ ერთთვიანი საწვრთნელი მეცადინეობები ჩატარდა კომაროვის სკოლაში ყოველდღიური 6-საათიანი მეცადინეობებით. მოსწავლეებს უტარდე-ბოდათ სატრენინგო წერები საერთაშორისო ოლიმპიადების პირობების გათვალისწინებით.

საერთაშორისო ოლიმპიადის წერები ჩატარდა სან-დიეგოს უნივერსიტეტის სასწავლო ბაზისათვის განკუთვნილ აუდიტორიებში, რომლებიც აღჭურვილი იყო სამეთვალყურეო ვიდეოკამერებით და წერის პროცესში დაკვირვებას აწარმოებდა საორგანიზაციო კომიტეტი. წერების დასრულების შემდეგ მათ გადაეგზავნათ დასკანერებული ნამუშევრები. გვინდა მადლობა გადავუხადოთ სან-დიეგოს უნივერსიტეტის წარმომადგენლობას საქართველოში ამ დახმარებისთვის. წერების მიმდინარეობას საორგანიზაციო კომიტეტთან შეთანხმებით მონიტორინგს უწევდა ბატონი პეტრე ბაბილუა.

გუნდის ლიდერის, თანალიდერის და ასისტენტის გარდა, მოსწავლეთა მომზადებაში ასევე მონაწილეობდნენ გამოცდილი ყოფილი ოლიმპიელები: თეიმურაზ თოლორაია, საბა ლეფსვე-რიძე, ლუკა მუშკუდიანი.

ქვემოთ მოვიყვანთ იმ ამოცანებს, რომლებიც მიეცათ მოსწავლეებს წერებზე. აქვე აღვ-ნიშნავთ, რომ გთავაზობთ ამოცანა 2-ის სტუდენტებისათვის საინტერესო ამოხსნის ვერსიას:

ამოცანა 1. ვთქვათ $n \geq 100$ არის მთელი რიცხვი. თორნიკე სხვადასხვა ბარათზე წერს რიცხვებს $n, n+1, \dots, 2n$, თითო ბარათზე თითოს. ამის შემდეგ ის ურევს ბარათებს და ყოფს ორ დასტად. დაამტკიცეთ, რომ ერთი დასტა მაინც შეიცავს ორ ბარათს, რომლებზეც დაწერილი რიცხვების ჯამი სრული კვადრატია.

ამოხსნა: განვიხილოთ რიცხვთა შემდეგი სამეული:

$$(2k^2 - 4k, 2k^2 + 1, 2k^2 + 4k),$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვია. შევნიშნოთ, რომ ყოველი ორი რიცხვის ჯამი სრული კვადრატია. ამრიგად, თუ ყოველი $n \geq 100$, არსებობს ისეთი k, რომ

$$\{2k^2 - 4k, 2k^2 + 1, 2k^2 + 4k\} \subset \{n, n+1, \dots, 2n\}$$

მაშინ ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ცხადია, რომ, თუ $n \in [k^2 + 2k, 2k^2 - 4k + 1] \equiv I_k$, მაშინ ზემოთ მოცემული ჩართვა სრულდება. ადვილი საჩვენებელია, რომ, თუ $k \geq 9$, მაშინ $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$ და ამიტომ გვაქვს $I_9 \cup I_{10} \cup \dots = [99, \infty)$. ეს კი ნიშნავს, რომ ნებისმიერი $n \geq 99$, მოიძებნება ისეთი k, რომ $\{2k^2 - 4k, 2k^2 + 1, 2k^2 + 4k\} \subset \{n, n+1, \dots, 2n\}$. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ამოცანა 2. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ნამდვილი $x_1, x_2, \dots, x_n$ რიცხვებისთვის სრულდება უტოლობა $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$.

ამოხსნა (გთავაზობთ სტუდენტებისათვის საინტერესო ამოხსნის ვერსიას): განვიხილოთ მატრიცა, A, რომლის ელემენტებია $a_{ij} = \sqrt{|x_i + x_j|} - \sqrt{|x_i - x_j|}$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ $e^T A e \geq 0$, სადაც e მხოლოდ ერთიანებისაგან შედგენილი n-განზომილებიანი სვეტ-ვექტორია. დავამტკიცოთ უფრო მეტი, რომ ნებისმიერი ერთეულოვანი e ვექტორისთვის $e^T A e \geq 0$ (ანუ დავამტკიცოთ, რომ A არაუარყოფითად განსაზღვრულია).

