მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი

№4 **2017**

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკა

სამეცნიერო–პოპულარული ჟურნალი

დაფუძნებულია 2013 წელს
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა ფაკულტეტის
საბჭოს გადაწყვეტილებით
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის
95 წლის იუბილესთან
დაკავშირებით

სარჩევი

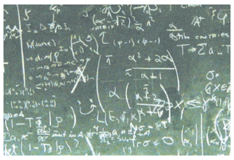
სარჩევი

ჟურნალი „მათემატიკა“

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი „მათემატიკა“ დაარსდა 2013 წელს ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 95 წლის იუბილესთან დაკავშირებით ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის საბჭოს გადაწყვეტილებით. ჟურნალის შექმნის იდეა ფაკულტეტის დეკანს რამაზ ბოჭორიშვილს ეკუთვნის. ჟურნალის მთავარი რედაქტორია თეიმურაზ ვეფხვაძე, მთავარი რედაქტორის მოადგილე – ომარ ფურთუხია. ჟურნალში რამდენიმე განყოფილებაა, რომლებსაც სარედაქციო საბჭოს წევრები ხელმძღვანელობენ: „მათემატიკური სკოლები“ (ჯონდო შარიქაძე) – წარმოაჩენს იმ ქართველ მეცნიერებს, რომლებმაც დიდი წვლილი შეიტანეს ქართული მათემატიკური სკოლების ჩამოყალიბებასა და განვითარებაში; „ქართველი ავტორები“ (გია გიორგაძე) – პოპულარულ ენაზე გადმოიცემა მასალა მათემატიკური ცნებებისა და პრობლემების წარმოშობისა და განვითარების შესახებ; „თარგმანი“ (ილია თავხელიძე) – უცხოელი ავტორების სამეცნიერო-პოპულარული სტატიები; „მეთოდიკა“ (თეიმურაზ ვეფხვაძე, ქეთევან შავგულიძე) – მასალა, რომელიც ხელს შეუწყობს მასწავლებელთა პროფესიულ ზრდას; „მოსწავლეები“ (თენგიზ კოპალიანი) – მასალა, რომელიც განკუთვნილია მოსწავლეებში მათემატიკის პოპულარიზაციისთვის, მათემატიკური ოლიმპიადების მიმოხილვა, საინტერესო ამოცანები მოსწავლეებისთვის; „სტუდენტები“ (თინათინ დავითაშვილი) – წარმოაჩენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ სტუდენტებს; „კურსდამთავრებულები“ (როლანდ ომანაძე) – წარმოგვიდგენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ კურსდამთავრებულებს; „თსუ“ (რამაზ ბოჭორიშვილი) – დაეხმარება ახალგაზრდებს სამომავლო კარიერის დაგეგმვაში, იბეჭდება მასალა, რომელიც აღწერს სასწავლო პროგრამებს, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ჩატარებულ საინტერესო ღონისძიებებს; რუბრიკით „ჩვენი სკოლის ამაგდარი პედაგოგები“ გავიხსენებთ საშუალო სკოლის ღვაწლმოსილ მასწავლებლებს.

ჟურნალი გამოდის წელიწადში ერთხელ და ვრცელდება მთელი საქართველოს მასშტაბით მათემატიკის სამეცნიერო ცენტრებში, უნივერსიტეტებში, სკოლებში. ყოველი ნომრის გამოსვლის შემდეგ იმართება პრეზენტაცია და მოწვეულ სტუმრებს ურიგდებათ საჩუქრად.

ჟურნალი იღებს სტატიებს ჩამოთვლილი განყოფილებების მიხედვით და დადებითი რეცენზიის მიღების შემთხვევაში იბეჭდება. სტატიის წარმოდგენისას დაცული უნდა იყოს ავტორებისათვის განკუთვნილი ინსტრუქციის მოთხოვნები.



მათემატიკური სახლები

აკადემიკოსი ანდრო ბიწაძე

სერგო ხარიბეგაშვილი

თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის დეკანი, სრული პროფესორი

თემურ ჯანგველაძე

თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის დეკანი, სრული პროფესორი

ოთარ ჯოხაძე

თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის დეკანი, სრული პროფესორი

2016 წლის 22 მაისს შესრულდა 100 წელი გამოჩენილი ქართველი მათემატიკოსის, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსის, საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტის, საქართველოს მეცნიერების დამსახურებული მოღვაწის, 1979-1983 წლებში ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორის ანდრო ბიწაძის დაბადებიდან. ანდრო ბიწაძე მრავალი წლის განმავლობაში ეწეოდა სამეცნიერო და პედაგოგიურ მოღვაწეობას თბილისის, მოსკოვის, ნოვოსიბირსკის უნივერსიტეტებსა და ამავე ქალაქების მათემატიკის ინსტიტუტებში. მისი ძირითადი ნაშრომები ეძღვნება ელიფსური, ჰიპერბოლური და შერეული ტიპის დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემების კვლევას, მრავალგანზომილებიანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების თეორიას, ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამ-

ოცანებს, არალოკალური ამოცანების თეორიას, არაწრფივი მოდელების ზუსტი ამონახსნების აგებას, დრეკადობის მათემატიკურ თეორიასა და სხვ. მისი ძალიან ბევრი მიმდევარი და მოსწავლე, ასევე თითოეული ქართველი სიამაყით ივსება, როცა სამეცნიერო ლიტერატურაში წააწყდება ასეთ ჩანაწერებს: „ბიწაძის განტოლება", „ექსტრემუმის ბიწაძის პრინციპი", „ლავრენტიევ-ბიწაძის განტოლება", „ბიწაძე-სამარსკის ამოცანა", „შებრუნების ბიწაძის ფორმულა", „ბიწაძის აზრით ელიფსური სისტემების სუსტად და ძლიერად ბმულობა" და სხვ.

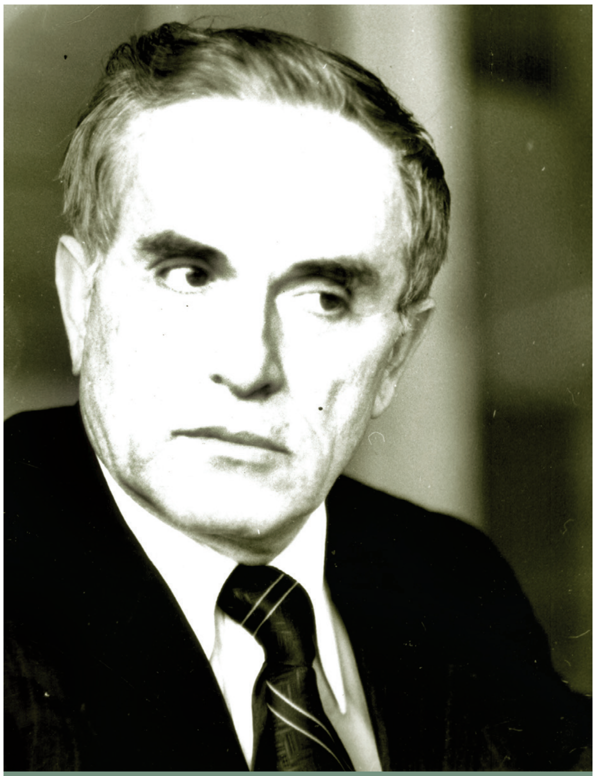
ზემოთ მოყვანილი სტრიქონების მიღმა დიდი პიროვნებისა და სახელოვანი მეცნიერის მეტად საინტერესო ცხოვრება და შემოქმედება დგას. წერილის მიზანია მკითხველს გააცნოს მნიშვნელოვანი მომენტები მისი ცხოვრებიდან და სამეცნიერო მოღვაწეობიდან.

ანდრო ბიწაძე დაიბადა 1916 წლის 22 მაისს ქუთაისის გუბერნიის შორაპნის მაზრის ზემო იმერეთის სოფელ ცხრუკვეთში. მისი მშობლები იყვნენ მარიამ ბრეგვაძე და ვასილ ბიწაძე. მათ რვა შვილი ჰყავდათ: ხუთი ქალიშვილი და სამი ვაჟი. ანდრო ბიწაძე ოჯახის ყველაზე უმცროსი შვილი იყო.

იმერეთის საოცრებებმა, სადაც ბატონმა ანდრომ ბავშვობა გაატარა, მასში სილამაზის მძაფრი შეგრძნება და სრულყოფისაკენ სწრაფვის დიდი სურვილი გააჩინა.

დაწყებითი განათლება ანდრო ბიწაძემ სოფლის ოთხწლიან სკოლაში მიიღო. იგი ათი წლისაც არ იყო, როცა ცხრუკვეთის ოთხწლედი წარჩინებით დაასრულა და ჭიათურის ცხრაწლიანი შრომის სკოლის მეხუთე კლასში გააგრძელა სწავლა. მისი დიდი ნიჭიერება და მათემატიკის სიყვარული სკოლის ერთერთმა საუკეთესო პედაგოგმა ტიტე ბერიშვილმა შენიშნა. ბატონი ანდრო მასწავლებლების შესახებ მოგონებებში წერს: „1930 წლის პირველი სექტემბრიდან ტიტე ბერიშვილი ჭიათურის სკოლაში ტერენტი ტყემალაძემ შეცვალა. ეს ორი მათემატიკოსი სრულიად სხვადასხვა სტილის, მაგრამ ორივე შესანიშნავი პედაგოგი იყო„. 1931 წელს ეს სკოლა პედაგოგიურ ტექნიკუმად გადააკეთეს. ა. ბიწაძემ მისი დამთავრების დიპლომი მიიღო, მაგრამ ორწლიანი პედაგოგიური სტაჟის გავლის გარეშე უმაღლეს სასწავლებელში სწავლის გაგრძელების უფლება არ ჰქონდა. ამის გამო, იგი რამოდენიმე ხანს სხვადასხვა სოფლის სკოლაში ფიზიკასა და მათემატიკას ასწავლიდა. მისი სწრაფვა ცოდნისკენ დაუოკებელი იყო, ამ მხრივ ყველა ბარიერს იღებდა, ენობრივსაც კი. ბავშვობაში ჭიათურის სკოლის შესანიშნავი მასწავლებლებისაგან ნასწავლი რუსულის გარდა ფრანგულ ენასაც ცდილობდა დაუფლებოდა, რათა შეძლებოდა მათემატიკური ტექსტების დედანში გაცნობა.

1935 წელს ა. ბიწაძე ჩაირიცხა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე. უნივერსიტეტში სწავლისას იგი მეტად გამორჩეული სტუდენტი იყო. მეგობრები მის უპირატესობას ერთხმად აღიარებდნენ და დიდად აფასებდნენ, როგორც ძალიან გონიერსა



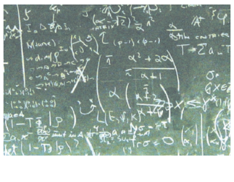
ანდრია ბიწაძე

და საკუთარი თავის მიმართ მეტად მომთხოვნ პიროვნებას. პედაგოგებიც აღნიშნავდნენ მის განსაკუთრებულ ნიჭიერებას და ასეთ სტუდენტთან ურთიერთობა მათ გამოცდებზეც კი დიდ სიამოვნებას ჰგვრიდა. ამის შესახებ ხშირად ილია ვეკუასთან მის გამოცდაზე ყოფნასაც იხსენებენ, როცა ყველა შეკითხვაზე დამაჯერებლად მოპასუხე ანდრო ბიწაძე ბატონ ილიას არ ეთმობოდა და ამის შესახებ გამოცდის ბოლოს მას კომენტარიც აქვს გაკეთებული.

1940 წელს სახელმწიფო გამოცდებზე მან ყველა გამოცდა „ფრიადზე" ჩააბარა და კომისიამ, რომლის შემადგენლობაში სხვებთან ერთად იყვნენ ნ. მუსხელიშვილი (თავმჯდომარე), ი. ვეკუა და ვ. კუპრაძე, რეკომენდაცია მისცა ჩაებარებინა თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის ასპირანტურაში, რის შედეგადაც 1940-1943 წლებში იგი ამ ინსტიტუტის ასპირანტი იყო. საინტერესო ფაქტია, რომ იმ წლებში სსრკ-ში სულ 50 ასპირანტი იყო სტალინური სტიპენდიანტი და მათ შორის ა. ბიწაძეც. მაშინ მოქმედი კანონის ძალით სტალინური სტიპენდიანტი დოქტორანტები და ასპირანტები სამხედრო მობილიზაციას არ ექვემდებარებოდნენ.

ბატონი ანდროს სამეცნიერო ინტერესების ჩამოყალიბებაში მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა ნ. მუსხელიშვილის სემინარმა, სადაც სამჯერ ზედიზედ მოისმინეს ბატონი ანდროს მოხსენებები დრეკადობის თეორიის ბრტყელი საკონტაქტო ამოცანების კვადრატურებში ამოხსნის შესახებ.

ანდრო ბიწაძემ ომის მძიმე წლებში მოამზადა და 1944 წელს წარმატებით დაიცვა საკანდიდატო დისერტაცია აკადემიკოს ი. ვეკუას სამეცნიერო ხელმძღვანელობით. აღსანიშნავია, რომ დისერ-



ტაციის ოპონენტები იყვნენ ნ. მუსხელიშვილი და ბ. ხვედელიძე, რომელთაც დისერტანტს ძალიან მაღალი შეფასება მისცეს. 1944-1948 წლებში ა. ბიწაძე თბილისის ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის ჯერ უმცროსი, ხოლო შემდეგ მალევე უფროსი მეცნიერ-თანამშრომელია.

აკადემიკოსი ნ. მუსხელიშვილი მუდამ იყო დაინტერესებული ნიჭიერი ახალგაზრდებით და ყოველთვის ცდილობდა მათთვის ხელი შეეწყო. მისი დიდი დამსახურებაა, რომ 1948-1951 წლებში ა. ბიწაძე სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის ვ. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის დოქტორანტი გახდა. დოქტორანტურაში ა. ბიწაძის მუშაობით განსაკუთრებით კმაყოფილი იყვნენ აკადემიკოსები ი. პეტროვსკი და ს. სობოლევი. მათ მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სემინარებზე ოთხჯერ მოისმინეს მისი მოხსენებები. მათში გადმოცემული ორიგინალური შედეგები პატარა მოცულობის ორი სტატიის სახით გამოქვეყნდა ჟურნალებში „Доклады АН СССР“ და „Успехи математических наук“. სადოქტორო სწავლების ნახევარი წელი გასული იყო და აკადემიკოსი მ. ლავრენტიევი, რომელიც დოქტორანტ ა. ბიწაძის მეცნიერ-კონსულტანტი იყო, ინსტიტუტის დირექტორის მოადგილის აკადემიკოს მ. კელდიშის თანდასწრებით გაეცნო ა. ბიწაძის სამეცნიერო მუშაობის ანგარიშს. მათ ა. ბიწაძეს შესთავაზეს ელიფსური სისტემებისადმი მიძღვნილი სადოქტორო დისერტაციის თემა, რის ფარგლებშიც ა. ბიწაძეს უკვე მნიშვნელოვანი შედეგები ჰქონდა მიღებული, შეეცვალა იმ დროისათვის უფრო მეტად აქტუალური თემით „შერეული ტიპის განტოლებები“. ამ პრობლემატიკასთან მას სამეცნიერო შეხება არასდროს ჰქონია, მაგრამ ცოტა ხნის მერე დაეთანხმა მ. ლავრენტიევსა და მ. კელდიშს ამის თაობაზე. ა. ბიწაძე ნახევარი წლის დაძაბული მუშაობის შემდეგ მოხსენებით გამოვიდა მ. კელდიშის ცნობილ სემინარზე ტრიკომის ამოცანის შესახებ გამოჩენილი სპეციალისტების მ. კელდიშის, ს. ხრისტიანოვიჩის, მ. ლავრენტიევის, ა. დოროდნიცინის, ფ. ფრანკლისა და სხვათა წინაშე. 1950 წლის თებერვალში კი ჟურნალში „Доклады АН СССР“ შერეული ტიპის განტოლებებთან დაკავშირებით გამოვიდა მისი სტატიები — ერთი ცალკე და ერთიც მ. ლავრენტიევთან თანაავტორობით. აღნიშნული შედეგი სამეცნიერო ლიტერატურაში ახლა „ექსტრემუმის ბიწაძის პრინციპის“ სახელით არის ცნობილი. წელიწადნახევრის განმავლობაში ჩატარებული ნაყოფიერი შრომის შედეგად მან გააფორმა სადოქტორო დისერტაცია თემაზე „შერეული ტიპის განტოლებების პრობლემისათვის“ და წარადგინა დასაცავად ვ. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის სამეცნიერო საბჭოს წინაშე. გარე რეცენზიის დასაწერად ნაშრომი მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში გაუგზავნეს აკადემიკოს ი. პეტროვსკის, ოფიციალურ ოპონენტებად კი დაინიშნენ აკადემიკოსები მ. კელდიში, ს. სობოლევი და სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი ა. ტიხონოვი. ი. ვეკუამ დიდი დაინტერესება გამოიჩინა ა. ბიწაძის მეცნიერული შედეგების მიმართ და ყურადღებით გაეცნო მათ.

1951 წლის გაზაფხულზე სადოქტორო დისერტაციის დაცვა შედგა. ძალიან კარგი რეცენზიებით გამოვიდნენ მ. კელდიში და ს. სობოლევი. მაღალი შეფასება მისცეს სადისერტაციო ნაშრომს ი. პეტროვსკიმ და ა. ტიხონოვმაც. სადოქტორო დისერტაციაში შერეული ტიპის განტოლებებისთვის დასმულ ამოცანებს მან ისეთი მოხდენილი გადაწყვეტა მოუძებნა, რომ სიმკაცრით განთქმულმა შემფასებელმა მ. ლავრენტიევმა შედეგები ძალიან ნატიფად და მნიშვნელოვნად ჩათვალა და თავის მონოგრაფიაშიც კი შეიტანა.

1951-1959 წლებში ანდრო ბიწაძე ვ. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის უფროსი მეცნიერ-თანამშრომელია. იგი აღიარეს ავტორიტეტულ მკვლევარად მათემატიკის სხვადასხვა მომიჯნავე დარგში, მკაცრ და სამართლიან ექსპერტად. მისი აზრი აინტერესებდათ და ანგარიშს უწევდნენ ყველა დონეზე.

ბატონი ანდროს შედეგები იმდენად მნიშვნელოვანი აღმოჩნდა, რომ მალევე ითარგმნა რამდენიმე ენაზე, მათ შორის ჩინურზეც. ეს თარგმანები მისი პეკინში მიწვევის მთავარი მიზეზი გახდა. მას საერთოდ მრავალი ქვეყანა ჰქონდა მოვლილი, მაგრამ განსაკუთრებით დიდი პერიოდი მოუწია ჩინეთში ყოფნამ. იგი 1957 წლის 1 ოქტომბერს ჩაფრინდა პეკინში. მისმა ლექციებმა დიდი ინტერესი გამოიწვია და მრავალი ჩინელი მათემატიკოსი დააინტერესა მის მიერ შეთავაზებულმა თემატიკამ.

ჩინეთში ყოფნისას, 1958 წლის მარტში მოსკოვიდან მას აკადემიის პრეზიდენტი ა. ნესმეიანოვი შეეხმიანა, რათა დათანხმებულიყო კენჭი ეყარა საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტის ვაკანტურ ადგილზე ციმბირის განყოფილების ხაზით. შემდეგ მან აკადემიის ფიზიკისა და მათემატიკის განყოფილების აკადემიკოს-მდივნის მ. ლავრენტიევის ანალოგიური შინაარსის დეპეშაც მიიღო და არავის გაკვირვებია, როდესაც 1958 წელს, 42 წლის ასაკში, იგი სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტად აირჩიეს.

ბატონმა ანდრომ ჩინეთში საკუთარი მოღვაწეობის ნათელი კვალი 80-იანი წლების მიწურულს იხილა, როცა მისმა იქაურმა მოწაფეებმა და მიმდევრებმა იქ ჩასულ მასწავლებელს თავისებური ანგარიში ჩააბარეს.

1959 წელს ბატონი ანდრო ოჯახთან ერთად ნოვოსიბირსკში გადავიდა. მისი მეუღლე, მეცნიერებათა კანდიდატი, დოცენტი ნინა ალექსანდრეს ასული ბადერკო წლების განმავლობაში თავისი სპეციალობით მოსკოვში მუშაობდა. ნოვოსიბირსკში კი იგი უნივერსიტეტის უცხო ენების კათედრის ხელმძღვანელი გახდა. მაშინ ძალიან პატარა, ნიჭიერი შვილი ანდრია, ახლა პოლიტოლოგიისა და ისტორიის პროფესორია და კანადაში მოღვაწეობს.

ცნობილია ის დიდი ღვაწლი, რაც ნოვოსიბირსკის სამეცნიერო ცენტრად ჩამოყალიბებაში მისი უნივერსიტეტის პირველ რექტორს, აკადემიკოს ილია ვეკუას მიუძღვის. ამ აღმშენებლობაში მისი ერთერთი თანამდგომი ანდრო ბიწაძეც იყო. საზოგადოებრივ ცხოვრებაში ბატონი ანდრო ყოველთვის აქტიური იყო, რაც განსაკუთრებით ციმ-

ბირში მუშაობის წლებში გამოვლინდა. მან დიდი შრომა გასწია ნოვოსიბირსკის აკადემქალაქის დაფუძნებასა და განვითარებაში. მათემატიკის ინსტიტუტში ხელმძღვანელობდა ფუნქციათა თეორიის განყოფილებას და ამავე დასახელების კათედრას ნოვოსიბირსკის სახელმწიფო უნივერსიტეტში. მისი სემინარები და ლექციები თავიდანვე პოპულარული იყო. ა. ბიწაძის ცნობილი სემინარი უხვად იზიდავდა დამწყებ თუ გამოცდილ სპეციალისტებს მსოფლიოს სხვადასხვა კუთხიდან.

1959 წელს გამომცემლობამ „Наука“ გამოსცა ა. ბიწაძის ცნობილი მონოგრაფია „Уравнения смешанного типа“, რომელიც შემდგომ სხვადასხვა ენებზეც ითარგმნა. 1960 წელს დაარსდა სამეცნიერო ჟურნალი „Сибирский математический журнал“, რომლის მთავარი რედაქტორი იყო გამოჩენილი მათემატიკოსი ა. მალცევი, რედაქტორის მოადგილე კი - ა. ბიწაძე. ამ ჟურნალმა ძალიან მალე მოიპოვა დიდი ავტორიტეტი და პირველი საბჭოთა მათემატიკური ჟურნალი იყო, რომელიც ინგლისურად ითარგმნებოდა და ამერიკის შეერთებულ შტატებში გამოიცემოდა. ბატონი ანდრო მრავალი მაღალრეიტინგული სამეცნიერო ჟურნალის სარედაქციო კოლეგიის წევრიც იყო.

1962 წელს ა. ბიწაძე ლონდონის სამეფო საზოგადოების მიწვევით სამეცნიერო მივლინებით სამი კვირით იმყოფებოდა დიდ ბრიტანეთში, რასაც, როგორც სხვა მეცნიერები, ასევე თავად ბატონი ანდროც, დიდ დაფასებად აღიქვამდა. აქ მისი მეცნიერული ტურნე გლაზგოს უნივერსიტეტიდან დაიწყო, სადაც მან ორი მოხსენება გააკეთა. ამ სხდომების მაღალ დონეზე ორგანიზებას შოტლანდიელი მეცნიერი, მათემატიკისა და მექანიკის ცნობილი სპეციალისტი ი. სნედონი ხელმძღვანელობდა, რომლის რედაქტორობითაც იმ დროს ინგლისურად უკვე ითარგმნა ა. ბიწაძის მონოგრაფია „Уравнения смешанного типа“ და მას დასაბეჭდად ამზადებდა გამომცემლობა „Pergamon Press“. შემდეგ მან მოხსენება გააკეთა ოქსფორდის უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტში, რომელსაც ცნობილი მათემატიკოსი, ლონდონის სამეფო საზოგადოების წევრი რ. ტიტჩმარში ხელმძღვანელობდა. ა. ბიწაძის მოხსენების შემდეგ, რომელსაც საკმაოდ ბევრი მსმენელი დაესწრო, ოქსფორდელი მათემატიკოსები შერეული ტიპის ოპერატორებისათვის სპექტრალური ამოცანით დაინტერესდნენ.

1963 წელს ნოვოსიბირსკში გაიმართა დიდი მნიშვნელობის მქონე სსრკ-აშშ-ის სიმპოზიუმი, რომლის მუშაობაშიც ძალიან ცნობილი სპეციალისტები მონაწილეობდნენ. აქ ა. ბიწაძემ მეტად საინტერესო მოხსენება გააკეთა. სიმპოზიუმზე არაფრედჰოლმური ტიპის სასაზღვრო ამოცანები ელიფსური განტოლებებისა და სისტემებისათვის განსაკუთრებული ყურადღების ცენტრში აღმოჩნდა. ეს მიმართულება კარგად იყო წარმოდგენილი მეცნიერებათა აკადემიის ციმბირის განყოფილების მათემატიკის ინსტიტუტის ფუნქციათა თეორიის განყოფილებაშიც, რომელსაც ა. ბიწაძე ხელმძღვანელობდა. სწორედ აქ მიღებულ მაღალმეცნიერულ შედეგებს გაზეთში „Известия“ მაღალი შეფასება მისცა აშშ-ის დელეგაციის ხელმძღვანელმა, სახელგანთქმულმა მეცნიერმა, სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის საზღვარგარეთელმა წევრმა რ. კურანტმა.

კომპლექსური ცვლადის ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის ლექციათა სავალდებულო კურსის გარდა ნოვოსიბირსკის უნივერსიტეტში უფროსკურსელი სტუდენტებისთვის და ციმბირის განყოფილებაში მომუშავე ახალგაზრდა მეცნიერთანამშრომლებისათვის ა. ბიწაძე კითხულობდა სპეციალურ კურსს სახელწოდებით „სასაზღვრო ამოცანები მეორე რიგის ელიფსური ტიპის განტოლებებისათვის“. ამის საფუძველზე შეიქმნა მისი კიდევ ერთი ცნობილი მონოგრაფია, რომელიც 1966 წელს გამომცემლობამ „Наука“ მოსკოვში გამოაქვეყნა და მალე გამომცემლობამ „North-Holland“ ინგლისურ ენაზეც გამოსცა.

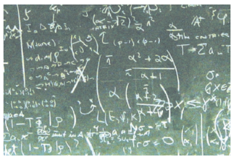
ანდრო ბიწაძის სამეცნიერო და პედაგოგიური მოღვაწეობა ყოველთვის დიდი ყურადღების ქვეშ ექცეოდა. მისი საიუბილეო თარიღები, როგორც წესი აუცილებლად აღინიშნებოდა.

მეცნიერებაში შეტანილი თვალსაჩინო ღვაწლისთვის 1969 წელს ბატონი ანდრო არჩეულ იქნა საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსად.

1971 წლის 1 სექტემბრიდან ა. ბიწაძემ მუშაობა განაახლა ვ. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტში, ამჯერად უკვე განყოფილების გამგედ და სიცოცხლის ბოლომდე ამ თანამდებობაზე იყო.

1972 წლის გაზაფხულზე მოსკოვის საინჟინრო-ფიზიკური ინსტიტუტის ხელმძღვანელობამ იგი პროფესორად მიიწვია და მიმართა თხოვნით, შეთავსებით დაეკავებინა ამავე ინსტიტუტის უმაღლესი მათემატიკის კათედრის გამგის თანამდებობა. ბატონი ანდრო დიდი ინიციატივითა და ძალისხმევით შეუდგა შეთავაზებულ თანამდებობაზე მუშაობას. ანდრო ბიწაძე იხსენებდა, რომ მოსკოვის საინჟინრო-ფიზიკურ ინსტიტუტში უმაღლესი მათემატიკის კათედრის საქმიანობა არსებით გარდაქმნას საჭიროებდა. უპირველეს ყოვლისა, საჭირო იყო მისი ისეთი ახალი კადრებით შევსება, რომლებიც წარმატებით ეწეოდნენ სამეცნიერო მოღვაწეობასაც. არანაკლები მნიშვნელობა ჰქონდა მათემატიკაში სასწავლო პროგრამების გადახალისებას იმ მოთხოვნათა შესაბამისად, რომლებსაც საზოგადოება ინჟინერ-ფიზიკოსებს უყენებდა. ორივე ამ საკითხის გადაჭრა ძნელი აღმოჩნდა, მაგრამ წარმატებები ამ საქმეში განაპირობა კათედრისადმი რექტორატის სრულმა ნდობამ და მხარდაჭერამ. კათედრის ძირითად თანამშრომლებად მიიღეს 12 ახალგაზრდა მათემატიკოსი, რომლებმაც 1972 წელს წარმატებით დაიცვეს საკანდიდატო დისერტაცია, ხოლო ვ. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის 8 თანამშრომელს ამ კათედრაზე შეთავსებით მუშაობის ნება დართეს.

ბატონი ანდრო საერთოდ არასდროს კმაყოფილდებოდა მხოლოდ მეცნიერული მუშაობით. შეძენილი ცოდნის სხვისთვის გაზიარების მოთხოვნილებამ ის შესანიშნავ პედაგოგად აქცია. მას მთელი სიცოცხლის მანძილზე არ შეუწყვეტია



პედაგოგიური მუშაობა. მისი ღრმაშინაარსიანი და გამართული მეტყველება ბევრს დღესაც კარგად ახსოვს. ბატონი ანდრო აღნიშნავდა, რომ პედაგოგიური მოღვაწეობის ხანგრძლივ გზაზე პატივისცემა არსად ისე არ უგრძვნია, როგორც მოსკოვის საინჟინრო-ფიზიკურ ინსტიტუტში, რაც გამოიხატებოდა არა მარტო ყოველწლიურად საპატიო სიგელებით დაჯილდოებასა თუ მადლობების ოფიციალურ გამოცხადებაში, არამედ ყოველდღიურ საქმიან კონტაქტში ამ დაწესებულების სტუდენტებთან, პროფესორ-მასწავლებლებთან და ხელმძღვანელობასთან. ის დიდი სიამოვნებით იხსენებდა და არ ავიწყდებოდა სტუდენტებით, ასპირანტებითა და ახალგაზრდა მეცნიერებით სავსე მისი აუდიტორიები. იგი 1978 წლამდე იყო მოსკოვის საინჟინრო-ფიზიკური ინსტიტუტის უმაღლესი მათემატიკის კათედრის გამგე.

1978 წლის 29 დეკემბერს სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის პრეზიდენტმა აკადემიკოსმა ა. ალექსანდროვმა ა. ბიწაძეს აცნობა, რომ გადაწყვეტილი იყო მისი თბილისის ივანე ჯავახიშვილის სახელობის ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორად და მეცნიერ ხელმძღვანელად შეთავსებით მუშაობის დაწყება და ამის თაობაზე თავისი წერილიც გააცნო. იმ განცდის შესახებ, რაც მან ამ მომენტში მიიღო, ბატონი ანდრო ასე იხსენებს: „ახალ 1979 წელს მოსკოვში შევხვდი, 1 იანვარს კი თბილისში გავემგზავრე. 31 წლის შემდეგ ნახევრად, მაგრამ მაინც ვბრუნდებოდი ჩემს საყვარელ სამშობლოში — საქართველოში“. ვ. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის დირექციამ მას ნება დართო მთელი წლის ნახევარი თვეგამოშვებით თბილისში ნაკისრ ვალდებულებათა შესასრულებლად გამოეყენებინა. ბატონი ანდრო დიდი მონდომებითა და ენთუზიაზმით ჩაერთო ადმინისტრაციულ, სამეცნიერო და პედაგოგიურ საქმიანობაში. მის მიერ ჩამოყალიბებულმა ახალმა განყოფილებამ და სემინარმა „კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები“ დიდი როლი ითამაშა ახალგაზრდების მათემატიკის ამ მეტად მნიშვნელოვანი მიმართულებით დაინტერესებაში. ბევრი მათგანი სიღრმისეულად ეზიარა ა. ბიწაძის მიერ ნათლად გადმოცემულ თანამედროვე მიღწევებს. თავის მოგონებებში ის კმაყოფილებით აღნიშნავს განყოფილებაში მომუშავე ახალგაზრდა მეცნიერთა წარმატებულ საქმიანობას. სემინარის მუშაობაში ძალიან ბევრი მათემატიკოსი მონაწილეობდა. მათ შორის ხშირად იყვნენ უცხოეთიდან მივლინებით სპეციალურად ჩამოსული ცნობილი მეცნიერებიც კი. აღსანიშნავია, რომ ბატონი ანდროს ინსტიტუტიდან წასვლის შემდეგაც რამოდენიმე წელი განყოფილებისა და ამ სემინარის მუშაობა პროფესორ გიორგი ჯაიანის ხელმძღვანელობით გრძელდებოდა. სასიხარულოა, რომ ინსტიტუტის ამჟამინდელი დირექტორის გ. ჯაიანის გადაწყვეტილებით 2016 წელს ანდრო ბიწაძის სახელობის აღნიშნული სემინარის მუშაობა ისევ განახლდა. ახლა ამ სემინარის ხელმძღვანელები მისი მოწაფეები ს. ხარიბეგაშვილი და თ. ჯანგველაძე არიან.

თბილისში პარალელურად მოღვაწეობისას 1981 წელს გამომცემლობამ „Наука“ გამოაქვეყნა ბიწაძის კიდევ ერთი მონოგრაფია „Некоторые классы уравнений в частных производных“, რომელმაც სპეციალისტთა ძალიან დიდი ყურადღება დაიმსახურა და მალევე ითარგმნა ინგლისურ ენაზე. სამწუხაროდ, 1983 წლის ბოლოს ბატონ ანდროს ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორის თანამდებობის დატოვება მოუწია.

მოსკოვში სრულად დაბრუნებულს ა. ბიწაძეს სამეცნიერო მუშაობასთან ერთად პედაგოგიური მოღვაწეობაც არ შეუწყვეტია და 1983 წლიდან გარდაცვალებამდე მოსკოვის მ. ლომონოსოვის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორიც იყო.

1988 წელს ბატონ ანდროს თხოვეს ქართულ გაზეთ „კომუნისტში“ გამოექვეყნებინა წერილი თბილისის უნივერსიტეტის დაარსებიდან 70 წლისთავის იუბილეს აღსანიშნავად. ამ მეტად ღირსშესანიშნავ თარიღს იგი გამოეხმაურა და მეტად საინტერესო წერილი გამოაქვეყნა სათაურით „ცოდნის, განსწავლის მშობლიური დიდი ტაძარი„. ამ სტატიაშიც ჩანს, რომ მისი ფენომენალური მეხსიერება უამრავ ინფორმაციას იტევდა როგორც ისტორიულ, ისე თანამედროვე მოვლენასა თუ მრავალ ღირსეულ პიროვნებაზე. მას პროფესიონალის დონეზე შეეძლო ესაუბრა მრავალი მიმართულების სხვადასხვა საკითხზე.

აქვე გვინდა შევეხოთ ბატონი ანდროს პოეზიასთან განსაკუთრებულ ურთიერთობას. ამასთან დაკავშირებით ბუნებრივია გავიხსენოთ ბატონი ანდროს ჩანაწერი მისი ლექსთან ურთიერთობის თაობაზე: „ლექსების წერა ჯერ კიდევ ბავშვობის წლებში დავიწყე. ბევრი მათგანი არ შემომრჩა — ზოგი კერძო პირთა ალბომებში მაქვს ჩაწერილი, ზოგიც — უკვე დაკარგულ წიგნთა არშიებზე. მე განათლებით და პროფესიით მათემატიკოსი ვარ და, რა თქმა უნდა, პოეტობაზე პრეტენზიის განცხადების არც სურვილი მაქვს და არც საფუძველი. ამ ლექსების შინაარსი ასახავს ჩემს პირად განცდებს ჩემი ცხოვრების სხვადასხვა მომენტში. ჩემი, ისევე როგორც ყოველი მოქალაქის, სულიერი განწყობა არ შეიძლებოდა ყოველთვის ერთნაირი ყოფილიყო, ამის შესაბამისად ლექსებსაც დაჰკრავს ოპტიმისტური, თუ პესიმისტური ელფერი. რამდენადაც ლექსები არ არის დაწერილი მკითხველთა ფართო წრისათვის, მე არ მიცდია, მათში ამესახა მხოლოდ ოპტიმისტური სულისკვეთება, რაც ესოდენ საჭიროა საზოგადოებისთვის. კრებული შედგენილია პირადად ჩემთვის, ზოგიერთი ჩემი მეგობრისა და ნათესავისათვის, ვისაც ცოტა თუ მეტად აინტერესებს ჩემი ცხოვრების გზა“.

ბატონი ანდროსათვის დამახასიათებელი გადმოცემის სტილი მხოლოდ მის მათემატიკურ ნაშრომებში არ იგრძნობა. იგი ამ სტილს ნ. მუსხელიშვილს უმადლოდა. თავის მასწავლებლებად ნ. მუსხელიშვილს, ი. ვეკუასა და მ. ლავრენტიევს თვლიდა. მოწიწებული იყო მისი დამოკიდებულება ყველა მისი მასწავლებლის მიმართ. შემთხვევას არ გაუშვებდა ხელიდან, რათა საკადრისი პატივი არ მიეგო მათი ხსოვნისათვის. თბილისში

ყოფნის დროს ხშირად ადიოდა ბატონი ნიკოსა და ბატონი ილიას საფლავების მოსანახულებლად.

ქვემოთ მოკლედ მიმოვიხილავთ ანდრო ბიწაძის სამეცნიერო მემკვიდრეობის ძირითად მიღწევებს, რომლებმაც დიდი გავლენა მოახდინეს შესაბამისი პრობლემების განვითარებაზე.

ზემოთმოყვანილი ცხოვრებისეული და სამეცნიერო მოღვაწეობის ნაწილების აღწერისასაც ჩანს, რომ ანდრო ბიწაძის შემოქმედება იმდენად მრავალფეროვანია, რომ აქ მოტანილ მოკლე მიმოხილვაში შეუძლებელია მისი სრული სახით წარმოდგენა.

მისი სამეცნიერო სტატიები, მონოგრაფიები და სახელმძღვანელოები გამოირჩევიან აზრის მარტივად და მკაფიოდ გადმოცემით. დახვეწილი მსჯელობა, ორიგინალური მაგალითებისა და კონტრმაგალითების სიმრავლე არსებით როლს თამაშობს და გამოყენებას პოულობს როგორც მისი შემოქმედების ახალგაზრდა მიმდევართა, ასევე ცნობილ მკვლევართა შემოქმედებაშიც კი.

ბატონ ანდრო ბიწაძის შემოქმედებას ჩვენ რამდენიმე ნაკვეთად დავყოფთ და შევეცდებით ცალკეულ მათგანზე ჩვენი შეხედულება გაგიზიაროთ. შორს ვართ იმ აზრისაგან, რომ რიგით პირველად მოყვანილი შედეგები მომდევნოებზე უფრო მნიშვნელოვანია. ჩვენ მხოლოდ იმ შედეგებზე შევჩერდებით, რომლებმაც ფართო რეზონანსი გამოიწვიეს და დიდი გავლენა მოახდინეს მათემატიკის ამ დარგის შემდგომ განვითარებაზე.

უკვე რამდენჯერმე აღინიშნა, რომ ანდრო ბიწაძის შემოქმედებაში ელიფსური განტოლებებისა და სისტემებისათვის დასმულ ამოცანებს მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია. ადრე თვლიდნენ, რომ წრფივი განტოლებისა თუ სისტემის თანაბარი ელიფსურობა უზრუნველყოფს სასაზღვრო ამოცანების, კერძოდ, დირიხლეს პირველი სასაზღვრო ამოცანის ფრედჰოლმურობას. ამ მოსაზრების არასამართლიანობა ანდრო ბიწაძემ მარტივი, ყველასათვის გასაგები მაგალითით აჩვენა, რასაც შემდგომ „ბიწაძის სისტემა" ეწოდა. ასეთი ფაქტი იმ დროს მოულოდნელი და თითქმის დაუჯერებელიც კი იყო. ეს საკითხი მათემატიკური წრეების მსჯელობის საგნად იქცა და ცდილობდნენ მისთვის ახსნა მოეძებნათ.

ამ აღმოჩენების საფუძველზე ელიფსური სისტემებისათვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანათა თეორიაში ახალი მიმართულებები შეიქმნა. არაფრედჰოლმურ სასაზღვრო ამოცანათა თეორია ერთ-ერთი ამათგანია. აღნიშნული მიმართულებები ახლაც ძალიან აქტუალურია და მათ ანდრო ბიწაძის მრავალი მიმდევარი თუ მოწაფე უძღვნის გამოკვლევებს დღესაც.

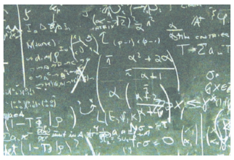
ბუნებრივად დადგა საკითხი ისეთი სისტემების გამოყოფისა, რომლებისთვისაც დასმული სასაზღვრო ამოცანები რაიმე აზრით ნორმალურად ამოხსნადი არიან. კერძოდ, ფრედჰოლმის, ნეტერისა თუ ჰაუსდორფის აზრით. ანდრო ბიწაძემ გამოყო მეორე რიგის სისტემები, რომლებსაც დღეს ბიწაძის აზრით სუსტად შებმული სისტემები ეწოდებათ და რომელთათვისაც დირიხლეს ამოცანა ფრედჰოლმურია. დამკვიდრებული იყო აზრი, რომ ამგვარ ამოცანათა ამოხსნადობა მთლიანადაა დამოკიდებული სისტემის მთავარ ნაწილზე, ანუ უმაღლესი რიგის წარმოებულების კოეფიციენტებზე. ანდრო ბიწაძემ გამოთქვა მოსაზრება, რომ ამოხსნადობაზე გავლენა შეიძლება იქონიონ დაბალი რიგის წარმოებულებთან მდგომმა კოეფიციენტებმაც. მართლაც, როგორც გამოირკვა, სხვადასხვა აზრით ნორმალურად ამოხსნადი ამოცანები, რომელთა მთავარი ნაწილი ბიწაძისეული ოპერატორით არის წარმოდგენილი, დაბალი რიგის წარმოებულების დამატებით შეიძლება ნორმალურად ამოხსნადი აღარ იყოს ან პირიქით. ამ მოსაზრებასთან დაკავშირებით მან შემოიღო ძლიერად შებმულ ელიფსურ სისტემათა ცნება.

აღნიშნული მოულოდნელი ეფექტი ანდრო ბიწაძემ კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქციების აპარატის საშუალებით აღმოაჩინა.

ანალიზურ ფუნქციათა თეორია და ერთგანზომილებიანი სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა აპარატი იძლევა მრავალი სასაზღვრო ამოცანის გამოკვლევის საშუალებას ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში. დამოუკიდებელ ცვლადთა რაოდენობის ზრდისას სასაზღვრო ამოცანათა გამოკვლევა დიდ სირთულეებს აწყდება იმის გამო, რომ მრავალგანზომილებიანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის თეორია ისეთი სისრულით, როგორც ერთგანზომილებიან შემთხვევაში, დღემდე არაა აგებული. ამის მიუხედავად, სოხოცკი-პლემელის თეორემის მრავალგანზომილებიანი ანალოგის გამოყენებით ბატონმა ანდრომ ცნობილი მოისილ-ტეოდორესკუს სისტემისათვის დასმული პირველი სასაზღვრო ამოცანა დაიყვანა სპეციალური მატრიცული გულის მქონე მრავალგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე და მისთვის შებრუნების ფორმულა მიიღო. მას დღეს ანდრო ბიწაძის შებრუნების ფორმულა ეწოდება.

მრავალგანზომილებიანი ელიფსური განტოლებებისა და სისტემებისათვის დასმულ ამოცანათა შორის დახრილწარმოებულებიან ამოცანას საკვანძო ადგილი უკავია. ჯერ კიდევ ჟ. ჟირომ თავის შრომებში აჩვენა, თუ დახრილი წარმოებულის მიმართულება საზღვრის არცერთ წერტილში მხებ სიბრტყეს არ დაემთხვევა, მაშინ ამოცანა ფრედჰოლმის აზრით ამოხსნადია. თუ ეს პირობა დარღვეულია, ვითარება იმდენად იცვლება, რომ ბევრი სპეციალისტი ამ ამოცანას ელიფსური განტოლებებისათვის დასმული ამოცანებისათვის ბუნებრივადაც კი არ მიიჩნევდა. ანდრო ბიწაძემ პირველმა განიხილა ასეთი არასტანდარტული შემთხვევები. მან აჩვენა, რომ ეს ამოცანა არ გამოდის იმ ტიპიურ ამოცანათა ჩარჩოებიდან და დაამტკიცა თეორემები ამონახსნთა არსებობისა და რაოდენობის შესახებ.

ანდრო ბიწაძის კვლევის ობიექტები ყოველთვის არაორდინალური იყო. მას გამოკვლეული აქვს ამოცანები, რომლებიც არსებობისა და სხვა სტანდარტულ პირობებს არ ექვემდებარებოდნენ. ასეთია მის მიერ შემოთავაზებული წონიანი სასაზღვრო ამოცანები პარაბოლურად გადაგვა-



რებადი ელიფსური განტოლებებისათვის. ეს ამოცანები პრაქტიკული აუცილებლობით იყო ნაკარნახევი. მათთვის საზღვარზე ან მის ნაწილზე ირღვევა თანაბარი ელიფსურობა და ხდება პარაბოლური ან განიცდის რიგის გადაგვარებას.

პარაბოლური გადაგვარება ჰიპერბოლური განტოლებებისთვისაც იწვევს მრავალფეროვან და მეტად საინტერესო ეფექტებს. მისი ზემოქმედების სპექტრი ამ შემთხვევაშიც არანაკლებად მდიდარია, ვიდრე ელიფსური განტოლებებისათვის. ამ მიმართულებითაც ბატონ ანდროს ეკუთვნის მეტად საინტერესო და მნიშვნელოვანი შედეგები.

ჰიპერბოლური სისტემები პარაბოლური გადაგვარების გარეშეც მრავალ მოულოდნელ თვისებას ამჟღავნებენ, რაც ერთი განტოლებისათვის არაა დამახასიათებელი. ანდრო ბიწაძის მიერ მიკვლეულმა მეორე რიგის განტოლებებისაგან შედგენილმა ჰიპერბოლურმა სისტემამ ნათელყო, რომ გურსას ერთგვაროვან ამოცანას შესაძლოა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების უსასრულო რაოდენობაც კი ჰქონდეს. უფრო მეტიც, ამ ამოცანის კორექტულობაზე გადამწყვეტი ზემოქმედება შეიძლება მოახდინონ სისტემის უმცროსმა წევრებმაც კი. ამ ფაქტებმა იმპულსი მისცა მრავალ გამოკვლევას სხვადასხვა მიმართულებით.

გასული საუკუნის შუა წლებში მათემატიკამ ახალი მნიშვნელოვანი გამოყენება ჰპოვა, რაც იმ წლებში ტექნიკის განვითარების არნახული ტემპებით უნდა აიხსნას. ბგერის მახლობელი და ზებგერითი სიჩქარეების მიღწევამ მათემატიკის წინაშე მრავალი პრობლემა დასვა, მათ შორის, შერეული ტიპის განტოლებათათვისაც. ამ საკითხებმა ბევრი სპეციალისტის ყურადღება მიიპყრო – მას ცნობილი მეცნიერების ჟუკოვსკის, ჩაპლიგინის, ტრიკომის, პრანდტლის, ფონ კარმანის, გელერსტედტისა და სხვათა მრავალი შრომა მიეძღვნა. როგორც ზემოთაც აღვნიშნეთ, მათ აქტუალობას ყურადღება მიაქცია მ. ლავრენტიევმა და დააინტერესა ანდრო ბიწაძეც, რომელმაც ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებებისა და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდების შერწყმით შექმნა მძლავრი მათემატიკური აპარატი, მისადაგებული შერეული ტიპის განტოლებებისათვის დასმული ამოცანების ამოსახსნელად. შემოთავაზებული მეთოდების ეფექტურობა აპრობირებული იყო შემდეგში „ლავრენტიევ-ბიწაძის“ სახელით ცნობილი განტოლებისათვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანებზე. მათთვის ანდრო ბიწაძემ დასვა ბევრი აქტუალური ამოცანა და დაადგინა მრავალი მნიშვნელოვანი ფაქტი. ისინი ლიტერატურაში მის სახელს ატარებენ. აქ გამოვყოფთ მხოლოდ „ექსტრემუმის ბიწაძის პრინციპს“, რომლის შესახებ ზემოთაც გვქონდა საუბარი. ბატონი ანდროს გამოკვლევებამდე სამეცნიერო ლიტერატურაში კარგად ცნობილი შერეული ტიპის განტოლებისათვის ტრიკომის ამოცანასთან ერთად განიხილავდნენ დირიხლეს ამოცანასაც და ელოდებოდნენ მის ამოხსნადობას. ამ საკითხის გადაწყვეტა პრაქტიკული მიზნებისათვისაც ძალიან საინტერესო და აქტუალური იყო. ანდრო ბიწაძემ აჩვენა, რომ საზოგადოდ ეს ამოცანა არ არის კორექტულად დასმული და ამოხსნადობისათვის აუცილებელია ჰიპერბოლურობის ქვეარის შემომსაზღვრელი რკალის გარკვეული მონაკვეთის პირობებისაგან გათავისუფლება.

ზემოთ ჩვენ მოვიხსენიეთ ანდრო ბიწაძის მიერ შემოთავაზებული ერთ-ერთი ამოცანა, რომელშიც საძიებელი ამონახსნის სხვადასხვა წერტილებში სასაზღვრო მნიშვნელობები ერთმანეთთან იყო დაკავშირებული. მათემატიკოსთა ინტერესს დიდი ხანია იწვევდა და ახლაც იწვევს ამოცანები, რომელშიც ამონახსნთა სასაზღვრო მნიშვნელობები არეში მნიშვნელობებთან არის დაკავშირებული. ეს ამოცანები პირდაპირი გაგებით არ შეიძლება სასაზღვრო ამოცანებად ჩაითვალონ. მათი გამოკვლევა ბევრ პრინციპულ სიძნელესთანაა დაკავშირებული. ამ ამოცანათაგან მნიშვნელოვანი როლი აკისრია ბიწაძე-სამარსკის სახელით ცნობილ ამოცანას, რომლის შესახებაც პირველი პუბლიკაცია გამოჩენილმა მეცნიერებმა 1969 წელს გააკეთეს. ამ ამოცანისა და მისი სხვადასხვა ტიპის განზოგადებასა და გავრცობას ეძღვნება მრავალი სამეცნიერო ნაშრომი.

ბიწაძე-სამარსკის ამოცანაზე დაყრდნობით მოხდა მრავალი ახალი ტიპის არალოკალური ამოცანის ჩამოყალიბება. დღეისათვისაც მეტად აქტუალურია როგორც მათი გამოკვლევა, ასევე შესაბამისი მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგება-შესწავლა. აქვე აღვნიშნავთ, რომ აღნიშნულ ამოცანებს „ბიწაძე-სამარსკის“ სახელი პირველად პროფესორმა დავით გორდეზიანმა თავის 1970 წლის გამოკვლევაში უწოდა.

მათემატიკური მოდელირების დროს პრაქტიკული ამოცანები ძირითადად არაწრფივ ამოცანებზე დაიყვანება. ამიტომ ბუნებრივია ის დიდი ინტერესი, რომელსაც მეცნიერები მათთვის დასმული ამოცანების მიმართ იჩენენ. ასეთი განტოლებებისათვის სამწუხაროდ ხშირად ვერ მოქმედებენ ისეთი მძლავრი მეთოდები, რომლებსაც წრფივ შემთხვევაში იყენებენ. მათთვის ამონახსნათა ცალკეული კლასების მიგნებაც კი დიდ მიღწევად ითვლება. ბატონი ანდროს მიერ აგებულმა ზუსტმა ამონახსნებმა მრავალრიცხოვანი პრაქტიკული და თეორიული გამოყენება ჰპოვა. ეს ამონახსნები შესულია სპეციალურ ცნობარებში და ატარებენ მის სახელს. აღსანიშნავია, რომ შესწავლილი სახის მოდელები მოიცავენ ისეთ ცნობილ განტოლებებს, როგორებიცაა გრავიტაციული ველის, ფერომაგნეტიზმის, მაქსველ-აინშტაინის, ჰაიზენბერგის, ლორენც-კოვარიანტული და სხვ. ასევე აღსანიშნავია, რომ მათთვის ბატონ ანდროს აგებული აქვს არა მხოლოდ ზუსტი ამონახსნები, არამედ გამოკვლეული აქვს შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანებიც.

ბატონი ანდროს მრავალი მეცნიერული მიღწევა, მათ შორის ზემოთ მოყვანილი, დიდი ხანია იქცა ქვაკუთხედად, რომელზეც აგებულია თანამედროვე კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის მეცნიერული მიმართულებები.

ძალიან ძნელია მოკლედ და თან სრულყოფილად გადმოსცე ანდრო ბიწაძის ცხოვრება და მოღვაწეობა. სამეცნიერო შედეგებისა და მისი მოგონებების შესახებ საკმაო პუბლიკაციაა გაკეთებული. ჩვენ შევეცადეთ ამ წყაროებსაც ყურადღებით გავცნობოდით. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ყოველ საიუბილეო წელს ცნობილ ჟურნალებში გამოჩენილი მეცნიერები მის შემოქმედებით მიღწევებს ყოველთვის განსაკუთრებული სიფაქიზით აფიქსირებდნენ.

აკადემიკოსი ანდრო ბიწაძე არის 150-მდე სამეცნიერო ნაშრომის, რამოდენიმე ძალიან ცნობილი მონოგრაფიისა და სახელმძღვანელოს ავტორი, რომლებზეც ახლაც კეთდება უამრავი ციტირება. სხვადასხვა დროს მიწვეული იყო ლექციებისა და მოხსენებების წასაკითხად საზღვარგარეთის მრავალ ქვეყანაში: აშშ, გერმანია, ინგლისი, იაპონია, იტალია, საფრანგეთი, ფინეთი, ჩინეთი და სხვ. იგი სხვადასხვა კონფერენციებსა და სიმპოზიუმებზე, მათ შორის ყველაზე მაღალი დონის საერთაშორისო შეკრებებზედაც კი, როგორც წესი, პლენარული მომხსენებელი იყო და მისი გამოსვლები ყოველთვის დიდი ყურადღებითა და ინტერესით ისმინებოდა.

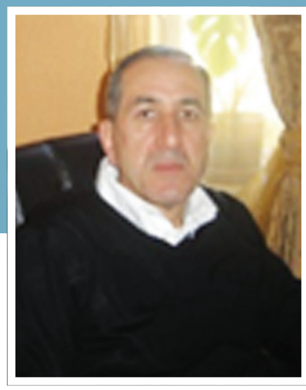
ბატონ ანდროს მიღებული აქვს მრავალი სახელმწიფო ჯილდო. არის საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ნ. მუსხელიშვილის სახელობის პრემიის პირველი ლაურეატი (1982 წ.), იყო ქ. ჭიათურის საპატიო მოქალაქე, შრომის წითელი დროშის ორდენის ორგზის კავალერი (1966, 1975 წწ.), დაჯილდოებულია ლენინის ორდენით (1971 წ.), ოქტომბრის რევოლუციის ორდენით (1986 წ.) და სხვა მრავალი მედლით.

აღვნიშნავთ, რომ გასული წლის 20-23 აპრილს შედგა ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის ტრადიციულად ქცეული XXX გაფართოებული სხდომები, რომელზეც განსაკუთრებულად აღინიშნა ა. ბიწაძის სამეცნიერო და პედაგოგიური მოღვაწეობა. ამ სემინარის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების სექციის მუშაობა კი სწორედ მისი 100 წლის იუბილეს მიეძღვნა, რომელზეც მოხსენებები ძირითადად მისმა მოწაფეებმა და მიმდევრებმა გააკეთეს. ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში 2016 წლის 20-24 სექტემბერს თბილისის მეცნიერებისა და ინოვაციის ფესტივალის დღეებში ასევე გაიმართა საერთაშორისო კონფერენცია „მათემატიკისა და ინფორმატიკის გამოყენება საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებსა და ინჟინერიაში", რომელიც მიეძღვნა ანდრო ბიწაძის 100 წლისთავს. საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის 75-ე წლისთავის იუბილეზე, აკადემიკოს ვახტანგ კოკილაშვილის ინიციატივით, აღინიშნა მეცნიერის 100 წლისთავი. ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტში, აკადემიკოს ივანე კიღურაძის ხელმძღვანელობით 2016 წლის 24-26 დეკემბერს ჩატარდა კონფერენცია „International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations – QUALITDE – 2016" მიძღვნილი ბატონი ანდროს ხსოვნისადმი. აქვე გვინდა ყურადღება გავამახვილოთ ერთ ძალიან დასაფასებელ ინიციატივაზე, რომელიც მოსკოველ მეცნიერებს ეკუთვნით. 2016 წლის 16-18 ივნისს მოსკოვში ჩატარდა ანდრო ბიწაძის ხსოვნისადმი მიძღვნილი საერთაშორისო კონფერენცია „Actual Problems in Theory of Partial Differential Equations, dedicated to the memory of A.V. Bitsadze„. ამ კონფერენციის საორგანიზაციო კომიტეტის თავმჯდომარე იყო მ. ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის რექტორი აკადემიკოსი ვ. სადოვნიჩი, თანათავმჯდომარე ვ. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორი აკადემიკოსი ვ. კოზლოვი. თავმჯდომარის მოადგილე კი მოსკოვის უნივერსიტეტის გამოთვლითი მათემატიკისა და კიბერნეტიკის ფაკულტეტის დეკანი, აკადემიკოსი ე. მოისეევი, რომელიც ბატონი ანდროს სამეცნიერო შემოქმედების ერთერთი გამოჩენილი მიმდევარია. კონფერენციის მუშაობაში მონაწილეობდა მსოფლიოს მრავალი ცნობილი მათემატიკოსი.