ამისთვის საკმარისია ვიპოვოთ წინა-ჰილბერტის სივრცე H და ასახვა $f: \mathbb{R} \to H$ ისეთი, რომ $a_{ij} = \langle f(x_i), f(x_j) \rangle$, სადაც $\langle \cdot, \cdot \rangle$ აღნიშნავს სკალარულ ნამრავლს H-ში. მაგალითად, H-ის როლში შეგვიძლია ავიღოთ კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციები $\mathbb{R}_+$-ზე, ანუ $H = L_2(\mathbb{R}_+)$, ხოლო $f(x) = c \cdot \frac{\sin(xt)}{t^{3/4}} \in L_2(\mathbb{R}_+)$, შესაბამისად შერჩეული c კონსტანტით. $a_{ij} = \langle f(x_i), f(x_j) \rangle$ ტოლობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ინტეგრალი $I(p) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(px)}{x\sqrt{x}} dx$, რომელიც ცხადია კრებადია რაღაც დადებითი რიცხვისკენ, ყოველი ნამდვილი p-თვის. შემდეგი იგივეობის გათვალისწინებით $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha \cdot \sin\beta$, გვაქვს:

$$\sqrt{|a+b|} - \sqrt{|a-b|} = \frac{1}{I(1)}\int_0^\infty \frac{\cos\left((a-b)x\right) - \cos\left((a+b)x\right)}{x\sqrt{x}} dx = \frac{1}{I(1)}\int_0^\infty \frac{2\sin(ax)\cdot\sin(bx)}{x\sqrt{x}} dx.$$

ამრიგად დავამტკიცეთ, რომ $a_{ij} = \langle f(x_i), f(x_j) \rangle$ და ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

შენიშვნა: შესაძლებელია c-ს როლში აღებული $\sqrt{2/I(1)}$ კონსტანტის ზუსტი მნიშვნელობის პოვნა, რადგანაც შეგვიძლია ვიპოვოთ $I(1)$-ის ზუსტი მნიშვნელობა. ის ტოლია $I(1) = \sqrt{2\pi}$, თუმცა ეს მოცემული დამტკიცებისთვის არ არის არსებითი.

ამოცანა 3. ვთქვათ ABC მახვილკუთხა სამკუთხედია, $AB > AC$, ხოლო D ამ სამკუთხედის შიგა წერტილია ისეთი, რომ $\angle DAB = \angle CAD$. E წერტილი აღებულია AC სეგმენტზე ისე, რომ $\angle ADE = \angle BCD$, ხოლო F წერტილი აღებულია AB სეგმენტზე ისე, რომ $\angle FDA = \angle DBC$ და X აღებულია AC წრფეზე ისე, რომ $CX = BX$. ვთქვათ ADC და EXD სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრები შესაბამისად არიან O_1 და O_2. დაამტკიცეთ, რომ BC, EF და O_1O_2 წრფეები ერთ წერტილში იკვეთებიან.

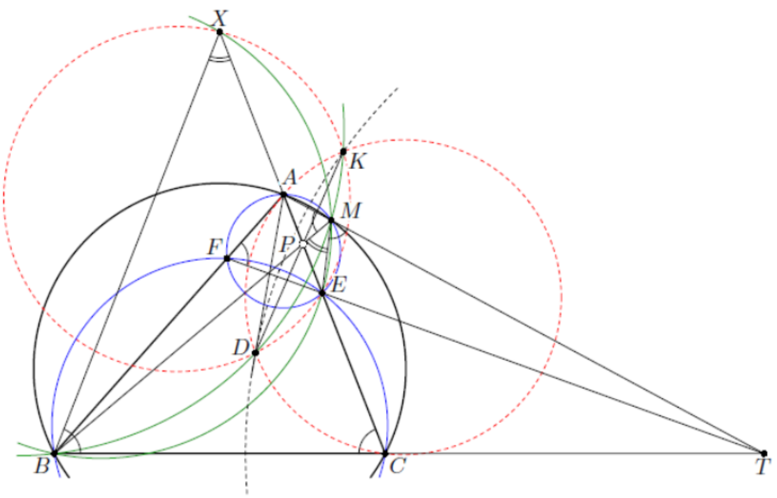
ამოხსნა: ვთქვათ Q არის D წერტილის იზოგონალურად შეუღლებული ABC სამკუთხედის მიმართ. ადვილი საჩვენებელია, რომ Q, D, F, B და ასევე Q, D, E, C წერტილები ციკლურია. ამიტომ $AF \cdot AB = AD \cdot AQ = AE \cdot AC$, საიდანაც ვღებულობთ B, F, E, C წერტილთა ციკლუ-

რობას. ვთქვათ T არის BC და EF გადაკვეთის წერტილი. ვაჩვენოთ, რომ $TD^2 = TB \cdot TC = TF \cdot TE$. გვაქვს:

$$\angle BDF = \angle AFD - \angle ABD = (180^\circ - \angle FAD - \angle FDA) - (\angle ABC - \angle DBC) = 180^\circ - \angle FAD - \angle ABC = 180^\circ - \angle DAE - \angle FEA = \angle FED + \angle ADE = \angle FED + \angle DCB$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ (DEF) და (BDC) წრეწირები ერთმანეთს ეხება, აქედან კი გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა.

ვთქვათ TA კვეთს (ABC) წრეწირს მეორედ M წერტილში. ზემოთ დამტკიცებული ტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ $TM \cdot TA = TF \cdot TE = TB \cdot TC = TD^2$ და ამრიგად A, M, E, F წერტილები ციკლურია.



ინვერსიას T ცენტრით და TD რადიუსით M წერტილი გადაჰყავს A-ში, ხოლო B გადაჰყავს C-ში, ანუ (MBD) წრეწირი გადაჰყავს (ADC) წრეწირში. მათი საერთო D წერტილი ძევს ინვერსიის წრეწირზე და ამიტომ მათი მეორე გადაკვეთის წერტილი K ასევე ძევს ამ წრეწირზე, საიდანაც გვაქვს $TK = TD$. აქედან გამომდინარეობს, რომ წერტილი T და (KDE) და (ADC) წრეწირის ცენტრები მდებარეობენ KD-ს შუამართობზე.

რადგანაც (ADC) წრეწირის ცენტრია O_1, ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ D, K, E და X წერტილები ციკლურია (შესაბამისი წრეწირის ცენტრი იქნება O_2). წრფეები BM, DK და AC შესაბამისია $(ADCM)$, $(ACDK)$ და $(BMDK)$ წრეწირების რადიკალური ღერძები და ამიტომ ისინი ერთ P წერტილში იკვეთებიან. ასევე M ძევს (AEF) წრეწირზე, ამრიგად :

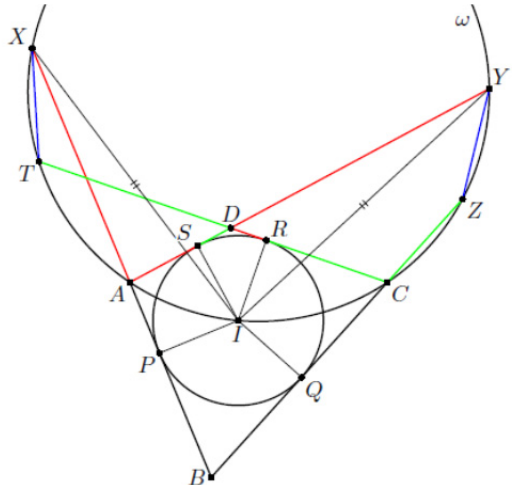
$$\begin{aligned}\measuredangle(EX, XB) = \measuredangle(CX, XB) = \measuredangle(XC, BC) + \measuredangle(BC, BX) = 2\measuredangle(AC, CB) \\ = \measuredangle(AC, CB) + \measuredangle(EF, FA) = \measuredangle(AM, BM) + \measuredangle(EM, MA) = \measuredangle(EM, BM)\end{aligned}$$

ეს ნიშნავს, რომ წერტილები M, E, X, B ციკლურია. გვაქვს: $PE \cdot PX = PM \cdot PB = PK \cdot PD$ და ე.ი. E, K, D, X წერტილებიც ციკლურია. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ამოცანა 4. ვთქვათ $ABCD$ არის ამოზნექილი ოთხკუთხედი, რომელიც შემოხაზულია I ცენტრის მქონე წრეწირზე. ვთქვათ ω არის AIC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი. BA მონაკვეთის გაგრძელება A წერტილის მხარეს ω წრეწირს კვეთს X წერტილში, ხოლო BC მონაკვეთის გაგრძელება C წერტილის მხარეს ω-ს კვეთს Z წერტილში. AD და CD მონაკვეთების გაგრძელება D წერტილის მხარეს ω-ს კვეთს, შესაბამისად, Y და T წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

ამოხსნა: რადგანაც I არის TCZ კუთხის გარე ბისექტრისის ω-თან გადაკვეთის წერტილი, ამიტომ ის წარმოადგენს TCZ რკალის შუაწერტილს, საიდანაც გვაქვს: $IT = IZ$. ანალოგიურად ვღებულობთ ტოლობას $IX = IY$. ვთქვათ O არის ω-ს ცენტრი, მაშინ X და T არიან, შესაბამისად, Y და Z წერტილის ანარეკლები IO-ს მიმართ და ამიტომ $XT = YZ$.



ვთქვათ $ABCD$ ოთხკუთხედის წრეწირთან შეხების წერტილებია P, Q, R და S. რადგანაც $IP = IS$ და $IX = IY$, ამიტომ მართკუთხა სამკუთხედები IXP და IYS ერთმანეთის ტოლია. ანალოგიურად, IRT და IQZ მართკუთხა სამკუთხედები ერთმანეთის ტოლია და ამრიგად ვღებულობთ: $XP = YS$ და $RT = QZ$.

რადგანაც $AS = AP$, $CQ = RC$ და $SD = DR$, ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} AD + DT + TX + XA &= XT + XA + AS + SD + DT = XT + XP + RT = YZ + YS + QZ \\ &= YZ + YD + DR + RC + CZ = CD + DY + YZ + ZC \end{aligned}$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოცანა 5. ორმა ციყვმა, ჩიპმა და დეილმა, შეაგროვა 2021 ცალი კაკალი ზამთრისთვის. დეილმა დანომრა კაკლები რიცხვებით 1,2,..., 2021 და ამოთხარა 2021 ცალი პატარა ორმო წრეწირის გასწვრივ, მათი საცხოვრებელი ხის გარშემო. მეორე დილით დეილმა შეამჩნია, რომ ჩიპს ჩაულაგებია კაკლები ორმოებში, თითო ორმოში თითო, თუმცა არ გაუთვალისწინებია კაკლების ნომრები. განაწყენებულმა დეილმა გადაწყვიტა კაკლების გადალაგება შემდეგი 2021 სვლის მეშვეობით. k-ურ სვლაზე დეილი უცვლის ადგილებს კაკლებს, რომლებიც იმყოფებიან k-ნომრიანი კაკლის მეზობელ ორმოებში. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს k-ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ k-ურ სვლაზე დეილი გაუცვლის ადგილებს კაკლებს ნომრებით a და b, სადაც $a < k < b$.