ბატონი ანდრო 78 წლის ასაკში, 1994 წლის 6 სექტემბერს ქალაქ მოსკოვში გარდაიცვალა და ურნა მისი ფერფლით მოსკოვის დონის მონასტრის პანთეონის კოლუმბარიუმში განისვენებს.

ანდრო ბიწაძეს ცხოვრების გზაზე არაერთხელ შეხვედრია სერიოზული სირთულეები. რაოდენ გასაკვირიც არ უნდა იყოს, ეს დიდი მეცნიერი ცხოვრების ამ მძიმე პერიოდებშიც აღწევდა შემოქმედებით წარმატებებს, რაც მის ბრწყინვალე ნიჭსა და ნებისყოფის განსაკუთრებულ სიძლიერეზე მეტყველებს. მან სამუდამო ადგილი იმ გამოჩენილ ქართველ მეცნიერთა რიგში დაიმკვიდრა, რომელთა მოღვაწეობა ყოველთვის მისაბაძ მაგალითად დარჩება შთამომავლობას. იმედია, მომავალი კიდევ უფრო ნათლად წარმოაჩენს საქართველოზე უზომოდ შეყვარებული მამულიშვილის ღვაწლსა და დამსახურებას.

თეორემა ინდექსის შესახებ



გია გიორგაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტის ასოცირებული პროფესორი

მეოცე საუკუნეში მათემატიკაში ერთ-ერთ უდიდეს აღმოჩენად ითვლება ინდექსის თეორემა, რომელიც მათემატიკის სამი ფუნდამენტური დარგის ალგებრის, ანალიზისა და ტოპოლოგიის ერთიანობას და ღრმა კავშირებს ამყარებს. თეორემის ჩამოყალიბება და დამტკიცება ეკუთვნის თანამედროვეობის ორ უდიდეს მათემატიკოსს, ამერიკელ ისადორ ზინგერს, მასაჩუსეტსის ტექნოლოგიური ინსტიტუტიდან და ინგლისელ სერ მიშელ ატიას, ოქსფორდის უნივერსიტეტიდან. თეორემის ერთ-ერთ ავტორს, მიშელ ატიას მინიჭებული აქვს მათემატიკაში ორივე უმაღლესი სამეცნიერო ჯილდო, ფილდსის ოქროს მედალი (1966 წ.) და აბელის პრემია (ი.ზინგერთან ერთად, 2001 წ.)

ვფიქრობთ, რომ ინტერესმოკლებული არ იქნება თეორემის არსის გაგება და აღმოჩენის ისტორია იმ თვალსაზრისით, რომ თეორემის კერძო შემთხვევების დამტკიცება და წინაპირობები ქართული მათემატიკური სკოლის წარმომადგენლებს ეკუთვნის.

განვიხილოთ ორგანზომილებიანი, ორიენტირებული, გლუვი მრავალსახეობა საზღვრის გარეშე. ეს ობიექტი ცალსახად განისაზღვრება ერთადერთი არაუარყოფითი მთელი რიცხვით ჰომეომორფიზმამდე (ორმხრივ უწყვეტი ურთიერთცალსახა ასახვა) სიზუსტით. ამ მთელ რიცხვს გვარი ეწოდება და მას შემდომ g-თი აღვნიშნავთ. ამრიგად, g რიცხვის დასახელებით შემოგვაქვს ერთადერთი ორგანზომილებიანი გლუვი მრავალსახეობა საზღვრის გარეშე. როდესაც $g = 0$, იგი სფეროა. ეს უკანასკნელი გამონათქვამი კი ნიშნავს, რომ ნებიმიერი 0-გვარის ორგანზომილებიანი მრავალსახეობა სფეროს ჰომეომორფულია და პირიქით, თუ მრავალსახეობა სფეროს ჰომეომორფულია, მაშინ მისი გვარი 0-ის ტოლია. უფრო სწორად, 0 გვარის მრავალსახეობა სფეროთა მთელი ოჯახია და არა აქვს მნიშვნელობა, სად მდებარობს იგი. სავალდებულო არ არის აგრეთვე იგი „კლასიკური" (წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბარი მანძილით არიან დაშორებული ერთი წერტილიდან) სფერო იყოს, მთავარია იგი „კლასიკური" სფეროს ჰომეომორფული იყოს. ამრიგად, განმარტების თანახმად, სფერო ტოპოლოგიურად ექვივალენტურია ელიფსოიდის, პირამიდის, კუბის და ყველა პლატონური ტანის, მაგრამ კუბი და პირამიდა არ არიან გლუვი მრავალსახეობები, რადგან ყოველ წერტილში ერთადერთი მხები არ გაივლება. კერძოდ, ასეთი წერტილებია მათი წვეროები. მრავალსახეობის სიგლუვეს დამატებითი, დიფერენციალური სტრუქტურა ახასიათებს. ეს სტრუქტურა, აგრეთვე, საშუალებას იძლევა მრავალსახეობაზე დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა ვაწარმოოთ. სფერო რომ ორგანზომილებიანი

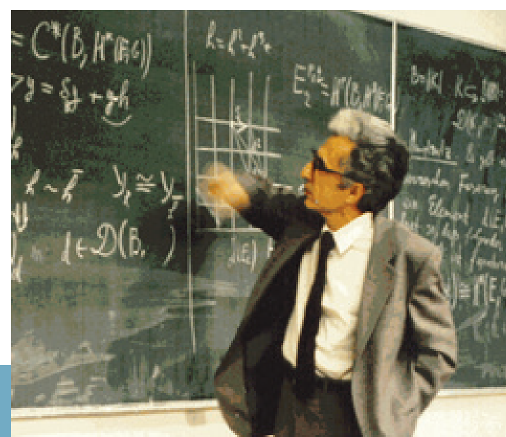
მრავალსახეობაა ეს გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ არსებობს ერთადერთი ვექტორული სივრცე, კერძოდ სიბრტყე, რომლის ღია სიმრავლეზე ჰომეომორფულად აისახება სფეროს ნებისმიერი წერტილის ღია მიდამო. ამასთან, მთელი სფეროსა და სიბრტყის, ან მისი ნაწილის ჰომეომორფული ასახვა არ არსებობს. ამრიგად, სფეროს ნებისმიერი ღია სიმრავლე სიბრტყის რაიმე ღია ქვესიმრავლეზე ჰომეომორფულად აისახება. დავფაროთ მთლიანად სფერო U_i ღია სიმრავლეებით და დავაფიქსიროთ შესაბამისი ჰომეომორფიზმებიდან φ_i ისეთები, რომლებიც ეგრეთ წოდებულ შეთანხმებულობის პირობას აკმაყოფილებენ. რაც ნიშნავს, რომ დაფიქსირებული φ_i ჰომეომორფიზმების და მათი φ_j^{-1} შებრუნებულების კომპოზიციები, როდესაც მათ აზრი აქვთ, ე.ი.როდესაც $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, აგრეთვე ჰომეომორფიზმებია. (U_i, φ_i) წყვილს საკოორდინატო რუკა ეწოდება, ხოლო $F = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i>0}$-ს კი ატლასი. ორ F_1 და F_2 ატლასს ეწოდება ეკვივალენტური, თუ მათი გაერთიანება კვლავ ატლასია. ეს იწვევს ყველა შესაძლო ატლასების დაყოფას ეკვივალენტურობის კლასებად, თითოეულ კლასს ეწოდება ტოპოლოგიური მრავალსახეობის სტრუქტურა სფეროზე. თუ ჰომეომორფიზმებს ყველგან შევცვლით დიფეომორფიზმით (ორმხრივ დიფერენცირებადი ასახვა), მივიღებთ სფეროზე დიფერენცირებად სტრუქტურას. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა სამართლიანია არა მარტო ორგანზომილებიანი, არამედ ნებისმიერი განზომილების მრავალსახეობისათვის. მხოლოდ არსებობს სხვადასხვა განზომილებიან მრავალსახეობებს შორის მნიშვნელოვანი განსხვავება. მაგალითად, ორგანზომილებიან მრავალსახეობებზე ერთადერთი დიფერენცირებადი სტრუქტურა არსებობს, მაშინ როდესაც, მაგალითად, შვიდგანზომილებიანი სფერო ამ თვისების მატარებელი არ არის. კერძოდ, შვიდგანზომილებიან სფეროზე არსებობს 28 განსხვავებული დიფერენციალური მრავალსახეობის სტუქტურა. რაც ნიშნავს იმას, რომ ისინი ყველა ერთმანეთის ჰომეომორფულები არიან, მაგრამ არა დიფეომორფულები. ამგვარი ეგზოტიკური სფეროების სრული კლასიფიკაცია მეოცე საუკუნის მეორე ნახევარში გაკეთდა, ღიად იყო დარჩენილი მხოლოდ სამგანზომილებიანი შემთხვევა და იგი ცნობილია პუანკარეს ჰიპოთეზის სახელწოდებით. ეს ჰიპოთეზა არც თუ ისე დიდი ხნის წინ, უკვე ოცდამეერთე საუკუნეში გადაიჭრა.

ორგანზომილებიანი მრავალსახეობის ტოპოლოგიური ტიპი სრულად განისაზღვრება მისი გვარის საშუალებით და ამგვარი მრავალსახეობის ტოპოლოგიური ინვარიანტი, რომელიც ეილერის მახასიათებლის სახელითაა ცნობილი, გამოისახება ფორმულით:

$$\chi(M) = 2g - 2.$$

ორგანზომილებიანი (ორიენტირებული) მრავალსახეობები იმ ტოპოლოგიურ ობიექტთა რიცხვს მიეკუთვნებიან, რომლებზედაც შეიძლება კომპლექსური სტრუქტურის შემოტანა. კერძოდ,

სერი მიშელ ატია – ფილდსის და აბელის პრემიების ლაურეატი და ბოგდან ბოიარსკი – პოლონეთის მეცნ. აკადემიის აკადემიკოსი, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საპატიო დოქტორი



საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის აკადემიკოსი ნოდარ ბერიკაშვილი. ნ.ბერიკაშვილის მიერ დამუშავებული სპექტრალური მიმდევრობის დიფერენციალები ალგებრული ტოპოლოგიის ერთ-ერთი ცენტრალური საკითხია.

შესაძლებელია ატლასის განმარტებაში მოყვანილი φ_i ჰომეომორფიზმები შევცვალოთ ორმხრივ ჰოლომორფული – ბიჰოლომორფული ასახვებით ისეთნაირად, რომ მათი ყველა შესაძლო კომპოზიციაც ჰოლომორფული იყოს. ამის შემდეგ შესაძლებელია კომპლექსური ანალიზის მეთოდების გამოყენება. ორგანზომილებიან გლუვ მრავალსახეობას კომპლექსური სტრუქტურით, ეწოდება რიმანის ზედაპირი. დივიზორი ეწოდება ნებისმიერ $D : M \to Z$ ასახვას M კომპაქტური რიმანის ზედაპირიდან მთელ რიცხვთა რგოლში, რომელიც ნებისმიერი კომპაქტის მხოლოდ სასრულ წერტილებში იღებს 0-საგან განსხვავებულ მნიშვნელობებს. კომპაქტურ რიმანის ზედაპირზე ყველა შესაძლო დივიზორების სიმრავლე ქმნიან აბელურ ადიციურ ჯგუფს, რომელიც აღინიშნება $Div(M)$-ით. იგი ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლეა. მერომორფული ფუნქციის რიგი $x \in M$ წერტილში, აღინიშნება $ord_x(f)$ სიმბოლოთი, განმარტებით ტოლია მთელი $\pm k \in Z$ რიცხვის, იმის შესაბამისად x წერტილი f ფუნქციის k რიგის ნულია, თუ k რიგის პოლუსი. ყველა სხვა შემთხვევაში f-ის რიგი 0-ად ითვლება. ეს ნიშნავს, რომ ასახვა $x \to ord_x(f)$ არის დივიზორი. f მერომორფული ფუნქციის დივიზორი აღინიშნება (f) სიმბოლოთი. f ფუნქციას ეწოდება D დივიზორის ჯერადი, თუ $(f) \geq D$. ცხადია, რომ $(f) \geq 0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც f ჰოლომორფულია. ნებისმიერი $U \subset M$ ღია სიმრავლისათვის და D დივიზორისათვის $O_D(U)$ აღვნიშნოთ U-ზე მერომორფულ ფუნქციათა სიმრავლე, რომლებიც $-D$ დივიზორის ჯერადები არიან. ეს სიმრავლე ბუნებრივი ჩადგმის ოპერაციის მიმართ ქმნის მიმართულ სპექტრს და მიღებული ზღვარი არის კონა, რომელიც აღვნიშნოთ O_D-თი.

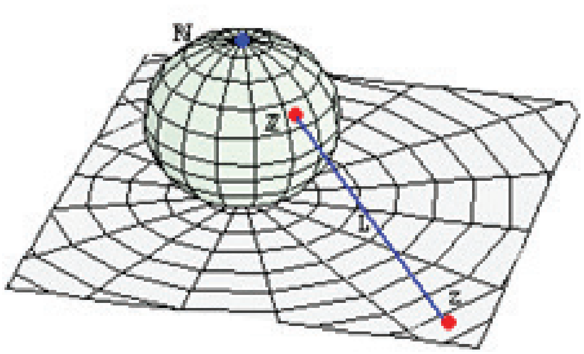
თეორემა (რიმანი-როხი) ვთქვათ M g გვარის რიმანის ზედაპირია და D მასზე ნებისმიერი დივიზორია. მაშინ M-ის $H^0(M,O_D)$ და $H^1(M,O_D)$ ნულოვანი და პირველი კოჰომოლოგიის ჯგუფები კოეფიციენტებით O_D კონაში სასრულგანზომილებიანი ვექტორული სივრცეებია და სამართლიანია ტოლობა

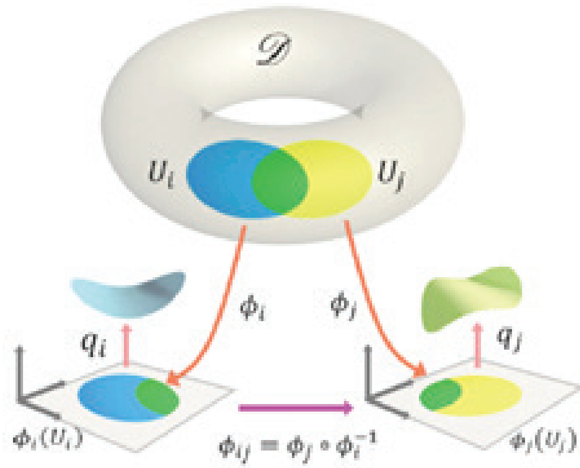
$$dimH^0(M,O_D) - dimH^1(M,O_D) = 1 - g + degD,$$

სადაც $degD$ დივიზორის ხარისხია და განმარტებით იგი $\sum_{x \in M} D(x)$ მთელი რიცხვის ტოლია.

ამ თეორემის სუსტი ვარიანტი (უტოლობის სახით) ჩამოაყალიბა და დაამტკიცა რიმანმა (1857), ხოლო მისმა მოსწავლემ გუსტავ როხმა (1865) დაამტკიცა ტოლობა. ზემოთ მოვიყვანეთ რიმან-როხის თეორემის თანამედროვე ფორმულირება. ამ თეორემის თანახმად, g გვარის რიმანის ზედაპირზე მაქსიმალური რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი მერომორფული ფუნქციების რაოდენობას, რომლებიც ჯერადები არიან D დივიზორის, გამოკლებული მაქსიმალური რაოდენობის მერომორფული 1-ფორმების რაოდენობა, რომლებიც $-D$ დივიზორის ჯერადები არიან, $1 - g + degD$ რიცხვის ტოლია. თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ დივიზორი რიმანის ზედპირზე მონიშნული სასრული რაოდენობის წერტილებია, რომლებსაც მიწერილი აქვთ შესაბამისი მთელი რიცხვები და მნიშვნელობა არ აქვს არც წერტილების კონფიგურაციას და არც მათზე მიწერილ მთელ რიცხვებს, დავასკვნით, რომ რიმან-როხის თეორემა ტოპოლოგიური ინვარიანტების საშუალებით გამოსახავს ანალიზურ ობიექტს.

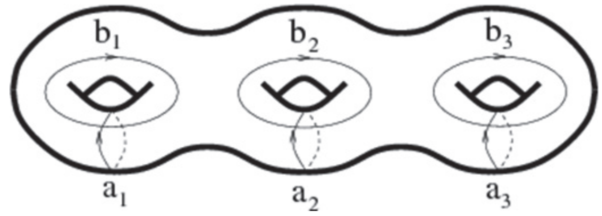
ლოკალურად ტრივიალური ფიბრაცია გარ-





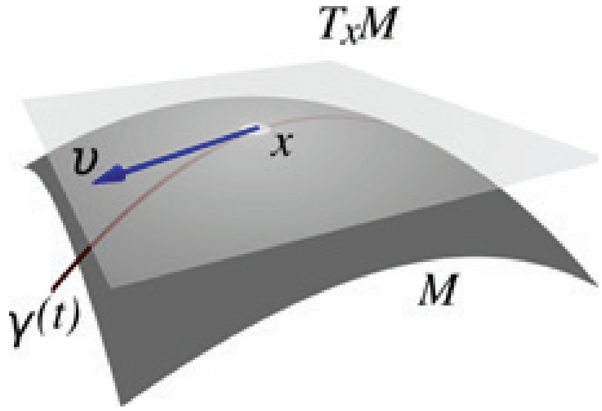
$g = 0$ (სფერო) და $g = 1$ (ტორი გვარის) რიმანის ზედაპირები.
საკოორდინატო ფუნქციები $g = 1$ გვარის რიმანის ზედაპირზე

კვეული სახის მრავალსახეობისათვის დამატებითი ზოგადი გეომეტრიული სრუქტურაა. მაგალითად, ცილინდრი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც წრფეების ერთობლიობა, რომლებიც პარამეტრიზებულია წრეწირის წერტილებით. მებიუსის ფურცელი არის მონაკვეთების ერთობლიობა, პარამეტრიზემული კვლავ წერტილებით წრეწირიდან. ორგანზომილებიანი ტორი წრეწირის წერტილებით პარამეტრიზებული წრეწირების ერთობლიობაა. აქ მოყვანილ გეომეტრიულ ობიექტებს აქვთ ერთი საერთო თვისება, ყველა მათგანი ლოკალურად არის ორი მრავალსახეობის დეკარტული ნამრავლი. ახლა მოვიყვანოთ განმარტება. ვთქვათ $p: E \to X$ უწყვეტი ასახვაა ორ E და X ტოპოლოგიურ მრავალსახეობებს შორის. ვიტყვით, რომ (E, X, p) სამეული არის ლოკალურად ტრივიალური ფიბრაცია, თუ არსებობს ისეთი F ტოპოლოგიური მრავალსახეობა და ნებისმიერი $x \in X$ წერტილსათვის არსებობს U მიდამო ისეთი, რომ $p^{-1}(U)$ ჰომეომორფულია $U \times F$ დეკარტული ნამრავლის. აღვნიშნოთ φ-თი ეს ჰომეომორფიზმი: $\varphi: p^{-1}(U) \to U \times F$, ამასთან მოითხოვება, რომ φ ჰომეომორფიზმი იყოს „ფენობრივი“, ანუ $p(\varphi(x,v)) = x$, სადაც $x \in U$ და $v \in F$. ლოკალურად ტრივიალური ფიბრაციის განმარტებაში მოყვანილ სამეულის კომპონენტებს აქვთ თავიანთი სახელები, კერძოდ, E-ს ეწოდება ფიბრაციის ტოტალური სივრცე, X-ს – ფიბრაციის ბაზა, p-ს პროექცია, ხოლო F-ს კი – ფენა. თუ ფიბრაციის ფენა ვექტორული სივრცეა, მაშინ ფიბრაციას ეწოდება ვექტორული ფიბრაცია. ცილინდრი, მებიუსის ფურცელი და ტორი, ამ განმარტების თანახმად, არიან ლოკალურად ტრივიალური ფიბრაციების ტოტალური სივრცეები, ამასთან სამივე შემთხვევაში ბაზა არის წრეწირი, ხოლო ფენა კი ცილინდრის შემთხვევაში არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, მებიუსის ფურცლისათვის მონაკვეთი, ხოლო ტორისათვის კი წრეწირი. ფიბრაციის სტრუქტურის შემოტანა ამ მრავალსახეობებში გამოწვეულია ტოტალური სივრცის შევისწავლის სურვილით ბაზის და ფენის საშუალებით, ან პირიქით. ამრიგად, გარკვეული თანადობით დაკავშირებული ტოპოლოგიური ობიექტებიდან ვსწავლობთ ერთ-ერთს, როდესაც მეორის სტრუქტურა ცნობილია. ამასთან, შესწავლა ჩვეულებრივ ხდება ალგებრული ტოპოლოგიის მეთოდებით. მაგალითად, ნებისმიერ X დიფერენცირებად მრავალსახეობას უკავშირდება ეგრეთ წოდებული მხები ფიბრაცია TX, უფრო სწორად TX არის ტოტალური სივრცე (TX, X, p) ფიბრაციის, რომლის



$g = 3$ გვარის რიმანის ზედაპირი (a_1, b_1), i = 1, 2, 3 ჰომოლოგიური ციკლების კანონიკური ბაზისით

ფენა ყოველ $x \in X$ წერტილში არის მხები T_xX ვექტორული სივრცე x-ში და მაშასადამე, TX არის T_xX ვექტორული სივრცეების გაერთიანება, სადაც x გაირბენს X მრავალსახეობას. T_xX არის x წერტილში მხები ვექტორების სივრცე, რის გამოც მისი დუალური, ანუ შეუღლებული სივრცე T_x^*X იქნება კომხები ვექტორების სივრცე, რომელიც შესაძლებელია 1-ფორმების ვექტორულ სივრცესთან გაიგივდეს. მივიღებთ კომხებ ფიბრაციას: $U_{x\in X} T_x^*X = T^*X$. ეს უკანასნელი კი შესაძლებელია ეგრეთ წოდებული დე რამის ჰომოლოგიის ჯგუფების საშუალებით შევისწავლოთ. მრავალსახეობიდან ჯგუფებზე გადასვლა – ეს არის ალგებრული ტოპოლოგიის მეთოდი ტოპოლოგიური ობიექტის ალგებრულად დასახასიათების მიზნით. ფიქსირებული ბაზის მრავალსახეობაზე ყველა შესაძლო ფიბრაციების კლასიფიკაცია ხდება ფიბრაციის მახასიათებელი კლასების საშუალებით, რომლებიც ჩვეულებრივ ბაზის კოჰომოლოგიის ჯგუფის ელემენტებია. თუ ორი ფიბრაციის მახასიათებელი კლასები განსხვავებულია, მაშინ ფიბრაციები ექვივალენტურები არ არიან, ანუ მათ შორის არ არსებობს იზომორფიზმი. მაგალითად, სფეროზე ერთგანზომილებიანი კომპლექსური ვექტორული ფიბრაციის ტოპოლოგიური და ანალიზური ტიპი სრულად განისაზღვრება მისი ჩერნის რიცხვით, რომელიც სფეროს პირველი კოჰომოლოგიის ჯგუფის $H^1(S^2,Z) \cong Z$ ელემენტია. ეს მთელი რიცხვი კი ემთხვევა $\gamma: S^1 \to GL_1(C)$ გლუვი ასახვის ტოლოგიურ ხარისხს, რადგან ტოპოლოგიური ხარისხი ჰომოტოპიურ ასახვებს ტოლი აქვთ, გამოდის, რომ ერთგანზომილებიანი ვექტორული ფიბრაციებსა და $\gamma: S^1 \to GL_1(C)$ გლუვი ასახვების ჰომოტოპიურ კლასებს შორის არსებობს ბიექცია და ორივე კლასი შესაბამისი (ტოპოლოგიური ინვარიანტით) ასახვის ხარისხით სრულად განისაზღვრება. ანალოგიურად, n-განზომილებიანი კომპლექსური ვექტორული ფიბრაციის ტოპოლოგიური ტიპი განისაზღვრება $\gamma: S^1 \to GL_n(C)$ ასახვის დეტერმინანტის ტოპოლოგიური ხარისხით. ხოლო რაც შეეხება ჰო-



მხები სივრცე

ლომორფულ ტიპს, ეს რიცხვი უკვე საკმარისი არ არის, მაგრამ ცნობილია, რომ ნებისმიერი ჰოლომორფული ფიბრაცია ბაზით სფერო, იშლება ერთგანზომილებიანი კომპლექსური ფიბრაციების პირდაპირ ჯამად, თითოეულ მათგანს აქვს შესაბამისი ჩერნის რიცხვი, მათი ჯამი ტოლია მოცემული ფიბრაციის ჩერნის რიცხვის. ამიტომ ჰოლომორფული ტიპი განისაზღვრება მთელ კოორდინატებიანი ვექტორით, რომლის თითოეული კოორდინატი ერთგანზომილებიანი ფიბრაციის ჩერნის რიცხვია. თუ E n-განზომილებიანი ჰოლომორფული ფიბრაციაა S^2-სფეროზე, მაშინ ის ფაქტი, რომ E-ს ჩერნის რიცხვი ტოლია k-სი ჩაიწერება სახით $c(E) = k$, ხოლო დებულება იმის შესახებ, რომ E არის ერთგანზომილებიანი ფიბრაციების პირდაპირი ჯამი იწერება შემდეგნაირად: $E = \oplus_{j=1}^{n} E_j$. როგორც უკვე აღვნიშნეთ ადგილი აქვს ტოლობას: $\sum_{j=1}^{n} c(E_J) = k$ და $K = (k_1, \ldots, k_n) \in Z^n$, სადაც $c(E_J) = k_j$ განსაზღვრავს E_j ფიბრაციის ჰოლომორფულ ტიპს. ფიბრაციის კვეთა ბაზის ღია ქვესიმრავლიდან ფიბრაციის ტოტალურ სივრცეში ისეთ ასახვას ეწოდება, რომლის კომპოზიცია პროექციასთან იგივური ასახვაა ბაზაში. თუ კვეთა მთელს ტოტალურ სივრცეზეა განსაზღვრული, მაშინ ასეთ კვეთას გლობალური ეწოდება. ლოკალური კვეთა, როგორც განმარტებიდან ჩანს, ვექტორული ფუნქციაა მნიშვნელობებით ფენაში, ხოლო გლობალური კვეთა კი შეთანხმებული უნდა იყოს ფიბრაციის გადასვლის ფუნქციებთან. გავაიგივოთ ორგანზომილებიანი სფერო ($g = 0$ გვარის რიმანის ზედაპირი) კომპლექსურ სიბრტყესთან, რომელსაც დამატებული აქვს ერთი წერტილი – უსასრულობა: $S^2 = C \cup \infty$. განვიხილოთ სფეროს დაფარვა ორი U_a და U_2 ღია სიმრავლით, სადაც $U_1 = S^2 - \{P\}$, $U_2 = S^2 - \{N\}$, P და N აღნიშნავენ, შესაბამისად, სფეროს სამხრეთ და ჩრდილოეთ პოლუსებს. მაშინ $U_1 \cap U_2$ ბიჰოლომორფულად ეკვივალენტურია კომპლექსური სიბრტყის, საიდანაც ამოგდებულია კოორდინატთა სათავე: $U_1 \cap U_2 \cong C - \{0\}$. განვიხილოთ ერთეულ რადიუსიანი S^1 წრეწირი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. მაშინ, როგორც ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ, γ: $S^1 \to GL_n(C)$ მატრიც-ფუნქცია განსაზღვრავს ერთადერთ ჰოლომორფულ E ვექტორულ ფიბრაციას S^2-ზე. ამ ფიბრაციის ჰოლომორფული კვეთების სიმრავლე აღიწერება $H^0(S^2, O(E))$ სფეროს ნულოვანი კოჰომოლოგიის ჯგუფით კოეფიციენტებით E ფიბრაციის ჰოლომორფული კვეთების კონაში. ცნობილია, რომ ეს ჯგუფი ვექტორული სივრცეა და მისი განზომილება გამოითვლება E-ს მახასიათებელი რიცხვით. კერძოდ, სამართლიანია ტოლობა:

$$dim_C H^0\left(S^2, \mathcal{O}\left(E\right)\right) = \begin{cases} c\left(E\right)+1, c\left(E\right) \geq 0; \\ 0, c\left(E\right) < 0. \end{cases}$$

ახლა დავსვათ ასეთი ანალიზური ამოცანა, რომელიც რიმან-ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის სახელითაა ცნობილი და მდგომარეობს ისეთი ვექტორულ ფუნქციათა f_+, f_- წყვილის პოვნაში, სადაც $f_+(z)$ ჰოლომორფულია U_1-ში, $f_-(z)$ ჰოლომორფულია U_2-ში და აქვს სასრული რიგი უსასრულობაში, f_+ და f_- უწყვეტად გაგრძელებადნი არიან საზღვრამდე და აკმაყოფილებენ ეგრეთ წოდებულ სასაზღვრო პირობას $f_+(t) = \gamma(t)f_-(t) + g(t)$, სადაც $\gamma(t)$ საზღვარზე, ანუ S^1 განსაზღვრული, უწყვეტი გადაუგვარებელი მატრიცული ფუნქციაა, $g(t)$ – კი მოცემული ვექტორული ფუნქციაა. ეს ამოცანა ექვივალენტურია გარკვეული სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემისა იმ აზრით, რომ ერთი მათგანის ამონახსნი მეორის ამონახსნიცაა. ამ ამოცანის ინვარიანტია ind_A ანალიზური ინდექსი, რომელიც განმარტებით $\gamma(t)$ მატრიცული ფუნქციის დეტერმინანტის არგუმენტის ნაზრდის ტოლია S^1 წრის მიმართ. ცნობილია, რომ სასაზღვრო ამოცანის ანალიზური ინდექსი პასუხისმგებელია ამოცანის ამოხსნადობაზე. კერძოდ, როდესაც $ind_A > 0$, ამოცანას ამონასხი არ აქვს, ხოლო როდესაც $ind_A \leq 0$, ამოცანის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა რაოდენობაა $-ind_A + 1$. მეორეს მხრივ, სასაზღვრო ამოცანაში მოცემული $\gamma(t)$ მატრიცული ფუნქცია ცალსახად განსაზღვრავს ჰოლომორფულ ფიბრაციას სფეროზე, რომლის ჩერნის რიცხვით ამ ფიბრაციის ჰოლომორფული კვეთების სივრცის

განზომილება გამოისახება. ეს კვეთები კი რიმან-ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნებია და ამრიგად, ანალიზური ინდექსი ტოლია ფიბრაციის ჩერნის რიცხვის. მუსხელიშვილის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების თეორიის თანახმად, სასაზღვრო ამოცანის ანალიზური ინდექსი შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორის ინდექსის ტოლია. მაშასადამე, უკანასკნელი მსჯელობა მიუთითებს იმ ფაქტს, რომ ანალიზური ინდექსი ტოპოლოგიური ინვარიანტით, ჩერნის რიცხვით გამოისახება. ამ მარტივი მსჯელობით მივედით მნიშვნელოვან ჰიპოთეზამდე: ანალიზური ობიექტი – სასაზღვრო ამოცანის ინდექსი, არ იცვლება ჰომეომორფიზმის დროს. ამის შემდეგ ბუნებრივია დავსვათ ამოცანა: გამოვკვეთოთ რაც შეიძლება ანალიზურ ობიექტთა ფართო კლასი, რომელთა შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლები ტოპოლოგიური ინვარიანტები არიან. ერთ-ერთი ასეთი ინვარიანტია, აგრეთვე, მრავალსახეობის გლუვი კვეთების სივრცეზე განსაზღვრული ელიფსური ოპერატორის ინდექსი, რომლის ინვარიანტულობა დაამტკიცა მ.ატიამ და ი.ზინგერმა. ამ თეორემამ ბიძგი მისცა ანალოგიური შედეგების მთელ სერიას და გამოყენება ჰპოვა თეორიულ ფიზიკაში.

განვიხილოთ A წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი, რომელიც მოქმედებს n ნამდვილი ცვლადის გლუვი ფუნქციების სივრცეზე:

$$A: C^{\infty}(R^n) \to C^{\infty}(R^n).$$

A ოპერატორი წარმოიდგინება კერძო წარმოებულების სასრული რაოდენობის წრფივ კომბინაციად: $A = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}$, სადაც $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ მულტიინდექსია, ხოლო $a_{\alpha}(x)$ კი $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ცვლადის გლუვი მატრიცული ფუნქციებია. $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$-ს უდიდეს მნიშვნელობას ეწოდება დიფერენციალური ოპერატორის რიგი. აღვნიშნოთ იგი m-ით.

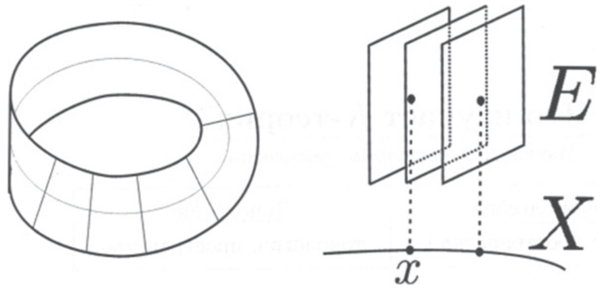
$$a(x,\xi) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha_j |\alpha|} =$$
$$a_m(x,\xi) + a_{m-1}(x,\xi) + \ldots + a_0(x,\xi)$$

ფუნქციას, რომელიც $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ცვლადის მიმართ მრავალწევრია, ეწოდება A ოპერატორის სიმბოლო. $a_m(x, \xi)$ შესაკრებს, რომელიც ერთგვაროვანი მრავალწევრია და მაქსიმალური ხარისხის მონომია ξ-ს მიმართ, ეწოდება მთავარი სიმბოლო. თვით A ოპერატორი $a(x, \xi)$-სგან მიიღება მასში ξ-ს ნაცვლად $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ ოპერატორის ჩასმით: $A = \left(x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$. მთავარი სიმბოლოს გამოყოფის არსი მდგომარეობს მის ინვარიანტულ ბუნებაში. კერძოდ, კოორდინატთა სისტემის შეცვლის შემთხვევაში მთავარი სიმბოლო ξ-ს მიმართ იცვლება (0,1) ვალენტობის მქონე „ტენზორული კანონით“. ე.ი ξ ცვლადი კოორდინატთა გარდაქმნით იცვლება როგორც კომხები ვექტორი. მაშასადამე, მთავარი სიმბოლო კორექტულად განსაზღვრული ფუნქციაა R^n-ის კომხებ ფიბრაციაზე. ამრიგად, ეს ფუნქცია დამოკიდებული არ არის R^n-ში მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე. რაც თავის მხრივ იმას ნიშნავს, რომ დიფერენციალური ოპერატორის ზემოთ მოყვანილი განმარტება გავრცელდება მრავალსახეობებზე, მხოლოდ ამ შემთხვევაში დიფერენციალური ოპერატორი განისაზღვრება მთავარ სიმბოლომდე სიზუსტით. გარდა ამისა, თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ A დიფერენციალური ოპერატორი წარმოიდგინება

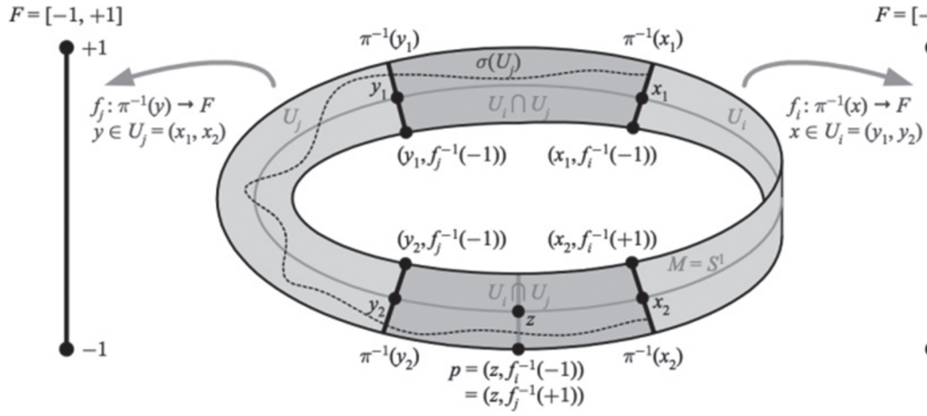
$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} e^{i(x,\xi)} a(x,\xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

ინტეგრალური ოპერატორის სახით, სიმბოლოზე გარკვეული შეზღუდვების დადებით (რაც განპირობებულია ინტეგრალის არსებობით) შესაძლებელია მივაღწიოთ ოპერატორთა კლასის გაფართოებას იმგვარად, რომ მიღებული სიმრავლე შეიცავდეს ე. წ. მრავალგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ ოპერატორებსაც. ოპერატორთა ასეთი კლასის ელემენტებს ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორები ეწოდება. ფსევდოდიფერენციალურ ოპერატორს ეწოდება ელიფსური, თუ მისი სიმბოლოს დეტერმინანტი 0-სგან განსხვავებულია, როდესაც $|\xi| > \varepsilon$.

ვთქვათ E და F ორი ტოლგანზომილებიანი ვექტორული ფიბრაციებია X მრავალსახეობაზე. D დიფერენციალური ოპერატორი მოქმედებს ამ ფიბრაციების კვეთების, რომლებიც აღვნიშნოთ



ვექტორული ფიბრაცია



მებიუსის ფურცელი როგორც ფიბრაცია. ტრივიალიზაცია (ლოკალურად დეკარტულ ნამრავლად წარმოდგენა) და კვეთა (ასახვა ბაზიდან ტოტალურ სივრცეში, რომელიც ფენის მხოლოდ ერთ წერტილში გაივლის)

შესაბამისად $\Gamma(E)$ და $\Gamma(F)$ სიმბოლოებით, სივრცეზე: $D: \Gamma(E) \to \Gamma(F)$. ლოკალურად ამ ოპერატორს ზემოთ აღწერილი სახე აქვს და ამრიგად არის მატრიცი, რომლის ელემენტებია კერძო წარმოებულები $x_i, i = 1, ..., dimX$ ცვლადების მიმართ. დავუშვათ T^*X კომხები ვექტორული ფიბრაციაა და SX არის T^*X-ში ერთეულრადიუსიანი სფეროების ფიბრაცია, ხოლო p: $SX \to X$ კი ბუნებრივი პროექციაა. D ოპერატორის სიმბოლო, რომელიც აღვნიშნოთ $\sigma(D)$-თი, ახორციელებს ჰომომორფიზმს D-თი ასოცირებულ ვექტორულ ფიბრაციებს შორის:

$$\sigma(D) : p^*E \to p^*F,$$

ამასთან იგი არის იზომორფიზმი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც D ელიფსურია. ელიფსური ოპერატორის ერთ-ერთი თვისებაა ის, რომ $KerD$ და $CokerD$ სასრულგანზომილებიანი ვექტორული სივრცეებია. ამ ვექტორული სივრცეების განზომილებების $I(D) = dimKerD - dimCokerD$ სხვაობას ეწოდება D ოპერატორის ინდექსი.

თეორემა (ატია-ზინგერი). X მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ნებისმიერი D ელიფსური ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორის ინდექსისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$I(D) = \{c(D) \cdot t(X)\}[X],$$

სადაც მარჯვენა მხარეს მოთავსებულ გამოსახულებაში $c(D)$ და $t(X)$ არიან X მრავალსახეობის ჩერნის და ტოდის მახასიათებელი რიცხვები.

აქ მოვიყვანეთ ატია-ზინგერის თეორემის პირველი ფორმულირება. ამ სახით გამოქვეყნდა თეორემა 1963 წელს ჟურნალ „Bulletin of the American Mathematical Society"-ის მაისის ნომერში (ნაშრომი რედაქციას ჩაბარდა თებერვალში). იმავე წლის აგვისტოში ი.ზინგერმა თეორემა წარადგინა მოხსენების სახით ნოვოსიბირსკში, საბჭოთა-ამერიკულ სიმპოზიუმზე კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებში. სიმპოზიუმის ერთ-ერთი ორგანიზატორი (სობოლევთან და ლავრენტიევთან ერთად) და საორგანიზაციო კომიტეტის თავმჯდომარე იყო ილია ვეკუა, რომელიც იმ დროს ნოვოსიბირსკის სახელმწიფო უნივერსიტეტის რექტორი იყო. აუცილებელია აღინიშნოს ამ სიმპოზიუმის შესახებ, არამარტო იმის გამო, რომ ნოვოსიბირსკში მოხდა საბჭოთა და ამერიკელი დარგის წამყვანი სპეციალისტების პირველი ღია შეხვედრა, არამედ იმიტომ, რომ ამ სიმპოზიუმს დღემდე თვლიან ერთ-ერთ კარგად ორგანიზებულ და საქმიან სამეცნიერო ფორუმად. თითქმის ნახევარი საუკუნის შემდეგ, ამგვარად მოიხსენიებს ამ სიმპოზიუმს მისი მონაწილე ამერიკის მხრიდან ლუის ნირენბერგი ინტერვიუში, რომელიც მან აბელის პრემიის მინიჭებასთან (2015 წ.) დაკავშირებით მისცა. სიმპოზიუმის მონაწილეთაგან ნირენბერგს გარდა მომდევნო წლებში აბელის პრემიის ლაურეატები გახდნენ ი. ზინგერი (2004 წ.) და პ.ლაქსი (2005 წ.). ამერიკელ მეცნიერთა დელეგაციას ხელმძღვანელობდა რიჰარდ კურანტი, მომხსენებელთა შორის იყვნენ ფილდსის პრემიის ლაურეატები (1936 წ.) ლ.ალფორსი და ჯ.დუგლასი, ადრეთვე კ.ფრიდრიხსი, ა.ზიგმუნდი, დ.სპენსერი, ჩ.მორი, ს.ბერგმანი, ა.კალდერონი, ფ.ბრაუდერი, მ.პროტერი და სხვები. საბჭოთა მხრიდან სიმპოზიუმის მუშაობაში მონაწილეობდა ცნობილი საბჭოთა მათემატიკოსი იზრაელ გელფანდი, მის მონაწილეობას განსაკუთრებით გამოვყოფთ იმის გამო, რომ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ სასაზღვრო ამოცანა კერძოწარმოებულებიანი ელიფსურ განტოლებათა სის-

ტემისათვის ტოპოლოგიური ხასათის ამოცანაა, ეკუთვნის გელფანდს. ამოცანის ისტორია დაიწყო გელფანდის ნაშრომთა ციკლით, რომელიც 1959-1960 წლებში გამოქვეყნდა წამყვან საბჭოთა მათემატიკურ ჟურნალში „Успехи математических наук“. ერთ-ერთი ნაშრომი მთლიანად ეძღვნებოდა ელიფსურ განტოლებათა სისტემებს. ამ დროს უკვე გამოსული იყო ილია ვეკუას ცნობილი მონოგრაფია განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციათა თეორიაში, სადაც კომპლექსური ანალიზის მეთოდებით სრულად იყო შესწავლილი სიბრტყეზე ელიფსურ განტოლებათა სისტემები, ხოლო მათი ტოპოლოგიური კლასიფიკაცია (სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით) გაკეთებული იყო ილია ვეკუას პოლონელი მოწაფის, ბოგდან ბოიარსკის მიერ. ამ და რამდენიმე სხვა ნაშრომაზე დაყრდნობით ი.გელფანდმა წამოაყენა ზოგადმათემატიკური ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ელიფსურ განტოლებათა სისტემის ინდექსი ჰომოტოპიური ინვარიანტია. იატია-ზინგერის თეორემა გაცილებით მეტია, ვიდრე გელფანდის ჰიპოთეზის დამტკიცება. ამ თეორემის კერძო შემთხვევაა, მაგალითად, რიმან-როხის თეორემა თავისი განზოგადებებით, ინდექსის ზემოთ მოყვანილი ფორმულა რიმან-ჰილბერტის მატრიცული სასაზღვრო ამოცანისათვის, სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ინდექსის ინვარიანტულობა ჰომოტოპიის მიმართ და სხვა. თეორემა იმდენად თვისობრივად ახალი შედეგი იყო მათემატიკაში, რომ მან მრავალი ფუნდამენტური ფაქტი დაჩრდილა.

იმავე პერიოდში სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორის ინდექსის ინვარიანტულობის პრობლემა აქტუალური იყო ქართველი მათემატიკური სკოლების წარმომადგენლებისათვის. როგორც ვთქვით, გელფანდის ჰიპოთეზა ვეკუას და ბოიარსკის შრომებზე დაყრდნობით წარმოიშვა. ჟურნალ საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის მოამბეში 1964 წელს გამოქვეყნდა (ნაშრომი რედაქციას ჩაბარდა 1963 წლის ივნისში) ქართველი მათემატიკოსის ნოდარ ბერიკაშვილის ნაშრომი „ორგანზომილებიან მრავალსახეობაზე სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ინდექსის შესახებ“, რომელშიც დამტკიცებული იყო, რომ ორგანზომილებიან კომპაქტურ მრავალსახეობაზე განსაზღვრული სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორის ინდექსი ტოლია ოპერატორის სიმბოლოსაგან ინდუცირებული გარკვეული ასახვის ტოპოლოგიური ხარისხის. აღნიშვნის ღირსია ის ფაქტი, რომ სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გლობალური თეორია ამ პერიოდში ჩასახვის სტადიაში იყო და ნ.ბერიკაშვილის ნაშრომი ეკუთვნის იმ დროის პიონერულ და ელეგანტურ ნაშრომთა რიცხვს. დაახლოებით იმავე დროს, 1963 წლის ოქტომბრის ნომერში (ნაშრომი რედაქციას ჩაბარდა აგვისტოში) ჟურნალ „Bulletin De L'Academie Polonaise Des Sciences“ გამოქვეყნდა პოლონელი მათემატიკოსის ბოგდან ბოიარსკის ნაშრომი „სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ინდექსის შესახებ“, სადაც მიღებული იყო ფორმულა n-განზომილებიან მრავალსახეობაზე მოცემული განტოლებათა სისტემის ინდექსისათვის მრავალსახობის ინვარიანტების ტერმინებში, მხოლოდ ეს ინვარანტები ცხადად არ იყო მითითებული. ამის შემდეგ ბოიარსკიმ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემების ინდექსის კვლევას კიდევ ორი ნაშრომი მიუძღვნა, მაგრამ მის მიერ მიღებული შედეგები ატია-ზინგერის თეორემის კერძო შემთხვევები გამოდგა. ბოიარსკის ეს ნაშრომები იყო მისი ადრინდელი სამეცნიერო ინტერესების ბუნებრივი გაგრძელება, რის გამოც მისი ნაშრომთა ციკლი სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაში სისტემის კერძო ინდექსების მდგრადობის თეორემასთან ერთად, მრავალმხრივ საინტერესო გამოკვლევებია. ამასთან, გასათვალისწინებელია ის ფაქტიც, რომ დღემდე ჩნდება ინდექსის თეორემის სხვადასხვა მოდიფიკაციები და განზოგადოებები. ამის საილუსტრაციოდ საკმარისია აღვნიშნოთ ალან კონის (ფილდსის პრემია 1982 წ.) ინდექსის თეორემა არკომუტაციურ გეომეტრიაში და ედუარდ ვიტენის (ფილდსის პრემია 1990 წ.) ინდექსის თეორემის შორს მიმავალი ანალოგია თეორიულ ფიზიკაში.

ლიტერატურა:

1. Гельфанд И.М. Об эллиптических уравнениях. УМН, 25, 3, 1960

2. Atiyah M.F.,Singer I.M. The index of elliptic operators on compact manifolds. Bull.AMS, 69,1963.

3. Bojarski B. On the index problem for system of singular integral equations. Bull. Pol. Acad.Sci. 15,10,1963.

4. Берикашвили Н. Об индексе сингулярных интегральных уравнений на двумерных многообразиях. Сообщ. АН ГССР, 34, 2, 1964

5. Bojarski B.,Giorgadze G. Some geometrical and analytical aspects of the stable partial indices. Proc. I.Vekua Institute of Appl.Math. 61-62, 2011-2012.

ამოცანები ექსტრემუმზე მათემატიკის სასკოლო კურსში

ბეჟან ღვაბერიძე

ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოცირებული პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ომარ ფურთუხია

ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოცირებული პროფესორი, მათემატიკის დეპარტამენტის ხელმძღვანელი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

განათლებისადმი თანამედროვე მიდგომები მოითხოვს განსაკუთრებული ყურადღება მივაქციოთ გამოყენებით ასპექტებს მათემატიკის სწავლებაში. ერთ-ერთი ასეთი საკითხია ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღება. მათემატიკის იმ ამოცანებს შორის, რომლებიც წყვეტენ ოპტიმალური ამორჩევის პრობლემებს, გამოვყოფთ ამოცანებს ექსტრემუმზე.

ადამიანის მოღვაწეობის ყველა სფეროში წარმოიშობა მიზნის მიღწევის არსებული საშუალებებიდან საუკეთესოს ანუ ოპტიმალურის არჩევის პრობლემა. ასეთი ტიპის ამოცანები პირველად ანტიკურ ეპოქაში გაჩნდა და ისინი მათემატიკის განვითარების მთელი ისტორიის მანძილზე ინარჩუნებენ აქტუალობას. მათემატიკის ენაზე ოპტიმალურის ამორჩევა დაიყვანება გარკვეული ფუნქციის მაქსიმუმის ან მინიმუმის, ანუ ექსტრემუმის პოვნაზე. ამიტომ ასეთ ამოცანებს მათემატიკაში ექსტრემალურ ამოცანებს უწოდებენ. ფუნქციის ცვლადი (ცვლადები) შეიძლება აკმაყოფილებდეს (აკმაყოფილებდნენ) გარკვეულ შეზღუდვებს, რომლებიც მოცემულია განტოლებების ან/და უტოლობების სახით. მათ პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები ან სხვანაირად მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანები ეწოდება.

უმარტივეს ექსტრემალურ ამოცანებს ჩვენ მათემატიკის სასკოლო კურსშიც ვხვდებით (იხ. [1], [2]). ექსტრემალური ამოცანების თეორია ზოგადი სახით კი უნივერსიტეტში ისწავლება. ექსტრემალური ამოცანების დიდი ნაწილი რეალ-

ური (პრაქტიკული) სიტუაციების მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს. პრაქტიკული ამოცანის შესაბამისი ადეკვატური მოდელის აგება რთულ ამოცანებში გარკვეულ ძალისხმევას საჭიროებს. სასკოლო კურსის ამოცანებში ძირითადად ცნობილია რა არის მოცემული და რა მოითხოვება, თუმცა მოდელირების ელემენტების ცოდნა მარტივი პრაქტიკული ხასიათის ამოცანებისთვის, მოსწავლეების მათემატიკური აზროვნების და შემოქმედებითი კვლევის უნარების განვითარების ერთ-ერთ ხელშემწყობ ფაქტორად მიგვაჩნია.

ბოლო წლებში მისაღებ გამოცდებზე ხშირად გვხვდება კვადრატული სამწევრის (ან სხვა ფუნქციის) ექსტრემუმთან დაკავშირებული ამოცანები. არასტანდარტულად დასმული ამოცანა „ექსტრემუმზე“ აბიტურიენტების დიდი ნაწილის დაბნეულობას იწვევს. სამწუხაროდ ამოცანებს ექსტრემუმზე მათემატიკის სასკოლო კურსში არასაკმარისი ყურადღება ეთმობა. ქვემოთ განხილულია სხვადასხვა ამოცანა ელემენტარული მათემატიკიდან, რომლებიც ფუნქციების ექსტრემალური მნიშვნელობების პოვნასთანაა დაკავშირებული. ამოცანების ამოხსნისას წარმოებული არ გამოიყენება.

ელემენტარულ მათემატიკაში არის მთელი რიგი მეთოდებისა, რომელთა გამოყენებითაც შეიძლება ამოიხსნას მარტივი ექსტრემალური ამოცანები. მაგალითად, საშუალოების შესახებ თეორემის გამოყენებით (იხ. [2]), გადარჩევის მეთოდებით, ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენით, სიმეტრიის გამოყენებით და ა.შ. ასეთი ამოცანების განხილვას დავიწყებთ შედარებით მარტივი ამოცანებით.

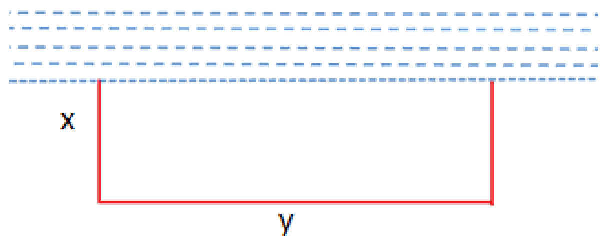
ამოცანა 1. რიცხვი 34 წარმოადგინეთ ისეთი ორი შესაკრების სახით, რომ პირველი შესაკრების კვადრატისა და მეორის ჯამი იყოს მინიმალური.

ამოხსნა. ვთქვათ, ეს შესაკრებებია x და y, მაშინ $y = 34 - x$. გვაინტერესებს $f(x) = x^2 - x + 34$ ფუნქციის მინიმუმი. მინიმუმი მიიღწევა პარაბოლის წვეროში, ანუ

$$x = \frac{1}{2} \text{ და } y = 33\frac{1}{2}.$$

ამოცანა 2. ფერმერმა უნდა შემოღობოს მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთი, რომელსაც ერთი მხრიდან მდინარე ესაზღვრება. როგორი ზომების მართკუთხედი უნდა შემოღობოს ფერმერმა, რომელსაც აქვს 1000 მეტრი შემოსაღობი მასალა და მისი მიზანია ამ მართკუთხედის ფართობი იყოს უდიდესი?

ამოხსნა. ვთქვათ, მართკუთხედის ზომებია x და y, მაშინ $2x + y = 1000$. გვაინტერესებს $f(x) = x(1000 - 2x)$ ფუნქციის მაქსიმუმი. ეს მაქსიმუმი მიიღწევა $x = 250$ წერტილში. შესაბამისად, საძიებელი მართკუთხედის ზომებია 250 და 500 მ.

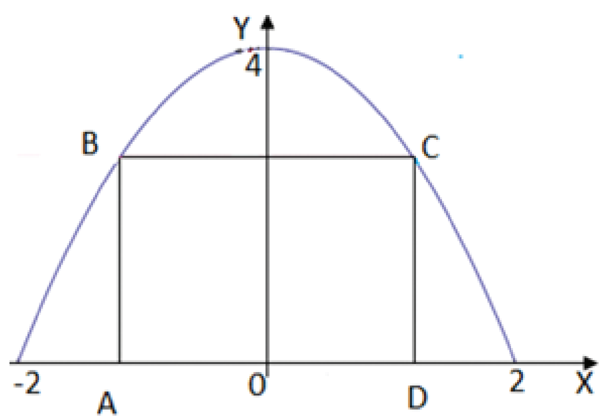


ნახ. 1.

ამოცანა 3. სიბრტყეზე $y = 4 - x^2$ პარაბოლით და Ox ღერძით შემოსაზღვრულ ფიგურაში ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის ორი წვერო პარაბოლაზეა, ორი კი Ox ღერძზე. იპოვეთ ასეთი მართკუთხედების პერიმეტრებს შორის უდიდესი.

ამოხსნა. ვთქვათ, $OD = a$, მაშინ მართკუთხედის ერთი გვერდი $AD = 2a$, მეორე გვერდი კი $CD = 4 - a^2$. პერიმეტრი იქნება $P(a) = 2(2a + 4 - a^2)$ კვადრატული ფუნქცია, რომლის მაქსიმუმი მიიღწევა $a = 1$ წერტილში. შესაბამისად,

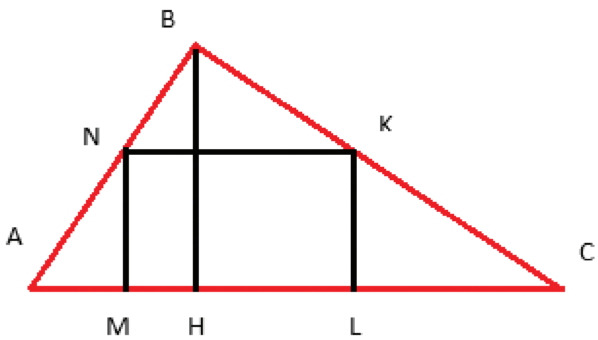
$$P_{max}(a) = 10.$$



ნახ. 2

ამოცანა 4 ([3]). მოცემულ სამკუთხედში ჩავხაზოთ უმცირესი დიაგონალის მქონე მართკუთხედი ისე, რომ მართკუთხედის ორი წვერო იყოს სამკუთხედის ერთ-ერთ გვერდზე, ხოლო ორი სამკუთხედის ორ სხვა გვერდზე.

ამოხსნა. ვთქვათ, MNKL საძიებელი მართკუთხედია და $NK = x$, $KL = y$ (ნახ. 3). აღვნიშნოთ $AC = a$, ხოლო $BH = h$. BNK და ABC სამკუთხედების მსგავსებიდან გვაქვს $\frac{x}{a}=\frac{h-y}{h}=k$, სადაც k მსგავსების კოეფიციენტია. აქედან $y = h(1-k)$ და $x = ak$. უნდა ვიპოვოთ



ნახ. 3.

$f(k) = x^2 + y^2 = a^2k^2 + h^2(1-k)^2 = (a^2+h^2)k^2 - 2kh^2 + h^2$ ფუნქციის (დიაგონალის კვადრატის) მინიმუმი.

ამ კვადრატული ფუნქციის მინიმუმი მიიღწევა როცა $k=\frac{h^2}{a^2+h^2}$. ამასთანავე

$$f_{\min}(k)=\frac{a^2h^2}{a^2+h^2}=\frac{4S^2}{a^2+h^2},$$

სადაც S არის ABC სამკუთხედის ფართობი.

ეს ამოხსნა არ ჩაითვლება სრულყოფილად თუ ჩვენ არ მივუთითეთ სამკუთხედის გვერდი, რომელზეც განთავსდება მართკუთხედის ორი წვერო. უნდა ავირჩიოთ ის გვერდი, რომლისთვისაც გვერდის კვადრატისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის კვადრატის ჯამი იქნება მაქსიმალური.