ამოხსნა: k სვლამდე ყოველ კაკალს, რომლის ნომერია $a < k$, დავარქვათ ძველი, ხოლო ყოველ კაკალს ნომრით $b \geq k$, ახალი. ამრიგად, პროცესის დასაწყისში ყველა კაკალი ახალია, ხოლო ყოველ სვლაზე მხოლოდ ერთი კაკალი იცვლის მდგომარეობას ახლიდან ძველისკენ. ყოველ მომენტში ძველი კაკლები იყოფა რამდენიმე ჯგუფად, რომელიც შედგება ერთი ან რამდენიმე მიმდევრობით განლაგებული ძველი კაკლებისგან. განსხვავებული ჯგუფები გამიჯნულია ახალი კაკლებით. დავუშვათ, რომ არ არსებობს k-ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ k-ურ სვლაზე დეილი გაუცვლის ადგილებს კაკლებს ნომრებით a და b, სადაც $a < k < b$. ამ

დაშვების საფუძველზე, ინდუქციის გამოყენებით ვაჩვენოთ, რომ მთელი პროცესის მანძილზე, ყოველი სვლის შემდეგ ყოველ ჯგუფში კენტი რაოდენობის კაკალია. $k = 1$-თვის წინადადება ცხადია, რადგან პირველი სვლის შემდეგ გვაქვს მხოლოდ ერთი ძველი კაკალი. ახლა განვიხილოთ k -ური სვლა. შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1. $a > k$ და $b > k$. ამ შემთხვევაში k კაკლის ორივე მეზობელი სვლის შემდეგ ისევ ახალი იქნება და ამრიგად, არსებულ ძველი კაკლების ჯგუფებს დაემატება ერთი ჯგუფი, რომელიც ერთი კაკლისგან შედგება, რომელიც გამიჯნულია დანარჩენი ჯგუფებისგან ახალი კაკლებით.
2. $a < k$ და $b < k$. ამ შემთხვევაში, k-ს ორივე მეზობელი ძველი კაკალია, რომლებიც ეკუთვნიან ორ ჯგუფს, რომლებშიც, შესაბამისად, p და q კენტი რაოდენობის კაკლებია. k სვლის ჩატარების შემდეგ, k ნომრის კაკალიც გახდება ძველი და განხილული ორი ჯგუფი გაერთიანდება ერთ ჯგუფში, რომელშიც $p + q + 1$ ცალი კაკალია. ცხადია, $p + q + 1$ კენტია და წინადადება დამტკიცებულია.

ამრიგად, 2020 სვლის ჩატარების შემდეგ, 2020 ძველი კაკალი უნდა ქმნიდეს ჯგუფებს კენტი რაოდენობის კაკლებით. მაგრამ ცხადია, გვექნება ერთი ჯგუფი ძველი კაკლებისა, რომელშიც 2020 კაკალია. მიღებული წინააღმდეგობა ასრულებს ამოცანის ამოხსნას.

ამოცანა 6. ვთქვათ $m \geq 2$ არის მთელი რიცხვი, ხოლო A არის მთელ (არა აუცილებლად დადებით) რიცხვთა რაღაც სასრული სიმრავლე და $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ არიან A-ს ქვესიმრავლეები. დავუშვათ, რომ ყოველი $k = 1,2, \dots, m$ -თვის, B_k სიმრავლის ელემენტთა ჯამი არის m^k. დაამტკიცეთ, რომ A სიმრავლე შეიცავს სულ მცირე $m/2$ ელემენტს.

ამოხსნა: ვთქვათ $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ $k = |A| < \frac{m}{2}$. აღვნიშნოთ:

$$s_i = \sum_{j: a_j \in B_i} a_j$$

B_i სიმრავლის ელემენტთა ჯამი. ამრიგად მოცემულია, რომ $s_i = m^i$, $i = 1,2, \dots, m$. ახლა განვიხილოთ ყველა m^m გამოსახულება:

$$f(c_1, \dots, c_m) = c_1 s_1 + c_2 s_2 + \dots + c_m s_m,$$

სადაც $c_i \in \{0,1, \dots, m-1\}$ და $i = 1,2, \dots, m$. შევნიშნოთ, რომ ყოველ $f(c_1, \dots, c_m)$ გამოსახულებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k, \text{ სადაც } \alpha_i \in \{0,1, \dots, m(m-1)\}.$$

რადგანაც შეიძლება გვქონდეს $f(c_1, \dots, c_m)$ გამოსახულების არაუმეტეს $(m(m-1)+1)^k < m^{2k} < m^m$ ცალი განსხვავებული მნიშვნელობა, ამიტომ ორი მაინც ერთმანეთს დაემთხვევა. ეს ნიშნავს, რომ m-ობით სისტემაში ამ რიცხვს გააჩნია ორი წარმოდგენა, რაც შეუძლებელია. მიღებული წინააღმდეგობა ასრულებს ამოცანის ამოხსნას.