ვთქვათ, a და b სამკუთხედის გვერდებია და h_a და h_b შესაბამისად მათზე დაშვებული სიმაღლეებია. განვიხილოთ სხვაობა

$$h_a^2+a^2-h_b^2-b^2=a^2-b^2+\frac{4S^2}{a^2}-\frac{4S^2}{b^2}=$$
$$(a^2-b^2)(1-\sin^2\alpha),$$

სადაც α კუთხეა a და b გვერდებს შორის. რადგან $\sin^2\alpha < 1$, განხილული სხვაობა დადებითი იქნება როცა $a > b$. ამრიგად, მართკუთხედის ორი წვერო უნდა განთავსდეს სამკუთხედის უდიდეს გვერდზე.

ამოცანა 5 ([4]). იპოვეთ a პარამეტრის ყველა დადებითი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$$\log_{\left(\frac{2-|ay|}{3}\right)}\left(\frac{a^2+x^2}{2a^2}\right)>0,$$

უტოლობის ამოხსნათა სიმრავლით მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში განსაზღვრული ფიგურის პერიმეტრი იქნება უმცირესი.

ამოხსნა. ლოგარითმული ფუნქციის თვისებებიდან გამომდინარე ამოცანის პირობების დასაკმაყოფილებლად აუცილებელია შესრულდეს შემდეგი თანაფარდობები:

$$\begin{cases}0<\frac{2-|ay|}{3}<1,\\ 0<\frac{a^2+x^2}{2a^2}<1\end{cases}\quad \text{ან}\quad \begin{cases}\frac{2-|ay|}{3}>1,\\ \frac{a^2+x^2}{2a^2}>1\end{cases}.$$

ცხადია, რომ მეორე სისტემის პირველი უტოლობა შეუძლებელია შესრულდეს (ვინაიდან იგი ტოლფასია უტოლობის $|y| < -1/a$). ამიტომ ამოცანაში მოცემული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე მართკუთხედია, რომელიც მოცემულია სისტემით:

$$\begin{cases}|y|<2/a,\\ |x|<a.\end{cases}$$

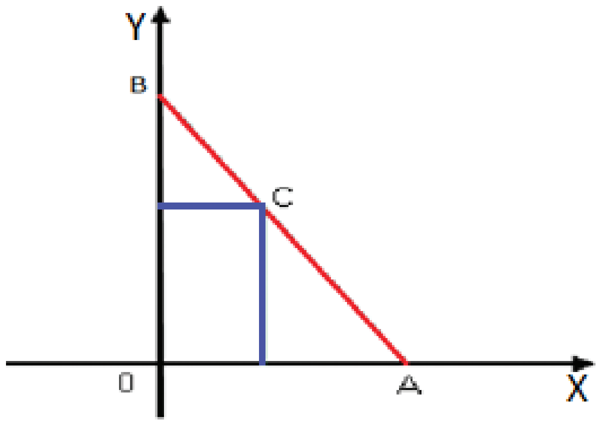
ამ მართკუთხედის გვერდებია $4/a$ და $2a$, პერიმეტრი კი $P(a)=\frac{8}{a}+4a$. მართკუთხედის პერიმეტრი გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$P(a)=\left(\sqrt{\frac{8}{a}}-2\sqrt{a}\right)^2+8\sqrt{2},$$

საიდანაც $P_{\min}(a)=8\sqrt{2}$, მაშინ როცა $a=\sqrt{2}$.

ამოცანა 6 (ერთიანი ეროვნული გამოცდების მათემატიკის ტესტი, 2016). Oxy მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში (3, 7) წერტილზე გამავალი ყოველი უარყოფითი საკუთხო კოეფიციენტის მქონე წრფე აბსცისთა და ორდინატთა ღერძებთან ერთად შემოსაზღვრავს მართკუთხა სამკუთხედს. იპოვეთ ამ ტიპის სამკუთხედების ფართობებს შორის უმცირესი.

ამოხსნა. ვთქვათ, ამ წრფის განტოლებაა $y = kx + b$, $k < 0$. რადგან $b = 7 - 34$, გვაქვს $y = kx + 7 - 3k$. ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატებია $A(-\frac{b}{k};0)$ და $B(0;\ b)$. შესაბამისად, $S(k)=-\frac{(7-3k)^2}{2k}$. გვაინტერესებს ფუნქციის მინიმუმი, $k < 0$ პირობით. გადავწეროთ $S(k)$ ფუნქცია შემდეგი სახით:

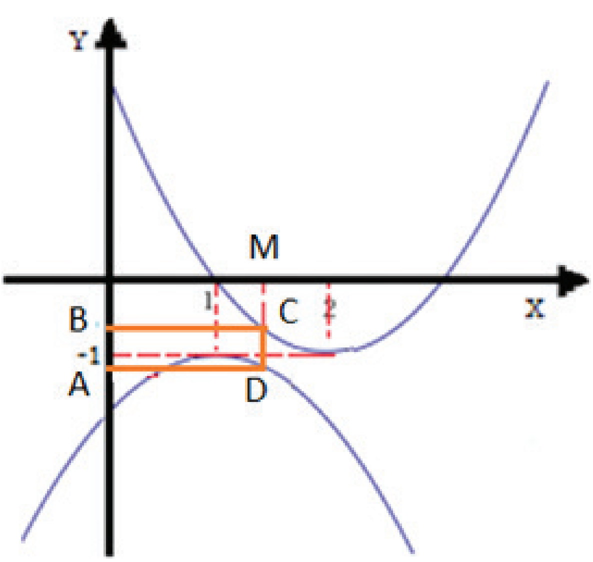


ნახ. 4.

$$S(k) = \frac{1}{2}[-(\frac{49}{k} + 9k) + 42] = \frac{1}{2}[(\frac{7}{\sqrt{-k}} - 3\sqrt{-k})^2 + 84] =$$
$$\frac{1}{2}(\frac{7}{\sqrt{-k}} - 3\sqrt{-k})^2 + 42.$$

აქედან გამომდინარე, ცხადია, რომ $S_{min}(k) = 42$ და ის მიიღწევა, როცა $k = -\frac{7}{3}$. შესაბამისად, $b = 14$.

ამოცანა 7 ([5]). *Oxy* საკოორდინატო სიბრტყეზე განვიხილოთ *ABCD* მართკუთხედი, რომლის *A* და *D* წვეროები ორდინატთა ღერძზეა, *C* წვერო $f_1(x) = x^2 - 4x + 3$ პარაბოლაზეა, *D* წვერო კი $f_2(x) = -x^2 + 2x - 2$ პარაბოლაზე, *C* და *D* წვეროების აბსცისები დადებითი სიდიდეებია. რა უმცირესი პერიმეტრი შეიძლება ჰქონდეს ასეთ მართკუთხედს?



ნახ. 5.

ამოხსნა. *ABCD* მარკუთხედის *BC* გვერდი აღვნიშნოთ *a*-თი. მაშინ *M* წერტილის აბსცისა არის *a*, ხოლო *CD* გვერდი იქნება

$$CD = MD - CM = f_1(a) - f_2(a) =$$
$$a^2 - 4a + 3 - (-a^2 + 2a - 2) = 2a^2 - 6a + 5.$$

შესაბამისად, *ABCD* მარკუთხედის პერიმეტრი იქნება

$$P(a) = 2(2a^2 - 6a + 5 + a) = 4a^2 - 10a + 10.$$

გასაგებია, რომ მიღებული კვადრატული სამწევრის მინიმალური მნიშვნელობაა

$$P_{min}(a) = 15/4.$$

მრავალი ამოცანა ექსტრემუმზე იხსნება უტოლობების გამოყენებით. საშუალო არითმეტიკულის და საშუალო გეომეტრიულის დამაკავშირებელი უტოლობიდან მარტივად მიიღება შემდეგი შედეგი: არაუარყოფითი სიდიდეების ჯამი, რომელთა ნამრავლი მუდმივი სიდიდეა, ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას, როცა ეს სიდიდეები ერთმანეთის ტოლია. განვიხილოთ შემდეგი

ამოცანა 8 ([6]). როგორი უნდა იყოს *V* მოცულობის მქონე ცილინდრული ფორმის ცისტერნის ზომები, რომ მის დასამზადებლად გამოყენებული მასალის ზედაპირის ფართობი იყოს მინიმალური?

ამოხსნა. ვთქვათ, *R* არის ცილინდრის ფუძის რადიუსი, *H* კი სიმაღლე. მაშინ ზედაპირის ფართობია $S = 2\pi RH + 2\pi R^2$, ხოლო მოცულობა $V = \pi R^2 H$, საიდანაც $H = \frac{V}{\pi R^2}$ და

$$S = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 = \frac{V}{R} + \frac{V}{R} + 2\pi R^2.$$

ამრიგად, ზედაპირის ფართობი წარმოვადგინეთ სამი შესაკრების ჯამის სახით, ხოლო ამ შესაკრებების ნამრავლი $\frac{V}{R} \cdot \frac{V}{R} \cdot 2\pi R^2 = 2\pi V^2$ მუდმივი სიდიდეა, ამიტომ ჯამი მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, როცა $\frac{V}{R} = 2\pi R^2$, საიდანაც $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, ხოლო $H = 2R$, ე.ი. ცილინდრის ღერძული კვეთა უნდა იყოს კვადრატი.

ამოცანა 9 ([5]). იპოვეთ $x + 3y$ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა, თუ x და y აკმაყოფილებენ $x^2 + xy + 4y^2 \leq 3$ უტოლობას.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $t = x + 3y$, საიდანაც $x = t - 3y$ და

$$x^2 + xy + 4y^2 = (t - 3y)^2 + (t - 3y)y + 4y^2 =$$
$$10y^2 - 5ty + t^2.$$

შესაბამისად, ამოცანა ასე ფორმულირდება: ვიპოვოთ t-ს მაქსიმუმი $10y^2 - 5ty + t^2 \leq 3$ პირო-

ბით. ამ უტოლობას აქვს ამონახსნი როცა $25t^2 - 40(t^3 - 3) \ge 0$, ანუ $-2\sqrt{2} \le t \le 2\sqrt{2}$, და, მაშასადამე, $t_{\max} = 2\sqrt{2}$, საიდანაც გვაქვს $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ზოგჯერ ფუნქციის ექსტრემუმის გასარკვევად მოსახერხებელია დავადგინოთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ამოცანა 10. იპოვეთ $f(x) = \frac{3x}{9+x^2}$ ფუნქციის ექსტრემუმები.

ამოხსნა. ვიპოვოთ $f(x) = \frac{3x}{9+x^2}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, რაც თავის მხრივ ტოლფასია შემდეგი ამოცანის ამოხსნის: a-ს რა მნიშვნელობებისათვის გააჩნია $\frac{3x}{9+x^2} = a$ განტოლებას ამონახსნი. უკანასკნელი განტოლება ეკვივალენტურია განტოლების $ax^2 - 3x + 9a = 0$, რომელსაც ამონახსნი გააჩნია როცა $a \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. ცხადია, რომ $f_{\min}(x) = -\frac{1}{2}$ და $f_{\max}(x) = \frac{1}{2}$.

ექსტრემალური ამოცანების ამოხსნის ზემოთ მოყვანილი მეთოდების გარდა, არსებობს ექსტრემალური მნიშვნელობების მოძებნის მეთოდი, რომელიც დაფუძნებულია ვექტორული ალგებრის ელემენტებზე, კერძოდ, ვექტორების სკალარული ნამრავლის თვისებაზე. განვიხილოთ რამდენიმე კონკრეტული მაგალითი.

ამოცანა 11 ([1]). იპოვეთ $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ ფუნქციის მინიმალური და მაქსიმალური მნიშვნელობები.

ამოხსნა. განვიხილოთ ორი ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$: პირველის კოორდინატები იყოს მოცემული ფუნქციის ცვლადის შემცველი ნაწილების კოეფიციენტები, ე.ი. $\vec{a}$ (3, 4); მეორის კი თვითონ ცვლადის შემცველი ნაწილები, ანუ $\vec{b}$ ($\sin x$, $\cos x$). ამ ვექტორების სიგრძეებია $|\vec{a}| = 5$ და $|\vec{b}| = 1$. ცხადია, რომ $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$. ვექტორების სკალარული ნამრავლის განმარტებიდან გამომდინარე ვღებულობთ უტოლობას: $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \le \vec{a} \cdot \vec{b} \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. ამიტომ ფუნქციის მნიშვნელობები მოთავსებულია [-5, 5] შუალედში ($-5 \le f(x) \le 5$). შესაბამისად, $f_{min}(x) = -5$ და $f_{max}(x) = 5$.

შენიშვნა 1. ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა წრფივი კომბინაციის ერთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციაზე დაყვანითაც. კერძოდ,

$$f(x) = 3\sin x + 4\cos x = \sqrt{3^2 + 4^2}\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right) = 5\sin(x + \alpha),$$

სადაც $\sin\alpha = 4/5$ და $\cos\alpha = 3/5$. აქედან ცხადია, რომ $-5 \le f(x) \le 5$.

ამოცანა 12. იპოვეთ $f(x) = 4\sqrt{1-x} + 3\sqrt{x}$ ფუნქციის მინიმალური და მაქსიმალური მნიშვნელობები.

ამოხსნა. განვიხილოთ ვექტორები $\vec{a}(\sqrt{1-x}, \sqrt{x})$ და $\vec{b}(4,3)$. ცხადია, რომ $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$. ამ ვექტორების სიგრძეებია $|\vec{a}| = 1$ და $|\vec{b}| = 5$. გავუტოლოთ ვექტორების კოორდინატების შეფარდება $\frac{\sqrt{1-x}}{4} = \frac{\sqrt{x}}{3}$, აქედან $x = 9/25$. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) $x = 9/25$ და $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები თანამიმართულია. მაშინ

$$\vec{a}(\sqrt{1-9/25}, \sqrt{9/25}) = \vec{a}(4/5, 3/5)$$

და სკალარული ნამრავლი იქნება $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16/5 + 9/5 = 5$. ამიტომ $f(x) \le 5$.

2) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები ვერ იქნება უარყოფითი, ამიტომ $f(x) \ge 0$ და ის ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას როცა $x = 1$, ანუ $\vec{a} = \vec{a}(0,1)$. ამიტომ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 + 3 = 3$ და, მაშასადამე, $3 \le f(x) \le 5$. შესაბამისად, $f_{min}(x) = 3$ და $f_{max}(x) = 5$.

ამოცანა 13. იპოვეთ $f(x, y, z) = 4x - 3y + 12z - 121$ ფუნქციის მინიმუმი და გაარკვიეთ ცვლადების რომელი მნიშვნელობისთვის მიიღწევა ეს მინიმუმი, თუ $4x^2 + y^2 + 4x^2 = 576$.

ამოხსნა. $4x^2 + y^2 + 4x^2 = 576$ პირობიდან განვსაზღვროთ ვექტორი $\vec{a}(2x, y, 2z)$, რომლისთვისაც $|\vec{a}| = 24$. გადავწეროთ მოცემული ფუნქცია შემდეგი სახით

$$f(x, y, z) = 4x - 3y + 12z - 121 = \vec{a} \cdot \vec{b} - 121,$$

სადაც $\vec{b}(2, -3, 6)$ და $|\vec{b}| = 7$. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ სკალარული ნამრავლი მინიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს როცა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები საპირისპიროდ მიმართულია და შესაბამისად,

$$f_{\min} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 180^\circ - 121 = 24 \cdot 7 \cdot (-1) - 121 = -289.$$

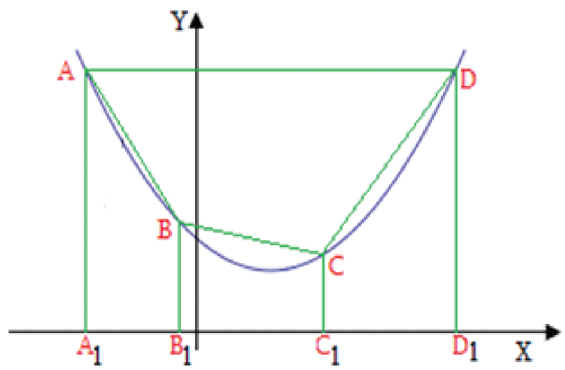
ვიპოვოთ ცვლადების ის მნიშვნელობი როცა მიიღწევა ეს მინიმუმი. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ პირობიდან გვაქვს: $\frac{2x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{2z}{6} = -\frac{24}{7}$, საიდანაც $x = -\frac{24}{7}$, $y = \frac{72}{7}$ და $z = -\frac{72}{7}$.

ბოლოს განვიხილოთ ამოცანა, რომლის ამოხსნისას გამოიკვეთება პარაბოლის კიდევ ერთი საინტერესო თვისება.

ამოცანა 14. Oxy საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია $A(-2;7)$, $B(-1;3)$ და $D(3;7)$ წერტილები. იპოვეთ ისეთი C წერტილის კოორდინატები,

რომლისთვისაც $ABCD$ ოთხკუთხედის ფართობი იქნება უდიდესი იმ პირობით, რომ A, B, C და D წერტილები $f(x) = ax^2 + bx + c$ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს და A და C წერტილები BD წრფის სხვადასხვა მხარესაა.

ამოხსნა. A, B და D წერტილების კოორდინატებით ვპოულობთ, რომ $a = 1$, $b = -1$ და $c = 1$. ამიტომ გვაქვს $f(x) = x^2 - x + 1$. გარდა ამისა, ადვილი დასანახია, რომ $S_{ABD} = 10$. ცხადია, რომ $ABCD$ ოთხკუთხედის ფართობი უდიდესი იქნება მაშინ როდესაც უდიდესი იქნება BCD სამკუთხედის ფართობი. აღვნიშნოთ $S(x) = S_{BCD}$, სადაც x არის C წერტილის აბსცისა და, მაშასადამე, $-1 < x < 3$. გასაგებია, რომ



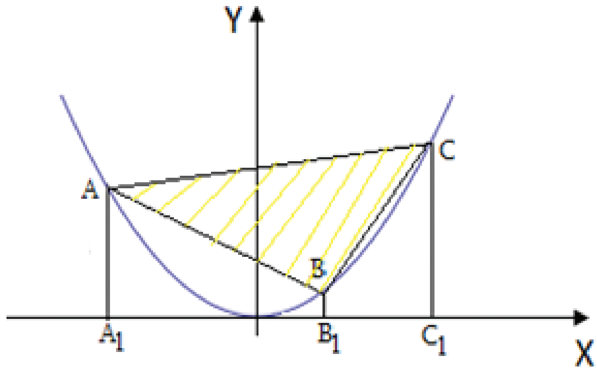
ნახ. 6.

$$S(x) = S_{BB_1D_1D} - S_{BB_1C_1C} - S_{CC_1D_1D} =$$
$$20 - \frac{1}{2}[3 + f(x)](x+1) -$$
$$-\frac{1}{2}[7 + f(x)](3-x) = -2x^2 + 4x + 6.$$

შესაბამისად, $S_{max}(x) = S(1) = 8$, ხოლო C წერტილის კოორდინატებია $(1;1)$.

შენიშვნა 2. აღსანიშნავია, რომ პარაბოლაში ჩახაზული სამკუთხედის ფართობი არის სამკუთხედის წვეროების აბსცისების სხვაობების ფუნქცია. მართლაც, ვთქვათ, $f(x) = ax^2$ პარაბოლაზე აღებულია A, B და C სამი წერტილი, რომელთა აბსცისებია შესაბამისად x_1, x_2 და x_3 და $x_1 < x_2 < x_3$. გამოვთვალოთ ABC სამკუთხედის ფართობი. გვაქვს:

$$S_{ABC} = S_{AA_1C_1C} - S_{AA_1B_1B} - S_{BB_1C_1C} =$$
$$= \frac{f(x_1)+f(x_3)}{2}(x_3 - x_1) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) -$$
$$\frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}(x_3 - x_2) = \frac{1}{2}(ax_1^2 + ax_3^2)(x_3 - x_1) -$$
$$\frac{1}{2}(ax_1^2 + ax_2^2)(x_2 - x_1) - \frac{1}{2}(ax_2^2 + ax_3^2)(x_3 - x_2).$$



ნახ. 7.

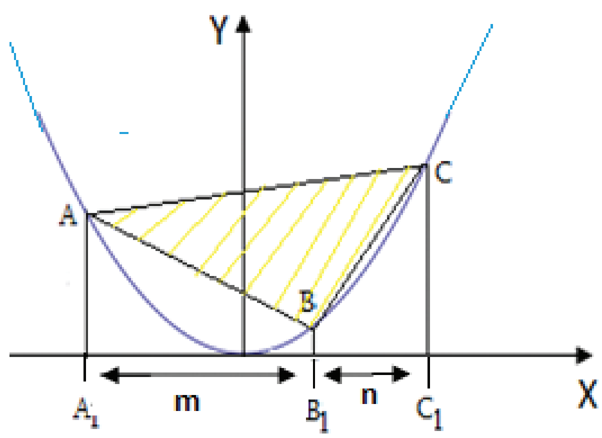
მარტივი გარდაქმნებით ვღებულობთ, რომ

$$S_{ABC} = \frac{a(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{2}. \qquad (1)$$

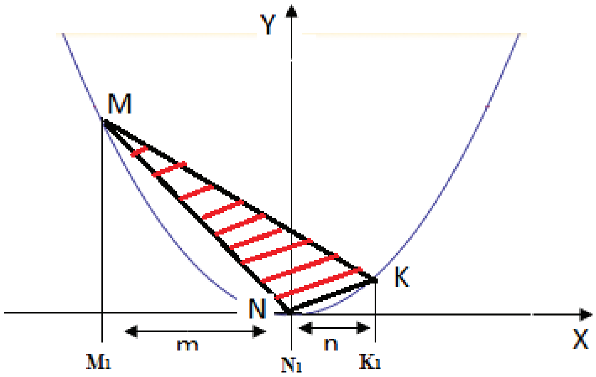
ცხადია, რომ სამკუთხედის წვეროების ნებისმიერი განლაგებისას ფორმულა (1) მიიღებს სახეს:

$$S_{ABC} = \frac{a\,|x_2 - x_1| \cdot |x_3 - x_1| \cdot |x_3 - x_2|}{2}. \qquad (2)$$

მიღებული ფორმულიდან ჩანს, რომ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროები პარაბოლაზეა, დამოკიდებულია მხოლოდ სამკუთხედის წვეროების აბსცისების სხვაობაზე და პარაბოლის a კოეფიციენტზე. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, როცა სამკუთხედის წვეროები მოძრაობენ ფიქსირებულ პარაბოლაზე ისე, რომ მისი წვეროების აბსცისებს შორის მანძილი უცვლელი რჩება, მაშინ სამკუთხედის ფართობი უცვლელია. მაგალითად, $S_{ABC} = S_{MNK}$ (იხ. ნახ. 8 და ნახ. 9).



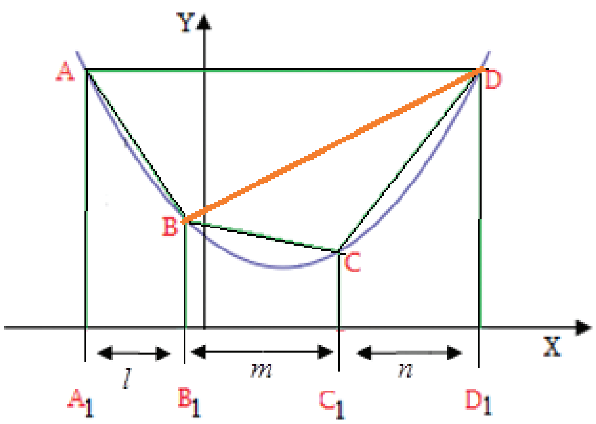
ნახ. 8.



ნახ. 9.

შენიშვნა 3. ცხადია, რომ (2) ტიპის ფორმულა სამართლიანი იქნება ზოგადი სახის $f(x) = ax^2 + bx + c$ პარაბოლისთვისაც.

შენიშვნა 4. პარაბოლაზე მდებარე წვეროების მქონე მრავალკუთხედის ფართობი რჩება მუდმივი, თუ მისი წვეროების აბსცისებს შორის მანძილი არ იცვლება. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით მრავალკუთხედის სამკუთხედებად დაყოფით. მაგალითად, ნახ. 10-ზე მოყვანილი $ABCD$ ოთხკუთხედის ფართობი დამოკიდებული იქნება მხოლოდ პარაბოლის კოეფიციენტებზე და l, m და n სიდიდეებზე.



ნახ. 10.

ვფიქრობთ, რომ სწავლებაში ექსტრემუმის ამოცანების შემოტანა პედაგოგიურად გამართლებულია, ვინაიდან ისინი საკმარისი სისრულით ნერგავენ მოსწავლის აზროვნებაში იმის გაგებას, თუ როგორ ეძებს და ცდილობს ადამიანი ცხოვრებისეული ამოცანების გადაწყვეტას ისე, რომ მისი მოქმედებით მიღებული შედეგები იყოს რაც შეიძლება უკეთესი. აღნიშნული ტიპის ამოცანების ამოხსნით მოსწავლეები ხედავენ ერთის მხრივ, მათემატიკური ცნებების აბსტრაქტულ ხასიათს, ხოლო მეორე მხრივ - მათ უდიდეს და ეფექტურ გამოყენებებს პრაქტიკული, ცხოვრებისეული ამოცანების ამოხსნისას. ექსტრემალური ამოცანების ასეთი დასმა ხელს უწყობს სასწავლო მასალის გამოყენების არეალის გაფართოებას, ამაღლებს რა ამ ამოცანების როლს მოსწავლეების მათემატიკური განათლების ღრმა მიზნების განხორციელებაში -- მათემატიკის გამოყენებების შესწავლაში ადამიანის საქმიანობის სხვადასხვა სფეროებში.

ლიტერატურა:

1. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა XI. თბილისი, 2007.

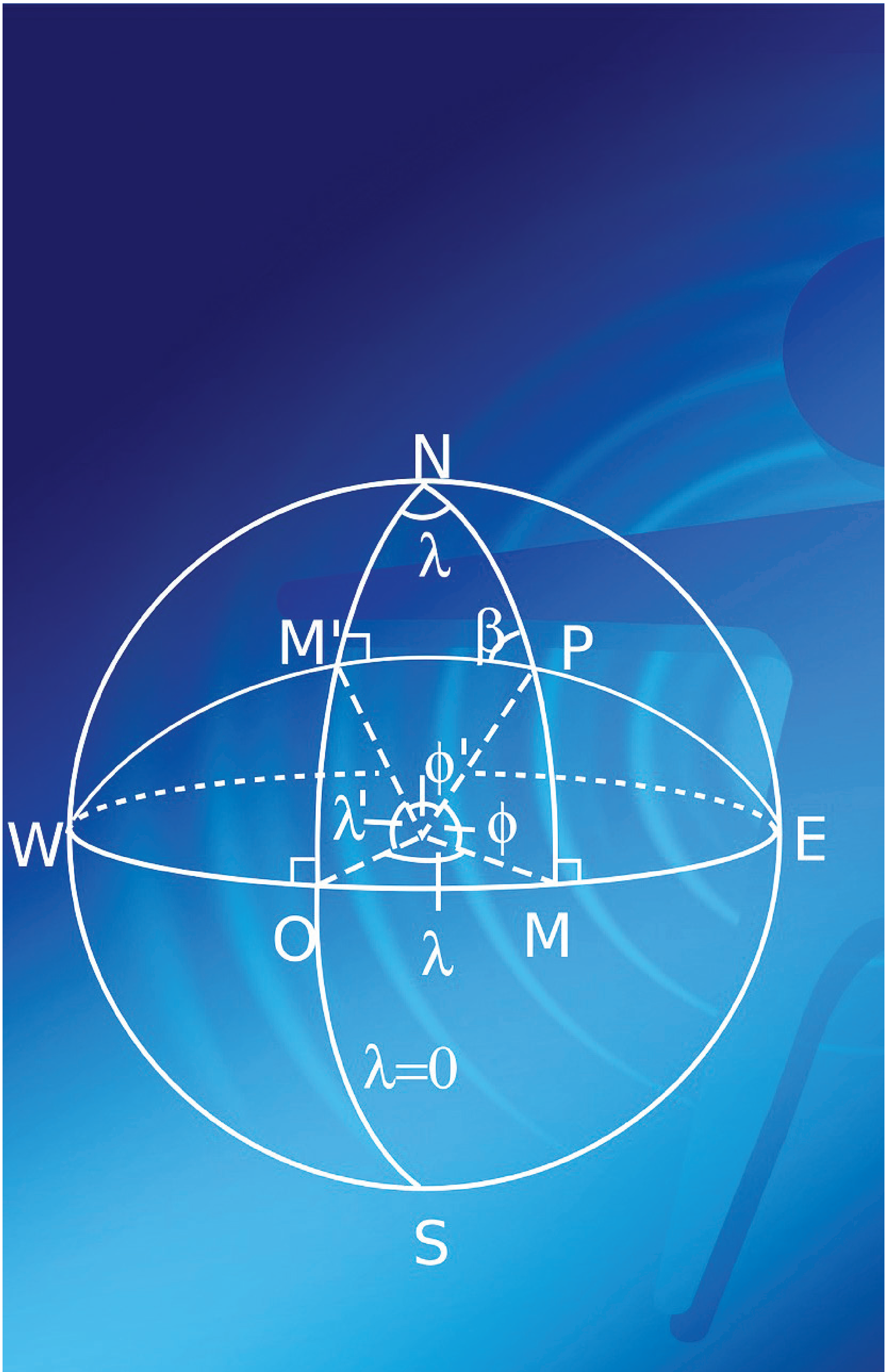
2. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა XII. თბილისი, 2007.

3. Актершев С.П. Задачи на максимум и минимум. – СПБ. БХВ – Петербург, 2005.

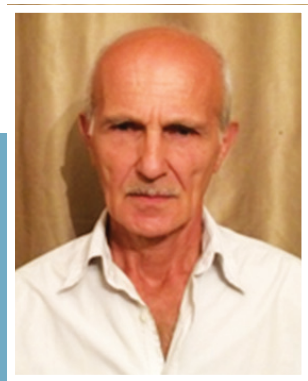
4. Ваховский А.А., Рывкин Е.Б. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Москва, „Мир и образование“, 2003.

5. ღვაბერიძე ბ., ღვალიშვილი ფ., მოსიძე ა., გელაშვილი კ., სირბილაძე გ. მათემატიკა საატესტატო და ეროვნული გამოცდებისათვის. თბილისი, 2014.

6. Нагибин С.Ф. Экстремумы. – Москва, „Просвещение“, 1968.


N
λ
M'
β
P
φ'
λ'
φ
W
E
O
λ
M
λ=0
S

ᲑᲔᲖᲣᲡ ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ



ვახტანგ ლომაძე

მათემატიკის დეპარტამენტი,
ივანე ჯავახიშვილის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ᲨᲔᲡᲐᲕᲐᲚᲘ

კარგადაა ცნობილი (და ადვილი დასამტკიცებელია), რომ თუ $f(x)$ არის არანულოვანი პოლინომი, მაშინ

$$|Z| \le m,$$

სადაც Z აღნიშნავს $f(x)$-ის ნულების სიმრავლეს და m მის ხარისხს. (აქ და შემდგომ სასრული X სიმრავლის ელემენტების რიცხვი აღინიშნება $|X|$ სიმბოლოთი.) მაგალითად, წრფივ პოლინომს აქვს ერთი ფესვი, კვადრატულ პოლინომს შეიძლება ჰქონდეს ორი, ერთი ან არცერთი ფესვი. კუბურ პოლინომს ყოველთვის აქვს ერთი ფესვი, მაგრამ სამ ფესვზე მეტი არ შეიძლება ჰქონდეს.

თუ ჩვენ დავუშვებთ კომპლექსურ ფესვებს და ფესვებს დავითვლით ჯერადობით, მაშინ, როგორც ამას ალგებრის ფუნდამენტური თეორემა გვეუბნება, სამართლიანია ტოლობა

$$|Z| = m.$$

ბეზუს თეორემაც ალგებრის „დიდ თეორემათა" რიცხვს განეკუთვნება. მას შეგვიძლია შევხედოთ, როგორც ალგებრის ფუნდამენტური თეორემის ორგანზომილებიან ანალოგს. იგი იძლევა პასუხს კითხვაზე: რამდენი ამონახსნი აქვს განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

სადაც $F(x, y)$ და $G(x, y)$ ორი ცვლადის პოლინომებია? კითხვა შეიძლება დაისვას გეომეტრიულ ენაზეც: რამდენი წერტილისგან შედგება თანაკვეთა

$$C \cap D,$$

სადაც C და D ბრტყელი აფინური წირებია?

ბეზუს თეორემა ამტკიცებს, რომ თუ „ყველაფერი რიგზეა", მაშინ ამონახსნების რიცხვი არის mn, სადაც m და n შესაბამისად $F(x, y)$ და $G(x, y)$ პოლინომების ხარისხებია. უფრო ზუსტად, სამი პირობაა საჭირო ბეზუს თეორემის სამართლიანობისთვის.

1) „ბაზისური" ველი უნდა იყოს ალგებრულად ჩაკეტილი, როგორიცაა, მაგალითად, კომპლექსურ რიცხვთა ველი;

2) უნდა გავითვალისწინოთ აუცილებლად „უსასრულო" ნულები, ანუ, უნდა ვიმუშაოთ პროექციულ სიბრტყესთან;

3) საერთო ნულების დათვლა უნდა მოხდეს ჯერადობის გათვალისწინებით.

ცხადია, ველი უნდა იყოს ალგებრულად ჩაკეტილი. არც მესამე პირობის აუცილებლობა იწვევს ეჭვს. არსებითი სიახლე არის პროექციულობის პირობაში!

1. ᲫᲘᲠᲘᲗᲐᲓᲘ ᲒᲐᲜᲡᲐᲖᲦᲕᲠᲔᲑᲔᲑᲘ

k იყოს ნამდვილ ან კომპლექსურ რიცხვთა ველი.

აფინური სიბრტყე A^2 არის სიმრავლე (x, y) წყვილებისა, სადაც $x, y \in k$. ბრტყელი აფინური წირი ეს არის ქვესიმრავლე $C \subseteq A^2$, რომელიც წარმოადგენს არანულოვანი $R(x, y)$ პოლინომის ნულების სიმრავლეს. მაგალითად, $R(x, y) = 2x + 3$ განსაზღვრავს წრფეს, $R(x, y) = x^2 + 3y^2 - 5$ განსაზღვრავს წრეწირს.

ყოველი არანულოვანი პოლინომი $R(x, y)$ იშლება შემდეგი სახის ნამრავლად

$$R(x, y) = aP_1(x, y)^{n_1} \dots P_r(x, y)^{n_r},$$

სადაც a არის კონსტანტა, $P_i(x, y)$ დაუყვანადი პოლინომები და n_i მთელი არაუარყოფითი რიცხვები. ამბობენ, რომ $R(x, y)$ თავისუფალია კვადრატისგან თუ ყველა n_i ტოლია ერთის.

ცხადია, რომ $R(x, y)$ პოლინომი იგივე წირს იძლევა, რასაც $P_1(x, y) \dots P_r(x, y)$. ასე, რომ ბრტყელი აფინური წირების მოსაცემად შეგვიძლია გამოვიყენოთ მხოლოდ კვადრატისგან თავისუფალი პოლინომები. თანახმად ჰილბერტის სახელგანთქმული თეორემისა ნულების შესახებ, ორი კვადრატისგან თავისუფალი არანულოვანი პოლინომი $R_1(x, y)$ და $R_2(x, y)$ განსაზღვრავენ ერთსა და იმავე წირს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოიძებნება $a \neq 0$ კონსტანტა ისეთი, რომ

$$R_1(x, y) = aR_2(x, y).$$

ეს თეორემა საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ წირის რიგი. მართლაც, თუ C არის ბრტყელი აფინური წირი და იგი მოიცემა კვადრატისგან თავისუფალი R პოლინომის მეშვეობით, მაშინ წირის რიგი განისაზღვრება, როგორც R პოლინომის ხარისხი. შეგახსენებთ, რომ პოლინომის ხარისხი არის მაქსიმუმი მისი ერთწევრების ხარისხებისა (მაგალითი: $deg(7 + 3xy^6 + 5y^8 - 2x^3y^{10}) = 13$).

ვთქვათ C არის ბრტყელი აფინური წირი და R მისი განმსაზღვრელი (კვადრატისგან თავისუფალი) პოლინომი. დავუშვათ, რომ

$$R(x, y) = aR_1(x, y) \dots R_i(x, y)$$

არის დაშლა დაუყვანადი პოლინომების ნამრავლად. ავღნიშნოთ C_i-ით წირი რომელიც მოიცემა R_i პოლინომით. მაშინ ცხადია

$$C = C_1 \cup \cdots \cup C_i.$$

ამ წირებს ჰქვია C წირის დაუყვანადი კომპონენტები. ჩვენ ახლა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ბეზუს თეორემის სუსტი ფორმა.

თეორემა 1. ვთქვათ C და D ბრტყელი აფინური წირებია, და დავუშვათ რომ მათ არ აქვთ საერთო კომპონენტები. მაშინ თანაკვეთა $C \cap D$ არის სასრული სიმრავლე და ადგილი აქვს უტოლობას

$$|C \cap D| \leq mn,$$

სადაც m და n შესაბამისად C და D წირების რიგებია.

ბეზუს თეორემის ეს ფორმა ორგანზომილებიანი ანალოგია დებულებისა, რომელიც ჩვენ გავიხსენეთ შესავლის დასაწყისში (რომელსაც შეიძლება ეწოდოს ალგებრის ფუნდამენტური თეორემის სუსტი ფორმა). უნდა აღინიშნოს, რომ იგი საკმაოდ ადვილად მტკიცდება და ამ ფორმითაც ხშირად გამოიყენება.

2. კერძო მაგალითი: ორი წრფის თანაკვეთა

შესავალში დასმულ კითხვას ჩვენ შეგვიძლია ადვილად გავცეთ სრული პასუხი, როცა F და G წრფივი პოლინომებია. მაშინ ეს პოლინომები განსაზღვრავენ წრფეებს. ავღნიშნოთ ისინი შესაბამისად C და D ასოებით. შესაძლებელია სამი შემთხვევა.

1) C და D ემთხვევიან ერთმანეთს (ანუ F და G პროპორციულია).

2) C და D პარალელურია; მაშინ თანაკვეთა არ არსებობს.

3) C და D „ზოგად" მდგომარეობაში იმყოფებიან; მაშინ არის ერთი გადაკვეთის წერტილი მხოლოდ.

ვხედავთ, რომ ბეზუს თეორემა სუსტი აზრით ყოველთვის სრულდება. თეორემის ძლიერი ფორმა არ არის სამართლიანი მხოლოდ მეორე შემთხვევაში. მაგრამ ამ სამართლიანობის მიღწევა შესაძლებელია ამ შემთხვევაშიც თუკი მას განვიხილავთ როგორც მესამე შემთხვევის „ზღვარს". ავსხნათ ეს შემდეგი კონკრეტული მაგალითით.

მაგალითი. წრფეები $y = 0$ და $y - 1 = 0$ პარალელური წრფეებია და არ იკვეთებიან. განვიხილოთ ახლა წრფეები $y = 0$ და $\varepsilon x + y - 1 = 0$, სადაც $\varepsilon \neq 0$. ამ ორი წრფის გადაკვეთის წერტილი არის $(1/\varepsilon, 0)$. წრფე $y - 1 = 0$ არის „ზღვარი" $\varepsilon x + y - 1 = 0$ წრფისა, როცა $\varepsilon \to 0$. ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ $y = 0$ და $y - 1 = 0$ წრფეების თანაკვეთის წერტილი არის

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon},0\right)=(\infty,0).$$

ამ მარტივ მაგალითს მივყევართ იდეამდე, რომ საჭიროა დავუშვათ „უსასრულო“ წერტილების არსებობა.

3. უსასრულო წერტილები და პროექციული სიბრტყე

განვიხილოთ სიმრავლე $k^3\setminus\{0\}$, ანუ სიმრავლე არანულოვანი (a,b,c) სამეულებისა. ამ სიმრავლეში შემოვიტანოთ ექვივალენტობის მიმართება შემდეგნაირად:

$$(a_1,b_1,c_1)\ \sim(a_2,b_2,c_2):\ \exists\lambda\quad(a_1,b_1,c_1)=\lambda(a_2,b_2,c_2)$$

ეს მიმართება მართლაც არის ექვივალენტობის მიმართება, და იგი მთელ ჩვენს სიმრავლეს ჰყოფს ექვივალენტობის კლასებად.

განსაზღვრება. პროექციული სიბრტყე $\boldsymbol{P}^2$ განისაზღვრება როგორც ექვივალენტობის კლასების სიმრავლე. ექვივალენტობის კლასს წარმოდგენილს (a, b, c) სამეულით აღნიშნავენ $(a : b : c)$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრების თანახმად,

$$(a : b : c)\ =(a_2 : b_2 : c_2)\Leftrightarrow(a_1,b_1,c_1)\ \sim(a_2,b_2,c_2).$$

$\boldsymbol{P}^2$-ის ელემენტებს ანუ კლასებს, ჩვეულებრივ, ეძახიან წერტილებს. პროექციული სიბრტყე არ არის ადვილი წარმოსადგენი. ჩვენ შეგვიძლია იგი წარმოვიდგინოთ როგორც გაერთიანება აფინური სიბრტყისა და „უსასრულობაში“ მდებარე წრფისა. განვიხილოთ შემდეგი ორი ქვესიმრავლე

$$U=\{(x{:}\ y{:}\ z)\in\boldsymbol{P}^2\mid z\neq 0\}\ \text{და}$$
$$L_\infty=\{(x{:}\ y{:}\ z)\in\boldsymbol{P}^2\mid z=0\}.$$

ცხადია, რომ

$$\boldsymbol{P}^2=U\cup L_\infty.$$

ყოველი წერტილი პირველი სიმრავლიდან ერთადერთი გზით ჩაიწერება $(x{:}\ y{:}\ 1)$ სახით. ანუ, ასახვა $\varphi{:}\ \boldsymbol{A}^2\to U$, განსაზღვრული ფორმულით

$$\varphi(x, y)=(x{:}\ y{:}\ 1),$$

ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას $\boldsymbol{A}^2$-ის წერტილებსა და U-ს წერტილებს შორის. ეს ბუნებრივი ასახვა საშუალებას გვაძლევს, რომ U ქვესიმრავლე გავაიგივეოთ აფინურ სიბრტყესთან. ამ გაიგივებით $\boldsymbol{P}^2$ მართლაც წარმოგვიდგება როგორც გაერთიანება

$$\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{A}^2\cup L_\infty,$$

სადაც L_∞ ქვესიმრავლეს უნდა შევხედოთ, როგორც წრფეს შემდგარს უსასრულო წერტილებისგან. უნდა აღინიშნოს, რომ გვაქვს ზუსტად იმდენი უსასრულო წერტილი რამდენიც აფინურ სიბრტყეში კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფეა. უსასრულო წერტილი $(a{:}\ b{:}\ 0)$ ჩვენ უნდა წარმოვიდგინოთ, როგორც აფინურ სიბრტყეზე მდებარე $bx-ay=0$ წრფის უსასრულო წერტილი.

4. (ბრტყელი) პროექციული წირები

პროექციული წირების განსაზღვრისათვის გვჭირდება ერთგვაროვანი პოლინომები.

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ პოლინომი $F(X,Y,Z)\in k[X,Y,Z]$ არის ერთგვაროვანი, თუ მის ყველა ერთწევრს ერთი და იგივე ხარისხი აქვს. ამ საერთო ხარისხს ჰქვია პოლინომის ხარისხი.

შენიშვნა. $F(X,Y,Z)$ პოლინომი არის n ხარისხის ერთგვაროვანი პოლინომი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z)=\lambda^n F(X, Y, Z)\quad\forall\lambda\in k.$$

ვთქვათ, F არის ერთგვაროვანი პოლინომი და P პროექციული სიბრტყის წერტილი. ვამბობთ, რომ P არის F პოლინომის ნული და ვწერთ $F(P)=0$, თუ $F(x, y, z)=0$, სადაც (x, y, z) არის P წერტილის წარმომადგენელი (ანუ $(x{:}\ y{:}\ z)=P$). ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის თანახმად, ეს განსაზღვრება არ არის დამოკიდებული წარმომადგენლის არჩევაზე.

განსაზღვრება. პროექციული სიბრტყის C ქვესიმრავლეს ეწოდება ბრტყელი პროექციული წირი, თუ ის არის არანულოვანი ერთგვაროვანი პოლინომის ნულების სიმრავლე.

განსაზღვრება. ვთქვათ $F(x, y)$ არის პოლინომი

რომლის ხარისხია n. მისი ჰომოგენიზაცია $F^h(X, Y, Z)$ განისაზღვრება ფორმულით

$$F^h(X, Y, Z) = Z^n F(X / Z, Y / Z).$$

ცხადია, $F^h(X, Y, Z)$ არის n ხარისხის ერთგვაროვანი პოლინომი.

ამრიგად, თუ გვინდა განვსაზღვროთ ჩვეულებრივი პოლინომის ჰომოგენიზაცია, საჭიროა (x, y) შევცვალოთ $(X / Z, Y / Z)$-ით და რასაც მივიღებთ ის გავამრავლოთ Z^n-ზე, სადაც n პოლინომის ხარისხია.

მაგალითი. ზემოთ განხილული $7 + 3xy^6 + 5y^8 - 2x^3y^{10}$ პოლინომის ჰომოგენიზაცია არის $7Z^{13} + 3XY^6Z^6 + 5Y^8Z^5 - 2X^3Y^{10}$.

განსაზღვრება. ვთქვათ C არის აფინური წირი და ვთქვათ იგი მოიცემა $F(x, y)$პოლინომით. მის პროექციული ჩაკეტვას ეძახიან $F^h(X, Y, Z)$-ის მიერ განსაზღვრულ პროექციულ წირს, და აღნიშნავენ $\overline{C}$ სიმბოლოთი.

აფინური წირის უსასრულო წერტილებში ესმით მისი პროექციული ჩაკეტვის უსასრულო წერტილები.

მაგალითი. განვიხილოთ წრფე $ax + by + c = 0$. მისი პროექციული ჩაკეტვა მოიცემა $aX + bY + cZ = 0$ განტოლებით. ამ უკანასკნელზე მხოლოდ ერთი წერტილია ისეთი, რომლისთვისაც $Z = 0$. სახელდობრ, ეს არის $(b: -a:0)$ წერტილი. ამრიგად, მოცემული წრფის უსასრულო წერტილია $(b: -a:0)$ წერტილი.

შემდეგ სამ მაგალითში k არის ნადვილ რიცხვთა ველი.

მაგალითი. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ელიფსის პროექციული ჩაკეტვის განტოლებაა $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = Z^2$. ვხედავთ, რომ ელიფსს უსასრულო წერტილი არ გააჩნია.

მაგალითი. $y = 4cx^2$ პარაბოლის პროექციული ჩაკეტვის განტოლებაა $YZ = 4cX^2$, და მას აქვს ერთი უსასრულო წერტილი მხოლოდ; ეს წერტილია $(0: 1: 0)$.

მაგალითი. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ჰიპერბოლის პროექციული ჩაკეტვის განტოლება $X^2/a^2 - Y^2/b^2 = Z^2$. არის ორი უსასრულო წერტილი: $(a: b: 0)$ და $(a: -b: 0)$.

ამრიგად, თუ მეორე რიგის (ნამდვილ) წირს არა აქვს უსასრულო წერტილი, იგი ელიფსია; თუ აქვს ერთი უსასრულო წერტილი, მაშინ იგი პარაბოლაა; და ბოლოს, თუ აქვს ორი უსასრულო წერტილი, მაშინ იგი ჰიპერბოლაა.

5. თანაკვეთის ინდექსი

ვთქვათ C და D ბრტყელი აფინური წირებია, და ვთქვათ P არის მათი საერთო წერტილი. ამბობენ, რომ წირები ტრანსვერსალურად იკვეთებიან P წერტილში, თუ მათ განსხვავებული მხებები აქვთ ამ წერტილში. ამ შემთხვევაში იძახიან კიდევ, რომ თანაკვეთის ინდექსი არის ერთის ტოლი.

თანაკვეთის ინდექსის ზოგადი ცნება საკმაოდ ფაქიზია და მისი შემოტანა არც ისე ადვილია.

ვგულისხმობთ, რომ მკითხველმა იცის წრფივი სივრცეები და მათი განზომილებები. გვჭირდება კიდევ ვიცოდეთ თუ რა არის ფორმალური მწკრივი.

(ორი x და y ცვლადის) ფორმალური მწკრივი ჰქვია

$$\sum_{ij} a_{ij} x^i y^j$$

სახის გამოსახულებას, სადაც i და j გაირბენენ მთელ არაუარყოფით რიცხვებს და a_{ij} კოეფიციენტები k ველის ელემენტებია. ფორმალური მწკრივის მაგალითს წარმოადგენს, რა თქმა უნდა, პოლინომი. ფორმალური მწკრივები ჰქმნიან რგოლს, რომელიც აღინიშნება $k[[x, y]]$ სიმბოლოთი. საინტერესო ფაქტი ამ რგოლის შესახებ არის ის, რომ შებრუნებად ელემენტებს მასში წარმოადგენენ ის და მხოლოდ ის ფორმალური მწკრივები, რომელთაც აქვთ ნულისგან განსხვავებული თავისუფალი წევრი.

ვთქვათ C და D ბრტყელი აფინური წირებია და ვთქვათ, P არის რაიმე წერტილი სიბრტყეზე. ზოგადობის დაურღვევლად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ P არის კოორდინატთა სათავე. (თუ ასე არაა, ვიყენებთ კოორდინატთა გარდაქმნას.) ვთქვათ, F და G პოლინომებია, რომლებიც განსაზღვრავენ ჩვენს წირებს. ავღნიშნოთ

$$Fk[[x, y]] + Gk[[x, y]]$$

სიმბოლოთი, ე.წ., იდეალი წარმოქმნილი F და G პოლინომებით. ეს არის სიმრავლე $AF + BG$ სახის ფორმალური მწკრივებისა, სადაც A და B ნებისმიერი ფორმალური მწკრივებია. რა თქმა უნდა, $k[[x, y]]$ არის წრფივი სივრცე და $Fk[[x, y]] + Gk[[x, y]]$ მისი ქვესივრცეა. თუ ჩვენი წირები ზოგად მდგომარეობაშია, მაშინ ფაქტორ-სივრცე

$$k[[x,y]]/\left(Fk[[x,y]]+Gk[[x,y]]\right)$$

სასრულ-განზომილებიანია.

განსაზღვრება. თანაკვეთის ინდექსი $I_p(C, D)$ განისაზღვრება ფორმულით

$$I_p(C, D) = dimk[[x, y]]/(Fk[[x, y]] + Gk[[x, y]]).$$

შენიშვნა. $I_p(C, D) > 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა P ძევს ორივე წირზე, ანუ P არის თანაკვეთის წერტილი. მართლაც, თუ P არ ეკუთვნის, ვთქვათ, C წირს, მაშინ F პოლინომი შებრუნებადია როგორც ფორმალური მწკრივი და ამიტომ $Fk[[x, y]] + Gk[[x, y]] = k[[x, y]]$.

მაგალითი. განვიხილოთ თანაკვეთა საკოორდინატო ღერძებისა კოორდინატთა სათავეში. ღერძები მოიცემა განტოლებებით $y = 0$ და $x = 0$, და იდეალი (x, y) შედგება ყველა იმ ფორმალური მწკრივისგან რომლის თავისუფალი კოეფიციენტი ნულია. ცხადია, თანაკვეთის ინდექსი 1-ის ტოლია. (რა თქმა უნდა, ეს ასეც უნდა იყოს.)

მაგალითი. განვიხილოთ თანაკვეთა $y = x^2$ პარაბოლისა $y = 0$ აბსცისთა ღერძთან (ისევ კოორდინატთა სათავეში). $y - x^2$ და y პოლინომებით წარმოქმნილი იდეალი იგივეა რაც x^2 და y პოლინომებით წარმოქმნილი იდეალი. ეს უკანასკნელი შედგება ყველა იმ ფორმალური მწკრივისგან რომელსაც არ გააჩნია $a + bx$ სახის წევრი. ასე რომ, თანაკვეთის ინდექსი ამ შემთხვევაში არის 2-ის ტოლი.

6. ბეზუს თეორემა (ძლიერი ფორმა)

ვიწყებთ თანაკვეთის ინდექსების განსაზღვრებით პროექციული წირებისთვის. (ზემოთ ჩვენ ეს გავაკეთეთ აფინური წირებისთვის.)

ვთქვათ C და D ბრტყელი პროექციული წირებია, რომლებიც მოიცემიან ერთგვაროვანი $F(X, Y, Z)$ და $G(X, Y, Z)$ პოლინომებით, და ვთქვათ P არის რაიმე წერტილი პროექციულ სიბრტყეზე. თუ ჩვენი წერტილის Z-კოორდინატი განსხვავებულია 0-სგან და მაშასადამე $P = (a\colon b\colon 1)$, მაშინ ინდექსი განისაზღვრება ფორმულით

$$I_p(C, D) = I_{(a,b)}\big(F(x, y, 1), G(x, y, 1)\big)$$

სადაც $x = {}^{X}\!/_{Z}$ და $y = {}^{Y}\!/_{Z}$. თუკი Z-კოორდინატი ნულის ტოლია და, მაგალითად, Y-კოორდინატია განსხვავებული 0-სგან, მაშინ $P = (a\colon 1\colon 0)$. შემოგვაქვს კოორდინატები $u = {}^{X}\!/_{Y}$, $w = {}^{Z}\!/_{Y}$ და განვსაზღვრავთ

$$I_p(C, D) = I_{(a,0)}\big(F(u, 1, w), G(u, 1, w)\big).$$

თეორემა 2. ვთქვათ, C და D ბრტყელი პროექციული წირებია, და ვთქვათ, რომ მათ არ აქვთ საერთო კომპონენტი. მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_P I_P(C,D) = mn,$$

სადაც m და n, შესაბამისად, C და D წირების რიგებია.

თეორემის საილუსტრაციოდ მოვიყვანთ შემდეგ მაგალითს.

მაგალითი. განვიხილოთ ორი წრეწირი $x^2 + y^2 = 1$ და $x^2 + y^2 = 2$, რომელთაც ცხადია არა აქვთ „სასრული საერთო წერტილები". ერთგვაროვანი განტოლებები ამ წირებისა არის $X^2 + Y^2 = Z^2$ და $X^2 + Y^2 = 2Z^2$, და ვხედავთ რომ საერთო წერტილებია $(i, 1, 0)$ და $(-i, 1, 0)$. ავიღოთ $Y \neq 0$ აფინური ნაწილი და შემოვიღოთ კოორდინატები $u = {}^{X}\!/_{Y}$ და $w = {}^{Z}\!/_{Y}$. ამ კოორდინატებში ჩვენი წრეწირების განტოლებებია $u^2 - w^2 + 1 = 0$ და $u^2 - 2w^2 + 1 = 0$, და უსასრულო წერტილები ხდება $(i, 0)$ და $(-i, 0)$. გამოვთვალოთ ახლა ინდექსები

$$I_{(i,\,0)}(u^2 - w^2 + 1, u^2 - 2w^2 + 1) \text{ და}$$
$$I_{(-i,\,0)}(u^2 - w^2 + 1, u^2 - 2w^2 + 1).$$

პირველის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ გარდაქმნით $u = u' + i$, $w = w'$. საქმე დადის $I_{(0,0)}(u'^2 + 2iu' - w'^2, u'^2 + 2iu' - 2w'^2)$-ის გამოთვლაზე. გვექნება

$$(u'^2 + 2iu' - w'^2)k[[u', w']] + (u'^2 + 2iu' - 2w'^2)$$
$$k[[u', w']] = (u'^2 + 2iu')k[[u', w']] + w'^2k =$$
$$u'k[[u', w']] + w'^2k\,[[u', w']].$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$k[[u',w']]\Big/\left(u'k[[u',w']]+w'^2 k[[u',w']]\right) \square\; k[[w']]\Big/w'^2 k[[w']]$$

ორ-განზომილებიანი წრფივი სივრცეა. (ბაზისს ქმნიან 1-ის და w'-ის მოსაზღვრე კლასები.) მაშასადამე,

$$I_{(i,0)}(u^2 - w^2 + 1,\ u^2 - 2w^2 + 1) =$$
$$I_{(0,0)}(u'^2 + 2iu' - w'^2,\ u'^2 + 2iu' - 2w'^2) = 2.$$

ასევე გამოითვლება $I_{(-i,0)}(u^2 - w^2 + 1,\ u^2 - 2w^2 + 1)$ ინდექსიც, და დგინდება რომ იგიც 2-ის ტოლია. ვღებულობთ:

$$I_{(-i,0)}(u^2 - w^2 + 1,\ u^2 - 2w^2 + 1) +$$
$$I_{(-i,0)}(u^2 - w^2 + 1,\ u^2 - 2w^2 + 1) = 4.$$

ეს ასეც უნდა იყოს, ბეზუს თეორემის თანახმად.

ლიტერატურა:

1. W. Fulton, Algebraic Curves, Manuscript, 2008.

2. R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer, 1977.

3. F. Kirwan, Complex Algebraic Curves, London Mathematical Society, 1992.

ამერიკული ოფციონის ფასდადების ამოცანა

პეტრე ბაბილუა

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასისტენტ-პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი; ევროპული სკოლა

ბესარიონ დოჭვირი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

1. ამერიკული ოფციონი ევროპული ოფციონის მსგავსად წარმოადგენს წარმოებულ ფასიან ქაღალდს, რომლის მფლობელს აქვს რაიმე საბაზისო აქტივის ყიდვის ან გაყიდვის უფლება. როგორც ვიცით, ევროპული ოფციონის მფლობელს შეუძლია მისი განაღდება ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის მხოლოდ ბოლო მომენტში [1]. ამისგან განსხვავებით, ამერიკული ოფციონის მფლობელს შეუძლია მისი განაღდება ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის დროის ნებისმიერ შემთხვევით მომენტში.