ავტორების ელექტრონული მისამართები:
giorgi.chelidze@kiu.edu.ge
givi.nadibaidze@tsu.ge

წინა ნომრის ამოცანების ამოხსნები

ამოცანა 1

ვთქვათ, $A_n = ru^n + sv^n$, სადაც n ნატურალური რიცხვია, r, s, u, v მთელი რიცხვებია, $u \neq \pm v$ და P_n აღნიშნავს A_n-ის მარტივი გამყოფების სიმრავლეს. აჩვენეთ, რომ $P = \cup_{n=1}^{\infty} P_n$ სიმრავლე უსასრულოა.

ამოხსნა: დავუშვათ $rsuv \neq 0$. ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ru და sv რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი ერთის ტოლია და P სიმრავლის ელემენტები არ ყოფს $rsuv$ რიცხვს. დავუშვათ $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ სიმრავლე სასრულია.

ვინაიდან $u \neq \pm v$, ამიტომ ყოველი $i \neq 0$ რიცხვისათვის გვექნება $u^i \neq v^i$. არსებობს a რიცხვი ისეთი, რომ $u^i \neq v^i (\bmod p_k^a)$ ყოველი $1 \le i \le m+1$, $1 \le k \le m$ რიცხვებისათვის. გარდა ამისა, თუ $1 \le i < j \le m+1$, მაშინ:

$$A_j - v^{j-i} A_i = ru^j (u^{j-i} - v^{j-i}).$$

მაშასადამე, არცერთი $k \le m$ რიცხვისათვის $A_i = A_j (\bmod p_k^a)$ ტოლობა სამართლიანი არ არის. იარსებებს t ისეთი, რომ $1 \le t \le m+1$ და $A_t \neq 0 (\bmod p_k^a)$ ყოველი $1 \le k \le m$ რიცხვისათვის. ავარჩიოთ b ისეთი, რომ $u^b \neq v^b (\bmod p_k^a)$ ყოველი $1 \le k \le m$ რიცხვისათვის. შეგვიძლია ავიღოთ $b = \varphi(c^a)$, სადაც φ ეილერის ფუნქციაა და $c = p_1 p_2 ... p_n$. ავირჩიოთ n ისეთი, რომ $A_{t+nb} > c^a$. ვინაიდან გვაქვს $A_{t+nb} = A_t \neq 0 (\bmod p_k^a)$, ყოველი $1 \le k \le m$ რიცხვისათვის გვექნება, რომ A_{t+nb}-ს გააჩნია გამყოფი განსხვავებული $p_1, p_2, ..., p_n$ რიცხვებისაგან.

ამოცანა 2

ამოხსენით ნატურალურ რიცხვებში განტოლება:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz.$$

ამოხსნა: თუ x, y, z რიცხვები კენტია, მაშინ ტოლობის მარცხენა მხარე კენტია, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, $2xyz = 0 (\bmod 4)$. ტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომი კვადრატი არის $0 (\bmod 4)$ ან $2 (\bmod 4)$ და ამიტომ x, y, z რიცხვები ლუწია. ვთქვათ, $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$. გვექნება $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1 y_1 z_1$. იმავე არგუმენტაციით დავასკვნით, რომ x_1, y_1, z_1 რიცხვები ლუწია. მაშასადამე, ინდუქციის გამოყენებით შეგვიძლია ავაგოთ მთელი რიცხვების სამი მიმდევრობა $x_{n+1} = 2x_n, y_{n+1} = 2y_n, z_{n+1} = 2z_n$, რომელთათვისაც სრულდება ტოლობა:

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 + z_{n+1}^2 = 2^{n+2} x_{n+1} y_{n+1} z_{n+1}.$$

გარდა მისა, თუ $n \ge \max(|x|, |y|, |z|)$, მაშინ $|x_n| = \left| \frac{1}{2^{n+1}} x \right| < 1$. ანალოგიური შეფასებები გვექნება y_n და z_n რიცხვებისათვის. ვინაიდან x_n, y_n, z_n მთელი რიცხვებია, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $x = y = z = 0$.

ამოცანა 3

ვთქვათ, p მარტივი რიცხვია. რამდენი n ნატურალური რიცხვი არსებობს, რომლისთვისაც pn იყოფა $p+n$-ზე?

ამოხსნა: ვთქვათ, $pn=(p+n)k$, მაშინ

$p^2=p^2+pn-(p+n)k=(p+n)(p-k)$, $p-k<p$,

ამიტომ p-ზე არ გაიყოფა, საიდანაც

$$p+n=p^2, \quad n=p^2-p.$$

პასუხი. ერთი.

ამოცანა 4

ცნობილია, რომ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ არითმეტიკული პროგრესიის წევრებს შორის არის a_1^2, a_2^2, a_3^2 რიცხვებიც. აჩვენეთ, რომ ამ პროგრესიის ყველა წევრი მთელი რიცხვია.

ამოხსნა: $a_1+a_2=\frac{1}{d}(a_2^2-a_1^2)$, $a_2+a_3=\frac{1}{d}(a_3^2-a_2^2)$ მთელი რიცხვებია. ე.ი. $a_3-a_1=2d$ მთელია, მაშინ გამოდის, რომ d ან მთელია, ან წილადია, რომლის მნიშვნელი 2-ის ტოლია. $2a_1+d=a_1+a_2$ მთელია. შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები: a_1 და d (ე.ი. ყველა წევრი) — მთელია, d - მთელია და a_1-ის მნიშვნელია 2, d -ს მნიშვნელია 2, a_1 კი წილადია, რომლის მნიშვნელია 4. ბოლო ორ შემთხვევაში ცხადია, რომ ყოველი წევრის მნიშვნელი იგივეა, რაც a_1-ის მნიშვნელი. მეორე მხრივ, a_1^2-ის მნიშვნელი მეტია, ვიდრე a_1-ის მნიშვნელი, რაც ეწინააღმდეგება ზემოთ თქმულს, ე.ი. შესაძლებელია მხოლოდ პირველი შემთხვევა.

ამოცანა 5

დაამტკიცეთ, რომ ნატურალური რიცხვებისგან შედგენილი ყოველი უსასრულო არითმეტიკული პროგრესია შეიცავს უსასრულო გეომეტრიულ პროგრესიას.

ამოხსნა: ვთქვათ, $a_0=n$ პროგრესიის პირველი წევრია, სხვაობაა d. მაშინ ამ პროგრესიაში არსებობს $a_n=n+nd=n(1+d)$ წევრიც. ვაჩვენოთ, რომ $1+d$ გამოდგება საძებნი გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელად. მართლაც,

$n(1+d)^k=n(1+kd+\cdots+d^k)=n+(k+\cdots d^{k-1})d$

გამოსახულებას აქვს სახე a_0+ld.

ამოცანა 6

a_1, a_2, …, $a_n, \ldots$ ნატურალური რიცხვების მიმდევრობა ისეთია, რომ ყოველი ნატურალური n-ისთვის $a_{n+2}x^2+a_{n+1}x+a_n=0$ განტოლებას აქვს ნამდვილი ფესვები. შეიძლება თუ არა ამ მიმდევრობაში იყოს წევრების უსასრულო რაოდენობა?

ამოხსნა: გვაქვს $a_n^2 \geq 4a_{n-1}a_{n+1}$, საიდანაც ვღებულობთ:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{4}\frac{a_n}{a_{n-1}}, \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{4^2}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \leq \cdots \leq \frac{1}{4^{n-1}}\frac{a_2}{a_1},$$

ამიტომ დაწყებული გარკვეული n-დან $a_{n+1} \leq a_n$ და „დიდი“ n-ებისათვის მიმდევრობა კლებადია. ნატურალური რიცხვების უსასრულო მიმდევრობა კი კლებადი ვერ იქნება.

პასუხი: არ შეიძლება.

ამოცანა 7

იპოვეთ მარტივი რიცხვების ყველა ისეთი p, q, r სამეული, რომ ნებისმიერი მათგანის მეოთხე ხარისხი, შემცირებული 1-ით, იყოფა დანარჩენი ორის ნამრავლზე.

ამოხსნა: ეს რიცხვები განსხვავებულია. მართლაც, თუ $p = q$, მაშინ $p^4 - 1$ არ გაიყოფა q -ზე. ვთქვათ, p ყველაზე მცირეა. $p^4 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)$ იყოფა qr-ზე. $p - 1$ ნაკლებია როგორც q-ზე, ასევე r -ზე და ე.ი. მათთან ურთიერთმარტივია. $p^2 + 1$ ვერ გაიყოფა ორივეზე(q და r-ზე), რადგან $p^2 + 1 < (p+1)(p+1) < qr$. ამიტომ $p + 1$ იყოფა ერთ-ერთზე (ვთქვათ, q-ზე), რადგან $q > p$. ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $q = p + 1$. მაშინ ერთი p და q-ს შორის ლუწია, ე.ი. $p = 2; q = 3$. r არის $p^4 - 1$-ის $q = 3$-ისგან განსხვავებული მარტივი გამყოფი. ე.ი. $r = 5$. შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ ეს სამეული აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას.

პასუხი: $p = 2, q = 3, r = 5$.

ამოცანა 8

იპოვეთ ნატურალური რიცხვების მკაცრად ზრდადი $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ყველა მიმდევრობა, რომელშიც $a_2 = 2$ და $a_{mn} = a_m a_n$ ნებისმიერი m და n ნატურალური რიცხვებისათვის.