ბუნებრივია, ამერიკული ოფციონი ევროპულ ოფციონზე უფრო მიმზიდველია, ვინაიდან მის მფლობელს ფინანსურ ბაზარზე მიმდინარე პროცესში აქტიური მონაწილეობის საშუალება ეძლევა. მართლაც, მაქსიმალური სარგებლის (გასამრჯელოს) მიღების მიზნით, ბაზრის მიმდინარე ინფორმაციის გამოყენებით, სასურველია ოფციონის განაღდების გადაწყვეტილების მიღება დროის, გარკვეული აზრით, ოპტიმალურ შემთხვევით მომენტში. შევნიშნოთ, რომ ასეთი გადაწყვეტილების მიღება წარმოადგენს შემთხვევით პროცესთა ოპტიმალური გაჩერების თეორიის საინტერესო და რთულ მათემატიკურ ამოცანას. კერძოდ, ჩვენთვის საინტერესო აქტივის ყოფაქცევაზე დაკვირვების საშუალებით, საჭიროა ვიპოვოთ ოფციონის განაღდების ისეთი შემთხვევითი მომენტი (ოპტიმალური გაჩერების მომენტი), რომ მივიღოთ მაქსიმალური საშუალო მოგება ანუ ფასი. ჩვენ მოკლედ შევეხებით ამერიკული ოფციონის გათვლის ზოგიერთ მარტივ საკითხს ფინანსური (B,S)-ბაზრის ბინომური მოდელის შემთხვევაში.

2. ვიგულისხმოთ, რომ ჩვენ ვიხილავთ ფინანსური (B,S)-ბაზრის ბინომურ მოდელს [1]

$$B_n = (1 + r)\, B_{n-1},\ B_0 > 0, \qquad (1)$$

$$S_n = (1 + \rho_n)\, S_{n-1},\ S_0 > 0, \qquad (2)$$

სადაც $n = 0, 1, \ldots, N$, $r > 0$ რთული საპროცენტო განაკვეთია, ხოლო ρ_n ცვლადი სიდიდეა, რომელიც შემთხვევით იღებს მხოლოდ ორ შესაძ-

ლო რიცხვით მნიშვნელობას: ან a-ს ან b-ს, $a < b$, რაც ნიშნავს იმას, რომ აქციის მომავალი ფასების განსაზღვრა ცალსახად შეუძლებელია, რადგან წინასწარ ჩვენ არ ვიცით რომელ შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობას მიიღებს ρ_n ცვლადი სიდიდე. ამერიკული ოფციონის მფლობელს შეუძლია მისი წარდგენა გასანაღდებლად დროის ამ მომენტებიდან ნებისმიერ (შემთხვევით არჩეულ) მომენტში. ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ გვაქვს გადახდის ფუნქცია, რომელიც n მომენტისთვის ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$f = f_n = f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n),\ n = 0, 1, \ldots, N, \tag{3}$$

ანუ გვაქვს შემდეგი სიდიდეების მიმდევრობა

$$\begin{aligned} &f_0 = f_0(S_0), \\ &f_1 = f_1(S_0, S_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_n = f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n), \end{aligned} \tag{4}$$

ხოლო $n = N$ მომენტისთვის

$$f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots, S_N). \tag{5}$$

თუ ოფციონის მფლობელი წარადგენს ოფციონს გასანაღდებლად დროის რაიმე τ შემთხვევით მომენტში, იგი მიიღებს თანხას (გასამრჯელოს), რომელიც ტოლია $f_\tau(S_0, S_1, \ldots, S_\tau)$, $\tau = 0, 1, \ldots, N$, სიდიდის.

როგორც ვიცით ევროპული ოფციონის გათვლის (ფასდადების) დროს ემიტენტის (ოფციონის გამყიდველის) ამოცანებია: ოფციონის სამართლიანი ფასის პოვნა, მინიმალური ჰეჯის აგება და ამ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესის განსაზღვრა. ამერიკული ოფციონის გათვლის დროს ამ ამოცანებს ემატება აგრეთვე ოფციონის განაღდების ე. წ. რაციონალური (ოპტიმალური) მომენტების პოვნა, რომელიც საკმაოდ ართულებს ამერიკული ოფციონის გათვლას. ამრიგად, ამ შემთხვევაში დამატებით საჭიროა ისეთი გაჩერების მომენტის (განაღდების მომენტის) პოვნა, რომ მივიღოთ მაქსიმალური საშუალო გასამრჯელო.

3. განვიხილოთ ახლა ფინანსური (B,S)-ბაზრის მონაწილე ემიტენტის ამოცანა, რომელმაც ოფციონის გაყიდვით მიიღო გარკვეული საწყისი თანხა $X_0 = x > 0$. ვთქვათ, გადახდის ფუნქცია მოცემულია (3) ტოლობით, ხოლო ემიტენტს დროის n მომენტში აქვს β_n რაოდენობის ობლიგაცია და γ_n რაოდენობის აქცია, ანუ აქვს $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ პორტფელი. ვიტყვით, რომ ემიტენტის სტრატეგია (პორტფელი) $\pi = \pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ არის (x, f, N) ჰეჯი (ამერიკული ტიპის ჰეჯი), თუ ემიტენტის საწყისი კაპიტალი

$$X_0^\pi = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0 = x \tag{6}$$

და ნებისმიერი n, $0 \le n \le N$, მომენტისათვის გვაქვს

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n \ge f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n). \tag{7}$$

ამასთან ერთად, თუ რომელიმე გაჩერების τ მომენტი ისეთია, რომ

$$X_\tau^\pi = \beta_\tau B_\tau + \gamma_\tau S_\tau = f_\tau(S_0, S_1, \ldots, S_\tau), \tag{8}$$

მაშინ $\pi = \pi_\tau(\beta_\tau, \gamma_\tau)$ სტრატეგიას მინიმალური (x, f, N) ჰეჯი ეწოდება.

აღვნიშნოთ ამერიკული ტიპის ჰეჯების ერთობლიობა $\Pi^A(x, f, N)$ სიმბოლოთი.

შევნიშნოთ, რომ თუ π სტრატეგია აკმაყოფილებს (8) ტოლობას, მაშინ ნებისმიერი $\tau \le N$ გაჩერების მომენტისათვის სრულდება (7) უტოლობა.

საინვესტიციო თანხა (ოფციონის სამართლიანი ფასი) ეწოდება სიდიდეს

$$C_N^A = \inf\left\{x > 0:\ \ \Pi^A(x, f, N) \ne \varnothing\right\}. \tag{9}$$

გაჩერების $\tau^* \le N$ მომენტს ეწოდება რაციონალური (ამერიკული ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტი), თუ C_N^A საწყისი თანხისათვის (კაპიტალისთვის) და თვითდაფინანსებადი π სტრატეგიისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$X_{\tau^*}^\pi \ge f_{\tau^*}(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau^*})$$

და სინამდვილეში გვაქვს ტოლობა

$$X_{\tau^*}^\pi = f_{\tau^*}(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau^*}). \tag{10}$$

გავიხსენოთ, რომ $\pi = \pi_n(\beta_n, \gamma_n)$ სტრატეგიას ეწოდება თვითდაფინანსებადი, თუ დროის n მომენტში სრულდება ტოლობა

$$\Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} = 0, \tag{11}$$

სადაც $\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_{n-1}$, $\Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$.

განვიხილოთ ახლა ე. წ. დისკონტირებული კა-

პიტალი

$$M_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n}. \quad (12)$$

M_n^π შემთხვევით მიმდევრობას გააჩნია შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება: ნებისმიერი $\tau \le N$ გაჩერების მომენტისათვის

$$E^*(M_\tau^\pi) = M_0^\pi, \quad (13)$$

სადაც E^* აღნიშნავს

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} \quad (14)$$

ალბათობით გასაშუალოებას (მათემატიკური ლოდინის ოპერაციას). შევნიშნავთ, რომ p^*-ს რისკ-ნეიტრალური ალბათური ზომა ეწოდება [2]. (13) ტოლობის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$X_0^\pi = E^* (1 + r)^{-\tau} \cdot X_\tau^\pi. \quad (15)$$

ცხადია, რომ თუ π სტრატეგია არის (x, f, N) ჰეჯი, მაშინ

$$x \ge \sup E^* (1 + r)^{-\tau} \cdot f_\tau, \quad (16)$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა გაჩერების მომენტით $\tau \le N$. იმ შემთხვევაში, როცა π არის მინიმალური ჰეჯი, ანუ არსებობს ისეთი გაჩერების მომენტი $\tau^* \le N$, რომ $X_{\tau^*}^\pi = f_{\tau^*}$, მაშინ

$$x = X_0^\pi = E^* (1 + r)^{-\tau^*} \cdot f_{\tau^*}^\pi = E^* (1 + r)^{-\tau^*} \cdot f_\tau \quad (17)$$

და

$$x = \sup_\tau E^* \left(1+r\right)^{-\tau} \cdot f_\tau, \quad (18)$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა გაჩერების მომენტით $\tau \le N$. ამრიგად, (18) ტოლობა წარმოადგენს π ჰეჯის მინიმალურობის აუცილებელ პირობას.

შეიძლება ჩვენება, რომ (18) ტოლობა, ემიტენტის საწყის x თანხასა და f_n გადახდის ფუნქციებს შორის დამოკიდებულება, წარმოადგენს აგრეთვე π ჰეჯის მინიმალურობის საკმარის პირობას [2]. აქედან გამომდინარე, ამერიკული ოფციონის სამართლიანი ფასი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$C_N^A = \sup_\tau E^* \left(1+r\right)^{-\tau} \cdot f_\tau, \quad (19)$$

სადაც, ისე როგორც ზემოთ, სუპრემუმი აიღება ყველა გაჩერების მომენტით $\tau \le N$.

გაჩერების მომენტს $\tau^* \le N$, რომლისთვისაც მიიღწევა (19) სუპრემუმი, ეწოდება ამერიკული ოფციონის განაღდების (დაფარვის) რაციონალური მომენტი. ამრიგად, გვაქვს τ^*-თვის

$$C_N^A = \sup_\tau E^* \left(1+r\right)^{-\tau} \cdot f_\tau = E^* \left(1+r\right)^{-\tau^*} \cdot f_{\tau^*}. \quad (20)$$

შევნიშნოთ, რომ სწორედ (19) სახის სუპრემუმებისა და τ^* სახის გაჩერების (რაციონალური, ოპტიმალური) მომენტების სტრუქტურის გარკვევა და მათი მონახვა წარმოადგენს ოპტიმალური გაჩერების თეორიის ძირითად ამოცანებს.

ამერიკული ოფციონის გათვლის დროს (ისევე, როგორც ევროპული ოფციონის გათვლის დროს) შეიძლება გამოვიყენოთ ბინომური ხეები. N-ნაბიჯიანი ბინომური ხის კვანძებში აქციის შესაძლო ფასები დაითვლება შემდეგი ტოლობებით

$$S_N = S_{N,j} = S_0(1 + b)^j (1 + a)^{N-j}, \quad j = 0, 1, ..., N, \quad (21)$$

ხოლო ბოლო $n = N$ მომენტში $N + 1$ ფინალურ კვანძში ოფციონის ფასები (გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობებით) დაითვლება შემდეგი ტოლობებით

$$f = f_{N,j} = f\left(S_{N,j}\right), \quad j = 0, 1, ..., N, \quad (22)$$

სადაც f არის რაიმე გადახდის ფუნქცია.

ოფციონის მიმდინარე (შიგა) ფასები და სამართლიანი ფასი დაითვლება შემდეგი სქემის მიხედვით.

დროის $n = N - 1$ მომენტში (ფინალურის წინა N კვანძებში) გვექნება

$$C_{N-1,j}^A = \max\left\{f_{N-1,j}; \left(1+r\right)^{-1}\left[p^* f_{N,j+1} + \left(1-p^*\right) f_{N,j}\right]\right\},$$
$$j = 0,1,\ldots,N-1,$$

დროის $n = N - 2$ მომენტში გვექნება

$$C_{N-2,j}^A = \max\left\{f_{N-2,j}; \left(1+r\right)^{-1}\left[p^* C_{N-1,j+1}^A + \left(1-p^*\right) C_{N-1,j}^A\right]\right\},$$
$$j = 0,1,\ldots,N-2,$$

და ა. შ. დროის $n = N - k$ მომენტში გვექნება

$$C^*_{N-k,j} = \max\left\{ f_{N-k,j};((1+r)^{-1}\left[p^* C^A_{N-k+1,j+1} + \left(1-p^*\right) C^A_{N-k+1,j} \right]\right\},$$
$$j = 0,1,\ldots,N-k,$$

და ა. შ. დროის $n = N - N = 0$ მომენტში გვექნება

$$C^A_N = C^A_{0,0} = \max\left\{ f\left(S_0\right);\left(1+r\right)^{-1}\left[p^* C^A_{1,1} + \left(1-p^*\right) C^A_{1,0} \right]\right\},$$

სადაც $f(S_0) = f(S_{0,0}) = f_{0,0}$.

ამ დამოკიდებულებებში p^* სიდიდე განიმარტება (14) ტოლობით.

ამრიგად, ბინომური ხეები გამოიყენება ევროპული და ამერიკული ოფციონების გათვლის (ფასდადების) ამოცანების გადაწყვეტაში. კერძოდ, შესაძლებელია აქციის და ოფციონის ფასების ევოლუციის აღწერა და ბინომური ხის კვანძებში მათი ყველა შესაძლო მნიშვნელობის გამოთვლა ოფციონის სამართლიანი ფასის ჩათვლით.

შევნიშნოთ, რომ ამერიკული ოფციონის გათვლის დროს მინიმალური ჰეჯის და მისი შესაბამისი კაპიტალის პროცესის აგება ისევ მოპასუხე პორტფელის პრინციპის გამოყენებით ხდება [1], [2], რომლის თანახმად $\pi = (\beta^*, \pi^*)$ მინიმალური ჰეჯი გამოითვლება ტოლობებით:

$$\beta^*_{n+1} = \frac{(1+b)\,f\left(\left(1+a\right)S_n\right) - (1-a)\,f\left(\left(1+b\right)S_n\right)}{(1+r)(b-a)B_n}, \quad (23)$$

$$\gamma^*_{n+1} = \frac{f\left((1+b))S_n\right) - f\left(\left(1+a\right)S_n\right)}{(b-a)S_n} \qquad (24)$$

$$X^{\pi^*}_n = \beta^*_{n+1}B_n + \gamma^*_{n+1}S_n =$$
$$\left(1+r\right)^{-1}\left[p^* f\left(\left(1+b\right)S_n\right) + \left(1-p^*\right) f\left(\left(1+a\right)S_n\right)\right].$$

რაც შეეხება ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტის პოვნას, როგორც აღვნიშნეთ, იგი, საზოგადოდ, რთულ ამოცანას წარმოადგენს, ჩვენ მოვიტანთ ამერიკული ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტის არჩევის ერთ მარტივ წესს ბინომური ხის გამოყენების შემთხვევაში. წესი შემდეგში მდგომარეობს: ამერიკული ოფციონის აღსრულების რაციონალური მომენტი არის დროის ის პირველი მომენტი, როდესაც ოფციონის ფასი (გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობა) გაუტოლდება ან აღემატება მის შინაგან ფასს. ამრიგად, რაციონალური მომენტისათვის გვაქვს

$$\tau^* = \min\left\{ n:\ f\left(S_n\right) \ge C^A_n \right\}.$$

ავაგოთ ახლა ამერიკული ოფციონისთვის ორნაბიჯიანი ბინომური ხე. ქვემოთ ჩვენ სწორედ ამ შემთხვევისთვის განვიხილავთ ამერიკული ოფციონის გათვლის რიცხვით მაგალითს.

(21)-(26) ტოლობების მიხედვით $N = 2, j = 0,1,2,$ შემთხვევაში

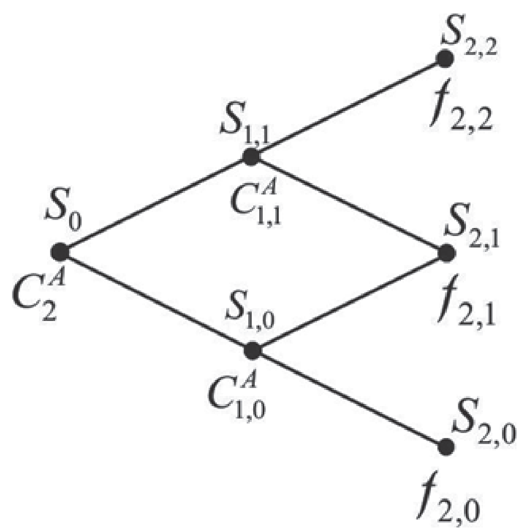
$$S_2 = S_{2,j} = S_0\left(1+b\right)^j \cdot \left(1+a\right)^{2-j}, \quad j = 0,1,2,$$

$$f = f_2 = f_{2,j} = f\left(S_{2,j}\right), \quad j = 0,1,2,$$

$$C^A_{1,j} = \max\left\{ f_{1,j};\left(1+r\right)^{-1}\left[p^* f_{2,j+1} + \left(1-p^*\right) f_{2,j} \right]\right\}, \quad j = 0,1,$$

$$C^A_{0,j} = C^A_2 = \max\left\{ f_{0,j};\left(1+r\right)^{-1}\left[p^* C^A_{1,j+1} + \left(1-p^*\right) C^A_{1,j} \right]\right\}, \quad j = 0,1.$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე



ნახაზი 1

4. განვიხილოთ ახლა ამერიკული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს შემდეგი მონაცემები:

$$B_0 = 20, \quad r = \frac{1}{5}, \quad S_0 = 100, \quad a = -\frac{2}{5}, \quad b = \frac{3}{5}, \quad K = 100.$$

გამოთვლებში გვჭირდება შემდეგი სიდიდეები

$$1 + a = \frac{3}{5}, 1 + b = \frac{8}{5}, b - a = 1,$$
$$p^* = \frac{3}{5}, 1 - p^* = \frac{2}{5}, \left(1+r\right)^{-1} = \frac{5}{6}.$$

მაგალითი. განვიხილოთ (1), (2) ფინანსური ბაზარი. ვთქვათ, $N = 2$, ე. ი. $n = 0,1,2$ და შესრულებულია (31) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყ-

იდა (ემიტენტმა გაყიდა) ამერიკული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f = f_2 = f_2(S_2) = \max\,(S_2 - K, 0).$$

ჩვენი მიზანია გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. ჩვენ მოვიტანთ ამ ამოცანის ამოხსნას აქციის შესაძლო ფასების მხოლოდ ერთი კონკრეტული შემთხვევისათვის.

პირველ რიგში ავაგოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე. (27)-(30) ტოლობების გამოყენებით გვექნება

$$S_{2,0} = 36,\ S_{2,1} = 96,\ S_{2,2} = 256,$$
$$f_{2,0} = 0, f_{2,1} = 0, f_{2,2} = 156.$$

შემდეგ გვაქვს (21), (22) ტოლობების თანახმად

$$f_{1,0} = f(S_{1,0}) = \max(60 - 100, 0) = 0,$$

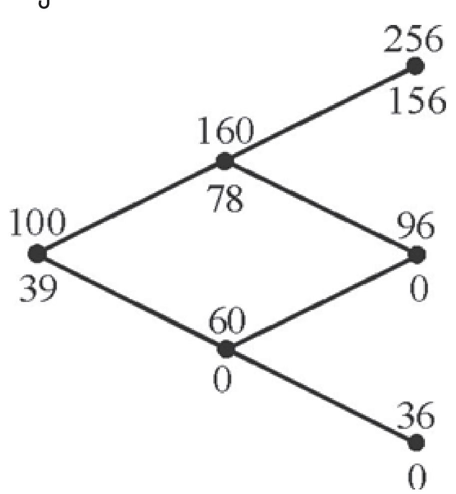
მოყვანილი ტოლობების გამოყენებით გვექნება

$$C_{1,0}^A = \max\left\{f_{1,0}; (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,1} + (1-p^*) f_{2,0}\right]\right\} =$$
$$= \max\left\{0; \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 0\right)\right\} = \max\{0; 0\} = 0.$$

$$C_{1,1}^A = \max\left\{f_{1,1}; (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,2} + (1-p^*) f_{2,1}\right]\right\} =$$
$$= \max\left\{60; \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 156 + \frac{2}{5}\cdot 0\right)\right\} = \max\{60; 78\} = 78,$$

$$C_2^A = \max\left\{f(S_0); (1+r)^{-1}\left[p^* C_{1,1}^A + (1-p^*) C_{1,0}^A\right]\right\} =$$
$$= \max\left\{0; \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 78 + \frac{2}{5}\cdot 0\right)\right\} = \max\{0; 39\} = 39.$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე



ნახაზი 2

განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

I. თუ $S_0 \to S_{1,1} = 160$, მაშინ

$$\pi_1^* = \left(\beta_1^*, \gamma_1^*\right) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right),\ \pi_2^* = \left(\beta_2^*, \gamma_2^*\right) = \left(-\frac{13}{4}, \frac{39}{40}\right);$$

II. თუ $S_0 \to S_{1,0} = 60$, მაშინ

$$\pi_1^* = \left(\beta_1^*, \gamma_1^*\right) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right),\ \pi_2^* = \left(\beta_2^*, \gamma_2^*\right) = (0, 0).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ აქციის შესაძლო ფასების ნებისმიერი ევოლუციისთვის და ოფციონის განაღდების ნებისმიერი შემთხვევითი მომენტისთვის აგებული მინიმალური ჰეჯის საშუალებით ემიტენტი შეასრულებს ოფციონური კონტრაქტით გათვალისწინებულ ვალდებულებას.

განვიხილოთ ახლა ოფციონის განაღდების τ^* რაციონალური მომენტის არჩევის საკითხი.

1. თუ $S_0 \to S_{1,1} = 160$, მაშინ $\tau^* = 2$;

2. $S_0 \to S_{1,0} = 60$, მაშინ $\tau^* = 1$.

მართლაც, თუ ვიმყოფებით $S_{1,1}$ კვანძში, მაშინ გვაქვს, რომ გადახდის ფუნქციის ჩვენი გასამრჯელო დროის $n = 1$ მომენტში ტოლია $f_1(S_{1,1}) = f(160) = 60$ სიდიდის, ხოლო მოსალოდნელი საშუალო გასამრჯელო დროის $n = 2$ მომენტში ტოლია $C_{1,1}^A = 78$ სიდიდის. ამიტომ ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტი $\tau^* = 2$.

ვთქვათ, ახლა ვიმყოფებით $S_{1,0}$ კვანძში, მაშინ გვაქვს

$$f_1(S_{1,0}) = f_1(60) = 40,\ C_{1,0}^A = 0.$$

ამიტომ, ცხადია, $\tau^* = 1$.

5. გავარკვიოთ ახლა, თუ რა ფინანსური ოპერაციების ჩატარება მოუწევს ემიტენტს დროის $n = 0,1,2$ მომენტებში, მაგალითად, აქციის ფასების $S_0 \to S_{1,1} \to S_{2,2}$ შესაძლო ტრაექტორიის შემთხვევაში.

დროის $n = 0$ მომენტში აგებული $\pi_1^* = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right)$ პორტფელის თანახმად ემიტენტმა ისესხა $\frac{39}{20}$ ობლიგაცია, ანუ $\frac{39}{20}\cdot 20 = 39$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{39}{50}$ აქცია, რომლის ფასია $\frac{39}{50}\cdot 100 = 78$. ამის საშუალება ემიტენტს მართლაც აქვს, რადგანაც ოფციონის გაყიდვით მიღებული და ნასესხები თანხების ჯამი 78-ის ტოლია: $39 + 39 = 78$.

დროის $n = 1$ მომენტში აგებული ობლიგაციის ფასია $B_1 = 20\cdot\frac{6}{5} = 24$, ხოლო აქციის ფასია $S_{1,1} = 160$. ამიტომ $\pi_1^* = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right)$ პორტფელის შესაბამის თანხაა

$$X_1^{\pi^*} = -\frac{39}{20}\cdot 24 + \frac{39}{50}\cdot 160 = -\frac{234}{5} + \frac{624}{5} = \frac{390}{5} = 78 .$$

დროის n = 2 მომენტში ემიტენტის პორტფელია $\pi_2^* = \left(-\frac{13}{4}, \frac{39}{40}\right)$. ემიტენტმა ისესხა $\frac{13}{4}$ ობლიგაცია, ანუ $\frac{13}{4}\cdot 24 = 78$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{39}{40}$ აქცია, რომლის ფასია $\frac{39}{40}\cdot 160 = 156$. ამის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან n = 1 მომენტში მისი თანხაა 78 და კიდევ ნასესხები თანხა 78-ია, რაც ჯამში 156-ის ტოლია.

დროის n = 2 მომენტში ობლიგაციის ფასია $B_2 = 24\cdot\frac{6}{5} = \frac{144}{5}$, ხოლო აქციის ფასია $S_{2,2}$ = 256. ამიტომ $\pi_2^* = \left(-\frac{13}{4}, \frac{39}{40}\right)$ პორტფელის შესაბამისი თანხაა

$$X_2^{\pi^*} = -\frac{13}{4}\cdot\frac{144}{5} + \frac{39}{40}\cdot 256 = -\frac{468}{5} + \frac{1248}{5} = \frac{780}{5} = 156.$$

ამრიგად, ემიტენტი დროის $n = 2$ მომენტში გაყიდის $\frac{39}{40}$ აქციას და მიიღებს $\frac{1248}{5}$-ის ტოლ თანხას. ამ თანხით გაისტუმრებს $\frac{13}{4}$ ობლიგაციის ვალს, ანუ $\frac{13}{4}\cdot\frac{144}{5} = \frac{468}{5}$-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი 156-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონური კონტრაქტით გათვალისწინებულ ვალდებულებას, ანუ ოფციონის მფლობელს გადაუხდის $f_{2,2} = \max(S_{2,2} - K, 0) = \max(256 - 100, 0)$ = 156-ის ტოლ თანხას.

6. განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როდესაც ემიტენტის მიერ ინვესტირების პროცესში ხდება გარკვეული $g = (g_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N$, $g_0 = 0$, ფუნქციათა მიმდევრობის გათვალისწინება ან მოხმარებაზე გადადებული თანხის სახით (მაგალითად, საოპერაციო დანახარჯები), ან დივიდენდების სახით (მაგალითად, ობლიგაციიდან, აქციიდან მიღებული დივიდენდები). ასეთ შემთხვევაში სტრატეგიას არათვითდაფინანსებადი ეწოდება [2].

განვიხილავთ g_n ფუნქციათა ერთ კერძო კლასს, რომელსაც შემდეგი სახე აქვს:

$$g_n = c_1\beta_n B_{n-1} + c_2\gamma_n S_{n-1}, \qquad (25)$$

სადაც $0 < c_1 < 1$, $0 < c_2 < 1$, $n = 0, 1, \ldots, N$.

ლემა 1. ვთქვათ, გვაქვს ფინანსური ბაზრის (1), (2) მოდელი. g_n ფუნქციათა მიმდევრობა განსაზღვრულია (25) ტოლობით, $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ არის სტრატეგიების მიმდევრობა $n = 0, 1, \ldots, N$. მაშინ არათვითდაფინანსების პირობას აქვს შემდეგი სახე:

$$\Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} + g_n = 0, \qquad (26)$$

სადაც $\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_{n-1}$, $\Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$.

დამტკიცება. g_n ფუნქციის გათვალისწინებით ინვესტორის (ემიტენტის) კაპიტალის პროცესი დროის $n - 1$ და n მომენტებში შეიძლება შემდეგი სიდიდეების საშუალებით ჩავწეროთ [2]:

$$X_{n-1}^{\pi} = \beta_{n-1}B_{n-1} + \gamma_{n-1}S_{n-1}, \qquad (27)$$

$$X_{n-1}^{\pi} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} + g_n, \qquad (28)$$

$$X_n^{\pi} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n. \qquad (29)$$

გამოვაკლოთ (29) ტოლობას (27) და (28) ტოლობები. მაშინ, შესაბამისად, გვექნება

$$\Delta X_n^{\pi} = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n + \Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1},$$
$$\Delta X_n^{\pi} = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n - g_n,$$

სადაც $\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_{n-1}$, $\Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$. თუ ბოლო ტოლობას გამოვაკლებთ წინა ტოლობას, მივიღებთ არათვითდაფინანსების (25) პირობას.

შევნიშნოთ, რომ თუ $g_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots, N$, მაშინ არათვითდაფინანსების (26) ტოლობიდან ვღებულობთ თვითდაფინანსების (11) პირობას.

7. (14) ტოლობით განსაზღვრული გვაქვს ალბათური ზომა p^*, რომელიც გამოიყენება ამერიკული (ევროპული) ოფციონის გათვლის (ფასდადების) ამოცანაში. ჩვენი მიზანია ავაგოთ p^*-ის ანალოგიური ალბათური ზომა არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების შემთხვევაში.

ლემა 2. ვთქვათ, გვაქვს ფინანსური ბაზრის (1), (2) მოდელი. (25) ტოლობით განსაზღვრულია g_n ფუნქციათა მიმდევრობა, ხოლო $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ არის სტრატეგიების მიმდევრობა $n = 0, 1, \ldots, N$. მაშინ რისკ-ნეიტრალური ალბათური ზომა განისაზღვრება ტოლობით:

$$p' = \frac{r - c_1(1+a) + c_2(1+r) - a}{(b-a)(1+c_1)}. \qquad (30)$$

დამტკიცება. g_n ფუნქციის გათვალისწინებით დროის n მომენტში ინვესტორის $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ სტრატეგიის მაგივრად უნდა ავაგოთ ისეთი სტრატეგია $\pi_{n+1} = (\beta_{n+1}, \gamma_{n+1})$, რომ შესრულდეს შემდეგი ტოლობა

$$X_n^{\pi} = \beta_{n+1}B_n + \gamma_{n+1}S_n + g_{n+1},$$

სადაც X_n^{π} თანხის მნიშვნელობაა $X_n^{\pi} = \beta_n B_n +$

$\gamma_n S_n$. (25) ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება

$$X_n^{\pi} = \beta_{n+1}B_n + \gamma_{n+1}S_n + c_1\beta_{n+1}B_n + c_2\gamma_{n+1}S_n = (1+c_1)\beta_{n+1}B_n + (1+c_2)\gamma_{n+1}S_n.$$

თუ ამ ტოლობაში β_{n+1} და γ_{n+1} სიდიდეების მაგივრად შევიტანთ მინიმალური $\pi^*_{n+1} = (\beta^*_{n+1}, \gamma^*_{n+1})$ჰეჯის კომპონენტების (23) და (24) გამოსახულებებს, მაშინ იგივური მათემატიკური გარდაქმნების გამოყენებით ინვესტორის თანხა შეიძლება შემდეგი ტოლობით ჩავწეროთ

$$X_n^{\pi^*} = \frac{1+c_1}{1+r}\left[p'f\big((1+b)S_n\big) + (1-p')f\big((1+a)S_n\big)\right],$$

სადაც f ამერიკული ოფციონის რაიმე გადახდის ფუნქციაა, ხოლო p' ალბათური ზომა განსაზღვრული (30) ტოლობით.

ამრიგად, რისკ-ნეიტრალურ ალბათურ ზომას, რომელიც არსებითად გამოიყენება ინვესტორის კაპიტალის პროცესის ფორმირებაში და გადახდის ფუნქციით გათვალისწინებული ვალდებულების შესრულებაში, არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების შემთხვევაში აქვს (30) სახე. შევნიშნავთ, რომ, თუ $c_1 = c_2 = 0$, მაშინ გვექნება $p^* = p'$.

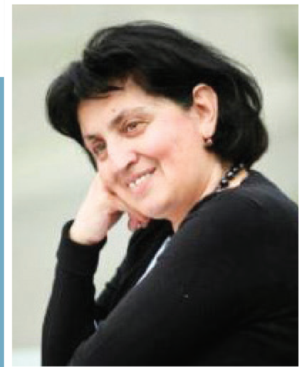
შედეგი. პუნქტი 3-ში ამერიკული ოფციონის C_N^A ფასის გამოთვლის რეკურენტული სქემა ანალოგიურად შეიძლება გამოვიყენოთ არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების შემთხვევაში, თუ ამ სქემაში p^* ალბათურ ზომას შევცვლით p' ალბათური ზომით.

ლიტერატურა:

1. ბაბილუა პ., დოჭვირი ბ., ევროპული ოფციონის გათვლის ამოცანა. თსუ, მათემატიკა, 2013, #1, გვ. 29-32.

2. Ширяев А., Основы стохастической финансовой математики, т. 1, т. 2. Москва, 1998.

რამანუჯანი - ღვთაებრივი ფორმულების ავტორი



ქეთევან შავგულიძე

ფიზიკა მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოცირებული პროფესორი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

გოდფრი ჰარდი ერთ-ერთ ინტერვიუში შეკითხვაზე, თუ რა იყო მისი უდიდესი წვლილი მათემატიკაში, უყოყმანოდ აცხადებს, რომ „ეს რამანუჯანის აღმოჩენა იყო“

მათემატიკაში არის ისეთი დებულებები, თეორემები და დამტკიცებები, რომელთა შესაქმნელადაც არ არის საკმარისი ჩვეულებრივი აზროვნება და მისი დაძლევაც თითქოს აღემატება ადამიანური აზროვნების ძალას. სწორედ ასეთი დებულებების, თეორემებისა და დამტკიცებების მიღება არის დაკავშირებული გენიალური მათემატიკოსების სახელებთან, რომელთა შორისაც განსაკუთრებული და გამორჩეული ადგილი უკავია ინდოელ მათემატიკოსს სრინივასა რამანუჯანს.

და მაინც, რით განსხვავდება რამანუჯანი სხვა გენიალური მათემატიკოსებისაგან,- მათემატიკური აზროვნების წესით, რაც მას ადრეულ ასაკში ჩამოუყალიბდა...

სრინივასა რამანუჯანი (Srinivasa Ramanujan Iyengar) დაიბადა 1887 წლის 22 დეკემბერს, სამხრეთ ინდოეთში, მადრასის (Madras) პროვინციაში. მამამისი მუშაობდა ბუღალტრად პატარა ტექსტილის მაღაზიაში, დედა იყო ღრმად რელიგიური პიროვნება. სკოლაში სწავლის დროს მან აჩვენა გამორჩეული შესაძლებლობები მათემატიკაში. ჯერ კიდევ 14 წლის ასაკში საფუძვლიანად დაამუშავა ს. ლონის (S. L. Loney) ტრიგონომეტრიის წიგნი, ხელახლა აღმოაჩინა ეილერის რამდენიმე ფორმულა და ძალიან ნაწყენი დარჩა, როცა გაიგო რომ ეს ფორმულები უკვე გამოქვეყნებული იყო. 16 წლის ასაკში რამანუჯანს ხელში ჩაუვარდა ინგლისელი მათემატიკოსის გ. კარის (G. S. Carr) ორტომეული „წმინდა და გამოყენებითი მათემატიკის ელემენტარული შედეგების მიმოხილვა“. ამ წიგნმა, რომელშიც თავმოყრილი იყო 6165 თეორემა და ფორმულა დამტკიცებების გარეშე, უდიდესი როლი შეასრულა რამანუჯანის ფორმირებაში. გ. კარის წიგნი, რომელშიც ძირითადად მოყვანილი იყო ალგებრის, ტრიგონომეტრიის, ანალიზის და ანალიზური გეომეტრიის საკითხები, საკმარისად წარმატებული აღმოჩნდა იმისათვის, რომ რამანუჯანისთვის მიეცა მათემატიკური განათლება. მაგრამ უარყოფითი როლიც შეასრულა იმ მხრივ, რომ ამ წიგნმა, რადგანაც მასში არ იყო დამტკიცებები, რამანუჯანს ჩამოუყალიბა თავისებური მეთოდი მათემატიკური ჭეშმარიტების დადგენისა, მისთვის უცხო იყო მკაცრი დამტკიცებების საჭიროება. „ის ყველა თავის შედეგამდე მივიდა უდიდესი ინტუიციური მიხვედრილობის, ინდუქციური მოსაზრებების და ლოგიკური მსჯელობის ერთიანობით“. ფაქტიურად ამან გადაწყვიტა რამანუჯანის მათემატიკური ბედიც, სამეცნიერო შედეგების მიღებისა და აზროვნების ხერხები მას შემდეგშიც არ შეუცვლია.

რამანუჯანი ხშირად ამბობდა, რომ მას ძილში ქალღმერთი „ნამაკალი“ ესაუბრებოდა და ასე წერდა ფორმულებს. საინტერესოა აღინიშნოს, რომ როგორც მისი თანამედროვენი ამბობდნენ, დილით ლოგინიდან წამოდგებოდა თუ არა მაშინვე წერდა გამზადებულ ფორმულებს და შემდეგ სწრაფად ამოწმებდა მას.

1913 წელს ახალგაზრდა ინდოელმა რამანუჯანმა კემბრიჯის უნივერსიტეტის პროფესორს, ანალიზის, რიცხვთა თეორიისა და კომბინატორიკის ცნობილ სპეციალისტს გოდფრი ჰარდის (Godfrey Hardy) მიწერა წერილი, რომელშიც წერდა, რომ მას არ ჰქონდა საუნივერსიტეტო მათემატიკური გა-

ნათლება და რომ სკოლის დამთავრების შემდეგ მათემატიკაში მან „აირჩია თავისი გზა“ და მიიღო ფორმულები, რომელიც თან დაურთო წერილს და რომლის გამოქვეყნებასაც თხოვდა ჰარდის თუ ის მისთვის საინტერესო იქნებოდა. ამ ფორმულებიდან ზოგიერთი იმდენად ლამაზი, ახალი და წარმოუდგენლად პარადოქსალური იყო, რომ ჰარდი დაინტერესდა, მან წერილი ლიტლვუდთან ერთად განიხილა და დაასკვნა, რომ რამანუჯანი უდავოდ გენიოსი იყო. ჰარდი მოგვიანებით ამბობდა, რომ რამანუჯანი ეილერის და გაუსის დონის გენია იყო, რომელმაც იმავე მასშტაბის შედეგებს ვერ მიაღწია განათლებაში არსებული "თეთრი ლაქების" გამო. ჰარდისა და რამანუჯანს შორის გაიმართა ინტენსიური მიწერ-მოწერა. მალე ჰარდიმ მოახერხა რამანუჯანის ჩამოყვანა ინგლისის თრინითი კოლეჯში, სადაც გარკვეული დროის განმავლობაში ასწავლიდა თავის „ახალგაზრდა ინდოელ მეგობარს“ თანამედროვე მათემატიკას. ჰარდი ამბობდა, რომ იგი ყველაზე უცნაური "მოსწავლე" იყო მის ცხოვრებაში, რადგან უდიდესი ინტუიციის მფლობელ რამანუჯანს მათემატიკის ბევრ საკითხზე წარმოდგენაც კი არ გააჩნდა.

რამანუჯანის ფორმულები ძირითადად ეხებოდა უსასრულო რადიკალებს, მწკრივებს, ნამრავლებს, ჯაჭვწილადებს, ანალიზურ და არითმეტიკულ ფუნქციებს.

ერთ-ერთი ლამაზი ფორმულა, რომელიც რამანუჯანმა ჯერ კიდევ სკოლაში სწავლის დროს მიიღო, ასე გამოიყურება:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\dots}}}}=3,$$

რომელიც გამომდინარეობს შემდეგი ცხადი ტოლობიდან

$$n(n+2)=n\sqrt{(n+2)^2}=n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}}$$
$$=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}}=\dots,$$

როცა ამ ტოლობაში $n=1$. ან უფრო ზოგადი ტოლობიდან

$$x+n+a=$$
$$=\sqrt{ax+(n+a)^2+x\sqrt{a(x+n)+(n+a)^2+(x+n)\sqrt{a(x+2n)+(n+a)^2+(x+2n)\sqrt{a(x+3n)+\dots}}}}$$

როდესაც $a=0$, $n=1$, $x=2$.

მოვიყვანოთ კიდევ რამდენიმე ფორმულა, რომელიც შეიცავს უსასრულო რადიკალებს და რომელთა დამტკიცება სცდება ელემენტარულ მეთოდებს:

$$\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-\sqrt{8+\dots}}}}=1+2\sqrt{3}\sin 20^0,$$

$$\sqrt{11-2\sqrt{11+2\sqrt{11-2\sqrt{11+\dots}}}}=1+4\sin 10^0,$$

$$\sqrt{23-2\sqrt{23+2\sqrt{23-2\sqrt{23+\dots}}}}=1+4\sqrt{3}\sin 20^0.$$

არანაკლებ საინტერესოა რამანუჯანის ფორმულები, რომელიც შეიცავს მწკრივებს, როგორც ჰარ-

დი ამბობდა რამანუჯანის ფორმულები, რომლებიც შეიცავენ მწკრივებს, მეტად დამაინტრიგებელია. საკმარისია თვალი შევავლოთ ამ ფორმულებს და დავრწმუნდებით, რომ ის მხოლოდ ყველაზე მაღალი კლასის მათემატიკოსის მიერ შეიძლება იყოს დაწერილი და არ შეიძლება იყოს მცდარი, რადგან არავის არ აქვს საკმარისი ფანტაზია მათი გამოგონებისთვის. ჰარდისთვის, მათემატიკოს-პროფესიონალისათვის ძალზე მოულოდნელი იყო ამდენი მნიშვნელოვანი ფორმულა და შედეგი, რომლებიც ახალი, უცნობი და ძნელად დასამტკიცებელი ან უმრავლეს შემთხვევაში, ჯერ კიდევ დაუმტკიცებელი იყო. აი რამდენიმე მათგანიც:

$$1-\frac{3!}{(1!2!)^3}x^2+\frac{6!}{(2!4!)^3}x^4-\ldots=\left(1+\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}+\ldots\right)\left(1-\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}-\ldots\right), \qquad (1)$$

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^3+\ldots=\frac{2}{\pi}, \qquad (2)$$

$$1+9\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\left(\frac{1\cdot5}{4\cdot8}\right)^4+25\left(\frac{1\cdot5\cdot9}{4\cdot8\cdot12}\right)^4+\ldots=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2}, \qquad (3)$$

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^5+9\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^5-13\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^5+\ldots=\frac{2}{\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)^4}, \qquad (4)$$

$$\frac{ln1}{\sqrt{1}}-\frac{ln3}{\sqrt{3}}+\frac{ln5}{\sqrt{5}}-\ldots=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma+ln2\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\ldots\right), \qquad (5)$$

სადაც Γ ეილერის გამა ფუნქციაა, ხოლო γ ეილერის მუდმივია.

ფორმულა (2) ცნობილი იყო ლეჟანდრის პოლინომთა თეორიიდან, ხოლო დანარჩენი ფორმულების დასამტკიცებლად საჭირო თეორემები ამჟამად უკვე ცნობილია და მოყვანილია ვ. ბეილის (Walter Baily) წიგნში, რომელიც ეხება ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციებს.

ფორმულები რამანუჯანისთვის რაიმეს გამოთვლის ან დამტკიცების საშუალება კი არ იყო, არამედ თვითონ ფორმულის შინაგანი და გარეგნული სილამაზე იყო მნიშვნელოვანი და ფასეული.

ჰარდი აღნიშნავდა, რომ ფორმულებში რომელიც ეხება უსასრულო ჯაჭვწილადებს, რამანუჯანის გენიალური ინტუიცია ყოველგვარ საზღვრებს ცდება.

$$1+\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ldots}}}}}=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}$$

ეს შეიძლება რამანუჯანის ერთ-ერთი ყველაზე ლამაზი ფორმულაა, „მათემატიკური ხელოვნების ნიმუში“, სადაც უსასრულო მწკრივი და უსასრულო ჯაჭვწილადი არის ერთმანეთთან დაკავშირებული და რაოდენ გასაკვირიც არ უნდა იყოს არც მწკრივი არც ჯაჭვწილადი არ გამოისახება π და e ცნობილი მუდმივებით, ხოლო მათი ჯამი კი $\sqrt{\frac{\pi e}{2}}$-ის ტოლია.

ჰარდი-რამანუჯანის რიცხვი

რამანუჯანის აზროვნებაში, მათემატიკური სამყაროს ფორმირებისას, მათემატიკური ფაქტები გაერთიანებული იყო კონკრეტულ რიცხვებზე დაკვირვების შედეგად მიღებულ უდიდეს მასალასთან. მას ხომ ბავშვობიდან ჰქონდა განსაკუთრებული უნარი „დაეჭირა“ კანონზომიერებები რიცხვებში. რამანუჯანისთვის ხომ „ყოველი ნატურალური რიცხვი იყო პირადი მეგობარი, თავისი ისტორიით და თვისებებით“. ჰარდი თავის წიგნში „მათემატიკის აპოლოგია“ ყვება, რომ როდესაც ის რამანუჯანთან მივიდა საავადმყოფოში, დაიჩივლა, რომ იმგზავრა ტაქსით მოსაწყენი, არაფრით გამორჩეული ნომრით „1729“. რამანუჯანმა აღელვებულმა წამოიძახა: „რას ამბობ ჰარდი, 1729 ხომ უმცირესი ნატურალური რიცხვია, რომელიც შეიძლება წარმოდგენილი იყოს კუბების ჯამად ორი სხვადასხვა ხერხით $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

ამის გამო 1729-ს ხშირად ჰარდი-რამანუჯანის რიცხვს უწოდებენ. 1729-ს აქვს აგრეთვე სხვა მნიშვნელოვანი თვისებები:

- ის არის მესამე კარლმაიკლის რიცხვი (561 და 1105-ის შემდეგ), ანუ შედგენილი რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს ფერმას მცირე თეორემას, რომ ყოველი მთელი a რიცხვისთვის $a^{1729} - a$ იყოფა 1729-ზე.
- 1729 არის ჰარშადის რიცხვი, რადგან ის იყოფა თავის ციფრთა ჯამზე - 19-ზე და განაყოფში მიიღება 91, შებრუნებული თანმიმდევრობით ჩაწერილი ციფრებით შედგენილი რიცხვი (ასეთი თვისების მქონე არის კიდევ მხოლოდ სამი რიცხვი 1, 81 და 1458).
- 1729 არის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომელიც შეიძლება წარმოდგენილი იყოს დადებითი რიცხვების კუბების ჯამად ორი სხვადასხვა ხერხით, ხოლო თუ კუბების ჯამში განვიხილავთ მთელ რიცხვებს (დადებითს და უარყოფითს), მაშინ უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომელიც შეიძლება წარმოდგენილი იყოს კუბების ჯამად ორი სხვადასხვა ხერხით არის 91 ($91 = 6^3 + (-5)^3 = 3^3 + 4^3$.

$x^3 + y^3 = u^3 + v^3$ დიოფანტური განტოლების ამოხსნით შეიძლება რიცხვის კუბი წარმოვადგინოთ სამი რიცხვის კუბის ჯამად $x^3 = (-y)^3 + u^3 + v^3$.

რამანუჯანმა მიიღო რიცხვის კუბების ჯამად დაშლის ზოგადი ფორმულა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$(3a^2 + 5\mathrm{ab} - 5b^2)^3 + (4a^2 - 4ab + 6b^2)^3 + (5a^2 - 5\mathrm{ab} - 3b^2)^3 = (6a^2 - 4ab + 4b^2)^3.$$

შემდეგში მოიძებნა უმცირესი ნატურალური რიცხვები, რომლებიც შეიძლება წარმოდგენილი იყოს დადებითი რიცხვების კუბების ჯამად სამი, ოთხი, ხუთი და ექვსი სხვადასხვა ხერხითაც კი.

ჰარდი-რამანუჯანის თეორემა

n რიცხვის დაშლა შესაკრებებად არის n რიცხვის წარმოდგენა დადებით მთელ რიცხვთა ჯამის სახით (შესაკრებთა დალაგება მხედველობაში არ მიიღება). დაშლის კანონიკურ ჩაწერაში შესაკრებები იწერება არაზრდადი მიმდევრობით.

$p(n)$-ით აღინიშნება n ნატურალური რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობა დადებით მთელ რიცხვთა ჯამის სახით. მაგალითად:

$$1 = 1,\ \text{ე.ი.}\quad p(1) = 1$$

$$2 = 1 + 1,\qquad p(2) = 2$$

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1,\qquad p(4) = 5.$$

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1,\qquad p(5) = 7.$$

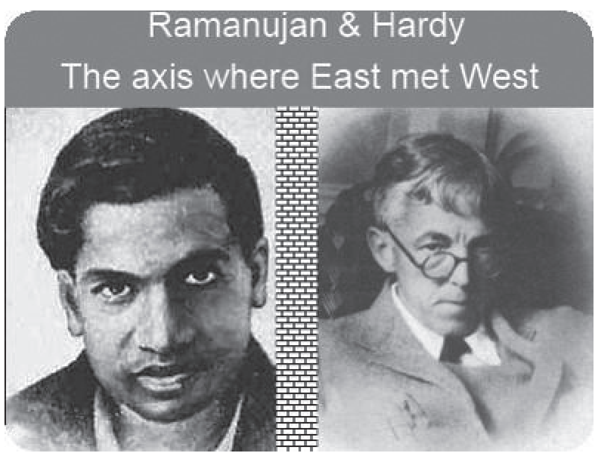
რიცხვთა თეორიის დარგში რამანუჯანის ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი შედეგი იყო $p(n)$-ის ასიმპტოტური ფორმულის მიღება გ. ჰარდისთან ერთად. ამ თეორემის შესახებ ლიტლვუდი წერდა: „ზედმეტია მკითხველისთვის იმის თქმა, რომ ეს თეორემა არის გამაოგნებელი და რომ მეთოდები, რომლითაც ის დამტკიცდა, ეფუძნება პრინციპულად ახალ და ძალიან მნიშვნელოვან იდეებს, რომელთა აღმოჩენაც ძალზე ნაყოფიერი გამოდგა სხვა პრობლემების გადასაწყვეტად“.

თავდაპირველად, $p(n)$ ფუნქცია რამანუჯანმა ჩაწერა მწკრივის სახით და რადგანაც $p(n)$ რიცხვი მთელია, ამიტომ მან განიხილა ამ მწკრივის ის კერძო ჯამები, რომელიც მხოლოდ ½ ზე ნაკლები სიდიდით განსხვავდება მწკრივის ჯამისგან და შესაბამისად $p(n)$-ის მნიშვნელობა გაუტოლა ამ კერძო ჯამის მნიშვნელობასთან მდგომ უახლოეს მთელ რიცხვს. ასე იყო გამოთვლილი, მაგალითად, $p(200) =$ 3 972 999 029 388 (ამისათვის საკმარისი აღმოჩნდა მწკრივის პირველი 5 წევრი), რომელიც დაემთხვა პირდაპირი გაანგარიშებით მიღებულ შედეგს. მაგრამ რამანუჯანი არ კმაყოფილდებოდა მიღებული შედეგით და დაჟინებით ამბობდა, რომ უნდა არსებობდეს უფრო ზუსტი ფორმულა, თუმცა ეს ჰიპოთეზა წარმოუდგენლად მიაჩნდა ყველას, მიუხედავად ამისა რამანუჯანმა და ჰარდიმ ღრმა თეორიულ-ფუნქციონალური საშუალებებით შეძლეს ფორმულის მიღება (თეორემის დამტკიცება), რომ

$$p(n) \sim A_n e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}},$$

სადაც

$$A_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}\left(n-\frac{1}{24}\right)} - \frac{1}{2\left(n-\frac{1}{24}\right)^{\frac{3}{2}}}\right).$$



$p(n)$ ფუნქციის რამდენიმე ასიმპტოტურად ეკვივალენტურ ფორმულას შორის მნიშვნელოვანი იყო არჩეულიყო რაც შეიძლება ზუსტი შეფასება და ყველაზე დიდი მიგნება არის სწორედ ის მცირე „შესწორება“, რომელიც რამანუჯანმა მოიფიქრა, როდესაც უკვე მიღებულ, მაგრამ არც თუ ზუსტ ფორმულაში n-ის ნაცვლად $n-\frac{1}{24}$ შეიტანა. ასეთ მიგნებას კი სხვა არაფერი შეიძლება ეწოდოს თუ არა „გენიალური“. ვერავინ, ვერც ჰარდი და ვერც თვითონ რამანუჯანი ვერ ხსნიდა საიდან გაჩნდა $\frac{1}{24}$, ნუთუ ისევ ქალღმერთი „ნამაკალი“? სწორედ ამ ამოუცნობმა მცირე „შესწორებამ“ განაპირობა შეფასების სიზუსტე. ჰარდიმ და რამანუჯანმა შემდეგში მიიღეს $p(n)$-ის გამოსათვლელი ზუსტი ფორმულა. ამ თეორემის აღმოჩენა არის შედეგი მრავალფეროვანი ნიჭით დაჯილდოვებული ორი მეცნიერის წარმატებული თანამშრომლობისა, რაშიც თითოეულმა მათგანმა შეიტანა ყველაფერი საუკეთესო, რაც მათ გააჩნდათ.

როჯერს-რამანუჯანის იგივეობა:

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)} = \frac{1}{(1-x)(1-x^6)(1-x^{11})\ldots}\cdot\frac{1}{(1-x^4)(1-x^9)(1-x^{14})\ldots}.$$

რამანუჯანმა ეს ტოლობა მიიღო დამტკიცების გარეშე 1911 წელს. ამ ტოლობის დამტკიცება ვერ შეძლო ვერც ჰარდიმ, მაგრამ შემდეგ აღმოჩნდა, რომ ეს იგივეობა უფრო ადრე დამტკიცებული ჰქონდა ინგლისელ მათემატიკოსს როჯერსს (L.Rogers). როჯერს-რამანუჯანის ეს ტოლობა კავშირშია

n რიცხვის შესაკრებებად დაშლის რაოდენობასთან - $p(n)$-თან. აღსანიშნავია, რომ ეს ტოლობა გამოიყენება აგრეთვე სტატისტიკურ ფიზიკაში.

რამანუჯანის წვლილი ასევე დიდია ფორმულებში, რომლებიც ეხება π რიცხვის გამოთვლებს. რ ა - მანუჯანმა მიიღო π-ს გამოსათვლელი რამდენიმე ფორმულა, რომლითაც ძალზე დიდი სიზუსტით შეგვიძლია π-ს მიღება. მათგან ერთ-ერთს აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)![1103+26390n]}{(n!)^4\,396^{4n}},$$

სადაც უკვე პირველი წევრი (როცა $n = 0$) გვაძლევს π-სთან მიახლოებას მძიმის შემდეგ 25 ციფრით.

რამანუჯანის ჯამი

რიცხვთა თეორიაში რამანუჯანის ჯამი ორი დადებითი q და n ცვლადის ფუნქციაა, აღინიშნება $c_n(q)$-ით და განისაზღვრება ფორმულით

$$c_q(n)=\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}e^{2\pi i\frac{a}{q}n}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\zeta_q=e^{\frac{2\pi i}{q}}$, ის ცხადია არის 1-დან q ხარისხის ფესვი, ხოლო $\zeta_q^a=e^{\frac{2\pi i a}{q}}$ (სადაც a არის q- სთან თანამარტივი) 1-დან q ხარისხის პირველადი ფესვებია, მაშინ $c_q(n)$ არის 1-დან q ხარისხის პირველადი ფესვების n-ური ხარისხების ჯამი.

თუ გამოვიყენებთ ეილერის ფორმულას $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ და ელემენტარულ ტრიგონომეტრიულ იგივეობებს მივიღებთ

$$c_q(n)=\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}cos2\pi\frac{a}{q}n.$$

კერძოდ,

$$c_1(n) = 1,$$

$$c_2(n) = \cos\pi n,$$

$$c_3(n)=2cos\frac{2}{3}\pi n,$$

$$c_4(n)=2cos\frac{1}{2}\pi n,$$

$$c_5(n)=2cos\frac{2}{5}\pi n+2cos\frac{4}{5}\pi n, \text{ და ა.შ.}$$

რამანუჯანის ჯამი მულტიპლიკაციური ფუნქციაა q ინდექსის მიმართ, ანუ

$$c_{pq}(n) = c_p(n)c_q(n),$$

სადაც $(p, q) = 1$. მტკიცდება აგრეთვე, რომ

$$c_q(n)=\sum_{d|(q,n)}\mu\left(\frac{q}{d}\right)d,$$

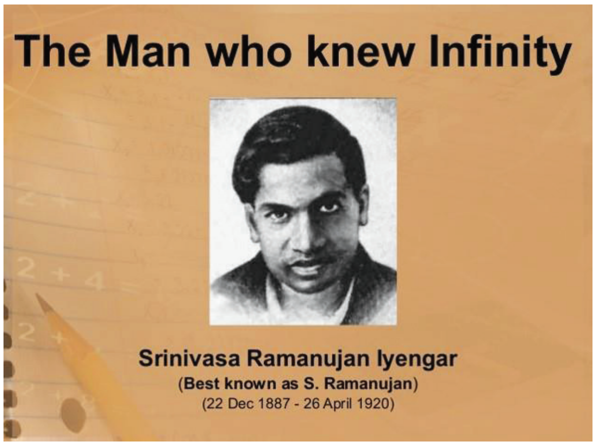
სადაც μ მობიუსის ფუნქციაა $\left(\mu(a)=\begin{cases}0, & \text{თუ } p^2\mid a\\ (-1)^m, & \text{თუ } a=p_1p_2\dots p_m\end{cases}\right)$. საიდანაც გამოდის, რომ $c_q(n)$ ყოველთვის მთელი რიცხვია.

რამანუჯანმა რიცხვთა თეორიის ბევრი ცნობილი ფუნქცია გამოსახა $c_q(n)$ ფუნქციის საშუალებით. კერძოდ, მან მიიღო შემდეგი ფორმულა

$$\sigma(n)=\frac{\pi^2}{6}n\left(\frac{c_1(n)}{1}+\frac{c_2(n)}{4}+\frac{c_3(n)}{9}+\dots\right),$$

სადაც $\sigma(n)$ არის n რიცხვის გამყოფთა ჯამი. რამანუჯანის ჯამები გამოიყენა ვინოგრადოვმა გოლდბახის პრობლემის დამტკიცებაში, რომ ყოველი საკმაოდ დიდი კენტი მარტივი რიცხვი არის სამი მარტივი რიცხვის ჯამი.

რამანუჯანს მნიშვნელოვანი შედეგები აქვს მიღებული x-მდე მარტივ რიცხვთა რაოდენობის გამოსათვლელი $\pi(x)$ ფუნქციის შესახებ. ის დარწმუნებული იყო, რომ მიიღო $\pi(x)$-ის გამოსათვლელი ზუსტი ფორმულა. საბოლოოდ აღმოჩნდა, რომ მის მიერ მიღებული ფორმულები მართალია არ იყო ზუსტი, მაგრამ ძალზე დიდი სიზუსტით უახლოვდება $\pi(x)$-ს ასიმპტოტურად.



გამოქვეყნებული შრომების დიდი ნაწილი რამანუჯანმა დაწერა კემბრიჯში ჰარდისთან თანაავტორობით. მისი ფორმულები, კოლეგებს შორის დიდ გაკვირვებას და აღფრთოვანებას იწვევდა.

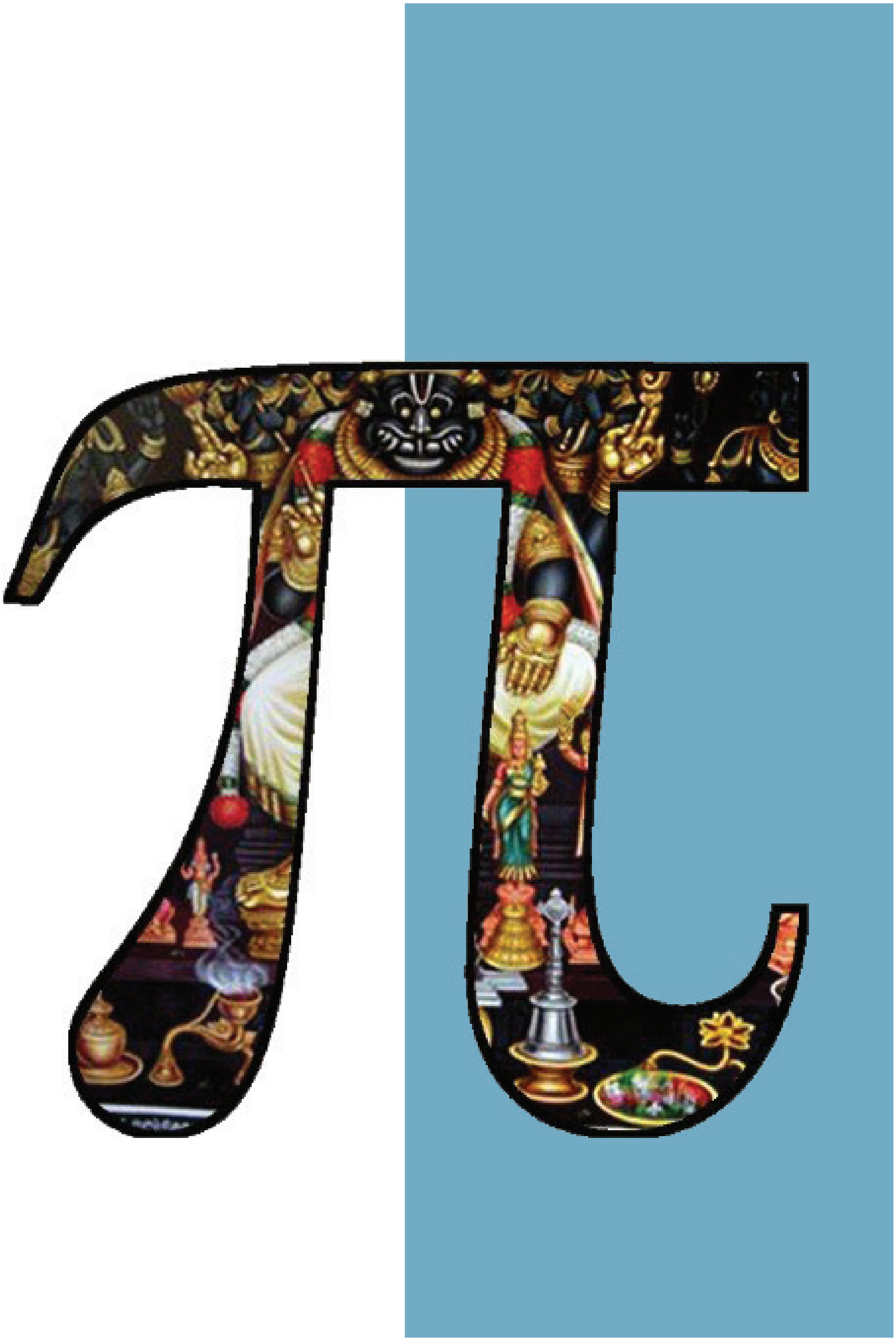
1917 წლის გაზაფხულზე რამანუჯანი ავად გახდა. ნისლიანი ინგლისის ნოტიო კლიმატმა, ომმა და ომისშემდგომმა მძიმე პერიოდმა, არასრულფასოვანმა კვებამ შეასუსტა რამანუჯანის ჯანმრთელობა. ამ პერიოდში მას უკვე აღარ შეეძლო ძველებურად ინტენსიური მუშაობა. 1918 წელს რამანუჯანი ერთდროულად აირჩიეს ინგლისის სამეფო საზოგადოების წევრად და კემბრიჯის უნივერსიტეტის პროფესორად. როგორც კი გამოჯანმრთელდა მან გადაწყვიტა ცოტა ხნით მაინც მშობლიურ მადრასში დაბრუნებულიყო.

ინდოეთში დაბრუნების შემდეგ რამანუჯანი მალე გარდაიცვალა.

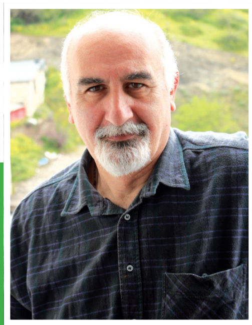
რამანუჯანის გარდაცვალების შემდეგ ჰარდის და პროფესორ ვატსონის ხელმძღვანელობით დაიწყო რამანუჯანის ადრეული და ბოლოდროინდელი ჩანაწერების შეგროვება და მის შრომებზე ინტენსიური მუშაობა. ამ შრომებით დღესაც ბევრი მეცნიერია დაინტერესებული. რამანუჯანის ფორმულები არაერთხელ გამოჩნდა თანამედროვე მეცნიერების სხვადასხვა დარგებში.

ავტორის ელექტრონული მისამართი:
ketevanshavgulidze@yahoo.com

მათემატიკა



მეცნიერების შესახებ



ილია თავხელიძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი, ივ.ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, აკადემიკოს ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი 1984 წ. დაჯილდოვებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009 წლის ყრილობის აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის მემორიალური ოქროს მედლით.

ავტორი ანრი პუანკარე
თარგმნა ილია თავხელიძემ

მეცნიერება და ჰიპოთეზა

უბრალო დამკვირვებლისათვის, მეცნიერული ჭეშმარიტება არ ტოვებს არავითარი ეჭვის ადგილს: მეცნიერების ლოგიკა შეუცდომელია, და თუ კი ოდესმე რომელიმე მეცნიერი (მეცნიერები) ცდება, მხოლოდ იმიტომ, რომ ის (ისინი) ივიწყებს (ივიწყებენ) ლოგიკის წესებს.

მათემატიკური ჭეშმარიტებები გამომდინარეობენ მცირე რაოდენობის ცხადი ფაქტებიდან (პოსტულატებიდან) შეუცდომელი მსჯელობის ჯაჭვის საშუალებით: ამგვარი ჭეშმარიტებები მხოლოდ ჩვენთვის დამახასიათებელი როდია, ამგვარადაა მოწყობილი ბუნება. ეს ჭეშმარიტებები, ხატოვნად რომ ვთქვათ, უწესებენ შემოქმედის თავისუფლებას საზღვრებს და აძლევენ მას ამონახსნების შედარებით მცირე რაოდენობიდან არჩევანის საშუალებას. ამიტომ რამდენიმე ცდა იქნება საკმარისი, რათა ჩვენთვის გამოააშკარავოს, რა არჩევანი იქნა მის მიერ გაკეთებული. ყოველი ცდის შემდეგ შესაბამისი მათემატიკური მსჯელობების საშუალებით შესაძლებელია გამოყვანილ იქნას მრავალი შედეგი, და ამგვარად ყველი მათგანი მოგვცემს საშუალებას შევიცნოთ სამყაროს რომელიღაც ნაწილი.

ამგვარად წარმოუდგენია მეცნიერული ჭეშმარიტების წარმოშობა ფართო საზოგადოებას და სტუდენტებს, რომლებიც იწყებენ ფიზიკის საფუძვლებთან შეხებას. ამგვარად ესმით მათ მათემატიკისა და ცდების როლი. ამგვარი წარმოდგენა ქონდათ ასი წლის წინათ თვით მეცნიერებსაც, რომლებიც ოცნებობდნენ სამყაროს შეცნობასა და ამავ დროულად ცდებიდან რაც შეიძლება მცირე რაოდენობის დასკვნების გადმოღებას.

მაგრამ, დაფიქრდენ რა, მიხვდნენ, რომ მათემატიკოსი, და მით უფრო ექსპერიმენტატორი, ჰიპოთეზის გარეშე ვერაფერს ვერ გახდება. მაშინ დაისვა შეკითხვა, საკმარისად მყარია კი ყველა ეს ლოგიკური კონსტრუქცია? და გაჩნდა აზრი, რომ ნიავიც კი საკმარისია და ისინი შესაძლოა ჩამოიშალონ. ამგვარი სკეპტიკოსობა ნიშნავს მხოლოდ იმას, რომ ხარ ზედაპირული. ეჭვის შეტანა ყველაფერში და ყველაფრის დაჯერება - არის ის ორი ამონახსნი, რომლებიც ერთნაირად კომფორტულია ჩვენთვის, რადგან: ერთიც და მეორეც გვათავისუფლებს დაფიქრების აუცილებლობისაგან.

ამგვარად, იმის მაგივრად რომ გამოტანილ იქნას გაუთვითცნობიერებელი განაჩენი, ჩვენ დაწვრილებით უნდა გამოვიკვლიოთ ჰიპოთეზის როლი: და შედეგად, ჩვენ გავიგებთ, რომ ის არა თუ აუცილებელი, არამედ ხშირად კანონიერიც კი არის. აგრეთვე, ჩვენ დავინახავთ, რომ არსებობენ სხვადასხვა სახის ჰიპოთეზები: ერთნი უშვებენ, ცდის მეშვეობით, შემოწმებას და დადასტურებას და შედეგად ყალიბდებიან ნაყოფიერ ჭეშმარიტებებად; მეორენი, რომლებსაც არ მივყევართ შეცდომებამდე და აფიქსირებენ ჩვენ აზრებს, შესაძლოა გახდნენ სასარგებლონი; და ბოლოს, არის ჰიპოთეზები, რომლებიც გვეჩვენება, რომ ასეთნი არიან, და ისინი არ დაიყვანებიან განმარტებებამდე ან კი შენიღბულ შეთანხმებებამდე.

უკანასკნელნი გვხვდებიან ძირითადად მათემატიკასა და მასთან კავშირში მყოფ მეცნიერებებში. ესაა საფუძველი ამ მეცნიერებების სიზუსტის; ეს პირობითი დებულებები წარმოადგენენ ჩვენი გონის თავისუფალი შემოქმედების ნაყოფს, და აქ ამგვარ შემოქმედებას არავითარი შეზრუდვა არ გააჩნია. აქ ჩვენ გონს შეუძლია ადასტუროს, რადგან აქ ის „აწესებს“; მაგრამ, საქმე ის გახლავთ, რომ ეს „წესები“ საფუძვლად ედება ჩვენ

ანრი პუანკარე (1854-1912)

გამოჩენილი მათემატიკოსი, მექანიკოსი, ფიზიკოსი, ასტრონომი, ინჟინერი და ფილოსოფოსი. ყვე ლა დროის ერთერთი უდიდესი უნიივერსალური მათემატიკოსი. მის ყველაზე დიდ მიღწევებად ითვლება: ტოპოლოგიის როგორც მეცნიერების შექმნა; კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა თვისობრივი თეორიის დამოუკიდებელ მეცნიერებად ჩამოყალიბება; ავტომორფულ ფუნქციათა თეორიის დაფუძნება; ციურ მექანიკაში ახალი და ძალზე ეფექტური მეთოდების დამუშავება; ფარდობითობის თეორიის საფუძვლების დამუშავება და ყველა ფიზიკურ მოვლენაზე ფარდობითობის პრინციპის განზოგადება; ლობაჩევსკის გეომეტრიის თვალსაჩინო მოდელის შექმნა და მრავალი სხვა მის კალამს 500-მდე ნაშრომი ეკუთვნის, მათ შორისაა სამი წიგნი მეცნიერების არსის შესახებ. ჩვენ გთავაზობთ სამივე წიგნის შესავალებს, რათა მკითხველმა წარმოიდგინოს თუ რაოდენ ღრმა საკითხებზე მიდიოდა ფიქრი და მსჯელობა მე-19 საუკუნის ბოლოსა და მეოცე საუკუნის დასაწყისში, და რომ ამ გააზრებამ მოიტანა მეცნიერული ტექნოლოგიების ის აღმავლობა, რომლის მოსწრეც ჩვენ დღეს ვართ. (თ.ი.)

მეცნიერებას, რომელიც მათ გარეშე იქნებოდა შეუძლებელი; ამის საწინააღმდეგოდ ისინი ვერაფერს უწესებენ ბუნებას; თუმცა, ნებისმიერნი არიან თუ არა ეს „წესები"? არა; - წინააღმდეგ შემთხვევაში, ისინი უსარგებლონი იქნებოდნენ. ცდა თავისუფალი არჩევანის საშუალებას გაძლევს, მაგრამ ის იმავ დროულად გვხელმძღვანელობს, გვეხმარება ყველაზე მოსახერხებელი გზის არჩევაში. შედეგად, ჩვენი „წესები" იმ აბსოლუტური მმართველის, მაგრამ ბრძენის, წესების მსგავსია, რომელიც მათ შემოღებამდე მთელი სახელწიფოს საკრებულოს ეთათბირება.

ადამიანთა ნაწილს აოცებს თავისუფალი შეთანხმებების ამგვარი ხასიათი; რადგან ეს შეთანხმებები ზოგიერთი მეცნიერების საფუძველს წარმოადგენენ. ეს მკვლევარები მიეცნენ უზომო განზოგადოებებს და თანაც დაივიწყეს, რომ თავისუფლება განუკითხაობა არაა. ამგვარად, ისინი მივიდნენ იქამდე, რასაც ნომინალიზმი ეწოდება, და მათ წინაშე წარმოიშვა შეკითხვა - ხომ არაა მეცნიერი მოტყუებული თავისი განმარტებებითა და წესებით, და ხომ არ არის მთელი სამყარო, რომლსაც ის შეისწავლის, თავისი ნების (სურვილის), წარმონაქმნი; ამ პირობებში ეს მეცნიერება იქნებოდა „მართალი" მაგრამ მას არ ექნებოდა არავითარი მნიშვნელობა.

ეს რომ ამგვარად იყოს, მეცნიერება იქნებოდა უსუსური და უძლური. მაგრამ ჩვენ მუდმივად ვხედავთ მეცნიერების ნაყოფიერ შედეგებს. ეს შეუძლებელი იქნებოდა, მას რომ რაიმე რეალური არ ეჩვენებია ჩვენთვის; მაგრამ ის, რაც მას შეუძლია შეიცნოს, არის არა „ნივთი თავის თავში", როგორც ეს მიამიტ დოგმატიკოსებს წარმოუდგენიათ, არამედ, ესაა მიმართება მოვლენებს შორის; ამ ურთიერთობების გარეთ არ არს შემეცნებადი რეალობა.

ამგვარია დასკვნა რომელთანაც ჩვენ მივალთ; მაგრამ ამისათვის ჩვენ მოგვიხდება მეცნიერებების ჯაჭვის მიმოხილვის ჩატარება, არითმეტიკიდან და გეომეტრიიდან დაწყებული მექანიკითა და ექსპერიმენტული ფიზიკით დამთავრებული.

როგორია დასკვნის ბუნება მათემატიკაში? მართალია რომ ის დედუქციურია, როგორც ჩვეულებისამებრ ფიქრობენ? უფრო ღრმა ანალიზი კი გვიჩვენებს, რომ ეს ასე არაა- რომ გარკვეული აზრით მას ინდუქციური დასკვნის ბუნება აქვს და ამიტომაცაა ის ასე ნაყოფიერი. მაგრამ ამის გამო ის არ კარგავს აბსოლუტურ სიმკაცრეს, რასაც ჩვენ პირველ რიგში ვაჩვენებთ.

გავეცნობით რა ახლოდან ერთერთ იარაღს, რომელსაც მათემატიკა აძლევს მკვლევარებს, ჩვენ გადავალთ მეორე ძირითადი ცნების - მათემატიკური სიდიდის ცნების - ანალიზზე. შევხვდებით კი მას ბუნებაში, თუ ჩვენ შემოგვაქვს ის ბუნებაში? და ამ ბოლო შემთხვევაში, ხომ არ ვრისკავთ რომ გავაუკუღმართებთ ყველაფერს? ვადარებთ რა ჩვენი გრძნობების უხეშ მონაცემებს და უფაქიზეს ცნებებს, რომლებსაც მათემატიკოსები სიდიდეებს უწოდებენ; ჩვენ იძულებული ვართ ვაღიაროთ მათი განსხვავებულობა; შედეგად ის ჩარჩო, რომელშიც ჩვენ ყველაფერი გვინდა მოვაქციოთ - ჩვენ თვითონვე შევქმენით; მაგრამ ჩვენ ის ციდან არ მოგვიტანია, ჩვენ ის შევქმენით, ასე, რომ ვთქვათ იმ ზომითა და იმის გამო, რომ მასში შეგვიძლია მოვაქციოთ ეს მოვლენა ისე, რომ არ დავამახინჯოთ მისი ბუნებრივი არსი.

მეორე ჩარჩო, რომელსაც ჩვენ ვადებთ მთელ სამყაროს, - ესაა სივრცე. საიდან წარმოიშვებიან

გეომეტრიის საწყისები? არიან თუ არა ისინი ლოგიკის მოთხოვნები? ლობაჩევსკიმ,ააგო რა არაევკლიდური გეომეტრიები, აჩვენა, რომ ეს ლოგიკის მოთხოვნა არაა. აღმოვაჩენთ კი სირვცეს ჩვენი შეგრძნებების საშუალებით? აგრეთვე არა - რადგან ის სივრცე, რომელიც შესაძლოა შევიცნოთ გრძნობების საშუალებით, აბსოლუტურად განსხვავდება გეომეტრიული სივრცისგან. არის თუ არა გეომეტრია ცდის შედეგი? ღრმა კვლევებმა აჩვენა, რომ არა! ჩვენი დასკვნა ყოველივე ამის შედეგად - რომ ეს პრინციპები არის პირობითი დებულებები; მაგრამ ისინი ნებისმიერნი კი არ არიან, არამედ სხვა სამყაროში რომ იქნან გადატანილნი (მე ვგულისხმობ არაევკლიდურ სამყაროს და ვცდილობ წარმოვაჩინო ის) ჩვენ გვექნებოდა ყურადღება გამახვილებული სხვა დებულებებზე.

მექანიკაში ჩვენ, აგრეთვე, მივალთ ანალოგიურ დასკვნებამდე და დავინახავთ, რომ ამ მეცნიერების პრინციპები, რომლებიც დაკვირვებასთან და ცდასთან გაცილებით უფრო მჭიდროდ არის დაკავშირებული, მაინც უფრო გეომეტრიული პოსტულატების პირობით ხასიათს ატარებენ . აქამდე ნომინალიზმი ჭარბობს; ასე მივდივართ ფიზიკურ მეცნიერებებამდე, მათი ჭეშმარიტი აზრით. ამ ადგილას სურათი კარდინალურად იცვლება; ჩვენ გვხვდება სხვა ბუნების მქონე ჰიპოთეზები და ვხედავთ მათ ნაყოფიერებას. მართლაც, პირველი შეხედვით ისინი ძალზე ფაქიზი და ძალზე მსხვრევადი არიან, და მეცნიერების ისტორია გვიჩვენებს, რომ ისინი დროშიც იცვლებიან; მაგრამ ისინი მთლიანად (უკვალოდ) არ ქრებიან, თითოელი მათგანისაგან რაღაც რჩება . ეს რაღაც ამოსაცნობია, რადგან აქ, და მხოლოდ აქ, ძევს რეალური ჭეშმარიტება.

ფიზიკურ მეცნიერებათა მეთოდი ინდუქციურობას ეფუძნება, ის გვაიძულებს ველოდოთ ამა თუ იმ მოვლენის (ფენომენის) განმეორებას, როდის შედგება გარემოება რომლის დროსაც ის პირველად „მოხდა" (ჩვენ აღმოვაჩინეთ). შესაძლებელი რომ იყოს ყველა გარემოების ერთდროულად გამეორება, ეს პრინციპი შესაძლოა გამოყენებულ იქნას ყოველგვარი აღწერის გარეშე; მაგრამ ეს არ მოხდება: რომელიღაც გარემოება (ან გარემოებები) შესაძლოა არ შედგეს. ჩვენ კი აბსოლუტურად ვართ დარწმუნებული, რომ ისინი აუცილებელნი არიან, ანუ მათი არსებობა აუცილებელია მოვლენის მოსახდენად? რა თქმა უნდა, არა. ეს „ალბათ" შესაძლოა იყოს მნიშვნელოვანი, მაგრამ შეუძლებელია მკაცრად ამის დასაბუთება. აქედან გამომდინარეა, რომ ფიზიკურ მეცნიერებაში უმნიშვნელოვანეს როლს თამაშობს ალბათობის ცნება. ამგვარად, ალბათურ სტატისტიკური მეთოდები არაა მხოლოდ გასართობი ან კი სახელმძღვანელო ბაკარას მოთამაშეთათვის, და შესაბამისად ჩვენ ვალდებულნი ვართ შევეცადოთ ზუსტად დავაფუძნოთ მისი პრინციპები. ამ მიმართულებით მე შემიძლია მხოლოდ არასრული შედეგების მოტანა, რადგან ის გაუგებარი ინსტიქტი, რომელიც ჩვენ გვხელმძღვანელობს ალბათობაში წამოჭრილი საკითხების გადაწყვეტისას, ანალიზს თითქმის არ ექვემდებარება.

შევისწავლე რა პირობები, რომელშიც ფიზიკოსს უხდება მუშაობა, მე საჭიროდ ჩავთვალე ვაჩვენო ის მუშაობის პროცესში. ამისათვის მე ავიღე რამდენიმე მაგალითი ოპტიკისა და ელექტროობის ისტორიიდან. ჩვენ დავინახავთ, საიდან გამოვიდნენ ფრენელის, მაქსველის იდეები და რა ჰიპოთეზებს, გაუაზრებლად, ქმნიდნენ ამპერი და ელექტროდინამიკის სხვა შემქმნელები.

მეცნიერების ფასეულობა

ჩვენი მოღვაწეობის მიზანი ჭეშმარიტების ძიება უნდა გახლდეთ; ეს - ერთადერთი ღირსეული მიზანია. რა თქმა უნდა, თავიდან ჩვენ უნდა ვეცადოთ შევამსუბუქოთ ადამიანის სატანჯველი, მაგრამ - რისთვის? სატანჯველის არ არსებობა - ეს ხომ უარყოფითი იდეალია, რომელიც ჭეშმარიტად მიღწეული იქნება სამყაროს განადგურებით. თუ ჩვენ სულ უფრო და უფრო გვინდა მატერიალური საზრუნავისაგან გავათავისუფლოდ ადამიანი, მხოლოდ იმიტომ, რომ მან გამოიყენოს მოპოვებული თავისუფლება ჭეშმარიტების კვლევისა და გააზრებისათვის.

მაგრამ ჭეშმარიტება ხანდახან გვაფრთხობს. მართლაც, ვიცით, რომ ის ხანდახან მოჩვენებითია, რომ ის - რაღაც აჩრდილივითაა, რომელიც წამიერად გამოჩნდება ჩვენ წინ ხოლო შემდგომ კი დიდი ხნით (შესაძლოა საბოლოოდ) ქრება, ისე, რომ მას უნდა სდიო სულ უფრო შორს და შორს და ვერასოდეს მიაღწიო მას. არა და, რომ იმოქმედო, უნდა გაჩერდე (აუცილებლობის წნეხის გამო), - თქვა არისტოტელემ, თუ რომელიღაც ბერძენმა. ჩვენ ვიცით, თუ როგორი, სასტიკი არის ხოლმე ის (ჭეშმარიტება) და ჩვენ ჩვენ თავს ვუსვამთ შეკითხვას, ხომ არ არის ილუზია - არა მხოლოდ დამამშვიდებელი, არამედ უფრო საიმედოც. ის ხომ ჩვენ გვაძლევს თავდაჯერებულობას. და თუ გაქრება ილუზია, დაგვრჩება კი იმედი და გვეყოფა კი ჩვენ სიმამაცე, იმისათვის რომ ვიმოქმედოთ? ასეა, მანეჟზე გამოსვლისათვის გამზადებული ცხენი, ალბათ უარს იტყოდა ჭენებაზე, მისთვის, წინასწარ, თვალები რომ არ აეხვიათ. და

კიდევ – ჭეშმარიტების ძიებისათვის უნდა ვიყოთ დამოუკიდებელნი, ანუ საკმარისად თავისუფალი. საწინააღმდეგოდ იმისა, თუ გვინდა ვიმოქმედოთ, თუ გვინდა ვიყოთ ძლიერნი, დგება მომენტი, რომ უნდა გავერთიანდეთ. აი რატომ აშინებს ბევრ ჩვენგანს ჭეშმარიტება. ისინი ხედავენ მასში სისუსტის მიზეზს; და მიუხედავად ამისა ჩვენ არ უნდა გვეშინოდეს ჭეშმატების, რადგან ის მშვენიერია.

მე აქ თუ ჭეშმარიტებაზე ვისაუბრებ, მაშინ ეჭვი არ არის, რომ უპირველეს ყოვლისა, მე მინდა ვისაუბრო მეცნიერული ჭეშმარიტების შესახებ; მაგრამ ამასთან ერთად მე მინდა ვისაუბრო მორალურ ჭეშმარიტებაზეც, რომელთანაც მიმართებაში ის, რასაც ქვია სამართლიანობა, არის მისი მხოლოდ ერთ-ერთი სახეობა. მეჩვენება, რომ ბოროტად ვიყენებ ერთი და იგივე მნიშნელობის მქონე სიტყვებს, ვაერთიანებ სხვადასხვა რაღაცეებს, რომელთაც საერთო არაფერი არა აქვთ; რომ მეცნიერულ ჭეშმარიტებას, რომელიც დამტკიცებადია, არაფერი საერთო არა აქვს მორალურ ჭეშმარიტებასთან, რომელიც მხოლოდ შეიგრძნობა.

მიუხედავად ამისა მე მათ ვერ ვაშორებ, განსხვავებით იმათგან, ვისაც უყვართ ერთი და არ შეუძლიათ მეორის შეყვარება. იმისათვის რომ ვიპოვოთ ერთი, ისევე, როგორც ვიპოვოთ მეორე, საჭიროა შევეცადოთ სრულიად გავათავისუფლოდ ჩვენი სული წინასწარგანწყობისა და მიკერძოებისაგან, და უნდა მივაღწიოდ აბსოლუტურ გულწრფელობას. ორივე ამ ტიპის ჭეშმარიტებას, ერთხელ აღმოჩენილს, ჩვენ მივყავართ ერთნაირ აღფრთოვანებამდე; ერთიც და მეორეც, როგორც კი მათ შეამჩნევენ, აკაშკაშდებიან ერთნაირი ბრწყნვალე შუქით, ასე რომ, ან უნდა უყურო მათ, ან კი უნდა დახუჭო თვალები. და ბოლოს, ორივე მიგვიზიდავს და ხელიდან გვისხლტება; ისინი არასოდეს არ არიან ხისტად დაფიქსირებული; ოდეს ვინმე იფიქრებს, რომ მიაღწია მათ, – იმწუთასვე დაინახავს, რომ „გზა“ კიდევაა გასავლელი, და მას, ვისაც უნდა რომ ეზიაროს მათ, მისჯილი აქვს არასოდეს ჰქონდეს მოსვენება.

აქვე უნდა დავამატოთ, რომ მას, ვისაც ეშინია ერთის, მეორესიც შეეშინდება; რადგან ამგვარი ადამიანები ყოველ საქმეში უპირველეს ყოვლისა ზრუნავენ შედეგზე. ერთი სიტყვით, მე ვაახლოებ ამ ორ ჭეშმარიტებას იმიტომ, რომ ერთნაირი მოტივები გვაიძულებენ ჩვენ გვიყვარდეს ისინი და ერთნაირი მოტივები აღძრავენ ჩვენში მათდამი შიშს.

თუ ჩვენ არ უნდა გვეშინოდეს მორალური ჭეშმარიტებების, მით უფრო არ უნდა გვქონდეს მეცნიერული ჭეშმარიტებების შიში. უპირველეს ყოვლისა, ის ვერ იქნება მორალთან „მტრობაში“. მორალს და მეცნიერებას თავთავისი არეები აქვთ, რომლებიც ურთიერთშეხებაში არიან, მაგრამ ერთმანეთში არ იჭრებიან. პირველი გვიჩვენებს, რა მიზანს უნდა ვისახავდეთ; მეორე – ამ მიზნის მისაღწევად – აღმოგვაჩენინებს საშუალებებს მის მისაღწევად. შედეგად, ისინი ვერასოდეს ვერ მოვლენ ერთმანეთთან წინააღმდეგობაში, და აგრეთვე ისინი ერთმანეთს ვერ შეეჯახებიან. შეუძლებელია ამორალური მეცნიერების არსებობა, ისევე როგორც შეუძლებელია არსებობდეს მეცნიერების მორალი.

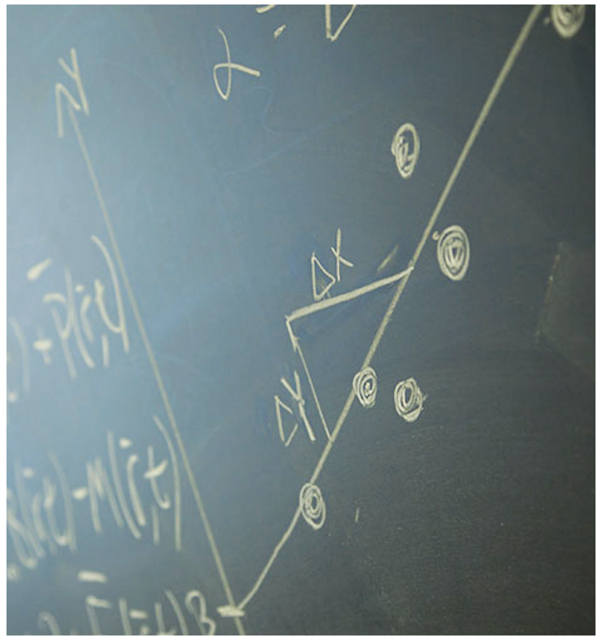
მაგრამ თუ კი ვინმეს ეშინია მეცნიერების, უმთავრესად იმიტომ, რომ ის ვერ იძლევა ბედნიერებას. ეს ცხადია, – ის ამას ჩვენ ვერ მოგვცემს, და შეგვიძლია ჩვენ თავს შევეკითხოთ, ცხოველი უფრო ნაკლებად არ განიცდის, ვიდრე ადამიანი? შეგვიძლია კი ვიდარდოთ იმ მიწიერ სამოთხეზე, სადაც ცხოველისმაგვარი ადამიანი იყო ჭეშმარიტად უკვდავი, რადგან მან არ იცოდა, რომ უნდა მომკვდარიყო? თუ გასინჯეს ვაშლი, მაშინ ვერავითარ განსაცდელს ვერ ძალუძს დაგვავიწყოს მისი გემო, და ყოველთვის მას უბრუნდებით. შესაძლებელია სხვაგვარად ყოფილიყო? ეს ხომ თითქმის იგივეა, რომ დავსვათ შეკითხვა, შეძლებს თუ არა ის, ვინც ნახა და შემდეგ დაბრმავდა, არ იგრძნოს სევდა სინათლის გამო. ამგვარად, ადამიანი ვერ იქნება მეცნიერებით ბედნიერი, მაგრამ ახლა კიდევ უფრო ნაკლებათაა შესაძლებელი, რომ ის გახდეს ბედნიერი მის გარეშე.

მაგრამ თუ კი ჭეშმარიტება არის ერთადერთი მიზანი, რომლისთვისაც ღირს, რომ მისკენ ვისწრფოდეთ, შესაძლებელია, რომ გვქონდეს იმედი, რომ მივაღწევთ მას? აი რაში უნდა შევიტანოთ ეჭვი. ჩემი წიგნის, „მეცნიერება და ჰიპოთეზა“, მკითხველებმა უკვე იციან, თუ რას ვფიქრობ მე ამის შესახებ. ჭეშმარიტება, რომელიც ხელგვეწიფება, რომ განვჭვრიტოთ, მთლად ის არაა რასაც ადამიანთა უმეტესობა ამგვარი სახელით მოიხსენიებს. ნიშნავს კი ეს ყველაფერი იმას, რომ რომ ჩვენი ყველაზე კანონიერი და ყველაზე გულმოდგინე სწრაფვა არის ამავდროულად ყველაზე ამაო? თუ ყველაფრის საწინააღმდეგოდ ჩვენ შესაძლოა მივუახლოვდეთ ჭეშმარიტებას რომელიმე მხრიდან? აი ეს მოსაზრება კი უნდა განვიხილოთ. უპირველეს ყოვლისა, რა საშუალება გაგვაჩნია ჩვენ ჭეშმარიტების მოსაპოვებლად? შეუძლია თუ არა ადამიანს გონს – თუ, შემოტანილი იქნება შეზღუდვები, მეცნიერის გონს – იყოს უსასრულოდ მრავალფეროვანი? ამ საკითხზე მრავალი ტომის დაწერა არის შესაძლებელი, მაგრამ, მიუხედავად ამისა, ეს საკითხი მაინც ამოუწურავი დარჩება; მე ამ თემას მხოლოდ ზედაპირულად შევეხე და რამდენიმე გვერდზე აღვწერე. მოსაზ-

რებას, რომ მათემატიკოსის გონი ნაკლებად ჰგავს ფიზიკოსის გონს ან კი ნატურალისტისას, ვგონებ ყველა დაეთანხმება; მეორე მხრივ მათემატიკოსები თავად არ ჰგვანან ერთმანეთს; ერთნი აღიარებენ მხოლოდ შეუბრალებელ ლოგიკას, მეორენი მიმართავენ ინტუიციას და მასში ხედავენ აღმოჩენების ერთადერთ წყაროს. ეს შესაძლოა გახდეს ეჭვის საფუძველი. შეძლებენ კი მათემატიკური თეორემები წარმოჩინდნენ ერთნაირად ასე განსხვავებული აზრების მქონე ადამიანების წინაშე? ჭეშმარიტება, რომელიც არ არის ერთიდაიგივე ყველასათვის, არის კი ჭეშმარიტება? მაგრამ ღრმად განხილვა, გვაჩვენებს, რომ ეს ერთმანეთისაგან განსხვავებული მუშაკები თანამშრომლობენ ერთიანი საქმისათვის, რომლის კეთება შეუძლებელი იქნებოდა მათი თანამშრომლობის გარეშე. ეს ჩვენ გვამხნევებს.

შემდეგ ჩვენ უნდა შევისწავლოთ ის ჩარჩო, რომლითაც, ჩვენი მოსაზრების თანახმად, შევზღუდეთ ბუნება და რომელსაც ჩვენ დროსა და სივრცეს ვუწოდებთ. ადრე, წიგნში „მეცნიერება და ჰიპოთეზა“, მე ვაჩვენე თუ რაოდენ ფარდობითია მათი როლი; არადა ბუნება კი არ გვახვევს ჩვენ შეზღუდვით პირობებს, არამედ ჩვენ ვადებთ მას ამ ჩარჩოს, რადგან ჩვენთვის ასე უფრო მოსახერხებელია; მე იქ მხოლოდ სივრცეზე და უმთავრესად სივრცეზე, ასე რომ ვთქვათ, რაოდენობრივზე მქონდა საუბარი, ანუ იმ მათემატიკურ კავშირებზე, რომელთა ერთობლიობა შეადგენს გეომეტრიას. აუცილებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ დროის შესახებაც იგივე შესაძლოა ითქვას, რაც სივრცის შესახებ. აგრეთვე იგივეს თქმაა შესაძლებელი „თვისობრივ სივრცეზე“ (ოთხგანზომილებიანი დრო+სივრცე, თ.ი.); კერძოდ, გამოსაკვლევია მიზეზები, თუ რატომ მივაწერთ სივრცეს სამ განზომილებას. ამიტომ მომიტევოს მკითხველმა და მე კიდევ ერთხელ მოვუბრუნდები ამ უმნიშვნელოვანეს საკითხებს.

ხომ არ არის მათემატიკური ანალიზი, რომლის მთავარ ამოცანასაც წარმოადგენს ამ წარმოსახვითი ჩარჩოს შესწავლა, მხოლოდ გონის უსარგებლო თამაში? მას შეუძლია მისცეს ფიზიკას მხოლოდ მოხერხებული ენა; ხომ არ არის ეს უღიმღამო მომსახურეობა, ურომლისოდაც, მკაცრად რომ ვთქვათ, შესაძლებელი იყო მიგვეღწია ჩვენი მიზნისათვის; და თუნდაც, ხომ არ უნდა ვუფრთხილდეთ იმას, რომ ეს ხელოვნური ენა იქნება ფიზიკოსის თვალსა და რეალურობას შორის ჩამოშვებული ფარდა? ეს ნამდვილად ასე არ არის; ამ ენის გარეშე უმეტესი ნაწილი მოვლენებს შორის ღრმა ანალოგიებისა სამუდამოდ დარჩებოდა უცნობი, და ჩვენ ვერასოდეს შევიცნობდით სამყაროს შინაგან ჰარმონიას, რომელიც, რო-



გორც ვნახავთ, არის ერთადერთი ნამდვილად ობიექტური რეალობა.

ამ ჰარმონიის საუკეთესო გამოძახილი - ესაა კანონი(ბუნების კანონი და არა ადამიანების მიერ საკანონმდებლო ორგანოებში შექმნილი კანონი, რომლებსაც ჯერ კიდევ ჩვენ წელთ აღრიცხვამდე მეხუთე საუკუნეში, სოკრატეს თანამედროვე, მათემატიკოსისა და ფილოსოფოსის წინადადებით ნორმები ეწოდა, თ.ი.); კანონი არის ადამიანის გონის ერთერთი უახლოესი მონაპოვარი; ჯერ კიდევ არსებობენ ადამიანები, რომლებიც ცხოვრობენ უწყვეტი სასწაულის პირობებში და რომელთაც ეს არ აკვირვებთ; არადა, ჩვენ უნდა გვაკვირვებდეს ბუნების კანონზომიერებანი. ადამიანები თხოვენ თავიანთ ღმერთებს მათი არსებობის დამტკიცებას სასწაულების მეშვეობით; მაგრამ მუდმივი სასწაული - იმაშია, რომ სასწაულები არ ხდება უწყვეტად. რადგანაც სამყარო ღვთაებრივია, ის სავსეა ჰარმონიით. ის, რომ თვითნებურად იმართებოდეს, რა იქნებოდა იმის დასტური, რომ ის იმართება შემთხვევით?

კანონის ამ მონაპოვარს ჩვენ უნდა ვუმადლოდეთ ასტრონომიას, და ეს არის ის, რაც ქმნის ამ მეცნიერების სიდიადეს, უფრო მეტი, ვიდრე მის მიერ შესასწავლი ობიექტების მატერიალური სიდიდიადე .

ამგვარად, სრულიად ბუნებრივია, რომ ციური მექანიკა იყო მათემატიკური ფიზიკის პირველი ნიმუში; მაგრამ შემდგომ ეს მეცნიერება განვითარდა; ის ახლაც ვითარდება და ძალზე სწრაფადაც ვითარდება. ახლა აუცილებელია ზოგიერთ პუნქტში შეიცვალოს ის სურათი, რომელიც მე 1900 წელს წარმოვსახე და რომელმაც შეადგინა, ჩემი წიგნის „მეცნიერება და ჰიპოთეზა“, ორი თავი. 1904 წელს, მე შევეცადე შემეფასებია განვლილი

გზა სენტ-ლუისში გამოფენაზე, ჩატარებულ კონფერენციაზე; მკითხველი ნახავს, თუ როგორი იყო ამ კვლევის შედეგი.

აღმოჩნდა, რომ მეცნიერების პროგრესი საფრთხეს უქმნის ყველაზე მდგრად პრინციპებსაც, რომელსაც როგორც ფუნდამენტალურს, განიხილავდნენ. მაგრამ არაფერი მიგვითითებს იმაზე, რომ მათი შენარჩუნება შეუძლებელია; და თუ კი გააზრებული იქნება მხოლოდ მათი არასრულყოფილება, მაშინ ისინი გააგრძელებენ თავანთ არსებობას სახეცვლილი ფორმით. მეცნიერების წინსვლა უნდა შევადაროთ არა რომელიმე ქალაქის გადაკეთებას (პერესტროიკას), სადაც ძველი შენობები უმოწყალოდ ინგრევა, რათა ახალ ნაგებობებს ადგილი გაუთავისუფლოს, არამედ ზოოლოგიური სახეობების ევოლუციას, რომლებიც შეუჩერებლად ვითარდებიან და, ბოლოს და ბოლოს, ხდებიან ჩვეულებრივი თვალისათვის შეუცნობელნი, მხოლოდ გამოცდილი თვალი ყოველთვის აღმოაჩენს წინა საუკუნეებში განხორციელებული სახეცვლილების კვალს. ამგვარად, არ უნდა ვიფიქროთ, რომ მოდიდან გასული თეორიები იყო უნაყოფო და არასაჭირო.

ამ ადგილას რომ გავჩერებულიყავით, ვნახავდით მეცნიერების ფასეულობის რწმენის საფუძველს, მაგრამ უფრო მეტი საფუძველი გვექნებოდა არ გვერწმუნა ის; და ჩვენ დავრჩებოდით მუდმივი ეჭვის ქვეშ. ახლა კი უნდა ჩავწვდეთ საქმის არსში.

ზოგიერთნი გადაჭარბებულად აფასებენ პირობითი შეთანხმებების როლს მეცნიერებაში; ისინი იქამდეც მივიდნენ, რომ დაიწყეს საუბარი იმაზე, რომ კანონი და მეცნიერული ფაქტიც კი მეცნიერის მიერ იქმნება. ეს ნიშნავს, რომ ძალზე შორს ვართ წასული ნომინალიზმისაკენ. არა, მეცნიერული კანონები - არაა ხელოვნური გამოგონებები; ჩვენ არ გვაქვს არავითარი საფუძველი, რომ ჩავთვალოთ ისინი შემთხვევითობებად, თუმცა, ამ მომენტში ვერ დავამტკიცებთ, რომ ისინი ამგვარნი არ არიან.

მაგრამ, ადამიანის გონის გარეთაა ბუნების ჰარმონია, რომლის აღმოჩენის მოლოდინიც აქვს ადამიანის გონს? უეჭველია, რომ არა; შეუძლებელია რეალობა, რომელსაც გონი ითვისებს, უყურებს და შეიგრძნობს, არსებობდეს გონისაგან სრულიად დამოუკიდებლად. ამგვარი გარე სამყარო, რომც არსებობდეს, ჩვენთვის მიუწვდომელი იქნებოდა. მაგრამ რასაც ჩვენ ვეძახით ობიექტურ ჭეშმარიტებას, საბოლოო ჯამში არის ის, რაც არის საერთო რამოდენიმე მოაზროვნე არსებისათვის და შესაძლოა საერთო ყოფილიყო ყველასათვის. ეს ერთიანი, როგორც ვნახავთ, შესაძლოა იყოს მხოლოდ ჰარმონია, რომელიც მათემატიკური კანონებით გამოისახება.

შედეგად, ეს ჰარმონიაა ერთადერთი ობიექტური რეალობა, ერთადერთი ჭეშმარიტება, რომლის მიღწევაც ჩვენ შეგვიძლია; და თუ ამას დაუმატებ იმასაც, რომ სამყაროს უნივერსალური ჰარმონია არის წყარო ყოველი სილამაზისა, მაშინ გასაგები გახდება, როგორ უნდა ვაფასებდეთ იმ წინგადადგმულ ნელ და ძნელ ნაბიჯებს, რომლებიც ცოტ-ცოტათი გვიხსნიან ჩვენ მას.

მეცნიერება და მეთოდი

წარმოდგენილ ნაშრომში მე შევაგროვე სხვადასხვა ეტიუდები, რომლებიც ასე თუ ისე კავშირში არიან მეცნიერული მეთოდოლოგიის საკითხებთან. მეცნიერული მეთოდი მდგომარეობს დაკვირვებასა და ექსპერიმენტირებაში. მეცნიერს, დროის უსასრულო მარაგი რომ ჰქონდეს, მაშინ ისღა დაგვრჩებოდა გვეთქვა: „უყურე და უყურე კარგად!" მაგრამ, რადგან დრო არ იძლევა საშუალებას თვალი მოვავლოთ ყველაფერს, და, განსაკუთრებით, დავაკვირდეთ ყველაფერს კარგად, - მეორეს მხრივ, ჯობია არ შეხედო, ვიდრე დააკვირდე ცუდად, - ამგვარად, მეცნიერი იძულებულია გააკეთოს არჩევანი. პირველი ამოცანა მდგომარეობს იმაში, თუ როგორ უნდა გააკეთოს მან არჩევანი. ეს ამოცანა თანაბრად იჩენს თავს როგორც ფიზიკოსის, აგრეთვე ისტორიკოსის წინაშე; მასთან ანგარიშის გაწევა უხდება მათემატიკოსსაც; სხვათა შორის, პრინციპები, რომლითაც უნდა იხელმძღვანელოთ თქვენ და სხვა მეცნიერებმა, ანალოგიებისაგან არ არიან თავისუფალი. აქ, ჩვეულებისამებრ, მეცნიერი მიყვება ინტუიციას; მაგრამ, თუ ამ პრინციპებს ჩაუფიქრდებით, შესაძლოა განჭვრიტოთ, როგორი იქნება მათემატიკის მომავალი.

ჩვენ კიდევ უფრო დავაფასებთ მეცნიერს, თუ კი დავაკვირდებით მას შემოქმედების პროცესში; უპირველეს ყოვლისა, აუცილებელია შემოქმედების და, კერძოდ, მათემატიკური შემოქმედების ფსიქოლოგიის მექანიზმის ცოდნა. მათემატიკოსის სამუშაო პროცესსზე დაკვირვება ძალზე ჭკუის სასწავლებელი იქნება ფსიქოლოგისათვის.

ყველა ცდაზე დამოკიდებულ მეცნიერებაში აუცილებელია ანგარიშის გაწევა შეცდომებისათვის, რომლებიც გამოწვეულია ჩვენი გრძნობების არასრულყოფილებითა და მოწყობილობების ნაკლოვანებებით. საბედნიეროდ, შესაძლებელია, დაშვება იმისა, რომ გარკვეულ პირობებში დაშვებული ამგვარი შეცდომები კომპენსირდებიან, ასე რომ, გასაშუალებულ შედეგებში ისინი საერთო-

დაც კი ქრებიან; ეს კომპენსაცია განპირობებულია შეცდომების შემთხვევითობით. მაგრამ რა არის შემთხვევითობა? ეს ცნება ზუსტად არა მარტო ძალზე რთული დასადგენია, არამედ საერთოდ რთული განსასაზღვრია; და ყველაფერი იმის გათვალისწინებით, რაც მე შეცდომებისა და დაკვირვებების შესახებ მოგახსენეთ, გვიჩვენებს, რომ მეცნიერი ამ ცნების გარეშე ვერაფერს გახდება. შესაბამისად, უნდა მივცეთ ამ ცნების შესაძლო ზუსტი განსაზღვრება, რადგან ის აუცილებელიცაა და ამავ დროულად ძნელად წარმოსადგენი.

ყველაფერი ეს ზოგადი მოსაზრებებია, რომლებიც სრულად გამოიყენება ყველა მეცნიერებაში; მაგალითად, მათემატიკური შემოქმედების მექანიზმი არსებითად არ განსხვავდება სხვა რომელიმე შემოქმედების მექანიზმიდან. მე ყურადღებას ვაქცევ უფრო კერძო საკითხებს, რომლებიც გამოიყენებიან ზოგიერთ „სპეციფიურ" მეცნიერებებში და, უპირველესად, წმინდა მათემატიკაში.

იმ თავებში, რომლებიც წმინდა მათემატიკის საკითხებს ეხება, მე ძალზე აბსტრაქტულ თემებზე მიხდება საუბარი. უპირველესად მე მიხდება საუბარი სივრცეზე . ყველამ იცის, რომ სივრცე ფარდობითი ცნებაა, უფრო სწორად რომ ვთქვა, ყველა ასე ამბობს; არადა, უმეტესწილად, ადამიანები აზროვნებისას მას ფაქტიურად აბსოლუტურად მიიჩნევენ. არა და საკმარისია ცოტათი დავფიქრდეთ და მივხვდებით, თუ რა წინააღმდეგობებამდე უნდა მიდიოდნენ ეს ადამიანები.

სწავლების საკითხები, როგორც თავისთავად, ისე სხვადასხვა მიზეზთა გამო ძალზე მნიშვნელოვანია; გააზრება იმისა, თუ როგორაა უმჯობესი ახალი ცნებების მიწოდება ბავშვების უმანკო გონებისათვის - ამავდროულად ნიშნავს ფიქრს იმაზე, როგორ მივიდნენ ამ ცნებებამდე ჩვენი წინაპრები; შესაბამისად, ეს ნიშნავს ამ ცნებების ჭეშმარიტი ბუნების გააზრებას. რატომაა, რომ, ჩვეულებრივ, ბავშვები ვერაფერს ვერ იგებენ იმ განსაზღვრებებიდან, რომლებიც სრულიად აკმაყოფილებენ მეცნიერს? რატომაა აუცილებელი მათთვის სხვა განსაზღვრებები? ზუსტად ამ კითხვებს ვაშუქებ წიგნის შემდეგ თავში; ამ საკითხის გადაწყვეტაზე ფიქრი, ჩემი აზრით, ძალზე ნაყოფიერი ნიადაგია იმ ფილოსოფოსთათვის, რომლებიც მეცნიერების ლოგიკით არიან დაკავებულნი.

მეორეს მხრივ, ბევრი გეომეტრი თვლის, რომ მათემატიკა შესაძლოა დაყვანილ იქნეს ფორმალური ლოგიკის წესებამდე. ამ მიმართულებით უდიდეს ძალისხმევას ჰქონდა ადგილი; დასახული მიზნის მისაღწევად, ისინი არ მოერიდნენ ჩვენი წარმოდგენების ისტორიულად ჩამოყალიბებული გზის გადატრიალებას, და სცადეს, მაგალითად, სასრულის განსაზღვრა უსასრულობის საშუალებით. ვიმედოვნებ, რომ შევძელი წინასწარ განწყობის არმქონე მკითხველისათვის მეჩვენებინა, რომ ეს მხოლოდ ტყუილი ილუზიაა. აგრეთვე ვიმედოვნებ, რომ მკითხველი გაითავისებს რა საკითხის მნიშვნელობას და, აქედან გამომდინარე ბრალს არ დამდებს ჩემი ემოციურად დაწერილი სტრიქონებისათვის, რომლებიც ამ საკითხებს ეხება.

ბოლო თავები, რომლებიც ასტრონომიასა და მექანიკას ეხება უფრო მსუბუქადაა დაწერილი.

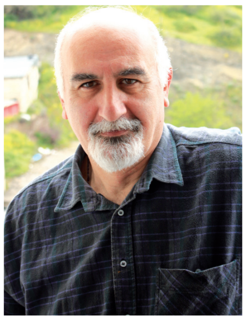
ჩემი აზრით, მექანიკას უდგას სრულად გადატრიალების მომენტი. თამამი ნოვატორების მიერ დამსხვრეულ იქნა ცნებები, რომლებიც გვეჩვენებოდნენ ყველაზე მყარად დამკვიდრებული. მართალია, ნაჩქარევი იქნება იმის თქმა, რომ ისინი მართალნი არიან მხოლოდ იმიტომ, რომ ნოვატორები არიან. მაგრამ საინტერესოა, რომ მკითხველს საშუალება ჰქონდეს გაეცნოს ამ სწავლებას, რაც მე შევეცადე გამეკეთებინა. შეძლებისდაგვარად ვეცადე მივყოლოდი ისტორიულ მიმდევრობას; ახალი იდეები ძალზე უცნაურად მოგვეჩვენებოდა, რომ არ დაგვენახა, თუ როგორ და რანაირად მოხდა მათი ჩასახვა.

ასტრონომია ჩვენს წინაშე შლის გიგანტური მასშტაბის სურათს და სვამს გრანდიოზულ კითხვებს. არც კი მოიაზრება ამ საკითხების ექსპერიმენტალური შესწავლა; ჩვენი ლაბორატორიები ძალზე მცირენი არიან ამისათვის. მაგრამ ანალოგიები იმ მოვლენებთან, რომლების შესწავლაც ექსპერიმენტულად ხდება, შესაძლოა გახდეს გზამკვლევი ასტრონომთათვის. ასე, მაგალითად, „ირმის ნახტომი" წარმოადგენს მზეების „გროვას" რომლის მოძრაობა ერთი შეხედვით ძალზე ძნელად გასაგებია. მაგრამ შეიძლება კი შევადაროთ ეს უზარმაზარი „გროვა" გაზის მოლეკულებს, რომლის თვისებებსაც სწავლობს გაზების კინეტიკური თეორია? ამგვარად, ფიზიკის მეთოდები შესაძლოა არაპირდაპირი გზით დაეხმაროს ასტრონომს.

ბოლოში, მე მინდოდა მცირე შტრიხებით აღმეწერა ფრანგული გეოდეზიის განვითარება.

მე ვაჩვენე, რა დაუღალავი და მიზანმიმართული ძალისხმევის შედეგია და როგორი სახიფათო გზის გავლა დასჭირდა გეოდეზისტებს, რომ მოეპოვებინათ ის მწირი ცნობები, რომელსაც დღეს ჩვენ ვფლობთ დედამიწის ფორმის შესახებ. არის კი ეს მეთოდის საკითხი? დიახ, უეჭველად, რადგან ეს ისტორია გვასწავლის, თუ რა უსაფრთხოების ზომებია მისაღები რათა შედგეს მეცნიერული „საწარმო", რამდენი დრო და შრომაა საჭირო, რათა დადგინდეს მხოლოდ ერთი ციფრი (მოხდეს დათვლა მეათედის სიზუსტით).

გონის წარმართვის სახელმძღვანელო წესები



ილია თავხელიძე

ავტორი რენე დეკარტი
თარგმნა ილია თავხელიძემ

წესი I. მეცნიერული კვლევების მიზანი უნდა იყოს აზროვნების იმგვარად წარმართვა, რომ შესაძლებელი გახდეს მტკიცე და ჭეშმარიტი დასკვნების გამოტანა ყოველ წამოჭრილ საკითხზე.

წესი II. უნდა დავკავდეთ მხოლოდ ისეთი საქმიანობით, რომელთა შესახებ, ჩვენი აზრით შევძლებთ მივაღწიოთ „ჭეშმარიტ“ და უეჭველ ცოდნას.

წესი III. საკვლევ ობიექტში ჩვენ უნდა ვეძიოთ არა ის, თუ რას ფიქრობენ სხვები ან რას ვვარაუდობთ ჩვენ თვითონ, არამედ, თუ რა შეგვიძლია ჩვენ ცხადად და ნათლად დავინახოთ, ან კი რისი მიღებაა დედუქციით შესაძლებელი, რადგან სხვაგვარად ცოდნის მიღწევა შეუძლებელია.

წესი IV. ჭეშმარიტების დასადგენად აუცილებელია მეთოდი.

წესი V. მეთოდის არსი მდგომარეობს იმ ძირითადის გამოყოფასა და შესწავლის ეტაპების მიმდევრობის გააზრებაზე რაზეც უნდა იყოს მოგეზული გონი, რათა დადგინდეს ესა თუ ის ჭეშმარიტება. ჩვენ მკაცრად დავიცავთ ამას, თუ თანდათან დავიყვანთ საეჭვო და ბუნდოვან მოსაზრებებს უფრო მარტივ დებულებებზე და შემდგომ შევეცდებით, ინტუიტიურად, უმარტივესიდან გამომდინარე, იმავე მიმდევრობით ზესვლით ყველა დანარჩენის შეცნობას.

წესი VI. იმისათვის, რომ გავაცალკევოთ გაცილებით მარტივი რთულისაგან და, თანაც, იმავდროულად დავიცვათ მიმდევრობა, აუცილებელია, ყოველ მიმდევრობაში (მსჯელობათა ჯაჭვში), რომელშიც ჩვენ უშუალოდ გამოგვყავს რომელიღაც ჭეშმარიტება სხვა ჭეშმარიტებებიდან, თვალყური ვადევნოთ, რომელი მათგანია ყველაზე მარტივი და როგორ დამოკიდებულებაშია ის სხვებთან: შორსაა, ახლოსაა, თუ ერთნაირადაა დაშორებული.

წესი VII. შეცნობის დასასრულ, ყველაფერს, რაც ჩვენ ამოცანასთანაა დაკავშირებული, ერთობლივად და ცალცალკე, უნდა თვალი მოვავლოთ გონის მიმდევრობითი და უწყვეტი მოძრაობით და მოვიცვათ ის საკმარისად გააზრებულად და წარმოვიდგინოთ ამოცანა მეთოდური ჩამონათვალის სახით.

წესი VIII. თუ კი საკვლევ ობიექტთა ჩამონათვალში შეგვხვდა რომელიღაც ერთი, რომელსაც ჩვენი გონი ვერ გებულობს საკმარისად კარგად, უნდა მასზე გავჩერდეთ და აღარ ვიკვლიოთ მის შემდეგ მდგომნი და თავი შევიკავოთ ზედმეტი შრომისაგან.

წესი IX. ჩვენი გონი უნდა მივმართოდ ყველაზე უმნიშვნელო და მარტივზე და დიდი ხნით გავაჩეროთ მათზე ჩვენი ყურადღება, სანამ არ მივეჩვევით მკაფიოდ და ნათლად შევიცნოთ ჭეშმარიტება მათში.