ამოხსნა: $a_n = n$ მიმდევრობა ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს. დავუშვათ, რომ არსებობს სხვა მიმდევრობაც. ცხადია, რომ $a_1 = 1$ და $a_n \geq n$. განვიხილოთ უმცირესი n, რომლისთვისაც $a_n > n$. თუ $n = 2m$, მაშინ $a_n = a_2 a_m = 2m = n$. თუ $n = 2m+1$, მაშინ $n < a_n < a_{n+1} = a_{2m+2} = a_2 a_{m+1} = 2(m+1) = n+1$, ანუ a_n მთელი რიცხვი მოთავსებულია n და $n+1$ მთელ რიცხვებს შორის. ორივე შემთხვევაში მივიღეთ წინააღმდეგობა.

პასუხი: $a_n = n$.

ამოცანა 9

რამდენი გვერდი შეიძლება ჰქონდეს ამოზნექილ მრავალკუთხედს, რომლის ყველა დიაგონალი ტოლია?

ამოხსნა: კვადრატს და წესიერ ხუთკუთხედს ყველა დიაგონალი ტოლი აქვს. ვაჩვენოთ, რომ სხვა ამოზნექილი მრავალკუთხედი, რომელსაც ყველა დიაგონალი ტოლი აქვს, არ არსებობს. დავუშვათ, რომ $A_1 A_2 \dots A_n$ ამოზნექილ მრავალკუთხედს ყველა დიაგონალი ტოლი აქვს და $n \geq 6$. განვიხილოთ ამოზნექილი ოთხკუთხედი $A_1 A_2 A_4 A_5$. მისი $A_1 A_4$ და $A_2 A_5$ დიაგონალების ჯამი მეტია საწინააღმდეგოდ მდებარე $A_2 A_4$ და $A_1 A_5$ გვერდების ჯამზე, რაც შეუძლებელია, რადგან დაშვების ძალით ეს ჯამები ტოლია.

პასუხი: 4 ან 5.

ამოცანა 10

ამოხსნა: $a^3 = b^3 + c^3$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ a ამ სამკუთხედის უდიდესი გვერდია. რადგან უდიდესი გვერდის წინ უდიდესი კუთხეა, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ a გვერდის წინ კუთხე მახვილია. დავუშვათ საწინააღმდეგო. რადგან a გვერდის წინ მდებარე კუთხე არ არის მახვილი, ამიტომ $a^2 \geq b^2 + c^2$, აქედან $a^3 \geq ab^2 + ac^2$, რაც თავის მხრივ მეტია $b^3 + c^3$-ზე, რადგან a უდიდესი გვერდია. დაშვებამ მოგვცა $a^3 > b^3 + c^3$ უტოლობა, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

a, b და c სამკუთხედის გვერდებია. ცნობილია, რომ $a^3 = b^3 + c^3$. დაამტკიცეთ, რომ ეს სამკუთხედი მახვილკუთხაა.

მასალა მომზადდა თენგიზ კოპალიანისა და ბეჟან ღვაბერიძის მიერ

ახალი ამოცანები

ამოცანა 1. ვთქვათ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ამოზნექილი მრავალკუთხედის გვერდებია, ხოლო P მისი პერიმეტრი. აჩვენეთ, რომ:

$$\frac{a_1}{P-a_1}+\frac{a_2}{P-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{P-a_n}\geq\frac{n}{n-1}.$$

ამოცანა 2. ა) აჩვენეთ, რომ არსებობს $a, b, c \in Z$ მთელი რიცხვები, რომლებიც ერთდროულად არაა ნული და სამართლიანია შემდეგი უტოლობები:

$$|a|,|b|,|c|<10^6 \quad |a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|<10^{-11}.$$

ბ) აჩვენეთ, რომ, თუ $0\leq|a|,|b|,|c|<10^6$, სადაც $a, b, c \in Z$ ერთდროულად ნულის არატოლი მთელი რიცხვებია, მაშინ:

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|>10^{-21}.$$

ამოცანა 3. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური $n\geq 2$ რიცხვისთვის მოიძებნება n ცალი ერთმანეთის მომდევნო შედგენილი ნატურალური რიცხვი.

ამოცანა 4. იპოვეთ ნატურალური რიცხვების ყველა მკაცრად ზრდადი $a_1, a_2, \ldots, a_n$ მიმდევრობა, რომელშიც $a_2=2$ და $a_{mn}=a_m\cdot a_n$, ნებისმიერი m და n ნატურალური რიცხვებისათვის.

ამოცანა 5. არსებობს თუ არა f ფუნქცია განსაზღვრული $[-1;1]$ მონაკვეთზე, რომელიც ნებისმიერი ნამდვილი x-სთვის აკმაყოფილებს ტოლობას

$$2f(\cos x)=f(\sin x)+\sin x\,?$$

ამოცანა 6. დაამტკიცეთ, რომ n ნატურალური რიცხვის ყველა გამყოფის საშუალო არითმეტიკული $\left[\sqrt{n};\frac{n+1}{2}\right]$ მონაკვეთშია მოთავსებული.