წესი X. იმისათვის, რომ ჩვენი გონი გავხადოთ გამჭრიახი, ის უნდა ვავარჯი-

რენე დეკარტი (1596-1650)

პორტრეტი შესრულებულია ჰოლანდიელი მხატვრის ფრანს ჰალსის მიერ 1648 წელს

ფრანგი ფილოსოფოსი, მეცნიერი მათემატიკოსი. თანამედროვე ფილოსოფიის ფუძემდებელი, თანამედროვე მეცნიერული რევოლუციის ერთერთი შემოქმედი, „თანამედროვე მათემატიკის მამა“. დეკარტმა შექმნა ანალიზური გეომეტრიის საფუძვლები, შემოიღო ცვლადი სიდიდის ცნება, დაამუშავა კოორდინატთა მეთოდი და დაამყარა კავშირი ალგებრასა და გეომეტრიას შორის. მან პირველმა გააჟღერა იდეა, რომ მეცნიერული აღმოჩენები უნდა დადგეს საწარმოო რელსებზე და სათავე დაუდო თანამედროვე სამეცნიერო ინდუსტრიას.

Cogito ergo sum - „ვაზროვნებ, მაშასადამე ვარსებობ“

1628 წელს ან კი ცოტა ხნით ადრე, დეკარტმა დაიწყო მუშაობა ტრაქტატზე „Regulae ad directionem ingenii“ (გონის წარმართვის სახელმძღვანელო წესები), რომელშიც შეეცადა ჩამოეყალიბებია მეცნიერული და ფილოსოფიური აზროვნების სწორი მეთოდი. ამ ნაშრომში გადმოცემულია, კონკრეტულად მათემატიკისა, ზოგადად კი მეცნიერებისა და ფილოსოფიის ურთულესი ამოცანების მთელი მის მიერ ჩატარებული კვლევების საფუძვლები. ჩაფიქრებული იყო 36 წესი და მხოლოდ 21 იყო მკაცრად ჩამოყალიბებული. ეს ნაშრომი არ იყო გამოქვეყნებული ავტორის სიცოცხლეში და მხოლოდ 1684 წელს გამოქვეყნდა მისი ჰოლანდიურ ენაზე თარგმანი, ხოლო ლათინური დედანი გამოიცა 1701 წელს. თითოეულ წესს ახლავს მოკლე აღწერა რომლის თარგმანიცაა შემოთავაზებული ჩვენს მიერ. (თ.ი.)

შოთ ისეთ კვლევაში, რომელიც უკვე ჩატარებულია სხვების მიერ, და მეთოდურად შევისწავლოთ ერთი შეხედვით უმნიშვნელო საქმიანობაც კი, და განსაკუთრებულად კი ისეთები, რომლებიც გვავალდებულებენ ან გულისხმობენ წესრიგს.

წესი XI. იმის შემდეგ, რაც ავითვისებთ რამოდენიმე მარტივ დებულებას და მათგან გამოვიყვანთ სხვას, სასარგებლო იქნება თვალი მოვავლოთ მათ გონის მიმდევრობითი და უწყვეტი მოძრაობით, გავიაზროთ მათი მიმართება და მკაფიოდ წარმოვიდგინოთ ერთდროულად მათი მაქსიმალური რაოდენობა; ამის შედეგად ჩვენი ცოდნა გახდება უფრო გასაგები და ჩვენი გონის თვალსაწიერი გაფართოვდება.

წესი XII. და ბოლოს, გვაქვს რა ინტუიტიურად მარტივი დებულებების მკაფიო განსხვავებულება, ინტელექტის, წარმოსახვის, გრძნობებისა და მეხსიერების ყველა რესურსი უნდა გამოვიყენოთ, რათა მართებულად შევადაროთ საძიებელი და ცნობილი, რომ ამგვარად შევიცნოთ ის; აგრეთვე იმიტომაც, რომ ვიპოვოთ ის დებულებები, რომლებიც ერთმანეთის მიმართ შედარებადნი იქნებიან; ერთი სიტყვით, ადამიანისათვის ხელმისაწვდომი არცერთი საშუალება არ უნდა უგულვებელვყოთ.

წესი XIII. როდესაც კარგად გავიგებთ საკითხს, უნდა გავათავისუფლოდ ის ყველა ზედმეტი წარმოდგენისაგან, და დავიყვანოთ ის უმარტივეს ელემენტებზე და დავშალოთ ის ამავე რაოდენობის შესაძლო ნაწილებამდე „ენუმერაციის საშუალებით“ (ანუ შევქმნათ საკითხების ჩამონათვალის მიმდევრობა, ძვ. ფრანგული ტერმინი, თ.ი.)

წესი XIV. ზემოთქმული წესი სრულად უნდა განვავრცოთ აგრეთვე ობიექტთა რეალურ მონაცემებზე, და ისინი სრულად უნდა წარმოვიდგინოთ მარტივი ფიგურების სახით; ამგვარად ის ინტელექტისათვის გაცილებით უფრო გასაგები გახდება.

წესი XV. უმეტესწილად, აგრეთვე სასარგებლოა ამ ფიგურათა ხაზვა და მათი წარდგენა ჩვენი გარეგანი გრძნობებისათვის, რადგან ამგვარად გაგვი-

ადვილდება მათზე ყურადღების გამახვილება.

წესი XVI. რაც შეეხება სიდიდეებს, რომლებიც დროის ამ მონაკვეთში არ საჭიროებენ ჩვენი ყურადღების მიქცევას, თუმცა, ისინი აუცილებელნი არიან დასკვნების გამოსატანად, უკეთესი იქნება მათთვის სრული ფიგურების ნაცვლად შემოკლებითი ნიშნაკების შემოტანა.

წესი XVII. სიძნელეებს უნდა შევხედოთ პირდაპირ, და არ მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ზოგიერთი, მასში შემავალი, ტერმინი ცნობილია, ხოლო ზოგიერთი უცნობი, და ინტუიტიურად გავყვეთ სწორ გზას მათი ურთიერთ დამოკიდებულების ამოცნობისაკენ.

წესი XVIII. ამ მიზნის მისაღწევად საჭიროა მხოლოდ ოთხი მოქმედება: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა. ხშირად, არასასურველი გართულებების თავიდან ასაცილებლად, ამ ჩამონათვალიდან, ბოლო ორის გამოყენება აუცილებელიც არ არის; აგრეთვე იმიტომაც, რომ შემდგომ მათი შესრულება მარტივადაა შესაძლებელი.

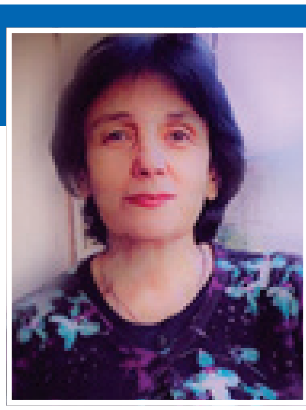
წესი XIX. ამ მეთოდით, გამოთვლების თანახმად, უნდა ვიპოვოთ იმდენი უცნობი სიდიდე, რომლებიც გამოსახულია ორი სხვადასხვა საშუალებით, რამდენი დამოუკიდებელი ტერმინიც ჩვენ დავუშვით ცნობილად, რათა გამოგვეკვლია სიძნელეები პირდაპირი გზით. ამგვარად ჩვენ მივიღებთ ორ ტოლ სიდიდეთა ბევრ შედარებას (განტოლებას, თ.ი.).

წესი XX. შევადგენთ რა განტოლებებს, ჩვენ უნდა ჩავატაროთ ჩვენს მიერ განსაზღვრული მოქმედებები, და არასოდეს ვისარგებლოთ გამრავლებით, თუ შესაძლებელია გაყოფა.

წესი XXI. თუ გვაქვს ბევრი ამგვარი განტოლება, უნდა მივიყვანოთ ის ერთ განტოლებამდე, და თანაც ისეთნაირამდე, რომლის ტერმინები დაიკავებენ პროპორციულ სიდიდეთა მიმდევრობაში საფეხურების უმცირეს რაოდენობას, და აქ ისინი შესაბამისად უნდა განვალაგოთ.

მათემატიკა

ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე



რუსუდან მესხია

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასისტენტ-პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ფუნქციის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა, ამიტომ მათემატიკის სასკოლო კურსში ფუნქციის შესწავლას მნიშვნელოვანი ადგილი აქვს დათმობილი.
ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის პოვნა არსებითი კომპონენტია ფუნქციის თვისებების შესწავლისას და იძლევა საინტერესო ინფორმაციას ფუნქციის ყოფაქცევის შესახებ.
ვფიქრობთ, რომ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენის შესახებ სავარჯიშოების განხილვას მეტი ყურადღება უნდა დაეთმოს და მასწავლებელმა საინტერესო კუთხით წარუდგინოს ეს თემა მოსწავლეებს. საკითხის შესწავლის მიზნით განვიხილავთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის პოვნის სხვადასხვა ხერხებს და მისი გამოყენების მაგალითებს.

როგორც ცნობილია, $y = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა $E(f)$ სიმრავლე განსაზღვრულია შემდეგი სახით:

$$E(f) = \{ f(x) | \, x \in D(f) \},$$

სადაც $D(f)$ აღნიშნავს ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

$E(f)$ სიმრავლის დასადგენად ერთ-ერთი ხერხი ასეთია: ვიპოვოთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x) = a$ განტოლებას ერთი მაინც ამონახსნი აქვს. ეს მეთოდი მისაღებია მაშინ, როცა $f(x) = a$ განტოლების ამოხსნა შესაძლებელია.

განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითები.

ამოცანა 1. ვიპოვოთ $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ $D(y) = R$ და ვიპოვოთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\dfrac{2x}{1+x^2} = a$ განტოლებას აქვს ერთი მაინც ამონახსნი.

$$\frac{2x}{1+x^2} = a \Leftrightarrow ax^2 - 2x + a = 0.$$

უკანასკნელ განტოლებას ამონახსნი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი დისკრიმინანტი $D \geq 0$;

$\frac{D}{4}=1-a^2\ge 0$, $|a|\le 1$, ამრიგად, $E(f)=[-1;1]$.

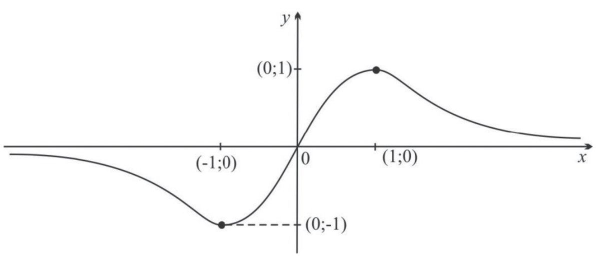
მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე შეიძლება ვიპოვოთ სხვა ხერხითაც. კერძოდ,

$$2|\alpha||\beta|\le \alpha^2+\beta^2$$

ცნობილი უტოლობის გამოყენებით. მაშინ გვექნება

$$|y|=\frac{2|x|}{1+x^2}\le\frac{1+|x|^2}{1+x^2}=1,\text{ ანუ } |y|\le 1.$$

ამასთანავე, $y(-1)=-1$, $y(1)=1$, $y=\frac{2x}{1+x^2}$ ფუნქცია უწყვეტია $[-1;1]$ სეგმენტზე და სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის ერთ-ერთი თვისების თანახმად მიიღებს ყველა მნიშვნელობას, მოთავსებულს $y(-1)$ და $y(1)$ მნიშვნელობებს შორის. ამიტომ $E(y)=[-1;1]$. $y=\frac{2x}{1+x^2}$ ფუნქციის გრაფიკი იხილეთ ნახაზზე 1.



ნახაზი 1.

ამოცანა 2. ვიპოვოთ $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

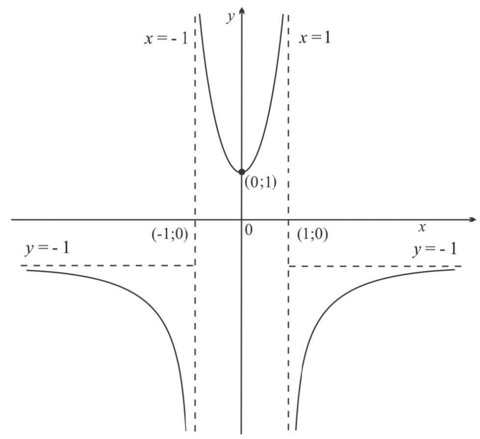
ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ პირველ რიგში უნდა ვიპოვოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე. ცხადია,

$$D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty).$$

$f(x)=a$ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე: $\frac{1+x^2}{1-x^2}=a$. ვიპოვოთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მოცემულ განტოლებას აქვს ერთი მაინც ამონახსნი, ანუ ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases}1+x^2=a\left(1-x^2\right)\\ x^2\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{a-1}{a+1}\\ \dfrac{a-1}{a+1}\ne 1\\ a\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a-1}{a+1}\ge 0\\ \dfrac{a-1}{a+1}\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a\ge 1\\ a<-1\end{array}\right.\\ -\dfrac{2}{a+1}\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\ge 1\\ a<-1\end{array}\right..$$



ნახაზი 2.

ამრიგად, $E(y)=(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$.

$E(y)$ სიმრავლე შეიძლება ვიპოვოთ შემდეგი ხერხითაც:

$$y=\frac{1+x^2}{1-x^2}=1+\frac{2x^2}{1-x^2}\ge 1,\text{ როცა } -1<x<1.$$

მეორეს მხრივ,

$$y=-\frac{1+x^2}{x^2-1}=-1+\frac{2}{1-x^2}<-1,\text{ როცა } |x|>1.$$

შევნიშნოთ, რომ $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ ფუნქცია უწყვეტია განსაზღვრის არეზე. ამასთან,

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1+x^2}{1-x^2}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 1+}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-\infty,$$

ამიტომ $E(y)=(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$. $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია ნახაზზე 2.

ამოცანა 3. ვიპოვოთ $f(x)=\log_3 x+\log_x 3$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა:

$$D(f)=(0;1)\cup(1;+\infty).$$

განვიხილოთ განტოლება

$$\log_3 x+\frac{1}{\log_3 x}=a,\qquad \log_3^2 x-a\log_3 x+1=0.$$

მიღებული კვადრატულ განტოლებას ერთი მაინც ამონახსნი აქვს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ,

როცა $D = a^2 - 4 \geq 0$, ანუ $|a| \geq 2$. ამრიგად, $E(f) = (-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

$f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე შეგვეძლო დაგვედგინა ცნობილი უტოლობის გამოყენებითაც

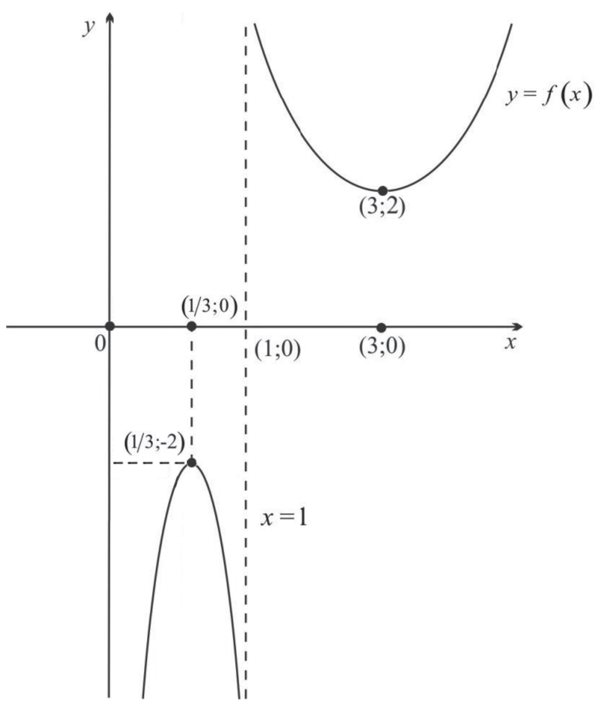
$$f(x)=\frac{\log_3^2 x+1}{\log_3 x}\geq\frac{2\log_3 x}{\log_3 x}\geq 2, \text{ როცა } x>1$$

და

$$f(x)=\frac{\log_3^2 x+1}{\log_3 x}\leq -2, \text{ როცა } 0<x<1.$$

შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია განსაზღვრის არეზე, $f(3) = 2$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=+\infty$. ამიტომ $E(f) = (-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

$f(x)=\log_3 x+\log_x 3$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე (იხ. ნახაზი 3):



ნახაზი 3.

რიგ შემთხვევებში ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის პოვნა დაიყვანება კვადრატული ფუნქციის თვისებების დადგენაზე გარკვეულ შუალედში. ამიტომ სწორი დასკვნის გაკეთებისთვის უმჯობესია მიღებული კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის დახაზვა. ამასთან, გავითვალისწინოთ, რომ $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[y(x_0);+\infty)$ შუალედი, როცა $a > 0$, ხოლო, თუ $a<0$, მაშინ $E(y) = (-\infty; y(x_0)]$, სადაც $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ არის $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის გრაფიკის, ანუ პარაბოლის წვეროს აბსცისა.

განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითები.

ამოცანა 4. ვიპოვოთ $f(x) = 4^{\sin x} - 2^{\sin x+3}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ამოხსნა. $f(x) = 4^{\sin x} - 2^{\sin x+3} = 2^{2\sin x} - 8 \cdot 2^{\sin x}$, $D(f) = R$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $2^{\sin x} = t$.

განვიხილოთ $g(t) = t^2 - 8t = t(t - 8)$ ფუნქცია. რადგან $t = 2^{\sin x}$, ამიტომ $\frac{1}{2}\leq t\leq 2$.

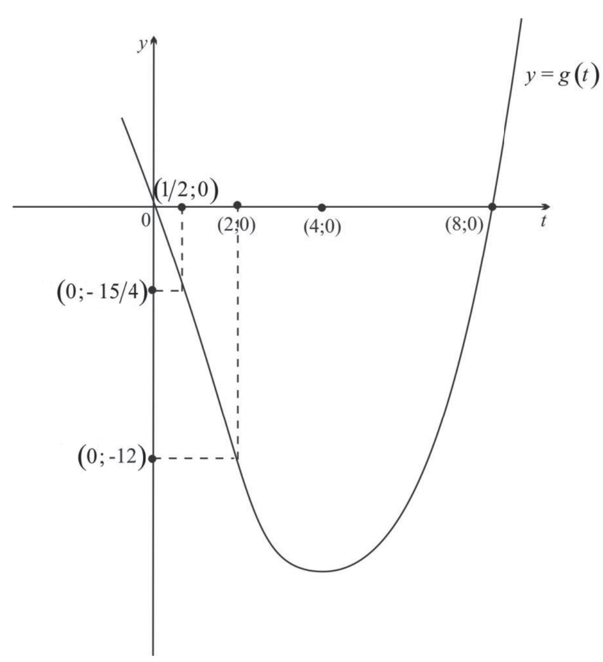
$g(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის დასადგენად განვიხილოთ მისი გრაფიკი (იხ. ნახაზი 4). როგორც ნახაზიდან ჩანს $g(t)$ ფუნქცია კლებადია $\left[\frac{1}{2};2\right]$ სეგმენტზე, ამიტომ

$$g(2)\leq g(t)\leq g\left(\frac{1}{2}\right),\quad t\in\left[\frac{1}{2};2\right],$$

$g(2) = -12$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{4}$, ანუ $-12\leq g(t)\leq -\frac{15}{4}$. ცხადია,

$$g(t) = g(2^{\sin x}) = f(x),$$

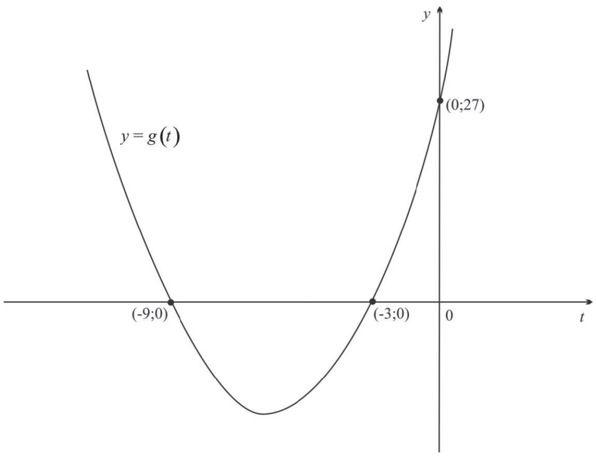
ამიტომ $E(f)=\left[-12;-\frac{15}{4}\right]$.



ნახაზი 4.

ამოცანა 5. ვიპოვოთ $f(x) = 9^x + 12 \cdot 3^x + 27$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $3^x = t$. განვიხილოთ $g(t) = t^2 + 12t + 27$, $t > 0$. როგორც $y = g(t)$ ფუნქციის გრაფიკიდან ჩანს (იხ. ნახაზი 5), რომ $g(t)$ ზრდადია, როცა $t > 0$. ამიტომ $g(0) < g(t) < +\infty$, $g(0) = 27$, $g(t) = g(3^x) = f(x)$. ამრიგად, $E(f) = (27; +\infty)$.



ნახაზი 5.

შეიძლება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა სიმრავლის შესწავლისას საჭირო გახდეს ტრიგონომეტრიული იგივეობების გამოყენებით გამოსახულების გარდაქმნა.

განვიხილოთ მაგალითი.

ამოცანა 6. ვიპოვოთ $f(x) = 2\cos x + \cos 2x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ამოხსნა.

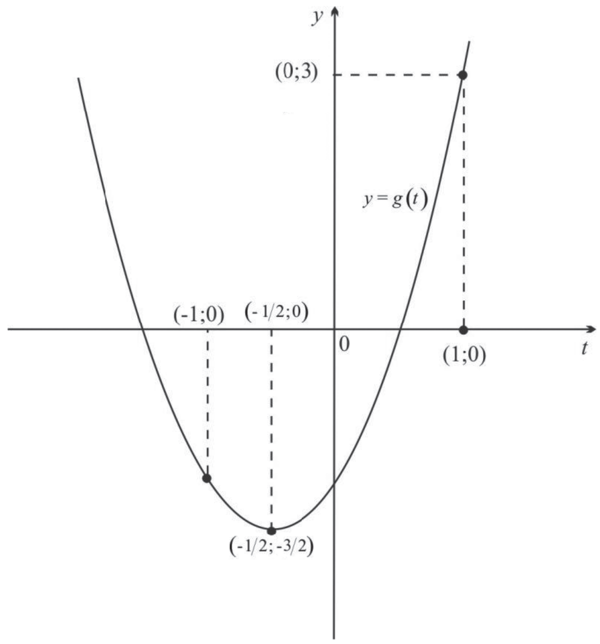
$f(x) = 2\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$, $x \in R$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$.

განვიხილოთ $g(t) = 2t^2 + 2t - 1$ ფუნქცია, $t \in [-1;1]$. დავხაზოთ მისი გრაფიკი (იხ. ნახაზი 6). როგორც გრაფიკიდან ჩანს $g(t_0) \le g(t) \le g(1)$, როცა $-1 \le t \le 1$, სადაც t_0 არის $y = g(t)$ ფუნქციის გრაფიკის წვეროს აბსცისა $t_0 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$, $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$, $g(1) = 3$. ამრიგად, $-\frac{3}{2} \le g(t) \le 3$, $g(t) = g(\cos x) = f(x)$, ამიტომ $E(f) = \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$.

შევნიშნოთ, რომ $y = a\sin x + b\cos x$ სახის ფუნქციების მნიშვნელობათა სიმრავლის პოვნისთვის მოცემული ფუნქცია უნდა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$y = a\sin x + b\cos x =$$
$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) \quad \left(a^2+b^2 \ne 0\right).$$



ნახაზი 6.

ცხადია, $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$ და $\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$, ამიტომ არსებობს ერთადერთი ისეთი φ კუთხე, $0 \le \varphi < 2\pi$, რომ $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$ და $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$.

მაშასადამე,

$$y = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\varphi\sin x + \cos\varphi\cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x - \varphi\right)$$

და

$$E(y) = \left[-\sqrt{a^2+b^2}; \sqrt{a^2+b^2}\right].$$

განვიხილოთ მაგალითი.

ამოცანა 7. ვიპოვოთ $f(x) = \cos^2 x - \sin x\cos x$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ცნობილი იგივეობები და გარდავქმნათ გამოსახულება:

$$f(x) = \frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2x - \sin 2x\right) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right),$$
$$-1 \le \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \le 1, \quad x \in R,$$

ამიტომ

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \le f(x) \le \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \text{ ანუ } E(f) = \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right].$$

ზემოთ განხილულ მაგალითებში ფუნქცი-

ის მნიშვნელობათა სიმრავლის დასადგენად არ დაგვჭირდა ფუნქციის წარმოებულის გამოყენება. მაგრამ ზოგიერთი ფუნქციისთვის წარმოებულის გამოყენების გარეშე მნიშვნელობათა სიმრავლის პოვნა შეუძლებელია.

განვიხილოთ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ვთქვათ, $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე. $E(f)$ სიმრავლის დადგენა ემყარება შემდეგ მნიშვნელოვან ფაქტს: სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია ამ სეგმენტზე ღებულობს თავის უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს და აგრეთვე ყველა მნიშვნელობას მოთავსებულს უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს შორის. $E(f)$ სიმრავლის დასადგენად უნდა გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები სეგმენტის ბოლოებზე და ამ სეგმენტის შიგნით მოთავსებულ კრიტიკულ წერტილებზე, ანუ ისეთ წერტილებზე, სადაც $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია ან არ არსებობს (როგორც ცნობილია, ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ კრიტიკულ წერტილებზე). გამოთვლილ მნიშვნელობებს შორის უმცირესი იქნება ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა, ხოლო უდიდესი კი უდიდესი მნიშვნელობა. ცხადია, ასეთ შემთხვევაში $E(f) = [m; M]$, სადაც m არის $f(x)$-ის უმცირესი მნიშვნელობა, ხოლო M კი უდიდესი მნიშვნელობა.

განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითები.

ამოცანა 8. ვიპოვოთ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $x \in [2;4]$, ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ამოხსნა. ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები. გამოვთვალოთ ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებული,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

$f(x)$ წარმოებადია $[2;4]$ სეგმენტზე. ამიტომ კრიტიკული წერტილებია მხოლოდ $f'(x) = 0$ განტოლების ფესვები. $f'(x) = 0$, როცა $x = 1$ ან $x = 3$. კრიტიკული წერტილებიდან $[2;4]$ სეგმენტს ეკუთვნის $x = 3$.

$f(2) = 3$, $f(3) = 1$, $f(4) = 5$, ამიტომ $1 \le f(x) \le 5$, როცა $x \in [2;4]$, ე.ი. $E(f) = [1;5]$.

ამოცანა 9. ვიპოვოთ $y = (x - 3)e^{|x+1|}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, როცა $x \in [-2;4]$.

ამოხსნა. ცხადია, რომ

$$y = \begin{cases} (x-3)e^{-x-1}, & -2 \le x \le -1, \\ (x-3)e^{x+1}, & -1 < x \le 4 \end{cases}$$

და ეს ფუნქცია უწყვეტია $[-2;4]$ სეგმენტზე, რადგან

$$\lim_{x\to -1-} y = \lim_{x\to -1+} y = -4.$$

გამოვთვალოთ y ფუნქციის წარმოებული:

$$y' = \begin{cases} e^{-x-1} - (x-3)e^{-x-1} = e^{-x-1}(4-x), & -2 \le x \le -1, \\ e^{x+1} + (x-3)e^{x+1} = e^{x+1}(x-2), & -1 < x \le 4. \end{cases}$$

$x = 2$ კრიტიკული წერტილია, რადგან $y'(2) = 0$.

$x = -1$ წერტილზე წარმოებული არ არსებობს, რადგან მარცხენა და მარჯვენა წარმოებულები $x = -1$ წერტილზე განსხვავებულია ერთმანეთისგან ($f'(-1-0) = 5$, $f'(-1+0) = -3$), ე.ი. $x = -1$ კრიტიკული წერტილია.

ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობები კრიტიკულ წერტილებზე და სეგმენტის ბოლოებზე, გვექნება $f(-2) = -5e$, $f(-1) = -4$, $f(2) = -e^3$, $f(4) = e^5$.

მაშასადამე, y ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა $-e^3$, ხოლო უდიდესი კი e^5, ამიტომ $E(f) = [-e^3; e^5]$.

ამოცანა 10. ვიპოვოთ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}\sqrt{x+1}}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

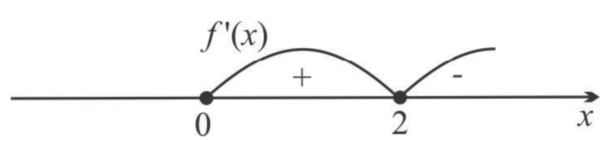
ამოხსნა. ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული:

$$f'(x) = \frac{(x+4)(x+1) - x(2x+5)}{2\sqrt{x}(x+4)^{3/2}(x+1)^{3/2}} = \frac{4-x^2}{2\sqrt{x}(x+4)^{3/2}(x+1)^{3/2}},$$

$$D(f) = [0;+\infty),$$

$$f'(x) = 0, \text{ როცა } x = 2$$

ფუნქციის წარმოებულის ნიშნები დავადგინოთ ინტერვალთა მეთოდით:

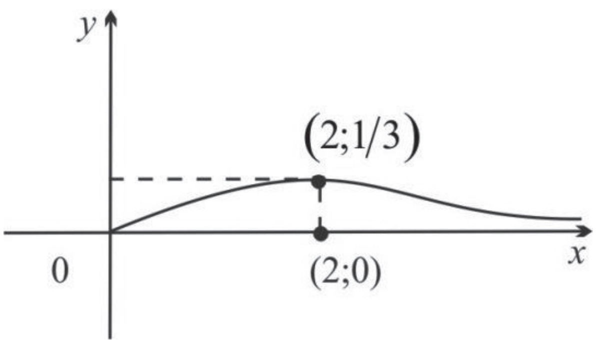


$x = 2$ მაქსიმუმის წერტილია $f(2) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \dfrac{1}{3}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=0,$$

$$f(0)=0.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $[0;2]$ სეგმენტზე მოცემული ფუნქცია ზრდადია, ხოლო $[2;+\infty]$ შუალედში კი კლებადი, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $E(f)=\left[0;\frac{1}{3}\right]$ (იხ. ნახაზი 7)



ნახაზი 7.

$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}\sqrt{x+1}}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე შეგვიძლია დავადგინოთ სხვა ხერხითაც. კერძოდ, ვიპოვოთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}\sqrt{x+1}}=a$$

განტოლებას აქვს ერთი მაინც არაუარყოფითი ამონახსნი. $a=0$, როცა $x=0$, ამასთან $a>0$, როცა $x>0$.

ვთქვათ, $a>0$,

$$\sqrt{x}=a\sqrt{x+4}\sqrt{x+1} \;\Leftrightarrow\; x=a^2(x+4)(x+1),$$
$$a^2x^2+\left(5a^2-1\right)x+4a^2=0.$$

იმისათვის, რომ კვადრატულ განტოლებას ჰქონდეს დადებითი ამონახსნები აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\begin{cases} D\ge 0 \\ x_1x_2>0 \\ x_1+x_2>0 \end{cases},$$

$$D=\left(5a^2-1\right)^2-16a^4=9a^4-10a^2+1=9\left(a^2-\frac{1}{9}\right)\left(a^2-1\right),$$

$$x_1x_2=4,\; x_1+x_2=-\frac{5a^2-1}{a^2}$$

ამიტომ მივიღებთ სისტემას:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a^2\ge 1\\ a^2\le\frac{1}{9}\end{array}\right.\\ \frac{5a^2-1}{a^2}<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a^2\ge 1\\ a^2\le\frac{1}{9}\end{array}\right.\\ 0<a^2<\frac{1}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}0<a\le\frac{1}{3}\\ 0<a<\frac{1}{\sqrt{5}}\end{array}\right.,$$

ე.ი. $0<a\le\frac{1}{3}$. რადგან $f(0)=0$, საბოლოოდ დავასკვნით, რომ

$$E(f)=\left[0;\frac{1}{3}\right].$$

განვიხილოთ მაგალითი, როცა ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენისას გამოვიყენებთ გარკვეულ გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას.

ამოცანა 11.

ვიპოვოთ $y=\sqrt{x^2-4x+13}+\sqrt{x^2-16x+89}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ამოხსნა. ჩავწეროთ მოცემული ფუნქცია შემდეგი სახით:

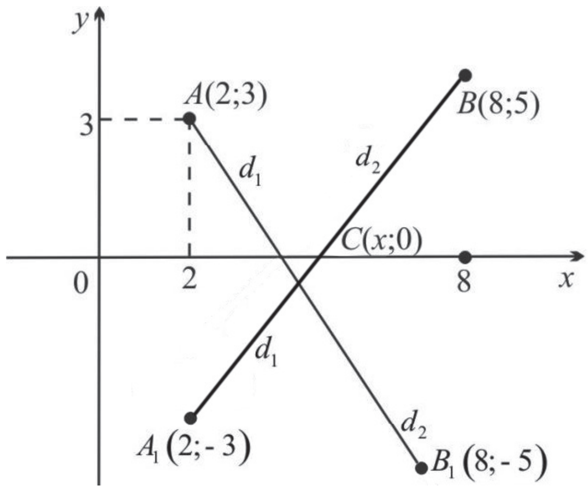
$$y=\sqrt{(x-2)^2+9}+\sqrt{(x-8)^2+25}.$$

ვისარგებლოთ ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულით, მაშინ $d_1=\sqrt{(x-2)^2+9}$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც მანძილი ox ღერძის $C(x;0)$ წერტილიდან $(2;\pm3)$ წერტილამდე, ხოლო $d_2=\sqrt{(x-8)^2+25}$ კი $(8;\pm5)$ წერტილამდე. ამიტომ, ცხადია, $y=d_1+d_2$.

გამოვსახოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე d_1 და d_2 მანძილები (იხ. ნახაზი 8).

როგორც ნახაზიდან ჩანს, სამკუთხედის უტოლობის თანახმად $d_1+d_2\ge AB$ და $d_1+d_2=AB$, როცა A, B და C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ, ამიტომ $y=d_1+d_2$ გამოსახულება უმცირესი იქნება, როცა $d_1+d_2=AB_1$,

$$AB_1=\sqrt{(8-2)^2+(-5-3)^2}=10.$$



ნახაზი 8.

ამრიგად, $y=\sqrt{x^2-4x+13}+\sqrt{x^2-16x+89}\geq 10$. ამასთან, $\lim\limits_{x\to\infty} y=+\infty$ ფუნქცია უწყვეტია მთელ ღერძზე, ამიტომ $E(y)=[10;+\infty)$. უნდა აღინიშნოს, რომ $y=\sqrt{x^2-4x+13}+\sqrt{x^2-16x+89}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის პოვნა წარმოებულის გამოყენებით შედარებით რთულ იქნებოდა.

ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე შეიძლება გამოვიყენოთ განტოლების ან უტოლობის ამოხსნისთვის. არის შემთხვევები, როცა მხოლოდ ალგებრული გარდაქმნების გამოყენებით შეუძლებელია ან ძალიან რთულია განტოლების ან უტოლობის ამოხსნა. ასეთ ვითარებაში შეიძლება ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის დადგენა გახდეს მთავარი გასაღები ამოცანის ამოხსნისთვის.

მოვიყვანოთ მაგალითები.

ამოცანა 12. ამოვხსნათ განტოლება

$$x^4-8x^2+20=\sqrt{12-x^2+4x}.$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $f(x)=x^4-8x^2+20$ და $g(x)=\sqrt{12-x^2+4x}$. ვიპოვოთ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობათა სიმრავლე. $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$f(x)=\left(x^2-4\right)^2+4 \text{ და } g(x)=\sqrt{16-(x-2)^2}.$$

ცხადია, $f(x)\geq 4$ ნებისმიერი $x\in R$-თვის, $g(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[-2;6]$ სეგმენტზე და $g(x)\in[0;4]$. ამრიგად, $E(f)=[4;+\infty]$, ხოლო $E(g)=[0;4]$. $E(f)$ და $E(g)$ სიმრავლეებს მხოლოდ ერთი $y=4$ საერთო წერტილი აქვთ. ამიტომ მოცემული განტოლება ტოლფასია შემდეგი სისტემის

$$\begin{cases} f(x)=4 \\ g(x)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-4\right)^2+4=4 \\ \sqrt{16-(x-2)^2}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ x=2 \end{cases}, x=2.$$

მაშასადამე, მოცემული განტოლების ერთადერთი ამონახსნია $x=2$.

ამოცანა 13. ამოხსენით უტოლობა

$$\sqrt{2-x-x^2}>x^3-3x-3.$$

ამოხსნა. განვიხილოთ $f_1(x)=\sqrt{2-x-x^2}$ და $f_2(x)=x^3-3x-3$ ფუნქციები. ვიპოვოთ $E(f_1)$ და $E(f_2)$ სიმრავლეები. შევნიშნოთ, რომ $D(f_1)=[-2;1]$.

$$f_1(x)=\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\leq\frac{3}{2},\quad x\in[-2;1].$$

ამიტომ, $E(f_1)=[0;3/2]$.

ვიპოვოთ $f_2(x)$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $[-2;1]$ სეგმენტზე.

$f_2'(x)=3x^2-3$, $x=\pm 1$ კრიტიკული წერტილებია.

გამოვთვალოთ $f_2(-2)=-5, f_2(-1)=-1, f_2(1)=-5$.

მაშასადამე, $E(f_2)=[-5;-1]$, როცა $x\in[-2;1]$.

თუ შევადარებთ $E(f_1)$ და $E(f_2)$ სიმრავლეებს, დავასკვნით, რომ

$$\sqrt{2-x-x^2}>x^3-3x-3, \text{ როცა } x\in[-2;1].$$

როგორც განხილული მაგალითებიდან ჩანს, ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლესთან დაკავშირებული ამოცანები საინტერესო და მრავალფეროვანია. ვფიქრობთ, განხილული სავარჯიშოები და მათი ამოხსნის მეთოდები მასწავლებლებს დაეხმარება ფუნქციის თვისებების შესწავლისას ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის გამოყენებაში და მოსწავლეებისთვის ამ თემატიკის საინტერესოდ წარდგენაში.

ავტორის ელექტრონული მისამართი:
rusudan.meskhia@tsu.ge

ამოცანები რიცხვის მთელი და წილადი ნაწილების თვისებების გამოყენებაზე

თეიმურაზ ვეფხვაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

რიცხვთა თეორიის საუნივერსიტეტო კურსებში შეისწავლება ე.წ. რიცხვითი ფუნქციები; ფუნქციები, რომელთა განსაზღვრის არე ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა. ეს ფუნქციებია, მაგალითად, ნატურალური რიცხვის გამყოფების რაოდენობა, გამყოფების ჯამი, გამყოფების ხარისხების ჯამი, იმ ნატურალური რიცხვების რაოდენობა, რომელიც არ აღემატება მოცემულ ნატურალურ რიცხვს და ურთიერთმარტივია მასთან. მათ გარდა რიცხვთა თეორიაში მნიშვნელოვანია იმ ფუნქციების შესწავლაც, რომლებიც ნამდვილი რიცხვის მთელი და წილადი ნაწილების სახელწოდებითაა ცნობილი (იხ., მაგ. [1], [2]).

პერიოდული პროცესების აღწერა და შესწავლა, როგორც წესი, პერიოდული ფუნქციებით ხდება. ამაზე გამახვილებულია ყურადღება ეროვნულ სასწავლო გეგმაშიც; მაგალითად, XI კლასის სტანდარტში მითითებულია, რომ მოსწავლეს უნდა შეეძლოს ალგებრული, გრაფიკული მეთოდების გამოყენება ფუნქციების ისეთი თვისებების შესასწავლად, როგორიცაა, მაგალითად, პერიოდულობა. ამასთანავე, ცნობილი პერიოდული ფუნქციების გვერდით სასურველია მოსწავლეებს ჰქონდეთ წარმოდგენა მათგან განსხვავებულ ფუნქციაზე (მაგალითად, რიცხვის წილად ნაწილზე), რომელიც პერიოდულ ფუნქციათა კლასს განეკუთვნება.

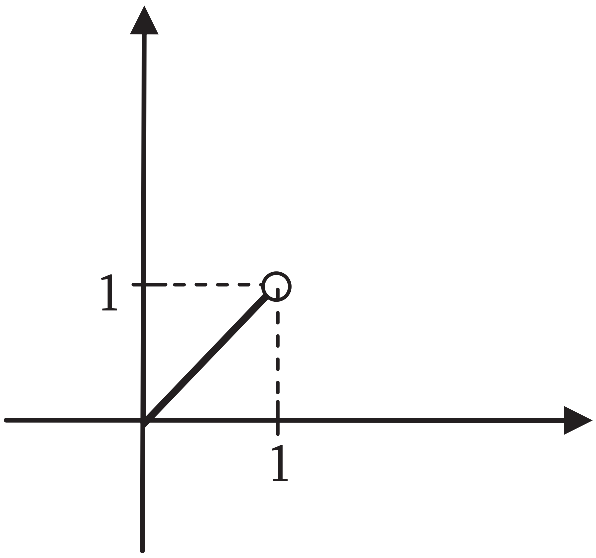
ამიტომ ჩვენს მიერ შედგენილ XI კლასის სახელმძღვანელოში [3], როცა საუბარია პერიოდულ პროცესებსა და პერიოდულ ფუნქციებზე, შემოგვაქვს რიცხვის მთელი და წილადი ნაწილის ცნებები, ვიხილავთ მათ ზოგიერთ თვისებას. XI კლასის სახელმძღვანელოში [[3], გვ.37] ვკითხულობთ: „x რიცხვის მთელი ნაწილი ეწოდება მთელ რიცხვს, რომელიც მეტია $(x-1)$-ზე და არ აღემატება x-ს (ანუ უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება x-ს). x რიცხვის მთელ ნაწილს აღვნიშნავთ $[x]$-ით. x რიცხვის წილადი ნაწილი ეწოდება x რიცხვისა და მისი მთელი ნაწილის სხვაობას; მას ასე აღვნიშნავთ: $\{x\}$. როგორც ამ განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს,

$$x=[x]+\{x\} \tag{1}$$

$y=\{x\}$ ფუნქცია პერიოდული ფუნქციაა. ნებისმიერი მთელი რიცხვი მისი პერიოდია. უმცირესი დადებითი პერიოდი არის 1.

გრაფიკის წარმოსადგენად შევნიშნოთ, რომ,

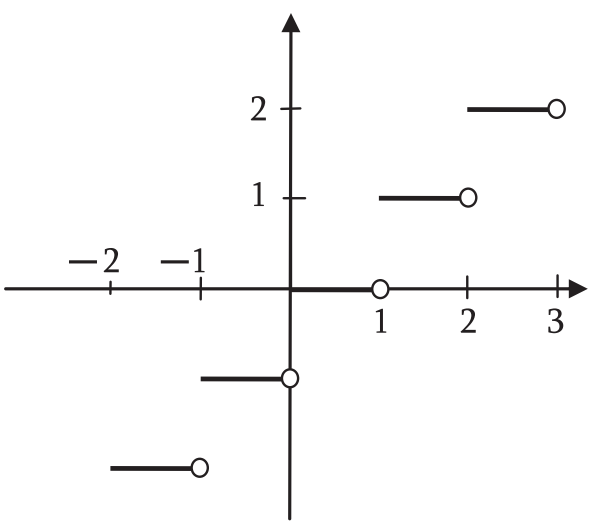
როცა $0 \le x < 1$, მაშინ $\{x\} = x$; როცა $x = 1$, $\{x\} = 0$. მაშასადამე, [0, 1) შუალედზე ამ ფუნქციის გრაფიკი ემთხვევა $y = x, x \in [0,1)$, ფუნქციის გრაფიკს (იხ., ნახ. 1).



სურ. 1

ამ ნაწილის პარალელური გადატანით $\vec{a}(n;0)$ სახის ვექტორებით ($n \in Z$), მიიღება $y = \{x\}$ ფუნქციის გრაფიკი.

შემდეგ სურათზე (სურ. 2) $y = [x]$ ფუნქციის გრაფიკია წარმოდგენილი.



ნახ. 2

ფუნქციის პერიოდულობის გარდა ეს ფუნქციები სასკოლო მათემატიკის სხვა საკითხებშიც ხშირად გვხვდება. მაგალითად, ნაშთიანი გაყოფის ალგორითმის შესწავლისას განიხილება იმ q რიცხვის არსებობის საკითხი, როცა მოცემული მთელი n-ისა და ნატურალური m-ისთვის, გვაქვს ორმაგი უტოლობა:

$$mq \le n < m(q+1). \qquad (2)$$

ეს ორმაგი უტოლობა კერძო შემთხვევაში ტოლფასია მთელი ნაწილის განმარტების; თუ q არის $\frac{n}{m}$ რიცხვის მთელი ნაწილი, მაშინ

$$q \le \frac{n}{m} < q+1.$$

(2) ორმაგი უტოლობიდან კი მიიღება ნაშთიანი გაყოფის ალგორითმი; ყოველი n მთელი და m ნატურალური რიცხვისთვის არსებობს ერთადერთი წყვილი $(q; r)$, რომლისთვისაც

$$n = mq + r, \; 0 \le r < m.$$

მთელი ნაწილის შემდეგ თვისებასაც ხშირად ვიყენებთ ხოლმე: თუ x დადებითია, ხოლო d მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ იმ დადებით რიცხვთა რაოდენობა, რომლებიც არ აღემატება x-ს და იყოფა d-ზე, არის $\left[\frac{x}{d}\right]$.

ახლა თეორემების სახით ჩამოვაყალიბოთ მთელი და წილადი ნაწილების კიდევ რამდენიმე თვისება, რომლებიც ხშირად გამოიყენება ამოცანების ამოხსნის დროს.

თეორემა 1. ვთქვათ, p მარტივი რიცხვია, ხოლო n ნატურალური რიცხვია, β არის p მარტივი რიცხვის მაჩვენებელი, რომლითაც p რიცხვი შედის $n!$-ის კანონიკურ დაშლაში. მაშინ

$$\beta = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^k}\right],$$

სადაც k უდიდესი მთელი რიცხვია, რომლისთვისაც $p^k \le n$.

ამ β რიცხვს p რიცხვის ჯერადობის მაჩვენებელიც ეწოდება.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ მარტივი $p = 7$ რიცხვის ჯერადობის მაჩვენებელი 121!-ში. გვაქვს

$$\beta = \left[\frac{121}{7}\right] + \left[\frac{121}{7^2}\right] = 17 + 2 = 19.$$

შევნიშნოთ, რომ $7^3 > 121$.

მაგალითი 2. რამდენი ნულით ბოლოვდება 300!-ის ათობითი ჩანაწერი?

საკმარისია, რომ ვიპოვოთ 5-ის ჯერადობის მაჩვენებელი, რადგან, ცხადია, იგი ნაკლებია 2-ის ჯერადობის მაჩვენებელზე. გვაქვს:

$$\beta=\left[\frac{300}{5}\right]+\left[\frac{300}{25}\right]+\left[\frac{300}{125}\right]=60+12+2=74.$$

მაშასადამე, 300! ბოლოვდება 74 ნულით.

თეორემა 2. თუ x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ

$$\{x\}+\left\{x+\frac{1}{2}\right\}=\{2x\}+\frac{1}{2}, \qquad (3)$$

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x] \qquad (4)$$

დამტკიცება. $f(x)=\{x\}+\left\{x+\frac{1}{2}\right\}$ და $g(x)=\{2x\}$ პერიოდული ფუნქციებია. ორივეს პერიოდი არის $\frac{1}{2}$. მართლაც,

$$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left\{x+\frac{1}{2}\right\}+\left\{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right\}=\left\{x+\frac{1}{2}\right\}+\{x+1\}=\left\{x+\frac{1}{2}\right\}+\{x\}.$$

$$g\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left\{2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}=\{2x+1\}=\{2x\}.$$

ამიტომ საკმარისია (3) და (4) ფორმულები დავამტკიცოთ, როცა $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right)$, ანუ $0\le x<\frac{1}{2}$, ანუ $\frac{1}{2}\le x+\frac{1}{2}<1$, $0\le 2x<1$. მაშინ (3) მიიღებს სახეს:

$$x+x+\frac{1}{2}=2x+\frac{1}{2}.$$

(1)-ის გათვალისწინებით, (3)-დან მიიღება (4).

ამ თეორემაში ჩამოყალიბებული თვისებების გარდა ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი თვისებები:

ა) თუ x და y ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ

$$[x+y]=[x]+[y]+[\{x\}+\{y\}],$$

$$\{x+y\}=\{\{x\}+\{y\}\}$$

ბ) თუ x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, n-ნატურალური რიცხვი, მაშინ

$$\{n\{x\}=\{nx\}.$$

ახლა ამ თვისებების გამოყენებით რამდენიმე ამოცანა ამოვხსნათ.

ამოცანა 1. ამოვხსნათ განტოლება

$$x+[10x]=10x$$

ამოხსნა. განტოლება ასე გადავწეროთ

$$[10x]=9x.$$

თუ $10x$ რიცხვის მთელ ნაწილს n-ით ავღნიშნავთ, გვექნება

$$\begin{cases} n=9x \\ n\le 10x<n+1, \quad n\in Z \end{cases}$$

ამ პირობებით უამრავი სისტემა მოიცემა. ნებისმიერი მთელი n-სთვის, პირველი განტოლებიდან ვიპოვით x-ს, რომელიც n-ზე იქნება დამოკიდებული: $x_n=\frac{n}{9}$. იგი იქნება სისტემის ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მეორე პირობასაც დააკმაყოფილებს. მაშასადამე,

$$n\le\frac{10n}{9}<n+1,$$

საიდანაც,

$$0\le n<9,$$

ანუ

$$n=0,\ 1,\ \ldots,\ 8.$$

მაშასადამე, ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს რიცხვები $0;\frac{1}{9};\frac{2}{9};\frac{3}{9};\frac{4}{9};\frac{5}{9};\frac{6}{9};\frac{7}{9};\frac{8}{9}$.

პასუხი: $\frac{n}{9}$, $n=0,\ 1,\ \ldots,\ 8$.

ამოცანა 2. ამოვხსნათ განტოლება

$$x^2+[x]=4.$$

ამოხსნა. I ხერხი. ყოველი n ნატურალური რიცხვისთვის ეს განტოლება ტოლფასია სისტემის:

$$\begin{cases} x^2+n=4 \\ n\le x<n+1 \end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases} x^2=4-n \\ n\le x<n+1 \end{cases}$$

პირველი განტოლების ამოხსნა n-ზეა დამოკიდებული;

თუ $4 - n < 0$, ანუ $n > 4$, განტოლებას ფესვი არა აქვს;

თუ $n = 4$, ერთი ფესვი გვაქვს: $x = 0$;

თუ $n < 4$, ორი ფესვი გვაქვს:

$$x'_n = \sqrt{4-n} \quad \text{და} \quad x''_n = -\sqrt{4-n}.$$

$n \le 4$-ისთვის ეს რიცხვები სისტემის ამონახსნებია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი მეორე პირობასაც აკმაყოფილებს.

თუ $n = 4$, მივიღებთ: $4 \le 0 < 5$, რაც შეუძლებელია.

თუ $n < 4$, მაშინ x'_n-ისთვის გვაქვს:

$$n \le \sqrt{4-n} < n+1.$$

აქედან ჩანს, რომ მხოლოდ $n = 1$-ისთვის სრულდება ეს უტოლობა. მაშასადამე, $x = \sqrt{3}$ არის მოცემული განტოლების ფესვი.

ახლა $x''_n = -\sqrt{4-n}$ შევამოწმოთ:

$$n \le -\sqrt{4-n} < n+1$$

მაშასადამე, $n < 0$. როცა $n = -1, -2, \dots$, მაშინ $-n$ და $-n - 1$ არაუარყოფითი რიცხვებია და მიღებული ორმაგი უტოლობა ტოლფასია სისტემის:

$$\begin{cases} n^2 + 3n - 3 < 0, \\ n^2 + n - 4 \ge 0. \end{cases}$$

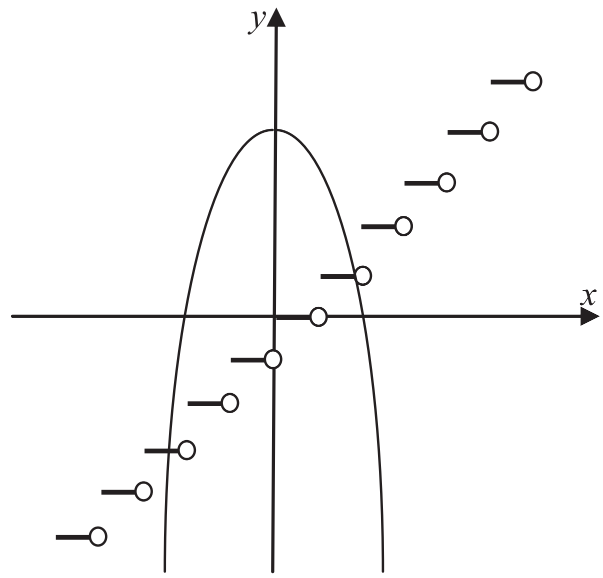
თუ მივიჩნევთ, რომ n ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ ამ სისტემის ამონახსნი ეკუთვნის შუალედს: $\left(\frac{-3-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right]$. მთელი რიცხვებიდან ამ შუალედს ეკუთვნის მხოლოდ $n = -3$. მაშასადამე, $x''_{-3} = -\sqrt{7}$ მოცემული განტოლების ფესვია.

პასუხი. $-\sqrt{7}$, $\sqrt{3}$.

II **ხერხი.** მოცემული განტოლება გრაფიკულად ამოვხსნათ. განტოლების ამონახსნი იქნება $y = [x]$ და $y = 4 - x^2$ ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების აბსცისები.

როგორც ნახაზიდან ჩანს (ნახ. 3), გრაფიკები ორ წერტილში იკვეთება.

პირველი ფესვი იმ წერტილის აბსცისაა, რომელიც $y = -3$ წრფის და $y = 4 - x^2$ პარაბოლის მარცხენა შტოს გადაკვეთით მიიღება. ეს რიცხვი $-\sqrt{7}$-ია. მეორე ფესვი დადებითია და იმ წერტილის აბსცისაა, რომელიც $y = 1$ წრფის და $y = 4 - x^2$ პარაბოლის მარჯვენა შტოს გადაკვეთით მიიღება; ეს რიცხვი $\sqrt{3}$-ია.



სურ. 3

ამოცანა 3. ამოხსენით განტოლება $[x] \cdot \{x\} < x - 1$

ამოხსნა. გავითვალისწინოთ (1) ტოლობა. მაშინ გვექნება

$$([x] - 1)(\{x\} - 1) < 0.$$

რადგან $\{x\} < 1$, ამიტომ ამ უტოლობიდან მივიღებთ $[x] - 1 > 0$, ანუ $[x] > 1$, საიდანაც $[x] \ge 2$.

პასუხი. $x \ge 2$.

ამოცანა 4. ამოვხსნათ განტოლება

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}x^6 - [x]$$

ამოხსნა. გამოვიყენოთ (4) ტოლობა. მაშინ მოცემული განტოლება ასე ჩაიწერება

$$[2x] = \frac{1}{2}x^6$$

შემოვიღოთ ახალი t ცვლადი: $t = 2x$. მაშინ (4) განტოლება ასე ჩაიწერება

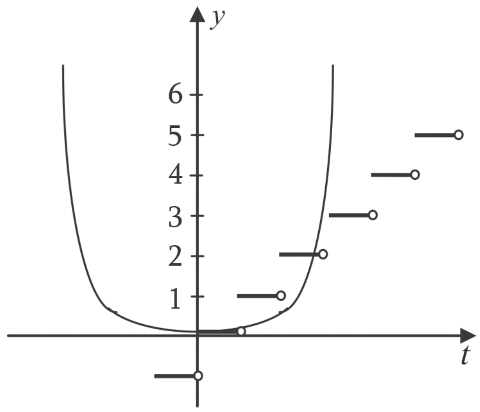
$$[t] = \frac{1}{128}t^6.$$

ეს განტოლება ტოლფასია სისტემის:

$$\begin{cases} y=[t] \\ y=\dfrac{1}{128}t^6 \end{cases}$$

ვიპოვოთ სისტემაში შემავალი ფუნქციების გრაფიკების გადაკვეთის წერტილები. გრაფიკები ორ წერტილში იკვეთება, როცა $t = 0$ და როცა $t \in (2;3)$, ეს უკანასკნელი კი $\frac{1}{128}t^6 = 2$ განტოლების დადებითი ამონახსნია, $t_2 = \sqrt[3]{16}$. ე.ი. $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt[3]{16}$; მაშასადამე, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[3]{2}$.

პასუხი: $0; \sqrt[3]{2}$.



სურ. 4

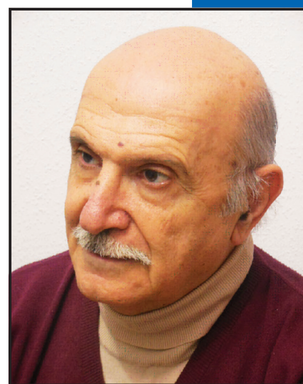
ლიტერატურა

1. A. Baker. A concise introduction to the theory of numbers, Cambridge university press, 1984.

2. პ. კოღონია, ა. ლურსმანაშვილი. რიცხვთა თეორიის კურსი, თბილისი, „განათლება“, 1967.

3. გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა XI, გრიფი მიენიჭა 2012 წელს, თბილისი, 2012.

ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში მათემატიკის გაძლიერებული სწავლების შესახებ



გურამ გოგიშვილი

მათემატიკის აკადემიური დოქტორი, წმიდა ანდრია პირველწოდებულის სახელობის ქართული უნივერსიტეტის სასწავლო ცენტრის ხელმძღვანელი

ეროვნული სასწავლო გეგმა ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში მათემატიკის სწავლების გაძლიერებულ პროგრამასაც წარმოგვიდგენს. ამ პროგრამის მიზნად მათემატიკის მრავალი მნიშვნელოვანი საკითხისა და მეთოდის გაცნობა და სათანადო შემოქმედებითი უნარების განვითარებაა დასახული. ეს პროგრამა არსებითად განსხვავდება ძირითადი სასწავლო პროგრამისგან. უფრო მეტიც, ის თავისი გადატვირთულობისა და საკითხთა ნაწილის ამ პროგრამისთვის შეუსაბამობის გამო, ვერ გადაიქცა გაძლიერებული და გაღრმავებული სწავლების რეალურ და აუცილებელ სამოქმედო პროგრამად. ფაქტობრივად, მოქმედებს მრავალი წლის სასწავლო პრაქტიკით ჩამოყალიბებული სასწავლო პროგრამა, რომელიც მოიცავს ძირითადი სასწავლო პროგრამის საკითხებსა და დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის სოლიდურ კურსს, რომლის საფუძველზე მოსწავლეები ეუფლებიან ფუნქციათა გამოკვლევისა და გრაფიკების აგების სტანდარტულ საკითხებს. აგრეთვე, მნიშვნელოვანი ყურადღება ეთმობა რთული საკონკურსო ამოცანების განხილვას.

წერილში წარმოდგენილი საკითხები აქტუალურია ეროვნული სასწავლო გეგმის ამჟამად მიმდინარე რევიზიისას წამოჭრილი პრობლემების გადაჭრის კუთხითაც.

ცხადია, ძალზე რთულია ცალსახად განისაზღვროს გაძლიერებული სწავლებისთვის განკუთვნილი სასწავლო მასალა და განსახილველ საკითხთა სიღრმე. მიუხედავად ამისა, დასახვეწი და უფრო დეტალურადაა ჩამოსაყალიბებელი სწავლების ამ დონეზე გადასაცემი საკითხების ნუსხა, გასათვალისწინებელია მათი დიდი როლიც განათლების შემდგომი საფეხურების გასავლელად მოსწავლეთა საფუძვლიან მომზადებაში, გარე სამყაროს შემეცნებაში, მათემატიკისადმი მოსწავლეთა ინტერესების გაძლიერებაში.

სასწავლო მასალის შერჩევასთან ერთად დიდ მნიშვნელობას იძენს სწავლებისას მისი სათანადო მეთოდიკით გადაცემა და დამუშავება, რათა ის იძლეოდეს ინდუქციის, დედუქციის, განზოგადების, ანალიზისა და სინთეზის გზით მოსწავლეთა მაღალი სააზროვნო უნარების განვითარების შესაძლებლობას და, ამასთანავე, ფართოდ უნდა წარმოადგენდეს თეორიული მასალის გამოყენებით ასპექტებსა და მათი დაუფლების გზებს.

სწავლების ეფექტიანობა, როგორც წესი, მაღალია, როცა გამოყენებულია პრობლემაზე დაფუძნებული სწავლება და ის შემოქმედებითადაა რეალიზებული - კარგად შერჩეული, ადვილად აღსაქმელი, განმავითარებელი ამოცანების დასმით, მათი კლასში საჯარო განხილვითა და გადაწყვეტით, უფრო ზოგადი ამოცანების დასმისა და მათი გადაწყვეტის გზების ძიებით, შემდეგ კი - ზოგადიდან ახალი კონკრეტული ამოცანების შესწავლისკენ დაბრუნებით. ეს გულისხმობს

აგრეთვე დასმული ამოცანების ამოსახსნელად სხვადასხვა საინტერესო მეთოდის მოძიებასა და გამოყენებას, რაც მკაფიოდ გამოავლენს ერთი შეხედვით დაქსაქსულ, ერთმანეთისგან განყენებულად აღქმულ ამოცანებს შორის და თავად მეთოდებს შორის კავშირებს, შეადარებს მათ ეფექტიანობას და გამოყენების უპირატესობას.

აღნიშნული მიდგომის საილუსტრაციოდ ამ წერილში წარმოვადგენთ ერთი ამოცანის გადაწყვეტის განსხვავებულ გზებს, ამ გზების ანალიზსა და სხვა ამოცანებში გამოყენების შესაძლებლობებს.

განვიხილოთ ჯამი

$$\sum_{k=0}^{n} k^2,$$

ანუ $0^2 + 1^2 + ... + n^2$. მთელი რიცხვების კვადრატების ეს ჯამი აღვნიშნოთ $A_2(n)$-ით. შემდეგში თვით ამ მთელი რიცხვების ჯამს აღვნიშნავთ $A_1(n)$-ით, საზოგადოდ, k ხარისხების ჯამს - $A_k(n)$-ით. $A_2(n)$-ის გამოსათვლელი მარტივი ფორმულის მისაღებად განვიხილოთ სხვადასხვა მეთოდი და შემდეგ გავაანალიზოთ ეს კვლევა.

მეთოდი 1. არასრული ინდუქციის მეთოდი. n-ის რამდენიმე საწყისი მნიშვნელობისთვის ვიპოვოთ $A_2(n)$-ის შესაბამისი მნიშვნელობები, დავაკვირდეთ მიღებულ მიმდევრობას და ვცადოთ რაიმე სავარაუდო კანონზომიერების აღმოჩენა. შემდეგ კი დავამტკიცოთ ეს შედეგი. ცხადია, ეს მიდგომა - არასრული ინდუქციის გზით ზოგადი ჰიპოთეტური დასკვნის ძიება, საკმაოდ განმავითარებელი, შემოქმედებითი პროცესია. ამ მეთოდს ცნობილი მეცნიერებიც აქტიურად იყენებენ მნიშვნელოვან სამეცნიერო კვლევებში.

მარტივი გამოთვლებით ვღებულობთ.

n	0	1	2	3	4	5	6
$A_2(n)$	0	1	5	14	30	55	91

ამ, და რამდენიმე მომდევნო მნიშვნელობის მიხედვით რაიმე კანონზომიერების აღმოჩენა თუ გართულდა, მივმართავთ სხვა მეთოდებს.

მეთოდი 2. დაყვანის მეთოდი. მოცემული არითმეტიკული ფუნქციის - $A_2(n)$-ის შემთხვევაში ეს მეთოდი ასე მოქმედებს:

განვიხილოთ ჯამი

$$A_2(n)+(n+1)^2=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2=\sum_{k=0}^{n}\left(k^2+2k+1\right)=$$
$$\sum_{k=0}^{n}k^2+2\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1==A_2(n)+2A_1(n)+n+1.$$

ამრიგად, მივიღეთ $A_1(n)$-ისთვის ფორმულა

$$A_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

ეს ფორმულა მოსწავლეებს შეახსენებს მათთვის ცნობილი მარტივი არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულას:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

ცხადია, ჩვენს მიზანს მისი მიღება სულაც არ წარმოადგენდა. თუმცა, ამ განხილვამ გვიკარნახა საინტერესო გზა $A_2(n)$-ის შესასწავლად. განვიხილოთ $A_3(n)$ - კუბების ჯამი.

$$A_3(n)+(n+1)^3=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3=\sum_{k=0}^{n}\left(k^3+3k^2+3k+1\right)=$$
$$=A_3(n)+3A_2(n)+3A_1(n)+n+1.$$

ამრიგად,

$$3A_2(n)=(n+1)^3-\frac{3}{2}n(n+1)-(n+1)=$$
$$(n+1)\left(n^2+2n+1-\frac{3}{2}n-1\right)=(n+1)\left(n^2+\frac{1}{2}n\right)$$
$$A_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

საძიებელი ფორმულა მიღებულია! უფრო მეტიც - გამოიკვეთა გზა $A_3(n)$-ის, $A_4(n)$-ის და სხვა ანალოგიური ჯამების შესასწავლად. მოსწავლეები სათანადო ფორმულებს დამოუკიდებელი განხილვითაც იოლად მიიღებენ.

ამ მეთოდის არსის გაცნობის კვალობაზე მარტივად შეიძლება სხვა ტიპის ზოგიერთი ჯამის შესწავლაც. მაგალითად, განვიხილოთ ჯამი

$$S(n)=\sum_{k=0}^{n}k2^k.$$

ისევე, როგორც $A_2(n)$- ის შესწავლისას, ამ შემთხვევაშიც განვიხილოთ ჯამი

$$S(n)+(n+1)2^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^{k+1}=$$
$$\sum_{k=0}^{n}k2^{k+1}+\sum_{k=0}^{n}2^{k+1}=2S(n)+\frac{2^{n+2}-2}{2-1}$$

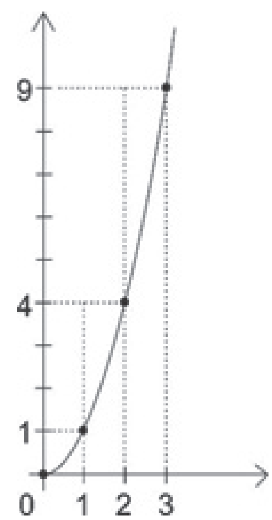
(შენიშნეთ, ალბათ, აქ გამოვიყენეთ გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ცნობილი ფორმულა). ამრიგად,

$$S(n) = (n+1)2^{n+1} - 2^{n+2} + 2,$$
$$S(n) = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

გამოყენებულმა მეთოდმა ამჯერად უშუალოდ

($S(n+1)$ ჯამის გამოყენების გარეშე) გვაპოვნინა $S(n)$.

მეთოდი 3. ჯამის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით. გაძლიერებული სწავლისას მოსწავლეები გაეცნობიან განსაზღვრულ ინტეგრალს, მის გეომეტრიულ აზრს - $[a;b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული, უწყვეტი და არაუარყოფითი f ფუნქციისთვის $\int_a^b f(x)dx$ წარმოადგენს მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს - იმ არის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია $x = a$, $x = b$, $y = 0$ და $y = f(x)$ წირებით. $\sum_{k=0}^n k^2$ ჯამი წარმოგვიდგენს $1 \times 1; 1 \times 4; 1 \times 9; \dots, 1 \times n^2$ გვერდებიანი მართკუთხედების ფართობთა ჯამს.



განსაზღვრული ინტეგრალის აღნიშნული თვისების გათვალისინებით ამ ჯამის მიახლოებით მნიშვნელობად შეიძლება მივიჩნიოთ $\int_0^n x^2dx = \frac{n^3}{3}$. ცდომილებას წარმოგვიდგენს სხვაობა

$$A_2(n) - \int_0^n x^2dx = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k x^2dx = \sum_{k=1}^n \left(k^2 - \frac{k^3-(k-1)^3}{3}\right) = \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{3}\right) = A_1(N) - \frac{1}{3}n.$$

შედეგად მივიღებთ საძიებელ ფორმულას -

$$A_2(n) = \int_0^n x^2dx + A_1(N) - \frac{1}{3}n = \frac{n^3}{3} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

მეთოდი 4. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი. ზემოთ განხილულმა პირველმა მეთოდმა შესაძლებელია $A_2(n)$-ისთვის სავარაუდო ფორმულა აღმოაჩენინოს მოსწავლეებს. ამის შემდეგ ფორმულის დამტკიცებას იოლად შევძლებთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით (მასწავლებელს მიეცემა კიდევ ერთი შესაძლებლობა დაუბრუნდეს ამ მეთოდს და ხაზი გაუსვას მის მდიდარ შესაძლებლობებს). მართლაც, როცა $n = 0$, მაშინ დასამტკიცებელი

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ფორმულა ჭეშმარიტია - ვღებულობთ $0 = 0$. ახლა ვიგულისხმოთ, რომ ეს ფორმულა ჭეშმარიტია n-ის რაიმე არაუარყოფითი მთელი p მნიშვნელობისთვის და დავამტკიცოთ მისი ჭეშმარიტობა $n = p + 1$ მნიშვნელობისთვის. ამრიგად, ვთქვათ, ჭეშმარიტია ფორმულა

$$\sum_{k=0}^p k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

მაშინ, ამ ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$\sum_{k=0}^{p+1} k^2 = \sum_{k=0}^p k^2 + (p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 =$$
$$\frac{(p+1)}{6}\left(2p^2 + p + 6p + 6\right) == \frac{(p+1)(p+2)(2(p+1)+1)}{6}.$$

ამრიგად, დასამტკიცებელი ფორმულა ჭეშმარიტია $n = p + 1$ მნიშვნელობისთვისაც. ეს ამტკიცებს მის ჭეშმარიტობას ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელისთვის.

მეთოდი 5. ჯამის გარდაქმნის ერთ-ერთი მეთოდი. თუ სასწავლო პროცესში მოსწავლეები დაეუფლებიან ჯამის სხვადასხვა სახით წარმოდგენებს, შესაძლებელია ამას დაეფუძნოს $A_2(n)$-ის შესწავლის კიდევ ერთი გზა. სახელდობრ,

$$A_2(n) = \sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{1 \le m \le k \le n} k = \sum_{m=1}^n \sum_{m \le k \le n} k = \sum_{m=1}^n \frac{(m+n)(n-m+1)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^n \left(n^2 + n + m - m^2\right) = \frac{1}{2}\left(n^2+n\right)\sum_{m=1}^n 1 + \frac{1}{2}A_1(n) - \frac{1}{2}A_2(n)$$

(აქ გამოყენებული იყო ჯამის გარდაქმნა ორმაგი ჯამის სახით და არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულა). აქედან მარტივად მიიღება $A_2(n)$-ის ფორმულა.

მეთოდი 6. ჯამის გარდაქმნის კიდევ ერთი მეთოდი. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის დაუფლების კვალობაზე მოსწავლეებს არ გაუჭირდებათ ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი (a_n) მიმდევრობისთვის შემდეგი საყურადღებო ფორმულის დამტკიცება:

$$\sum_{k=1}^n a_k = na_{n+1} + \sum_{k=1}^n k\left(a_k - a_{k+1}\right), \quad n \ge 1.$$

ამ ფორმულის დაუფლებისა და მისი გამოყენების მიზნით ვცადოთ $A_2(n)$-ისთვის ფორმულის მიღება კიდევ ერთი გზით.

თუ ამ ფორმულაში ვიგულისხმებთ, რომ $a_k = k^2$, მივიღებთ

$$A_2(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = n(n+1)^2 + \sum_{k=0}^{n} k(k^2 - (k+1)^2) =$$

$$n(n+1)^2 + \sum_{k=0}^{n} k(-2k-1) = n(n+1)^2 - 2A_2(n) - A_1(n).$$

მივიღეთ წრფივი განტოლება $A_2(n)$-ის მიმართ. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A_1(n)$-ისთვის ფორმულა მარტივად მიიღება (ერთ-ერთი გზა მისი მიღებისა მეორე მეთოდის - დაყვანის მეთოდის განხილვისას იყო წარმოდგენილი), ამ წრფივი განტოლების ამოხსნით მივიღებთ საძიებელ ფორმულას $A_2(n)$-ისთვის.

$A_2(n)$ ჯამის შესწავლის წარმოდგენილი ექვსი მეთოდის შედარებით, მათი ეფექტიანობის ხარისხის ანალიზით, მოსწავლეები დაასახელებენ მათი აზრით ყველაზე უფრო ქმედით მეთოდს (ამ კონკრეტული ამოცანისთვის). აქვე შეიძლება განვიხილოთ ამ მეთოდების ტექნიკური და ესთეტიკური მხარეებიც, მათი გამოყენების პერსპექტივებიც.

ამრიგად, ერთი კონკრეტული ამოცანის კვლევამ მიგვიყვანა მრავალი საყურადღებო მეთოდის გამოყენებამდე. ამავე გზით, არაერთი საინტერესო ამოცანის კვლევამ, შეიძლება მიგვიყვანოს სხვადასხვა აქტუალური მეთოდის შესწავლასა და გამოყენებამდე. შემდეგ კი ამ ზოგადი მეთოდების საშუალებით შეიძლება დავუბრუნდეთ სხვა კონკრეტული ამოცანების კვლევას. ასეთი მიდგომა გამაერთიანებელ როლსაც ასრულებს თითქოს სრულიად განსხვავებული მეთოდებისთვის. მნიშვნელოვანია ასეთ განხილვათა განმავითარებელი როლიც.

წერილში განხილული საკითხები გაძლიერებული სწავლების შინაარსისა და მეთოდების შესახებ აქტუალურია ეროვნული სასწავლო გეგმის ამჟამად მიმდინარე რევიზიისას წამოჭრილი საკითხების გადაჭრის კუთხითაც.

ლიტერატურა:

R.L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, Concrete Mathematics, Addision-Wesley, 1994.

ელ. ფოსტის მისამართი:
guramgog@gmail.com

წინა ნომრის ამოცანების ამოხსნები

ამოცანა 1

ვთქვათ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის $S(n)$ აღნიშნავს ყველა იმ ნატურალურ რიცხვების სიმრავლეს, რომელთა წარმოდგენა შესაძლებელია სახით $1 + g + g^2 + \dots + g^{n-1}$, სადაც $g \geq 2$ რაიმე ნატურალური რიცხვია. 1) აჩვენეთ, რომ $S(3) \cap S(4) = \varnothing$, 2) იპოვეთ $S(3) \cap S(5)$.

ამოხსნა. ვთქვათ $g, h \geq 2$ ნატურალური რიცხვებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$1 + g + g^2 = 1 + h + h^2 + h^3.$$

გვექნება $h^3 = (g - h)(g + h + 1)$. თუ p წარმოადგენს h-ის რაიმე მარტივ გამყოფს, მაშინ ის გაყოფს უნაშთოდ $g - h$ ან $g + h + 1$ რიცხვს. პირველ შემთხვევაში p გაყოფს g-ს, ხოლო მეორე შემთხვევაში p გაყოფს $g + 1$ რიცხვს. ვინაიდან g და $g + 1$ თანამარტივი რიცხვებია, ამიტომ, თუ p^m გაყოფს h-ს, მაშინ p^{3m} გაყოფს $g - h$ ან p^{3m} გაყოფს $g + h + 1$ რიცხვს, გვექნება წარმოდგენა $h = h_1h_2$, სადაც h_1 და h_2 თანამარტივი რიცხვებია და

$$h_1^3 = g - h, \; h_2^3 = g + h + 1.$$

უკანასკნელი ტოლობებიდან მივიღებთ, $2h_1h_2 = 2h = h_2^3 - h_1^3 - 1$. ვაჩვენოთ, რომ მიღებულ დიოფანტურ განტოლებას არ გააჩნია $h_1, h_2 \geq 0$ სახის ამონახსნები. ვთქვათ $f_{h_1}(h_2) = h_2^3 - h_1^3 - 2h_1h_2 - 1$. თუ $0 \leq h_2 \leq h_1$ გვექნება $f_{h_1}(h_2) \leq -1$. გარდა ამისა, თუ $h_2 > h_1$, მაშინ f_{h_1} ზრდადი ფუნქციაა $f_{h_1}(h_2 + 1) = h_1^2 + h_1 > 0$ და $f_{h_1} = 0$ განტოლებას არ გააჩნია ნატურალური ფესვი.

ვთქვათ, $f(x) = 1 + x + x^2$ და $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. ორივე ფუნქცია არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე მკაცრად ზრდადი ფუნქციებია, გარდა ამისა გვაქვს შემდეგი უტოლობები:

$$\begin{aligned} &f(4n^2+5n+1) < g(2n+1) < f(4n^2+9n+4) < g(2n+2) \\ &< f(4n^2+9n+5) < f(4(n+1)^2+5(n+1)+1), \end{aligned}$$

ყოველი $n \geq 1$ რიცხვისათვის. გვექნება $g(n) \neq f(k)$ თუ $n \geq 3$, $k \geq 1$ ნატურალური რიცხვებია. საბოლოოდ თუ $n \in \{1,2\}$, მაშინ $f(1) = 3 < g(1) = 5 < 7 = f(2)$ და $g(2) = 31 = f(5)$. მაშასადამე $S(3) \cap S(5) = \{31\}$.

ამოცანა 2

ვთქვათ, ფუნქცია $f: R \to R$ აკმაყოფილებს პირობებს: ა) ყოველი $x \in R$ მნიშვნელობისათვის $|f(x)| \leq 1$; ბ) ყოველი $x \in R$ მნიშვნელობისათვის $f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right)$. აჩვენეთ, რომ f არის პერიოდული ფუნქცია.

ამოხსნა. ვთქვათ, x რაიმე ნამდვილი რიცხვია. განვსაზღვროთ რიცხვები $a_{k,l} = f(x + k/6 + l/7)$, სადაც k და l არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია. გვექნება ტოლობები

$$a_{k,\,l+1} + a_{k+1,\,l} = a_{k,\,l} + a_{k+1,\,l+1}.$$

ყოველი ნატურალური m რიცხვისათვის ზემოთ მოყვანილი ტოლობები შევკრიბოთ ყველა იმ k ინდექსების მიმართ რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $0 \leq k \leq m - 1$. მივიღებთ ტოლობებს:

$$a_{0,\,l+1} + a_{m,\,l} = a_{0,\,l} + a_{m,\,l+1}.$$

თუ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის მიღებული ტოლობებს შევკრიბავთ იმ ინდექსების მიმართ რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $0 \le 1 \le n-1$, მივიღებთ

$$a_{0,n} + a_{m,0} = a_{0,0} + a_{m,n}.$$

მიღებულ ტოლობაში თუ ავიღებთ $m = 6$ და $n = 7$ მივიღებთ ტოლობას $2f(x+1) = f(x) + f(x+2)$. მაშასადამე მიმდევრობა $f(x+n)$ არითმეტიკული პროგრესიაა. თუ გავითვალისწინებთ ამოცანის პირველ პირობას დავასკვნით, რომ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. მაშასადამე $f(x+1) = f(x)$ ყოველი x რიცხვისათვის.

ამოცანა 3

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის $S_1, S_2, \dots, S_m$ ქვესიმრავლეების ერთობლიობას ვუწოდოთ სრული, თუ ყოველი ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ერთადერთი S_j სიმრავლე, რომელსაც ის ეკუთვნის. ვთქვათ, $m > 1$ და $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ რაიმე ფიქსირებული დადებითი რიცხვებია. ყოველი ფიქსირებული $j(1 \le j \le m)$ ნომრისათვის, ვთქვათ, S_j სიმრავლე შედგება ყველა $[n\alpha_j]$ სახის რიცხვებისაგან, სადაც n ღებულობს მნიშვნელობებს ნატურალური რიცხვთა სიმრავლიდან ($[x]$-ით აღნიშნულია x-ის მთელი ნაწილი). აჩვენეთ, რომ სიმრავლეთა აგებული სისტემა სრულია მხოლოდ მაშინ, როცა $m = 2$, $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}=1$ და α_1 ირაციონალური რიცხვია.

ამოხსნა. ვთქვათ, $1 \in S_1$. ცხადია $[\alpha_1] = 1$, $\alpha_1 \ne 1$. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ $S_1 = \{[n\alpha_1]; n \in Z_+\}$ და $T = \{[n\beta - \varepsilon]; n \in Z_+\}$ სიმრავლეები ქმნიან სრულ სისტემას, სადაც

$$\beta = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} \quad \text{და} \quad \varepsilon = \begin{cases} (2(a-c))^{-1}, & \text{როცა } \alpha_1 = \dfrac{a}{c} \in Q, \\ 0, & \text{როცა } \alpha_1 \in R \setminus Q. \end{cases}$$

ვთქვათ $\Xi = \{n\alpha_1, n\beta - \varepsilon; n \in Z_+\}$. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ნატურალური $M > 1$ რიცხვისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$N = card(\{x \in \Xi; x < M\}) = M - 1.$$

შევნიშნოთ, რომ $n\alpha_1 < M$ უტოლობა ექვივალენტურია უტოლობის $n\alpha_1 + \delta < M$, სადაც $\delta = (2c)^{-1}$ თუ $\alpha_1 = a/c \in Q$ და $\delta = 0$ თუ $\alpha \in R \setminus Q$. მაშასადამე n-ის მაქსიმალური მნიშვნელობა, როლისთვისაც $n\alpha_1 < M$ უტოლობაა სამართლიანი არის $[(M-\delta)/\alpha_1]$. ანალოგიურად $n\beta - \varepsilon$ სახის რიცხვების რაოდენობა , რომლებიც ნაკლებია M-ზე არის $[(M+\varepsilon)/\beta]$. მაშასადამე გვექნება, რომ $N = [(M-\delta)/\alpha_1] + [(M+\varepsilon)/\beta]$. გვაქვს

$$\frac{M-\delta}{\alpha_1} - 1 < \left[\frac{M-\delta}{\alpha_1}\right] < \frac{M-\delta}{\alpha_1}, \quad \frac{M+\varepsilon}{\beta} - 1 < \left[\frac{M+\varepsilon}{\beta}\right] < \frac{M+\varepsilon}{\beta}.$$

ამ ორი უტოლობის შეკრების შედეგად მივიღებთ: $M - 2 < N < M$ და მაშასადამე $N = M - 1$.
ვთქვათ k არის უმცირესი ნატურალური რიცხვი ისეთი, რომ $k \notin S_1$. არსებობს α_2 ისეთი, რომ $k = [\alpha_2] = [\beta - \varepsilon] \ge 2$. გვაქვს $n\beta - 1 \le [n\beta - \varepsilon] < n\beta - \varepsilon$, და მაშასადამე

$$[(n+1)\beta - \varepsilon] - [n\beta - \varepsilon] < (n+1)\beta - \varepsilon - n\beta + 1 = \beta + 1 - \varepsilon \le k + 2 - \varepsilon,$$
$$[(n+1)\beta - \varepsilon] - [n\beta - \varepsilon] > (n+1)\beta - 1 - n\beta + \varepsilon = \beta - 1 + \varepsilon > k - 1 + 2\varepsilon.$$

გვექნება

$$k \le [(n+1)\beta - \varepsilon] - [n\beta - \varepsilon] = [(n+1)\alpha_2] - [n\alpha_2] \le k + 1.$$

$[n\beta - \varepsilon]$ მიმდევრობის ორი მომდევნო წევრს შორის განსხვავება ტოლია $[n\alpha_1]$ მიმდევრობის მომდევნო წევრებს შორის სხვაობისის და ეს სხვაობა ტოლია k ან $k + 1$-ის. მაშასადამე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ j-ური წევრი რომელიც არ ეკუთვნის S_1 სიმრავლეს არის $[n\alpha_2] = [j\beta - \varepsilon]$. გვექნება, რომ $m = 2$. თუ $\alpha_1 \in Q$, მაშინ $\alpha_1 = b/d$ და $j = d$ გვექნება $[j\alpha_2] > [j\beta - \varepsilon]$, რომელიც არასწორია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ $\alpha, \beta \in R \setminus Q$, $\alpha, \beta > 0$ და მაშინ სიმრავლეები

$$\{[\alpha],[2\alpha],\dots,[k\alpha],\dots\}, \{[\beta],[2\beta],\dots,[k\beta],\dots\}$$

სრულ სისტემას ქმნიან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1.$

ავღნიშნოთ $A_N=\{1, 2, ..., N\}$. ავიღოთ მაქსიმალური ნატურალური რიცხვი k ისეთი, რომ $k\alpha<N+1$ და მაქსიმალური l ისეთი, რომ $l\alpha<N+1$. გვაქვს უტოლობები

$$\left[\frac{N}{\alpha}\right]\le k\le\left[\frac{N+1}{\alpha}\right],\left[\frac{N}{\beta}\right]\le k\le\left[\frac{N+1}{\beta}\right].$$

გვაქვს $k+1=N$ და

$$\left[\frac{N}{\alpha}\right]+\left[\frac{N}{\beta}\right]\le N\le\left[\frac{N+1}{\alpha}\right]+\left[\frac{N+1}{\beta}\right].$$

თუ გადავალთ ზღვარზე $N\to\infty$, მივიღებთ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1.$

შებრუნებით, გვექნება

$$N+1=\frac{N+1}{\alpha}+\frac{N+1}{\beta}>\left[\frac{N+1}{\alpha}\right]+\left[\frac{N+1}{\beta}\right]>\frac{N+1}{\alpha}+\frac{N+1}{\beta}-2=N-1$$

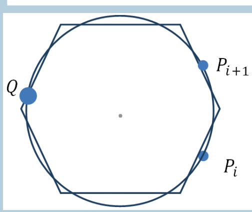
საიდანაც $\left[\frac{N+1}{\alpha}\right]+\left[\frac{N+1}{\beta}\right]=N,$ სახელდობრ გვექნება $k+n=N.$

ამოცანა 4

ვთქვათ C მოცემული წესიერი მრავალკუთხედია. ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის სიბრტყეზე ააგეთ $S(n)$ სიმრავლე, რომელსაც ექნება თვისება: $S(n)$ სიმრავლის ნებისმიერი n ელემენტიანი ქვესიმრავლე შეგვიძლია გადავფაროთ C ფიგურით, თუმცა $S(n)$ სიმრავლისათვის არ არსებობს C ფიგურით მისი გადაფარვა. (ვიტყვით, რომ არსებობს A სიმრავლის C ფიგურით გადაფარვა თუ შეგვიძლია ვიპოვოთ C ფიგურის სიბრტყეზე მოძრაობით მისი ახალი მდებარეობა რომლის ქვესიმრავლეც იქნება A სიმრავლე).

ამოხსნა. ვთქვათ, k არის მოცემული წესიერიმრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობა, r მასში ჩახაზულ წრეწირის რადიუსია, ხოლო O მისი ცენტრი. ყოველი $n\in Z_+$ ნატურალური რიცხვისავის $S(n)$-ით ავღნიშნოთ წრეწირი, რომლის რადიუსია $r\sec(\pi/2kn)$, ხოლო ცენტრი ემთხვევა C მრავალკუთხედის ცენტრს. შევნიშნოთ, რომ C მრავალკუთხედი არ ფარავს $S(n)$ სიმრავლეს. დავამტკიცოთ ეს ფაქტი მკაცრად. ვთქვათ $X(R)$ წარმოადგენს ყველა იმ წრეწირის ცენტრს რომელიც მთლანად შედის როგორც ქვესიმრავლე C-ში და რადიუსი ტოლია R-ის. ცხადია $X(R)$ ამოზნექილი სიმრავლეა და ეს სიმრავლე O ცენტრის გარშემო $2\pi/k$ რადიანით მობრუნებისას გადადის თავის თავში. მაშასადამე ის ან ცარიელია ან შეიცავს O ცენტრს. მაშასადამე $R\le r$.

ვთქვათ, $P_1,..., P_n\subset S(n)$ წერტილთა ნებისმიერი ფიქსირებული n-ეულია $S(n)$-დან. ვაჩვენოთ, რომ C დაფარავს $P_1,..., P_n$ წერტილებისგან შემდგარ სიმრავლეს. ვთქვათ Q წარმოადგენს C-ს რაიმე ფიქსირებულ წერტილს რომელიც დაშორებულია O ცენტრიდან $r\sec(\pi/2kn)$ მანძილით.



თუ ჩვენ C ვაბრუნებთ O ცენტრის გარშემო, Q იმოძრავებს $S(n)$-ის გასწვრივ. როცა Q იმოძრავებს წრეწირის გასწვრივ, ზოგიერთი P_i წერტილი აღმოჩნდება C-ს შიგნით, ზოგი C-ს გარეთ.

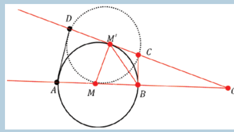
შევნიშნოთ, რომ $P_i\notin C$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Q\in\cup_{j=1}^{n}A_j$, სადაც ყოველი A_j არის წრეწირის რკალი C გარე მხრიდან სიგრძით π/kn. A_j რკალები განიმარტებიან უტოლობებით

$$2\frac{\pi j}{k}\le\widehat{P_iOQ}\le2\frac{\pi j}{k}+\frac{\pi}{kn}.$$

მაშასადამე, $\cup_{j=1}^{n}A_j$ არის რკალების გაერთიანება, რომელთა სრული სიგრძე არ აღემატება $nk\pi/kn=\pi$ და ამიტომ $S\setminus\cup_{j=1}^{n}A_j$ არის არაცარიელი. ვაბრუნოთ C სანამ Q იმყოფება $S\setminus\cup_{j=1}^{n}A_j$-ში. მაშინ ყოველი P_j ეკუთვნის C-ს რისი ჩვენებაც გვინდოდა.

ვთქვათ $ABCD$ ამოზნექილი ოთხკუთხედია. ცნობილია, რომ წრეწირი რომლის დიამეტრია AB ეხება CD წრფეს. აჩვენეთ, რომ წრეწირი, რომლის დიამეტრია CD ეხება AB წრფეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა AD და BC პარალელურია.

ამოცანა 5



ამოხსნა. ვთქვათ M არის AB მონაკვეთის შუაწერტილი. M წერტილიდან CD წრფეზე დაუშვათ MM' პერპენდიკულარი, $M' \in CD$. ცხადია ის წრეწირი რომელიც ეხება CD წრფეს და დიამეტრია AB მონაკვეთი ეხება CD წრფეს M' წერტილში. ამიტომ $\angle AMB = \pi/2$ და $MM' = AB/2$. შებრუნებით, თუ M და M' ზემოთ აგებული წერტილებია და სრულდება პირობა $MM' = AB/2$, მაშინ წრეწირი დიამეტრით AB ეხება CD წრფეს.

დაუშვათ AB და CD წრფეები ერთმანეთის პარალელური არ არიან. ავღნიშნოთ $O = AB \cap CD$ ვთქვათ $OM = \lambda$ და $\angle AOD = \theta$, მაშინ $MM' = \lambda\sin\theta$ და $MB = MA = \lambda\sin\theta$. გვაქვს

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OM + MA}{OM - MB} = \frac{\lambda(1+\sin\theta)}{\lambda(1-\sin\theta)} = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}.$$

შებრუნებით, ადვილია ჩვენება იმისა, რომ თუ $\frac{OA}{OB} = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$ მაშინ $MM' = MA = MB$.

ვთქვათ, P წარმოადგენს CD მონაკვეთის შუაწერტილს, PP' წრფე AB წრფის მართობია და $P' \in AB$. წინა მსჯელობების გათვალისწინებით გვექნება, რომ $PP' = CD/2$ ტოლობა ტოლფასია $\frac{OC}{OD} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ ტოლობის. თალესის თეორემის თანახმად გვექნება, რომ AD და BC წრფეები პარალელურია. მეორე მხრივ, $PP' = CD/2$ ტოლობა ტოლფასია იმისა, რომ წრეწირი დიამეტრით CD ეხება AB წრფეს.

იმ შემთხვევაში, როცა AB და CD წრფეები პარალელურია, მაშინ $|MM'| = \frac{|AB|}{2} = \frac{|CD|}{2}$. მაშასადამე $ABCD$ პარალელოგრამია და AD პარალელურია BC.

ამოცანები

ამოცანა 1. ვთქვათ, m და n ნატურალური რიცხვები ისეთია, რომ $m > n \geq 2$. $S_m(n)$ სიმბოლოთი ავღნიშნოთ ყველა იმ ნატურალური რიცხვის შებრუნებული რიცხის ჯამი რომლებიც m-ზე ნაკლებია და თანამარტივია n რიცხვთან. აჩვენეთ, რომ $S_m(n)$ არ არის მთელი რიცხვი.

ამოცანა 2. იპოვეთ ყველა ის რაციონალური r რიცხვი, რომლისათვისაც არსებობს სამი a, b და c რაციონალური რიცხვი ისეთი, რომ

$$a + b\cos 2\pi r + c\sin 2\pi r = 0.$$

ამოცანა 3. სიბრტყის წერტილთა სიმრავლისათვის განსვსაზღვროთ ოპერაციას $A*B$ შემდეგნაირად: თუ $A \neq B$, მაშინ $A*B = C$, სადაც C წარმოადგენს იმ ერთადერთ წერტილს სიბრტყეზე რომლისთვისაც ორიენტილრებული სამკუთხედი ABC ტოლგვერდაა (ვიტყვით, რომ სამკუთხედი ABC ორიენტირებულია, თუ სამკუთხედის გვერდების გასწვრივ $A \to B \to C$ გადასვლების მიმართულება ემთხვევა საათის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიართულებას); იმ შემთხვევაში, როცა $A = B$, მაშინ $A*B = A$. აჩვენეთ, რომ ამგვარად განსაზღვრული ოპერაცია არაკომუტაციური და არაასოსიაციურია და აკმაყოფილებს ტოლობას

$$(A*B) * (C*D) = (A*C) * (B*D).$$

ამოცანა 4. ვთქვათ, a, b და c დადებითი რიცხვებია, რომლებიც არ წარმოადგენენ სამკუთხედის გვერდის სიგრძეებს. აჩვენეთ, რომ სამართიანია უტოლობა

$$\begin{aligned}&(abc)^2(a+b+c)^2(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\\ &\geq (a^2+b^2+s^2)^3(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2).\end{aligned}$$

ამოცანა 4. ვთქვათ, ოთკუთხედში შესაძლებელია წრეწირის ჩახაზვა და ამასთან ოთკუთხედის ფართობი ტოლია $\sqrt{abcd}$, სადაც a, b, c და d ოთკუთხედის გვერდებია. აჩვენეთ, რომ ოთკუთხედზე შესაძლებელია წრეწირის შემოხაზვა.

ნორჩი ქართველი მათემატიკოსები საერთაშორისო ოლიმპიადებში

გიორგი ჭელიძე

გივი ნადიბაიძე

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების ლიდერი, ასისტენტ პროფესორი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების თანალიდერი, ასისტენტ პროფესორი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

2016 წლის საერთაშორისო ოლიმპიადა სასკოლო მათემატიკაში ჩატარდა ქალაქ ჰონგკონგში ივლისის თვეში. ასპარეზობაში მონაწილე გუნდები 6-6 მოსწავლისაგან შედგებოდა. საქართველოს ნაკრებს წარმოადგენდნენ: ალექსანდრე საათაშვილი (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის XI კლასელი); დავით ბეჟანიშვილი (თბილისის ი. ვეკუას სახელობის 42-ე სკოლის XII კლასელი); საბა ლეფსვერიძე (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის X კლასელი); ბაკურ ცუცხაშვილი (ქუთაისის რაზმაძის სახელობის სკოლა-პანსიონის XII კლასელი); დავით თათოშვილი (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის XI კლასელი) და ელენე ყარანგოზიშვილი (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის XII კლასელი). საქართველოს ოლიმპიური ნაკრების ფორმირება მოხდა ოთხი შესარჩევი ტურის შედეგების საფუძველზე. შესარჩევ წრეებს ადმინისტრირებას უწევდა შოთა რუსთაველის სახელობის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი. მკაცრად რეგლამენტირებულ 4-ტურიან წერით გამოცდებში მონაწილეობის უფლება კი მოიპოვეს რესპუბლიკური სასკოლო მათემატიკური ოლიმპიადის დასკვნითი ტურის შედეგებზე დაყრდნობით გამოვლენილმა 21-მა საუკეთესო მოსწავლემ. მათ შორის იყო თორმეტი მეთერთმეტე–მეთორმეტე კლასელი და 9 მეათე კლასელი. შესარჩევი წრების საფუძველზე დაკომპლექტდა 6-მოსწავლიანი ნაკრები.

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების დაკომპლექტების შემდეგ ერთთვიანი საწვრთნელი შეკრება ჩატარდა კომაროვის სკოლაში ყოველდღიური 6-საათიანი მეცადინეობებით. ბოლო ეტაპზე კი ეროვნულმა სამეცნიერო ფონდმა უზრუნველყო ნაკრების წევრების ერთკვირიანი წვრთნები ბაკურიანში, სადაც მოსწავლეებს უტარდებოდათ სატრენინგო წრეები საერთაშორისო ოლიმპიადების პირობების გათვალისწინებით.

გუნდის ლიდერის, თანალიდერის და ასისტენტის გარდა მოსწავლეთა მომზადებაში ასევე მონაწილეობდნენ გამოცდილი ყოფილი ოლიმპიელები: ზაურ მეშველიანი, გიორგი გონაშვილი, ლერი ბანცური და გელა მაღალთაძე.

საერთაშორისო ოლიმპიადას ხელმძღვანელობს ჟიური, რომლის წევრები არიან ქვეყნების წარმომადგენლები. ჟიურის შეკრება ჩატარდა ქალაქ ჰონგკონგში, სადაც ჟიურიმ სხდომებზე რამდენიმე ათეული ამოცანიდან (short list) შეარჩია 6 ამოცანა, რომლებიც გადანაწილდა 3-3 ამოცანად და მიეცათ მოსწავლეებს ორ ტურად, ზედიზედ ორ დღეს.

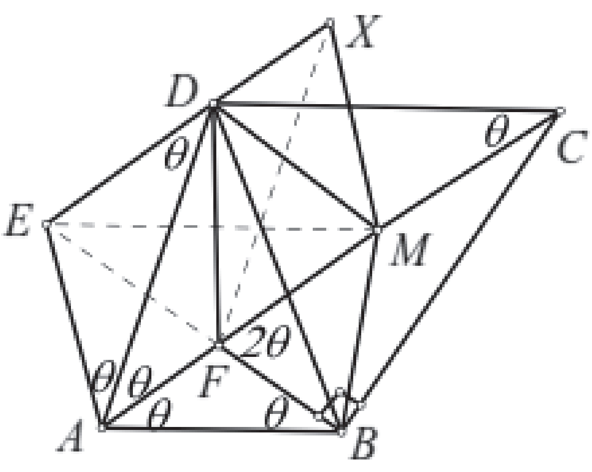
საქართველოს ნაკრები გუნდი ქალაქ ჰონგკონგში ჩავიდა 8 ივლისს. 9 ივლისს გახსნის საზეიმო ცერემონიალი შედგა, ხოლო გამოცდები ჩატარდა 10 და 11 ივლისს. შემდეგ დღეებში კი ჟიურის წევრებმა კოორდინატორებთან ერთად მოახდინეს ნაწერების შეფასება და ქულების შეჯა-

მება. შედეგად ჩვენმა ხუთმა მოსწავლემ ჯილდო დაიმსახურა: ალექსანდრე საათაშვილმა (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის XI კლასელი) დაიმსახურა ბრინჯაოს მედალი, ხოლო დავით ბეჟანიშვილი (თბილისის ი. ვეკუას სახელობის 42-ე სკოლის XII კლასელი), საბა ლეფსვერიძე (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის X კლასელი), ბაკურ ცუცხაშვილი (ქუთაისის რაზმაძის სახელობის სკოლა-პანსიონის XII კლასელი) და ელენე ყარანგოზიშვილი (თბილისის კომაროვის სკოლა-პანსიონის XII კლასელი) დაჯილდოვდნენ საპატიო სიგელებით. ვუსურვოთ ჩვენს ნორჩ ოლიმპიელებს შემდგომი წარმატებები.

ქვემოთ მოვიყვანთ იმ ამოცანებს, რომლებიც მიეცათ მოსწავლეებს წერებზე:

ამოცანა 1. სამკუთხედ BCF-ში კუთხე B მართია. ვთქვათ A არის წერტილი CF წრფეზე ისეთი, რომ $FA = FB$ და F ძევს A და C-ს შორის. D წერტილი შერჩეულია ისე, რომ $DA = DC$ და AC არის $\angle DAB$ კუთხის ბისექტრისა. E წერტილი შერჩეულია ისე, რომ $EA = ED$ და AD არის $\angle EAC$ კუთხის ბისექტრისა. ვთქვათ M არის CF-ის შუაწერტილი. ვთქვათ X არის ისეთი წერტილი, რომ $AMXE$ პარალელოგრამია ($AM \| EX$ და $AE \| MX$). დაამტკიცეთ, რომ BD, FX და ME წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში.

ამოხსნა: ამოცანის პირობიდან ადვილად ვღებულობთ შემდეგი კუთხეების ტოლობას, რომლებიც ნახაზზე θ-ია აღნიშნული. გვაქვს $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ მაშინ $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AD}$ რადგანაც



$\angle BAC = \theta = \angle FAD$, ვღებულობთ $\Delta ABC \sim \Delta AFD$. მაშინ $\angle AFD = \angle ABC = 90^\circ + \theta = 180^\circ \,\square\, \angle AED/2$. ამრიგად F არის წრეწირზე, რომლის ცენტრია E და რადიუსია EA ანუ $EF = EA = ED$ და $\angle EFA = \angle AED = 2\theta = \angle BFC$. ამრიგად B, F და E წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ. ასევე $\angle EDA = \angle MAD$ და ამიტომ $ED \| AM$. ე.ი. E, D და X ასევე კოლინეარულია. რადგანაც M არის CF-ის შუაწერტილი და $\angle CBF = 90^\circ$, ვღებულობთ $MF = MB$ ვინაიდან $\angle EFA = \angle MFB$ და $AF = BF$ ამიტომ EFA და MFB ტოლფერდა სამკუთხედები ერთმანეთის ტოლია. ე.ი. $BM = AE = XM$ და $BE = BF + FE = AF + FM = EX$. ამრიგად EMB და EMX სამკუთხედები ტოლია. რადგანაც F და D შესაბამისად ძევს EB და EX-ზე და $EF = ED$ ამიტომ BD და XF სიმეტრიულები არიან EM-ის მიმართ. აქედან კი ვღებულობთ, რომ BD, FX და ME წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოცანა 2. იპოვეთ ყველა მთელი დადებითი რიცხვი n, რომლისთვისაც $n \times n$ დაფის თითოეულ უჯრაში შეგვიძლია ჩავწეროთ I, M და O ასოები ისე, რომ თითოეულ უჯრაში ეწეროს ერთი ასო და:

- ყოველ სტრიქონში და ყოველ სვეტში, ზუსტად მესამედი იყოს ასო I, ზუსტად მესამედი იყოს ასო M და ზუსტად მესამედი იყოს ასო O; და
- ყოველ დიაგონალში, რომლის უჯრების რაოდენობაც სამის ჯერადია, ზუსტად მესამედი იყოს ასო I, ზუსტად მესამედი იყოს ასო M და ზუსტად მესამედი იყოს ასო O.

შენიშვნა: თუ $n \times n$-ზე დაფის სტრიქონებსა და სვეტებს გადავნომრავთ ბუნებრივი რიგით რიცხვებით $1, 2, \ldots, n$, მაშინ თითოეულ უჯრას შეესაბამება დადებით მთელ რიცხვთა (i,j) წყვილი, $1 \le i,j \le n$. როცა $n > 1$ დაფას გააჩნია $4n - 2$ ცალი ორი ტიპის დიაგონალი. პირველი ტიპის დიაგონალი შედგება ყველა იმ (i,j) უჯრისგან, რომელთათვისაც $i + j$ მუდმივი სიდიდეა, ხოლო მეორე ტიპის დიაგონალი შედგება ყველა იმ (i,j) უჯრისგან, რომელთათვისაც $i - j$ მუდმივი სიდიდეა.

ამოხსნა: მოვიყვანოთ ცხრილის სასურველი შევსების მაგალითი როცა $n = 9$:

$$\begin{pmatrix} I & I & I & M & M & M & O & O & O \\ M & M & M & O & O & O & I & I & I \\ O & O & O & I & I & I & M & M & M \\ I & I & I & M & M & M & O & O & O \\ M & M & M & O & O & O & I & I & I \\ O & O & O & I & I & I & M & M & M \\ I & I & I & M & M & M & O & O & O \\ M & M & M & O & O & O & I & I & I \\ O & O & O & I & I & I & M & M & M \end{pmatrix}$$

როცა $n = 9m$ ჩვენ შეგვიძლია დავყოთ $n \times n$ დაფა $m \times m$ ბლოკებად და თითოეულ ბლოკში გა-

მოვიყვანოთ ზემოთ მოყვანილი კონსტრუქცია.

ვთქვათ ახლა $n \times n$ დაფა აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, ანუ შესაძლებელია მისი შევსება ისე, როგორც ამოცანის პირობაშია მოცემული. ცხადია n იყოფა 3-ზე ანუ $n = 3k$. დავყოთ $n{\times}n$ ცხრილი $k{\times}k$ ბლოკებად, ანუ თითოეული ბლოკი $3{\times}3$ ცხრილისგან შედგება. დავარქვათ $3{\times}3$ ცხრილის ყოველ ცენტრალურ უჯრას კარგი და დავარქვათ სტრიქონს, სვეტს და დიაგონალს კარგი თუ ის შეიცავს კარგ უჯრას. ახლა დავთვალოთ (L, c) დალაგებულ წყვილთა რაოდენობა, აღვნიშნოთ იგი N-ით,სადაც L არის კარგი წრფე, ხოლო c არის L წრფის უჯრა რომელშიც წერია ასო M. დავთვალოთ N სიდიდე ორნაირად. ერთის მხრივ, ამოცანის პირობის ძალით ყოველ კარგ სტრიქონში და ყოველ კარგ სვეტში გვაქვს ზუსტად k ცალი M. პირველი ტიპის კარგ დიაგონალებში M-ების საერთო რაოდენობაა $1 + 2 + \ldots + (k - 1) + k + (k - 1) + \ldots + 2 + 1 = k^2$. ცხადია მეორე ტიპის კარგ დიაგონალებშიც M-ების საერთო რაოდენობაა იქნება k^2. ვინაიდან სულ გვაქვს ზუსტად k ცალი კარგი სტრიქონი და ზუსტად k ცალი კარგი სვეტი ამიტომ ვღებულობთ რომ $N = 4\,k^2$. მეორეს მხრივ, მთელ დაფაზე M-ის საერთო რაოდენობა არის $3\,k^2$. შევნიშნოთ, რომ ყოველი ასეთი უჯრა ეკუთვნის ზუსტად 1 ან 4 კარგ ხაზს. ე. ი. გვაქვს $N \equiv 3k^2(mod3)$. ანუ $4k^2 \equiv 3k^2(mod3)$. საიდანაც ვღებულობთ, რომ k იყოფა 3-ზე, ანუ $n = 9m$. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: 9-ის ჯერადი ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვი.

ამოცანა 3. ვთქვათ $P = A_1A_2 \ldots A_k$ სიბრტყეზე მდებარე ამოზნექილი მრავალკუთხედია. ცნობილია, რომ $A_1A_2 \ldots A_k$ წვეროები მდებარეობენ ერთ წრეწირზე და მათი კოორდინატები მთელი რიცხვებია. ვთქვათ S არის P-ს ფართობი. მოცემულია მთელი დადებითი კენტი რიცხვი n ისეთი, რომ P-ს ყოველი გვერდის სიგრძის კვადრატი მთელი რიცხვია, რომელიც იყოფა n-ზე. დაამტკიცეთ, რომ $2S$ არის მთელი რიცხვი, რომელიც იყოფა n-ზე.

ამოხსნა: გავიხსენოთ პიკის ფორმულა, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: თუ საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემული გვაქვს მარტივი მრავალკუთხედი, რომლის ყოველი წვეროს კოორდინატები მთელი რიცხვებია, მაშინ მისი ფართობი გამოისახება შემდეგნაირად $S = I + \frac{B}{2} - 1$, სადაც I არის იმ წერტილთა რაოდენობა რომლის ორივე კოორდინატი მთელი რიცხვია და წარმოადგენენ მრავალკუთხედის შიგა წერტილებს, ხოლო B არის იმ წერტილთა რაოდენობა, რომლის ორივე კოორდინატი მთელია და იმყოფებიან პოლიგონის საზღვარზე. ამ ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ $2S$ მთელი რიცხვია. ახლა დავამტკიცოთ, რომ $2S$ იყოფა n-ზე. ცხადია საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა $n = p^t$, სადაც p მარტივი რიცხვია და $t \geq 1$. ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ წრეწირში ჩახაზულია სამკუთხედი, რომლის წვეროს კოორდინატები რაციონალური რიცხვებია, მაშინ წრეწირის ცენტრის კოორდინატებიც რაციონალური რიცხვები იქნება. ამრიგად, ყველა კოორდინატის ერთსა და იმავე მთელ რიცხვზე გამრავლებით შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას, რომ წრეწირის O ცენტრის კოორდინატები მთელი რიცხვები იყოს, რომელიც შეგვიძლია დავძრათ კოორდინატთა სათავეში. (ამ გარდაქმნით მრავალკუთხედის როგორც ფართობი ასევე თითოეული გვერდის სიგრძის კვადრატი იზრდება m^2-ჯერ, სადაც m რაღაც მთელი რიცხვია, ასე რომ თუ დავამტკიცებთ წინადადებას ასეთი გარდაქმნით მიღებული მრავალკუთხედისთვის, მაშინ წინადადება მართებული იქნება აგრეთვე თავდაპირველი მრავალკუთხედისთვისაც). შეგვიძლია ვიგულისხმოთ არსებობს ისეთი i, რომ x_i და y_i ორივე ერთდროულად არ იყოფა pp-ზე. (თუ ყოველი i-თვის x_i და y_i ორივე ერთდროულად იყოფა p-ზე, მაშინ გავყოთ ყოველი კოორდინატი p-ზე, ამით კვლავ გვერდის სიგრძის კვადრატი და ფართობი შემცირდება p^2-ჯერ, და თუ წინადადებას დავამტკიცებთ შეკუმშული მრავალკუთხედისთვის, მაშინ ის მართებული იქნება თავდაპირველი მრავალკუთხედისთვისაც). დავამტკიცოთ ორი ლემა.

ლემა1. ვთქვათ ABC სამკუთხედის წვეროს კოორდინატები მთელი რიცხვებია, ხოლო ფართობი არის S. ვთქვათ $n|AB^2$ და $n|BC^2$. მაშინ $n|2S$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $n|AC^2$.

დამტკიცება: გვაქვს $2S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$ და $AC^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = AB^2 + BC^2$ □ $2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \equiv -2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\ (modn)$

აქ $\times$ და $\cdot$ ოპერაციები აღნიშნავენ შესაბამისად ვექტორთა ვექტორულ და სკალარულ ნამრავლებს. განსაზღვრების თანახმად

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{BC}|^2 sin^2\angle ABC + |\overrightarrow{BA}|^2 |\overrightarrow{BC}|^2 cos^2\angle ABC.$$

ამიტომ

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}|^2 = AB^2BC^2 \equiv 0(modn^2),$$

რის შემდეგაც ლემა1 ცხადია.

ლემა 2. ვთქვათ Δ აღნიშნავს $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ სამკუთხედის ფართობის გაორკეცებულ ნამრავლს, ხოლო i ისეთია, რომლისთვისაც x_i და y_i ერთდროულად არ იყოფა p-ზე. მაშინ p^t ყოფს Δ-ს.

დამტკიცება: დავუშვათ წინააღმდეგობა და p^t არ ყოფს Δ-ს. შევნიშნოთ რომ O არის შუამართო-

ბების გადაკვეთის წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} \cdot \overrightarrow{A_iO} = \frac{1}{2} A_iA_{i+1}^2 \\ \overrightarrow{A_iA_{i-1}} \cdot \overrightarrow{A_iO} = \frac{1}{2} A_iA_{i-1}^2 \end{cases}.$$

ვთქვათ $\overrightarrow{A_tA_{t+1}} = (a_1, b_1)$, $\overrightarrow{A_tA_{t-1}} = (a_2, b_2)$, $\frac{1}{2}A_iA_{i+1}{}^2 = c$ და $\frac{1}{2}A_iA_{i-1}{}^2 = d$. მაშინ $\Delta = |a_1b_2 - a_2b_1|$-ს, ხოლო $|x_i| = \frac{|da_1 - ca_2|}{\Delta}$ და $|y_i| = \frac{|da_1 - ca_2|}{\Delta}$. ამ ფორმულებიდან ცხადია, რომ თუ p^t არ ყოფს $\Delta = |a_1b_2 - a_2b_1|$ -ს,მაშინ x_i, y_i იყოფა p-ზე, ანუ ვღებულობთ წინააღმდეგობას. ლემა 2 დამტკიცებულია.

დავუბრუნდეთ ამოცანის ამოხსნას. განვიხილოთ ისეთი i, რომ x_i და y_i ორივე ერთდროულად არ იყოფა p-ზე. ლემა 2-ის გამო $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ სამკუთხედის ფართობის გაორკეცებულ ნამრავლი იყოფა $n = p^t$-ზე. მოვაშოროთ წვერო A_i. მივიღებთ $k - 1$ კუთხა მრავალკუთხედს. ლემა 1-ის ძალით $A_{i-1}A_{i+1}$ გვერდის სიგრძის კვადრატიც იყოფა n-ზე. ანუ კვლავ სრულდება ამოცანის ყველა პირობა. მარტივი ინდუქციის გამოყენებით ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ამოცანა 4. დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლეს ეწოდება კარგი თუ ის შეიცავს ორ ელემენტს მაინც და ამ სიმრავლის ყოველ ელემენტს აქვს საერთო მარტივი გამყოფი ერთ სხვა ელემენტთან მაინც მოცემული სიმრავლიდან. ვთქვათ $P(n) = n^2 + n + 1$. იპოვეთ უმცირესი მთელი დადებითი რიცხვი b, რომლისთვისაც არსებობს არაუარყოფითი მთელი რიცხვი a ისეთი, რომ $\{P(a+1\}, P(a+2), ..., P(a+b)\}$ არის კარგი სიმრავლე.

ამოხსნა: ადვილი შესამოწმებელია, რომ ადგილილი აქვს შემდეგ ფაქტებს:

1. $\gcd(P(n), P(n+1)) = 1$ ყოველი n-თვის;
2. $\gcd(P(n), P(n+2)) = 1$ როცა $n \not\equiv 2(mod 7)$;
3. $\gcd(P(n), P(n+2)) = 7$ როცა $n \equiv 2(mod 7)$;
4. $\gcd(P(n), P(n+3)) = 1$ როცა $n \not\equiv 1(mod 3)$;
5. $3|\gcd(P(n), P(n+3))$ როცა $n \equiv 1(mod 3)$.

ვთქვათ არსებობს ხუთ ელემენტიანი კარგი სიმრავლე $\{P(a), P(a+1), P(a+2), P(a+3), P(a+4)\}$. ფაქტი1-ის გამო $P(a + 2)$ არის თანამარტივი $P(a + 1)$-თან და $P(a + 3)$-თან.