ამოცანა 7. განვიხილოთ x^2+px+q სახის ყველა შესაძლო სამწევრი p და q მთელი კოეფიციენტებით. ასეთი სამწევრის მნიშვნელობათა სიმრავლე ვუწოდოთ მათი მნიშვნელობების სიმრავლეს ყველა მთელ $x=\pm1,\pm2,\ldots$ წერტილში. მაქსიმუმ რამდენი ასეთი სამწევრის არჩევა შეიძლება, რომ მათი მნიშვნელობათა სიმრავლეები წყვილ-წყვილად არ გადაიკვეთოს?

მასალა მომზადდა თენგიზ კოპალიანისა და ბექან ღვაბერიძის მიერ

ინსტრუქცია ავტორებისთვის

1. სტატია აკრეფილი უნდა იყოს Sylfaen-ში, შრიფტის ზომა 11, სტრიქონებს შორის ინტერვალი 1,5, სიტყვებს შორის 1 ინტერვალი, გვერდის Margins – Normal.
2. სტატია ფორმდება შემდეგნაირად: სტატიის სათაური (შრიფტის ზომა 14 Bold), სახელი და გვარი (შრიფტის ზომა 12 Bold), წოდება, თანამდებობა, სამუშაო ადგილი (შრიფტის ზომა 11). ავტორ(ებ)ის/მთარგმნელ(ებ)ის ფოტოსურათი თავსდება სათაურის გვერდით, მარჯვენა მხარეს.
3. ფორმულები და სიმბოლოები იკრიფება Microsoft Eq.-ით. თუ ფორმულა ორ სტრიქონს იკავებს, უნდა გაიყოს (რედაქტირების გაადვილების მიზნით).
4. ქვესათაური გამოიყოფა იმავე ზომის Bold შრიფტით. ტექსტი გრძელდება იმავე სტრიქონზე.
5. აბზაცისათვის გამოიყენება Tab.
6. ნახატები, ნახაზები, ცხრილები და სხვა არატექსტური გამოსახულებები წარმოდგენილი უნდა იყოს მაღალი გარჩევადობის ნახატის ტიპის ჩანართებით; უნდა იყოს გადანომრილი. შესაბამისი მითითება გაკეთდება ტექსტში (შინაარსობრივი და ვიზუალური მხარის კორექტირებისათვის). გრაფიკულ გამოსახულებაზე, მაგ. ნახ. 1, წარწერა კეთდება 10 ზომის შრიფტით.
7. ლიტერატურის ციტირება ხდება ქრონოლოგიურად (და არა ავტორის გვარების ალფაბეტის შესაბამისად): სტატიის ბოლოს, შუაში, იწერება — ლიტერატურა, [] სიმბოლოში იწერება ნომერი (ასეთივე აღნიშვნა იხმარება ტექსტში), გვარი და ინიციალები, წიგნის, სტატიის (ან ინტერნეტრესურსის მისამართი) სრული ბიბლიოგრაფიული მონაცემები: გამომცემლობა (წიგნის შემთხვევაში), ტომი, ნომერი, გვერდები, წელი. ლიტერატურის მითითება ხდება იმ ენაზე, რომელი წყაროთიც ავტორი სარგებლობდა.
8. ტექსტური ჩანართები გაკეთდეს Tex Box-ის საშუალებით. რომელშიც, ისევე, როგორც მთელ ტექსტში, კიდეები სწორდება მარჯვნივ და მარცხნივ, ფორმატირების საშუალებით.
9. Word ფაილთან ერთად ავტორმა უნდა წარმოადგინოს pdf ფაილიც, რითაც მიანიშნებს რედაქტორს სტატიის ვიზუალურ მხარეზე (აქ იგულისხმება, რომ ჩანართებმა არ უნდა დაიკავოს გვერდის მნიშვნელოვანი ნაწილი, ე.ი. ნახატის ტიპის ჩანართები არ უნდა იყოს დიდი ან ბევრი; არ უნდა დარჩეს გვერდზე, ტექსტის გარეშე, ბევრი თავისუფალი ადგილი).
10. გვერდები არ ინომრება.
11. ტექსტში თეორემა, დებულება, განმარტება ან სხვა მნიშვნელოვანი ცნება (ავტორის შეხედულებისამებრ) გამოიყოფა Italic-ით. შრიფტის განსხვავებული ფერი ტექსტში არ იხმარება.
12. თეორემის, დებულების დამტკიცების დაწყება ან დამთავრება რაიმე ნიშნით არ გამოიყოფა.
13. სტატიას ბოლოში, მარჯვენა კუთხეში, 10 ზომის შრიფტით უნდა მიეთითოს ავტორის ელექტრონული მისამართი; კორპორაციული ელექტრონული ფოსტის გამოყენება სავალდებულოა თსუ-ის თანამშრომლებისთვის.

ISSN 2298-0938

გამომცემლობის რედაქტორი **მარინე ვარამაშვილი**

გარეკანის დიზაინერი **მარიამ ებრალიძე**

დამკაბადონებელი **ლალი კურდღელაშვილი**

გამოცემის მენეჯერი **მარიკა ერქომაიშვილი**

დაიბეჭდა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
გამომცემლობის სტამბაში

0128 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 1
1, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel 995(32) 225 04 84, 6284/6279
https://www.tsu.ge/ka/publishing-house