ვთქვათ $\gcd(P(a), P(a+2)) > 1$. ფაქტი 3-ის გამო $a \equiv 2(mod 7)$; ფაქტი 2-დან გვაქვს, $\gcd(P(a + 1), P(a + 3)) = 1$. ვინაიდან სიმრავლე უნდა იყოს კარგი ამიტომ $\gcd(P(a), P(a + 3))$ და $\gcd(P(a + 1), P(a + 4))$ უნდა იყოს მეტი 1-ზე. ფაქტი 4 და 5-ის გამო ეს სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა a და $a + 1 \equiv 1(mod 3)$, რაც ცხადია შეუძლებელია. ვთქვათ ახლა $\gcd(P(a), P(a + 2)) = 1$. მაშინ ფაქტი 1-ის გამო $P(a + 2)$ შეიძლება არ იყოს თანამარტივი მხოლოდ $P(a + 4)$-თან. ე.ი. 3-დან გვაქვს $a \equiv 0(mod 7)$. ისევ 3-ის გამო $\gcd(P(a + 1), P(a + 3)) = 1$ ამიტომ უნდა გვქონდეს $\gcd(P(a+1), P(a+4)) > 1$, რაც 4 და 5-ის გამო გვაძლევს $a \equiv 0(mod 3)$. მაშინ ისევ 4 და 5 ის გამო $\gcd(P(a), P(a + 3)) = 1$ და ვღებულობთ, რომ $P(a + 3)$ თანამარტივია $\{P(a), P(a + 1), P(a + 2), P(a + 4)\}$ სიმრავლის თითოეულ ელემენტთან. ამრიგად ვაჩვენეთ, რომ არ არსებობს ხუთ ელემენტიანი კარგი სიმრავლე, ანუ $b \geq 6$.

იმისათვის, რომ ავაგოთ 6 ელემენტიანი კარგი სიმრავლე, გამოვიყენოთ ჩინური თეორემა ნაშთების შესახებ, რომლის საშუალებითაც ვიპოვოთ შემდეგი სისტემის

$$\begin{cases} a \equiv 7 \pmod{19} \\ a + 1 \equiv 2 \pmod{7} \\ a + 2 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

ერთ-ერთი ამონახსენი, მაგალითად $a = 197$. ფაქტი 3-ის გამო $P(a + 1)$ და $P(a + 3)$ იყოფა 7-ზე. ფაქტი 5-დან, $P(a+2)$ და $P(a+5)$ იყოფა 3-ზე. რადგანაც $19|P(7) = 57$ და $19|P(11) = 133$ ადვილია იმის შემოწმება, რომ $19|P(a) = P(190 + 7)$ და $19|P(a + 4) = P(190 + 11)$. ე.ი. $\{P(a), P(a + 1), P(a + 2), P(a + 3), P(a + 4), P(a + 5)\}$ არის კარგი სიმრავლე. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: $b = 6$.

ამოცანა 5. დაფაზე წერია განტოლება

$$(x - 1)(x - 2) \ldots (x - 2016) = (x - 1)(x - 2) \ldots (x - 2016),$$

რომელშიც ტოლობის თითოეულ მხარეს 2016 ცალი წრფივი მამრავლია. იპოვეთ k-ს უმცირესი შესაძლო მნიშვნელობა, რომლისთვისაც შეგვიძლია წავშალოთ ზუსტად k ცალი წრფივი მამრავლი ამ 4032 ცალი წრფივი მამრავლიდან ისე, რომ ტოლობის თითოეულ მხარეს დაგვრჩეს ერთი მაინც წრფივი მამრავლი და მიღებულ განტოლებას არ ჰქონდეს ნამდვილი ამონახსნი.

ამოხსნა: ვთქვათ წავშალეთ 2016-ზე ნაკლები საერთო მამრავლი. ვინაიდან ტოლობის ორივე მხარეს წერია 2016 ცალი საერთო მამრავლი, ამიტომ იარსებებს ერთი მაინც საერთო მამრავლი $(x - i)$, რომელიც განტოლების ორივე მხარეს წერია. მაშინ ცხადია $x = i$ იქნება განტოლების ნამდვილი ფესვი. ამრიგად ვღებულობთ, რომ $k \geq 2016$. ვაჩვენოთ, რომ $k = 2016$. ამისათვის განტოლების მარცხენა მხარეში წავშალოთ ყველა მამრავლი

$(x-k)$, სადაც $k \equiv 2, 3(mod 4)$, ხოლო მარჯვენა მხარეში ყველა მამრავლი $(x-k)$, სადაც $k \equiv 0,1(mod 4)$. დავამტკიცოთ, რომ მიღებულ

$$\prod_{j=0}^{503}(x-4j-1)(x-4j-4) = \prod_{j=0}^{503}(x-4j-2)(x-4j-3) \qquad (*)$$

განტოლებას არ აქვს ნამდვილი ფესვი. x-ის შესაძლო მნიშვნელობები დავყოთ 4 ტიპად:

1) $x = 1, 2, ..., 2016$.

ამ შემთხვევაში (*) ის ერთ-ერთი მხარე ნულია, ხოლო მეორე არა. ე.ი. არც ერთი ასეთი x არ წარმოადგენს (*)-ის ამონახსნს.

2) $4k+1 < x < 4k+2$ ან $4k+3 < x < 4k+4$ რომელიმე $k = 0, 1,..., 503$.

როცა $k = 0, 1,..., 503$ და $j \neq k$, ნამრავლი $(x - 4j - 1)(x - 4j - 4)$ დადებითია, ხოლო როცა $j = k$ ნამრავლი $(x - 4j - 1)(x - 4j - 4)$ უარყოფითია. ეს ნიშნავს, რომ (*) მარცხენა მხარე უარყოფითი რიცხვია. მეორეს მხრივ ტოლობის მარჯვენა მხარის ყოველი მამრავლი $(x - 4j - 2)(x - 4j - 3)$ დადებითია. ანუ არცერთი ასეთი x არ წარმოადგენს (*)-ის ამონახსნს.

3) $x < 1$ ან $x > 2016$ ან $4k < x < 4k + 1$ რომელიმე $k = 0, 1,..., 503$. (*) განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$1=\prod_{j=0}^{503}\frac{(x-4j-1)(x-4j-4)}{(x-4j-2)(x-4j-3)}=\prod_{j=0}^{503}\left(1-\frac{2}{(x-4j-2)(x-4j-3)}\right).$$

შევნიშნოთ, რომ $(x - 4j - 2)(x - 4j - 3) > 2$, როცა $0 \le j \le 503$. ამრიგად, ყოველი თანამამრავლი $1-\frac{2}{(x-4j-2)(x-4j-3)}$ მკაცრად ნაკლებია 1-ზე. ეს კი ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაშიც არცერთი x არ წარმოადგენს (*)-ის ამონახსნს.

4) $4k+2 < x < 4k+3$ რომელიმე $k = 0, 1,..., 503$. ამ შემთხვევაში გადავწეროთ (*) შემდეგნაირად

$$1=\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x-2016}{x-2015}\cdot\prod_{j=0}^{503}\frac{(x-4j)(x-4j-1)}{(x-4j+1)(x-4j-2)}=$$
$$=\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x-2016}{x-2015}\cdot\prod_{j=0}^{503}\left(1+\frac{2}{(x-4j+1)(x-4j-2)}\right)$$

ცხადია $\frac{x-1}{x-2}$ და $\frac{x-2016}{x-2015}$ ორივე მკაცრად მეტია 1-ზე. ასევე ცხადია, რომ თუ x ეკუთვნის მითითებულ ინტერვალს , მაშინ ყოველი თანამამრავლი $\left(1+\frac{2}{(x-4j+1)(x-4j-2)}\right)$ მკაცრად მეტია 1-ზე, ანუ მთლიანად მარჯვენა მხარე მკაცრად მეტია 1-ზე. ე.ი. ამ შემთხვევაშიც არ გვაქვს (*) განტოლების ამონახსენი. ამრიგად ვაჩვენეთ, რომ $k = 2016$.

პასუხი: 2016

ამოცანა 6. სიბრტყეზე მოცემულია $n \ge 2$ ცალი წრფის მონაკვეთი ისე, რომ ყოველი ორი მონაკვეთი იკვეთება მათ შიგა წერტილში და არც ერთ სამ მონაკვეთს საერთო წერტილი არ აქვს. საბა ირჩევს ყოველი მონაკვეთის ერთ-ერთ ბოლოს და სვამს იქ ბაყაყს სახით მონაკვეთის მეორე ბოლოსკენ. შემდეგ ის $n - 1$-ჯერ ურტყამს ხელის გულებს ერთმანეთს, ანუ $n - 1$-ჯერ უკრავს ტაშს. ყოველი ტაშის შემდეგ ყოველი ბაყაყი მაშინვე ხტება წინ მისი მონაკვეთის უახლოეს გადაკვეთის წერტილზე. ბაყაყები არასდროს იცვლიან ხტომის მიმართულებას. საბას სურს განალაგოს ბაყაყები ისე, რომ არც ერთი ორი მათგანი არასდროს არ მოხვდეს გადაკვეთის წერტილში ერთდროულად.

ა) დაამტკიცეთ, რომ საბა ყოველთვის განახორციელებს თავის სურვილს თუ n კენტია.

ბ) დაამტკიცეთ, რომ საბა ვერასდროს განახორციელებს თავის სურვილს, თუ n ლუწია.

ამოხსნა: განვიხილოთ წრე, რომელიც შეიცავს ყველა სეგმენტს. გადავნომროთ მონაკვეთები ნებისმიერად და აღვნიშნოთ k-ური მონაკვეთის შემცველი წრფე l_k-თი და ვთქვათ A_k და B_k არის ამ წრფისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილები.

ა) ვთქვათ n კენტია. დავიწყოთ მოძრაობა წრეწირის გასწვრივ (მაგალითად საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით) და წრფეებისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილებზე დავსვათ მონაცვლეობით „+“ და „–“ ნიშნები. ვინაიდან ყოველი მონაკვეთი ერთმანეთს კვეთს წრეწირის შიგნით, ამიტომ A_k და B_k წერტილებს შორის (l_k წრფის ცალ მხარეს) არის ზუსტად $n-1$ ცალი გადაკვეთის წერტილი, ანუ ლუწი რაოდენობა. ეს ნიშნავს, რომ თუ A_k წერტილზე წერია „+“ მაშინ B_k-ზე წერია „–“, და თუ A_k-ზე წერია „–“, მაშინ B_k -ზე წერია „+“. ვაჩვენოთ, რომ თუ საბამ ყოველ მონაკვეთზე დასვა ბაყაყი მის იმ ბოლოზე, რომელიც უფრო ახლოსაა „+“ ნიშანთან, მაშინ ბაყაყები რომლებიც იმყოფებიან l_i და l_j წრფეებზეარასდროს შეხვდებიან ერთმანეთს, ყოველი i, j წყვილისთვის. ამით ა) პუნქტი დამტკიცებული იქნება. ცხადია, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ბაყაყები იმყოფებიან და იწყებენ ხტუნვას წრეწირზე მდებარე A_i და A_j წერტილებიდან. ვთქვათ l_i და l_j წრფეების გადაკვეთის წერტილია P. ამრიგად უნდა ვაჩვენოთ, რომ ეს ორი ბაყაყი ერთდროულად ვერ მოხვდება P წერტილში. შევნიშნოთ, რომ $arcA_iA_j$ რკალზე გვაქვს კენტი რაოდენობის გადაკვეთის წერტილები ($arcA_iA_j$ აღნიშნავს იმ რკალს,

რომლის სიგრძეც ნაკლებია ნახევარწრეწირის სიგრძეზე). ასევე შევნიშნოთ, რომ $arcA_iA_j$ რკალში მდებარე ყოველი წერტილი ეკუთვნის წრფეს, რომელიც კვეთს მხოლოდ ერთ სეგმენტს A_iP და A_jP სეგმენტებიდან. დანარჩენი წრფეებისთვის კი გვაქვს შემდეგი: ისინი ან არ კვეთენ არც A_iP და არც A_jP სეგმენტებს, ან კვეთენ ორივე მათგანს. ამრიგად, A_iP და A_jP სეგმენტებთან წრფეების გადაკვეთის წერტილთა საერთო რაოდენობა არის კენტი. ახლა, თუ დავუშვებთ, რომ A_i და A_j ბოლოებზე მყოფი ბაყაყები ერთდროულად მოხვდებიან P წერტილზე, მივიღებთ რომ ეს რაოდენობა არის ლუწი, ანუ წინააღმდეგობას. ამით ა) -ს დამტკიცება დასრულდება.

დავუშვათ, რომ A_i და A_j წერტილებზე მჯდომი ბაყაყები ერთდროულად მოხვდნენ P წერტილში. ეს ნიშნავს, რომ მათ უნდა გააკეთეს ერთი და იგივე რაოდენობის გადახტომა სანამ მიაღწევენ P წერტილს. ეს კი ნიშნავს, რომ A_iP და A_jP სეგმენტებზე გვაქვს თანაბარი რაოდენობის გადაკვეთის წერტილები (P-ს გარდა), ანუ ლუწი რაოდენობა. ა)-ს დამტკიცება დასრულებულია.

ბ) ვთქვათ n ლუწია. განვიხილოთ ბაყაყების ნებისმიერი განლაგება მონაკვეთის ბოლოებზე. განვიხილოთ წრეწირისა და წრფის გადაკვეთის ის წერტილი რომელიც უფრო ახლოსაა ბაყაყთან და დავსვათ იქ „+" ნიშანი. შესაბამისად წრფისა და წრეწირის მეორე გადაკვეთის წერტილზე დავსვათ „–" ნიშანი. ვინაიდან n ლუწია, ამიტომ მოიძებნება ორი მეზობელი წერტილი წრეწირზე, ვთქვათ A_i და A_j, რომლებზეც მონიშნულია „+" ნიშანი. ვთქვათ კვლავ P აღნიშნავს A_iB_i და A_jB_j მონაკვეთის გადაკვეთის წერტილებს. ცხადია, რომ თუ წრფე კვეთს A_iP და A_jP სეგმენტებიდან ერთერთს, მაშინ ის კვეთს მეორესაც. ამრიგად A_iP და A_jP მონაკვეთზე მდებარე გადაკვეთის წერტილების რაოდენობა ერთი და იგივეა. ეს კი ნიშნავს, რომ l_i და l_j წრფეებზე მყოფი ბაყაყები ერთდროულად მოხვდებიან P წერტილში. ბ)-ს დამტკიცება დასრულებულია.

ავტორების ელექტრონული მისამართები:
giorgi.chelidze@tsu.ge
givi.nadibaidze@tsu.ge

„გმადლობთ პროფესორო“ – 2016

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტზე უკვე ტრადიციად იქცა კურსდამთავრებულთა გამოსაშვები ღონისძიება „გმადლობთ პროფესორო“, რომელიც დატვირთული სასწავლო წლის ბოლოს ტარდება. ვინაიდან 2016 წელი იუნესკოს მიერ რუსთაველის საიუბილეო წელიწადად იყო გამოცხადებული, სტუდენტთა ღირშესანიშნავ მიღწევებს ლაიტმოტივად გასდევდა „ვეფხისტყაოსნის“ აფორიზმები.

საღამოს უძღვებოდნენ კომპიუტერულ მეცნიერებათა დეპარტამენტის სტუდენტი ირინა ებანოიძე და ფიზიკის დეპარტამენტის სტუდენტი ირაკლი მანთიძე.

სცენაზე მისალმებებითა და საკონცერტო ნომრებით ერთმანეთს ენაცვლებოდნენ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სხვადასხვა დეპარტამენტის წარმომადგენლები.

მაყურებლის წინაშე პირველი წარსდგა ბიოლოგიის დეპარტამენტი, რომელიც წარჩინებული სტუდენტების რაოდენობით პირველ ადგილზეა ფაკულტეტზე. გამოყენებითი ბიომეცნიერებებისა და ბიოტექნოლოგიის საბაკალავრო პროგრამის წარჩინებული სტუდენტი ნათია ტეფნაძე განსაკუთრებით შეეხო მარიამ მიქაძის, გია ქუთელიას, მარიამ ჯაჯანიძის სამეცნიერო მიღწევებს და მადლობა გადაუხადა პროფესორებს, რომელთა დამსახურებითაც იქნა მიღწეული ეს წარმატებები.

ბიოლოგიის დეპარტამანტის ხელმძღვანელმა დიანა ძიძიგურმა და პროფესორმა ნანული დოლრეულმა სიამაყით აღნიშნეს წლევანდელი კურსდამთავრებულების მიერ შესრულებული საბაკალავრო ნაშრომების მაღალი დონე.

ქიმიის დეპარტამენტის წარჩინებულმა სტუდენტმა მარი-ლუიზა კონჯარიამ დამსწრეებს შეთავაზა საინტერესო პრეზენტაცია – „2012-2016 წწ თსუ ქიმიკოსების“ მიღწევებსა და ბოლოო ზარის შესახებ – ნათია ქარჩავა აზიის მე-7 სამეცნიერო ბანაკის მონაწილე და 75-ე საუნივერსიტეტო კონფერენციის გამარჯვებული გახლავთ. თავად მარი-ლუიზა მონაწილეობდა აზიის მე-8 სამეცნიერო ბანაკში, დასახელდა საუკეთესო პოსტერის ავტორად საქართველოში ჩატარებულ 26-ე საერთაშორისო სიმპოზიუმზე ფარმაცევტულ და ბიოსამედიცინო ანალიზებში. გერმანიაში მივლინებით იყვნენ ლია ბეჟიტაშვილი და ანა ბარდაველიძე, საფრანგეთში – მარი-ლუიზა კონჯარია და ნათია შაშვიშვილი.

გასული წლის კურსდამთავრებულები განებივრებულნი იყვნენ ქიმიის დეპარტამენტის პროფესორის რამაზ გახოკიძის მუსიკალური ნომრებით. ბატონი რამაზმა წელსაც დამოძღვრა სტუდენტები, გაიხსენა მისი ავტორობით შექმნილი უნივერსიტეტის ჰიმნის აღიარება დიდი რევაზ ლაღიძის მიერ და რადგან ეს დღე კომპოზიტორის დაბადების დღეს დაემთხვა, რევაზ ლაღიძის უკვდავი მელოდიების პოპურიც ააჟღერა ფორტეპიანოზე.

ამაღელვებელი იყო გეოგრაფიის დეპარტამენტის წარჩინებული სტუდენტის სოფიკო ხატიაშვილის სიტყვები - „მინდა მადლობა გადავუხადო ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტს იმ ოთხი დაუვიწყარი წლისთვის, რომელიც მე აქ გავატარე. ვთვლი, რომ დავამთავარე საუკეთესო უნივერსიტეტი. ეს დღე არის ერთ-ერთი გამორჩეული და საუკეთესო ჩემს ცხოვრებაში. დღე, რომელიც მუდამ მემახსოვრება“

ირაკლი ავქოფაშვილმა წარმოადგინა გეოლოგიის დეპარტამენტი და ძვირფას პროფესორებს მადლობა მოახსენა უნივერსიტეტში გატარებული ნაყოფიერი წლებისთვის. კურსდამთავრებულებს მიესალმნენ და წინსვლა-წარმატებები უსურვეს ემერიტუს პროფესორმა გურამ ღონღაძემ და პედაგოგმა ივანე ჯაფარიძემ.

„საპატიო გეოლოგის“ გია ყანჩელის „ყვითელი ფოთლებით“ მიესალმნენ დამსწრეებს გეოლოგიის მიმართულების სტუდენტი თამთა მუმლაძე და მისი მეგობარი თინათინ ლომიძე.

მაყურებელი ეკრანზე ფუნდამენტურ მეცნიერებებში 2014 წლის ქართულ-გერმანული სკოლა-სემინარის კადრებს ადევნებდა თვალს, და თან ტაშით ესალმებოდა კომპიუტერული მეცნიერებების დეპარტამენტის გამორჩეულ სტუდენტებს - ფაკულტეტის ყველა საბაკალავრო პროგრამის წარმატებულ კურსდამთავრებულებს შორის 4-ის ტოლი GPA მქონე 4 სტუდენტს - რატი დევიძეს, ნათია დოლიაშვილს, მანანა ლორთქიფანიძეს და გიორგი ძამაშვილს.

წარმატებებით ფუნქციონირებს ფაკულტეტზე ქართულ–ფრანგული საბაკალავრო პროგრამაც. წლევანდელი კურსამთავრებულებიდან სოფიას ტექნიკურ უნივერსიტეტში ერთთვიანი სტაჟირება გაიარა ალექსანდრე აბრამიშვილმა, პარიზის უნივერსიტეტში - სოფი ავჟანტაძემ, რომელმაც ასევე გაიმარჯვა ფრანკოფონიაში ჩატარებულ

კონკურსში და საფრანგეთში გაემგზავრება.

მცირერიცხოვანი, მაგრამ ძალიან პერსპექტიულია ელექტრული და ელექტრონული ინჟინერიის დეპარტამენტი. სტუდენტები სტაჟირებას გადიოდნენ სამხედრო სამეცნიერო-ტექნიკურ ცენტრ „დელტაში“. ამ საბაკალავრო პროგრამისადმი ინტერესი თანდათან მატულობს სან დიეგოს სახელმწიფო უნივერსიტეტი-საქართველოს საბაკალავრო პროგრამების ამოქმედების შემდეგ. ამ პროგრამების სტუდენტთა სახელით მაყურებელს სცენიდან მიესალმა თსუ სტუდენტი თაკო ბასიაშვილი.

მათემატიკის დეპარტამენტის კურსდამთავრებულების წარდგენის პატივი წილად ხვდა წარჩინებულ სტუდენტს მარიამ ლობჯანიძეს. ვორქშოპები და პროექტები, გაცვლითი პროგრამები, პრეზიდენტის სახელმწიფო სტიპენდიები მუდამ მათემატიკოსი სტუდენტების სიმრავლით გამოირჩეოდა. ქართულ–გერმანული სკოლა–სემინარის ეკრანულ პრეზენტაციაშიც მრავლად იყვნენ მათემატიკოსი სტუდენტები მაკა ლაბაძე, ანა დოლიძე, ნოდარ გიკაშვილი, ქეთევან კახიძე, ქეთევან გომიაშვილი....

აღსანიშნავია, რომ მაგისტრანტი ციცინო ტეფნაძე ესტატე ხმალაძის სტიპენდიანტი გახდა. დოქტორანტებსაც წარმატებული წელი ჰქონდათ – სამი ახალგაზრდა დოქტორი შეემატა მეცნიერთა რიგს - მიულოცეს ნინა დანელიას, მაია ნიკოლიშვილს, გიორგი ტეფნაძეს და მათ სამეცნიერო ხელმძღვანელებს წარმატებული წელი.

პროფესორების სახელით სტუდენტებს მიესალმნენ მათემატიკის დეპარტამენტის ხელმძღვანელი ბატონი ომარ ფურთუხია და ბატონი არჩილ ყიფიანი.

ფიზიკის დეპარტამენტს წელს წარჩინებით ამთავრებენ საღამოს წამყვანი ირაკლი მანთიძე, ცოტნე შენგელია, რევაზ ბერაძე, გიორგი პოპოვი, ალექსანდრე ბარნაველი და 2012 წლის აბიტურიენტებს შორის და დღემდეც ყველაზე მაღალი სკალირებული ქულის მქონე მერაბ მალიშავა. სტუდენტთა მიღწევები წარმოაჩინა ალექსანდრე ბარნაველის პრეზენტაციამ. აღსანიშნავია, რომ შვილიშვილის წარმატებებს დარბაზიდან ადევნებდა თვალს ფიზიკის ინსტიტუტის კოსმოსური სხივების ფიზიკის განყოფილების უფროსი მეცნიერ-თანამშრომელი, ვასილ ბარნოვის შვილიშვილი, ბატონი თენგიზ ბარნაველი.

ფიზიკის დეპარტამენტის სახელით კურსდამთავრებულებს მიესალმა პროფესორი ნანა შათაშვილი. ბატონი თეიმურაზ ნადარეიშვილი ტრადიციულად საკუთარი შემოქმედებით წარსდგა სცენაზე, ამჯერად მცირე პროზაული ნაწარმოებებით.

კურსდამთავრებულებთან ერთად დარბაზში იყვნენ მათი ოჯახის წევრები – მშობლები, და–ძმები, მოწვეული სტუმრები. სპეციალურად მათ მიეძღვნა პროფესორ ნანული დორეულის ქალიშვილის პატარა მარიამის სოლო შესრულება ვიოლინოზე და მაყურებლის თხოვნით შეასრულებული აკაპელა „შენ ხარ ვენახი“.

საღამოზე კურსდამთავრებულებმა კიდევ ერთხელ დიდი მადლობა გადაუხადეს პროფესორებს, ადმინისტრაციას, მომსახურე პერსონალს - ყველას, ვისთანაც უშუალოდ მოუწიათ ურთიერთობა ამ 4 წლის განმავლობაში. იყო ტკივილიანი გახსენებაც და ბოდიშის სიტყვებიც, თბილი მილოცვა იუბილართა მისამართით და მისალმება ახლადშექმნილი სტუდენტური ოჯახებისადმი.

ძველი კადრებით წამყვანებმა სტუდენტებს გაახსენეს მათი პირველი დღეები უნივერსიტეტში - კონსულტაციები ტუტორებთან, შეხვედრები საბაკალავრო პროგრამის ხელმძღვანელებთან, დეკანთან, პირველი ლექციები.... წლევანდელი კურსდამთავრებულების ბაკალავრიატში სწავ-

ლის დრო პროფესორ რამაზ ბოჭორიშვილი დეკანობის პერიოდს დაემთხვა. ბატონმა რამაზმა თბილი სიტყვით მიმართა კურსდამთავრებულებს, დარბაზში მყოფებმა სტუდენტებმა და პროფესორებმა ტაშით გადაუხადეს მას მადლობა.

ბატონი რამაზ ხომერიკის თბილისში არ ყოფნის გამო, ფაკულტეტის დეკანის მისასალმებელი სიტყვა კურსდამთავრებულებს დეკანის მოადგილემ, ქალბატონმა თამარ ჭელიძემ გააცნო. საღამოს წამყვანებმა და დამსწრეებმა წარმატებული მოღვაწეობა უსურვეს ბატონ რამაზს დეკანის პოზიციაზე.

საღამო მხატვრულ-მუსიკალური გაფორმებითაც იყო გამორჩეული. შეხვედრა სტუდენტების - სალომე პაქსაშვილის, რობინა ტიტვინიძის და მერი კიკალიშვილის ულამაზესი „სამაიათი“ გაიხსნა და ნინო არჩვაძისა და თორნიკე კაჭიურის ცეკვა „ქართულით“ დაიხურა. ნინომ და თორნიკემ ასევე შეასრულეს ემოციური „ტანგო“. ბიოლოგიის დეპარტამენტის წარჩინებული პირველკურსელები მარიამ გოლიაძე, ია ბიჩინაშვილი მაყურებლებს მიესალმნენ სიმღერით „ქარი გიმღერის ნანასა“. დაუვიწყარი იყო გეოგრაფი ვალერი ქასოევის გიტარაზე შესრულებული ლირიული სიმღერები, ანსამბლ “უნივერსიტეტის“ შეხმატკბილებული გამოსვლები ჩვენი ქიმიკოსი გოგონების მონაწილეობით, კომპიუტერული მეცნიერებათა დეპარტამენტის სტუდენტების ანა ფეიქრიშვილისა და ქეთი მეიფარინის საფორტეპიანო ნომრები.

საოპერო შესრულებით აღაფრთოვანეს მაყურებლები კომპიუტერული მეცნიერების დეპარტამენტის სტუდენტმა ნინი წიკლაურმა (შუბერტი, „ავე მარია“) და ბიოლოგიის დეპარტამენტის სტუდენტმა ანი იმედაშვილმა (ჯაკომო პუჩინი, „O Mio Babbino Caro“). აღსანიშნავია, რომ დარბაზში იმყოფებოდა ანის მამა, ზაქარია ფალიაშვილის სახ. ოპერისა და ბალეტის თეატრის სოლისტი ბატონი ლევგი იმედაშვილი.

როგორც საღამოზე აღინიშნა, თითოეულ კურსდამთავრებულს მოენატრება უნივერსიტეტში გატარებული პერიოდი, საინტერესო ლექციები, პროფესიონალი პედაგოგები...

დაუვიწყარი დღის ბოლოს მონაწილეებმა სამახსოვრო ფოტოები გადაიღეს.

მასალა მოამზადეს:
თინათინ დავითაშვილმა და
ნინო ტყეშელაშვილმა

მათემატიკური ჭიდილი

9-11 დეკემბერს ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სტუდენტური თვითმმართველობის განათლებისა და მეცნიერების დეპარტამენტის ორგანიზებით გაიმართა „მათემატიკური ჭიდილი“. პროექტი ჩატარდა ორ ეტაპად, იგი მიზნად ისახავდა სტუდენტთა ცოდნის გაღრმავებას. ჭიდილში მონაწილეობდა 6 გუნდი. ორივე ეტაპი მოიცავდა გუნდის მიერ ამოცანის მათემატიკურ ანალიზს და ლოგიკური მსჯელობით მისი ამოხსნის ჩამოყალიბებას, ასევე მოწინააღმდეგე გუნდის ოპონირებას. ჟიურიმ გამოავლინა 2 ფინალისტი.

პროექტს დიდი გამოხმაურება და დაინტერესება მოჰყვა არამარტო მათემატიკის მიმართულებაზე, არამედ მასში მონაწილეობა მიიღეს ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სხვადასხვა მიმართულებების სტუდენტებმა.

სტუდენტები სამეცნიერო პროექტში

2012 წელს პროფ. უ. გოგინავას ხელმძღვანელობით მაშინ ჯერ კიდევ დოქტორანტ გ. ტეფნაძის და მათემატიკის საბაკალავრო პროგრამის მეორე კურსის სტუდენტების - ც. ტეფნაძე, ლ. ბარამიძე, გ. შავარდენიძე და მ. თოთლაძის მონაწილეობით ჩამოყალიბდა მოქმედი სემინარი **ორობით ანალიზში**. მოკლე პერიოდში სტუდენტების მიერ გამოქვეყნებული იქნა 5 სამეცნიერო ნაშრომი, მათ შორის იმპაქტ-ფაქტორიან ჟურნალებში, ხოლო გ. ტეფნაძის მიერ გამოქვეყნებული იქნა 20-მდე სამეცნიერო ნაშრომი სხვადასხვა მაღალრეიტინგულ იმპაქტ-ფაქტორიან ჟურნალებში. მიღწეულმა წარმატებებმა მოამზადა საფუძველი იმისათვის, რომ სტუდენტთა ჯგუფი ჩართულიყო მიზნობრივ სამეცნიერო პროექტში თემაზე „**ფურიე-ვილენკინის მწკრივების კრებადობა და შეჯამებადობა**“.

პროექტის ფარგლებში სტუდენტებმა ლ. ბარამიძემ, ც. ტეფნაძემ, გ. შავარდენიძემ და მ.თოთლაძემ მონაწილეობა მიიღეს სხვადასხვა საერთაშორისო სამეცნიერო ფორუმის მუშაობაში. კერძოდ, 2014 წლის 25-28 სექტემბერს სომხეთის ქალაქ წახკაძორში ჩატარდა ქართულ-სომხური ვორკშოპი ნამდვილ ანალიზში, სადაც მოხსენება მოხსენებით გამოვიდნენ თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის საბაკალავრო პროგრამის სტუდენტები ლ. ბარამიძე, ც. ტეფნაძე, გ. შავარდენიძე, მ. თოთლაძე და დოქტორანტი გ. ტეფნაძე; 2015 წლის 30 მაისიდან 5 ივნისამდე ნირეგიჰაზას (უნგრეთი) მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ინსტიტუტში ჩატარდა ქართულ-უნგრული ვორკშოპი ფურიეს ანალიზში, სადაც ზემოხსენებულმა სტუდენტებმა კვლავ წარმოადგინეს მოხსენებები, ხოლო 2016 წლის 3-8 აპრილს ჩატარდა ქართულ-სერბული ვორკშოპი „ორობითი ანალიზი და მისი გამოყენება“. ქართველი სტუდენტები აქაც გამოვიდნენ მოხსენებებით.

ზამთრის სკოლა: „მიკრო და ნანო-სტრუქტურების კვლევის მეთოდები“

2016 წლის 31 იანვრიდან 9 თებერვლამდე შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის დაფინანსებითა და მხარდაჭერით სიღნაღში ჩატარდა ზამთრის სკოლა: „მიკრო და ნანო სტრუქტურების კვლევის მეთოდები“. სკოლაში ლექციებს კითხულობდნენ თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორები: თამარ ჭელიძე (ხელმძღვანელი), რამაზ ბოჭორიშვილი, თამაზ კერესელიძე, ალექსანდრე შენგელაია; დრეზდენის ტექნოლოგიური უნივერსიტეტის მეცნიერ-თანამშრომელი, დოქტორი თეიმურაზ მჭედლიძე და დოქტორი ზურაბ გუგუჩია.

სკოლა განკუთვნილი იყო საქართველოს სასწავლო დაწესებულებების ფიზიკის, მათემატიკის, კომპიუტერული მეცნიერებების, ელექტრონიკის და ქიმიის საბაკალავრო პროგრამების მაღალი სემესტრების და მაგისტრატურის სტუდენტებისათვის და მიზნად ისახავდა მიეცა მათთვის საბაზისო ცოდნა ნანო და მიკრო სტრუქტურების კვლევაში გამოყენებული თანამედროვე მეთოდების შესახებ. სტუდენტების შერჩევა მოხდა კონკურსის საფუძველზე. შერჩევის ძირითადი კრიტერიუმია იყო მაღალი GPA. სკოლის მუშაობაში 30-მდე სტუდენტი მონაწილეობდა. მათ შორის იყვნენ თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის საბაკალავრო პროგრამის სტუდენტები გიორგი ბაკურაძე, ელენე გაბელაია, ანანო ბასილაია, მარიამ ამინაშვილი, გიორგი სვანაძე; ფიზიკოსები მერაბ მალიშავა, ირაკლი მანთიძე, ბაჩანა ბერაძე, ცოტნე გამსახურდაშვილი და სხვები.

ზამთრის სკოლაში წარმოდგენილი იყო მასალების კვლევის ექსპერიმენტული, თეორიული და რიცხვითი მოდელირების მეთოდები. სკოლის მსმენელებმა მოისმინეს ლექციები, მათ ჩაუტარდათ პრაქტიკული მეცადინეობები, ვირტუალური და რეალური ექსპერიმენტები. დღეში დაგეგმილი იყო 4 საკონტაქტო საათი, დანარჩენი დრო კი დაეთმო სტუდენტების დამოუკიდებელ (ინდივიდუალურ და ჯგუფურ) მუშაობას. სტუდენტებს ეძლეოდათ საშინაო დავალებები. გარკვეულ საკითხების შესწავლისათვის მათ მიეცათ ჯგუფური პროექტები. ამასთან ჯგუფები შედგენილი იყო სხვადასხვა სპეციალობის სტუდენტებისგან, რაც მათ საკითხის გადაწყვეტისადმი მრავალმხრივი მიდგომის საშუალებას აძლევდათ. განსაკუთრებული ყურადღება დაეთმო პრაქტიკული უნარჩვევების გამომუშავებას. აქცენტი კეთდებოდა ამოცანების და პროექტების ამოხსნაზე და შესრულებაზე.

სკოლამ ხელი შეუწყო სტუდენტების ჩართვას თანამედროვე ინტერდისციპლინურ კვლევებში.

ზამთრის სკოლის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა ასევე იყო სტუდენტებისთვის მიეცა საჭირო ინფორმაცია და ცოდნა, რომელიც მათ კარიერის სწორად დაგეგმისთვის გამოადგებოდათ. ამ მიზნით ჩატარდა მრგვალი მაგიდა, სადაც მეცნიერებმა სტუდენტებს გაუზიარეს თავიანთი გამოცდილება. სკოლის ფორმატიდან გამომდინარე მოხდა ერთი მხრივ საქართველოს სხვადასხვა უნივერსიტეტის პროფესორებს და უცხოელი სპეციალისტებს, მეორე მხრივ სტუდენტებს შორის მჭიდრო სამეცნიერო კავშირის დამყარება და საერთო ინტერესების განსაზღვრა.

სეზონური სკოლა "გარემოს (ატმოსფეროს) მონიტორინგის ქიმიური და მათემატიკური ასპექტები"

2016 წლის 11-15 სექტემბერს შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდისა და იულიხის (გერმანია) კვლევითი ცენტრის მხარდაჭერით ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ჩატარდა სეზონური სკოლა "გარემოს (ატმოსფეროს) მონიტორინგის ქიმიური და მათემატიკური ასპექტები". სკოლას ხელმძღვანელობდა იყო ფიზიკური და ანალიზური ქიმიის კათედრის გამგე, პროფესირი ბეჟან ჭანკვეტაძე, ხოლო თანახელმძღვანელი იყო IEK-8 ინსტიტუტის დირექტორი, თსუ საპატიო დოქტორი, პროფესორი ანდრეას ვანერი.

ლექციები წაიკითხეს ადგილობრივმა პროფესორ-მასწავლებლებმა და მოწვეულმა სპეციალისტებმა იულიხის კვლევითი ცენტრის ენერგიებისა და კლიმატის ინსტიტუტიდან (IEK-8). დამატებით ლექციები წაიკითხეს სან-დიეგოს სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორებმა ელიზაბეტ დინსდეილიმ და უილიამ ტონგმა.

სეზონური სკოლაზე დარეგისტრირდა 70-მდე სტუდენტიდა ახალგაზრდა მეცნიერი, როგორც თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტიდან, ასევე სხვა უმაღლესი სასწავლებლებიდან. მათემატიკის მიმართულებიდან სკოლის მუშაობაში მონაწილეობა მიიღეს გიორგი ბაკურაძემ, ანანო ბასილაიამ, ელენე გაბელაიამ, გიორგი სვანაძემ, მართა მელიამ, ანა დოლიძემ, ფიზიკოსებმა ბაჩანა ბერაძემ, ცოტნე გამსახურდაშვილმა, კომპიუტერული მეცნიერებიდან - ნინო ბუქურმა და სხვებმა.

სეზონური სკოლის ფარგლებში ახალგაზრდა ქართველი მეცნიერები და სტუდენტები გაეცნენ ატმოსფეროს კვლევის, მონიტორინგის, მოდელირების და კონტროლის თანამედროვე მეთოდებს, მიღწევებს და ტენდენციებს, აგრეთვე მოხდა საქართველოში ამ მიმართულებით მომუშავე ახალგაზრდა მეცნიერების ურთიერთგაცნობა და მათი ძალისხმევის კონსოლიდაცია ჩვენს ქვეყანაში არსებული პროფესიული და მატერიალური რესურსის ეფექტური გამოყენების თვალსაზრისით. მნიშვნელოვანი იყო ქართველ მეცნიერებსა და გერმანელ სპეციალისტებს შორის ახალი პროფესიული ურთიერთობების ჩამოყალიბება და არსებული თანამშრომლობის გაღრმავება-გაფართოება.

მათემატიკა

წინა ნომრებში წარმიგიდგინეთ მათემატიკის სპეციალობის კურსდამთავრებულები, რომლებიც წარმატებით აგრძელებენ მეცნიერულ მუშაობას მათემატიკაში. ჩვენთან მიღებული მათემატიკური განათლება ბევრ ჩვენს კურსდამთავრებულს ეხმარება წარმატებით გააგრძელონ მოღვაწეობა სხვა სფეროებში. ჟურნალის ამ ნომერში ზოგიერთ მათგანს წარმოგიდგენთ

ლევან ვეფხვაძე

ი. ვეკუას სახელობის 42-ე ფიზიკა-მათემატიკური სკოლის დამთავრების შემდეგ, 1991 წელს ჩავირიცხე ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თსუ მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე. 1993-1994 წლებში ვიყავი სოროსის ფონდის სტიპენდიანტი. 1994 წელს კი სტუდენტთა სამეცნიერო კონფერენციაში გავიმარჯვე, რისთვისაც განსაკუთრებულად მადლიერი ვარ აწ განსვენებული პროფესორის დავით გორდეზიანის მიმართ, რომლმაც ჩემში სამეცნიერო კვლევების მიმართ განსაკუთრებული ინტერესი აღძრა და, შემდგომ, უზარმაზარი წვლილი შეიტანა ამ წარმატებაში. 1995 წელს ამირჩიეს სტუდენტთა თვითმმართველობის - თსუ სტუდენტთა და ასპირანტთა კავშირის პრეზიდენტად, რომელსაც 2 წლის განმავლობაში ვუხელმძღვანელე. 1996 წელს წარჩინებით დავასრულე სწავლა გამოთვლითი მათემატიკის სპეციალობით. სწავლის დასრულებისას წარმატებით დავიცავი სადიპლომო ნაშრომი პროფესორ რამაზ ბოჭორიშვილის ხელმძღვანელობით.

ახალგაზრდულ პოლიტიკაში აქტიურობის შედეგად, 1998 წელს იმჟამინდელმა პარლამენტის თავმჯდომარემ ზურაბ ჟვანიამ შემომთავაზა საქართველოს მოქალაქეთა კავშირის პრესსამსახურის ხელმძღვანელობა. მიუხედავად იმისა, რომ ეს სფერო საკმაოდ შორს იყო ჩემი აკადემიური განათლებისგან, მაინც დავთანხმდი შემოთავაზებას, რადგან ჟურნალისტებთან ურთიერთობა ძალიან დინამიურ და საინტერესო საქმიანობად მესახებოდა. ეს იყო ის თანამდებობა, რომელმაც განსაზღვრა ჩემი შემდგომი ჟურნალისტური კარიერა. მიუხედავად იმისა, რომ 2000-2004 წლებში მაინც ვინარჩუნებდი კავშირს გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტთან, სადაც ვიყავი ეგმ ჯგუფის უფროსი მათემატიკოსი და მიმყავდა პრაქტიკული ლექციების კურსი თსუ ფიზიკის ფაკულტეტზე მათემატიკურ ფიზიკაში, დავიწყე მუშაობა საზოგადოებრივი მაუწყებლის გადაცემა „რას ფიქრობს ხალხის“ პროდუსერად, ხოლო 2002 წელს ტელეკომპანია „მზე“-ს საინფორმაციო გამოშვებაში გავაგრძელე საქმიანობა.

2003 წლის შემოდგომიდან 2007 წლის ბოლომდე კი ვიყავი ტელეკომპანია „იმედი“-ს საკვირაო გადაცემის „დროება“-ს მთავარი პროდუსერი. შეიძლება ითქვას, რომ ჩემი მათემატიკური განათლება ერთ ერთი მნიშვნელოვანი ფაქტორი გახდა სატელევიზიო სივრცეში გამორჩეულად მაღალრეიტინგული ტელეპროდუქციის დაგეგმვასა და წარმოებისას. გადაცემის მომზადება ნაწილობრივ დაფუძნებული იყო აუდიტორიასთან უკუკავშირის მიდგომაზე, ანუ სიუჟეტების ანალიზი წარმოებდა ყოველწუთიერი ყურებადობის გრაფიკების შეფასებით, რაც იძლეოდა ტელემაყურებელთა ინტერესის სწორი პროგნოზის კეთების შესაძლებლობას.

ცნობილი პოლიტიკური მოვლენების შემდეგ, 2008 წლის მაისში გავხდი საქართველოს პარლამენტის წევრი, ხოლო 2008 წლის ივლისიდან ამირჩიეს საქართველოს პარლამენტის თავმჯდომარის მოადგილედ.

2012 საპარლამენტო არჩევნები შემდეგ, ვიღებ გადაწყვეტილებას დავტოვო პოლიტიკა და მივემგზავრები დიდ ბრიტანეთში, სადაც 2014-2016 წლებში გლაზგოს სტრატკლაიდის უნივერსიტეტში წარმატებით გავიარე ორი სამაგისტრო პროგრამა გლობალური ენერგო მენეჯმენტსა და რაოდენობრივ ფინანსებში. აღსანიშნავია, რომ სტრატკლაიდის უნივერსიტეტი ერთ-ერთი გამორჩეული უნივერსიტეტია შოტლანდიურ უნივერსიტეტებს შორის თანამედროვე ტექნოლოგიებზე დაფუძნებული სწავლებისა და კვლევების გამო. შოტლანდიაში ყოფნისას მქონდა შესაძლებლობა, მემუშავა ისეთ მულტინაციონალურ კომპანიებთან, როგორიცაა „შევრონი" და „PwC". გარდა ამისა, ვიმუშავე მოკლევადიან პროექტებზე აბერდინის სავაჭრო პალატასა და ფრაიზერ ალანდერის ინსტიტუტში, რომელიც ამზადებს ეკონომიკური პოლიტიკის ძირითად დოკუმენტებს ადგილობრივი მთავრობისთვის, ყველაზე ცნობილი კვლევითი ინსტიტუტია შოტლანდიაში.

2016 წლის სექტემბერში კვლავ დავბრუნდი საქართველოში. ამჟამად ვარ საქართველოს ინდუსტრიული ჯგუფის დირექტორთა საბჭოს წევრი და ვასრულებ სტრატეგიულ საკითხებში გენერალური დირექტორის მრჩევლის მოვალეობას.

ჩემი მრავალფეროვანი საქმიანი გამოცდილების ნებისმიერ ეტაპზე ვგრძნობდი იმ ცოდნას და უნარებს, რაც თავის დროზე თსუ მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე მივიღე. ლოგიკური აზროვნების უნარი, მათემატიკური მიდგომებით საქმიანობის სწორი ანალიზი და შემდგომი გადაწყვეტილების ამ ანალიზზე დაფუძნება - ამ ფაკულტეტის კურსდამთავრებულთა ის შესაძლებლობაა, რომელიც თანამედროვე შრომის ბაზარზე რეალურ კონკურენტულ უპირატესობას წარმოადგენს

ირაკლი კოვზანაძე

1984 წელს წარჩინებით დავამთავრე თსუ მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი მათემატიკოსის სპეციალობით. 1884-1987 წლებში ვიყავი თსუ ალგებრა-გეომეტრიის კათედრის ასპირანტი. ჩემი სამეცნიერო ხელმძღვანელი იყო პროფესორი ლაზარე ზამბახიძე, ხოლო კათედრის გამგე - აკადემიკოსი გიორგი ჭოღოშვილი. 1990 წელს დავიცავი საკანდიდატო დისერტაცია და მომენიჭა ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხი. 1988-1991 წლებში ვიყავი მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის უფროსი ლაბორანტი, უფროსი მასწავლებელი, ხოლო 1991 წლიდან 2003 წლამდე – დოცენტი.

1995 წელს ასევე წარჩინებით დავამთავრე თსუ ეკონომიკის ფაკულტეტი ფინანსებისა და კრედიტის სპეციალობით. 2002 წელს დავიცავი სადოქტორო დისერტაცია და მომენიჭა ეკონომიკის მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხი. 2004 წლიდან ვარ თსუ პროფესორი, ხოლო 2006 წლიდან თსუ ეკონომიკისა და ბიზნესის ფაკულტეტის ფინანსებისა და საბანკო საქმის კათედრის სრული პროფესორი და კათედრის გამგე.

2016 წლიდან ვარ საქართველოს IX მოწვევის პარლამენტის წევრი, საფინანსო-საბიუჯეტო კომიტეტის თავმჯდომარე.

1993 წლიდან დღემდე ვმუშაობ საქართველოს, პოსტსაბჭოთა სივრცის ქვეყნების და ევროპის საბანკო-საფინანსო სექტორში სხვადასხვა მაღალ მენეჯერულ თანამდებობებზე.

მინდა აღვნიშნო მათემატიკის მიერ ჩემთვის მონიჭებული ის უპირატესობა ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბებისა და განვითარების სახით, რამაც უდიდესი როლი შეასრულა ჩემს შემდგომ პროფესიულ და სამეცნიერო საქმიანობაში: ეკონომიკურ მეცნიერებაში, საფინანსო თუ საჯარო სექტორებში. ვფიქრობ, თანამედროვე ეკონომიკის და ფინანსების ფუნდამენტური შესწავლა და მათში წარმატებული საქმიანობა შეუძლებელია საფუძვლიანი მათემატიკური განათლების გარეშე.

გამოქვეყნებული მაქვს 6 მონოგრაფია (მათ შორის 3 საზღვარგარეთ), ერთი სახელმძღვანელო და 50-მდე სტატია ეკონომიკასა და მათემატიკაში, რომლებიც ძირითადად ეხება გლობალიზაციის პირობებში სისტემურ საბანკო კრიზისებს სხვადასხვა ქვეყნებში (მათ შორის გარდამავალი ეკონომიკის მქონე, ყოფილ საბჭოთა და აღმოსავლეთ ევროპის სოციალისტურ ქვეყნებში) და განვითარების ახალი ეკონომიკური მოდელის ფორმირების საკითხებს

ვახტანგი ფხაკაძე

ბიზნესმენ ვახტანგ ფხაკაძის შესახებ ქართულ პრესაში ბოლო პერიოდში ბევრი იწერება. მიმდინარე წლის ქართული „ფორბსის“ იანვრის ნომერმა მის საქმიანობას ვრცელი სტატია მიუძღვნა. იგი პროფესიით მათემატიკოსია – თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის კურსდამთავრებული.

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტი ვიყავი 1979-1984 წლებში. ფუნქციონალური ანალიზის სპეციალიზაციით შევასრულე სადიპლომო ნაშრომი ბატონ ვახტანგ ცაგარეიშვილის ხელმძღვანელობით. კათედრის გამგე აკადემიკოსი ლევან ჟიჟიაშვილი იყო. მადლობა მინდა გადავუხადო მშობლებს, რომლებმაც ყველაფერი გააკეთეს იმისათვის, რომ მათემატიკური განათლება მიმეღო და ბატონ ვახტანგს, რომელმაც ჩემს პიროვნებად ჩამოყალიბებაში მშობლებზე არაკლები როლი შეასრულა. აქვე მინდა გავიხსენო ფაკულტეტის პროფესორები და მასწავლებლები, მათი საქმისადმი კეთილსინდისიერი დამოკიდებულება დღემდე სამახსოვრო და სამაგალითოა ჩემთვის. მათემატიკის ფაკულტეტზე ჩამოყალიბდა ჩემი ძირითადი ფასეულობები. აქ იყო ჩვეულებრივისაგან განსხვავებული ურთიერთდამოკიდებულებათა გარემო და მუშაობის ატმოსფერო. მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე შეძენილ მეგობრებთან ერთად დავიწყე ბიზნეს-საქმიანობაც.

უნივერსიტეტის დამთავრების შემდეგ მუშაობა ელექტრო-ტექნიკური მოწყობილობების სამეცნიერო კვლევით ინსტიტუტში დავიწყე. 1986-87 წლებში, როდესაც დაიწყო „პერესტროიკა", მათემატიკის და ფიზიკის ფაკულტეტის კურსდამთავრებულ მეგობრებთან ერთად ჩამოვაყალიბეთ კოოპერატივი, სადაც ფიზიკურადაც კი ვშრომობდით ინსტიტუტში მუშაობის პარალელურად. ქვეყნისათვის მძიმე, გარდამავალ პერიოდში პირველი შემოსავლით შევქმენით სამუშაო ადგილები და დავიქირავეთ მუშახელი. ვამუშავებდით პლასტმასს და მისგან მცირე სამომხმარებლო ნივთებს ვამზადებდით.

90-იან წლებში ერთი ჩემი თანაკურსელი და მეგობარი საცხოვრებლად და სამუშაოდ საფრანგეთში გადავიდა. მოგვივიდა იდეა ფრანგული სუნამოს წარმოება დაგვეწყო. ამ დროს ჩემი კაპიტალი 1500 მანეთს შეადგენდა, მაგრამ დროთა განმავლობაში მრავალკომპონენტიანი წარმოება, ბოთლები იტალიიდან, სუნამო საფრანგეთში, გასაღების ბაზარი ყოფილი საბჭოთა კავშირის ქვეყნები, გავმართეთ. მიუხედავად ამ პირველი წარმატებისა, სერიოზული ბიზნესის საწარმოებლად საჭირო თანხამდე ბევრი გვაკლდა. დავუკავშირდით იმ დროისათვის ერთ-ერთ ყველაზე პოპულარული ბრენდის, „სალვადორ დალის“ მფლობელს ჟან პიერ გრეგორის, მან სალვადორ დალისთან ერთად შექმნა ეს ბრენდი. ბატონმა გრეგორიმ, რომელიც ამჟამად ჩვენი მეგობარია, თანამშრომლობის სურვილი გამოთქვა, შედეგად მისი ბრენდის დისტრიბუტორები გავხდით. ეს იყო ჩვენი ჯგუფის პირველი მნიშვნელოვანი ნაბიჯი დიდ ბიზნესში და აღიარება სერიოზული დასავლური კომპანიის მიერ, ამან კი განაპირობა სხვა მსხვილი პარფიუმერული კომპანიების ინტერესი ჩვენს მიმართ და თავის მხრივ, ჩვენი გადაწყვეტილება აგვერჩია ბიზნესის ეს სფერო.

ყოველთვის მქონდა სურვილი ჩემი საქმიანობა დაკავშირებული ყოფილიყო საქართველოსთან. თუ რაიმე წარმატებას მივაღწიე ამაში ხელი შემიწყო იმან, რომ ყოველთვის ვაკეთებდი იმ საქმეს, რაც მიყვარდა. სიყვარული კი შრომას მიადვილებდა და სასიამოვნოს ხდიდა, თავდაჯერებულობას კი პირველადი სპეციალობა მაძლევდა. ამჟამად ვარ „ლუტეცია ჯგუფის“ პრეზიდენტი საქართველოში, რომელიც აერთიანებს მაღაზიათა ქსელებს „ლუტეციას“ და „ივ როშეს", ბუტიკ „მაკ"-ის და ნიშ ბუტიკს „არომატეკას". ჩემს მიერაა დაფუძნებული მაღაზიათა ქსელები „კალცედონია“ და „ინტიმისიმი". მიხარია, რომ ჩემს სამშობლოში უყვართ „ლუტეცია ჯგუფის“ საქმიანობა და ვცდილობ არ გავაწბილო მეგობრები და მომხმარებელი.

საერთაშორისო რეიტინგებში თსუ-ს წარმატება

გია ავალიშვილი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი,
ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

თანამედროვე მსოფლიოში რანჟირება არის განათლების სფეროში უნივერსიტეტების შეფასების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი საშუალება. რეიტინგების მნიშვნელობა და გავრცელება სულ უფრო და უფრო იზრდება. რანჟირება უკვე გადაიქცა კომერციულ საქმიანობად, შესაბამისად დაიხვეწა და გაუმჯობესდა ამ მიმართლებით მოღვაწე კომპანიებისა და ორგანიზაცების საქმინობა, რომლებიც ადგენენ უნივერსიტეტების რეიტინგებს. ამჟამად, უმაღლესი საგანმანათლებლო დაწესებულების საერთაშორისო და ადგილობრივი რეიტინგები განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია სტუდენტების, აბიტურიენტების, მათი მშობლების, კერძო სექტორის წარმომადგენლების, სახელმწიფო სტრუქტურების და არასამთავრობო ორგანიზაციების საგანმანათლებლო დაწესებულების საქმიანობის ხარისხის შესახებ აზრის ფორმირებისათვის. ყოველწლიურად ინტერნეტში განთავსებული რეიტინგების ცხრილები აისახება მასობრივი კომუნიკაციის საშუალებებით და იზიდავენ სულ უფრო მეტ მნახველს, რაც ადასტურებს ამ ტიპის ინფორმაციისადმი ინტერესს და მის ღირებულებას ფართო და მზარდი აუდიტორიისათვის.

უნივერსიტეტების საერთაშორისო რეიტინგების სისტემების ფართო გავრცელება შედარებით ახალია და ითვლის რამოდენიმე ათწლეულს. აღნიშნული სისტემები წარმოიშვა იმ დროს, როდესაც უცხოეთში განათლების მიღების მსურველი სტუდენტების რაოდენობამ დაიწყო სწრაფად გაზრდა, რამაც წარმოქმნა სხვადასხვა ქვეყნის უნივერსიტეტების შედარების მოთხოვნილება. ამავე დროს, სულ უფრო და უფრო იზრდება სახელმწიფოების რაოდენობა, რომელთა მთავრობები და უნივერსიტეტები ეძებენ გზებს რათა გაიზარდოს მათი ავტორიტეტი საერთაშორისო უმაღლესი განათლების სისტემაში და დაინტერესბული არიან იმ მონაცემებით, რომლებიც შეიძლება დაეხმარონ მსოფლიო სტანდარტებთან შესაბამისობის დადგენაში.

აღსანიშნავია, რომ საუნივერსიტეტო რანჟირების გამოყენება დაიწყო გაცილებით ადრე ვიდრე მასზე გაჩნდებოდა ფართო მოთხოვნილება, ჯერ კიდევ კომპიუტერისა და ტელევიზორის გამოგონებამდე. პროფესორ დონალდ ჰიუზმა (Donald Hughes) 1925 წელს განახორციელა საბაკალავრო პროგრამების რანჟირება ამერიკის შეერთებული შტატების ინსტიტუტების მეცნიერთა აზრის შეჯერებით [1]. უნივერსიტეტების რანჟირების მიმართულებით ამერიკის შეერთებულ შტატებსა და ზოგიერთი ასპექტით აღმოსავლეთ აზიასაც ეკავათ მოწინავე პოზიცია, და განუწყვეტლივ ადგენდნენ ახალ სტანდარტებს და კრიტერიუმებს

წამყვანი უნივერსიტეტებისათვის. ევროპაში კი რანჟირება პოპულარული გახდა XX საუკუნის 60-იან წლებში უმაღლესი განათლების დივერსიფიკაციისას. შინის (Shin) და მისი კოლეგების მიერ [1] ნაშრომში გამოთქმული მოსაზრების მიხედვით შეიძლება გამოიყოს სამი ძირითადი ფაქტორი: მასობრიობა, საბაზრო მოთხოვნილებებზე ორიენტაცია და გლობალიზაცია, რომლებმაც შეცვალა უმაღლესი განათლება უნივერსიტეტების რანჟირების აუცილებლობის მიმართულებით.

გასული საუკუნის 60-იან წლებში თანასწორობის ახალმა ტალღამ წაშალა ელიტარულობის საზღვრები განათლებაში. პროფესიულ და პოლიტექნიკურ სასწავლებლებს და ადგილობრივ კოლეჯებს მიეცათ საშუალება მოეზიდათ უფრო მეტი სტუდენტი და ამიტომ მათ გააძლიერეს ძალისხმევა უნივერსიტეტების რანჟირების მაჩვენებლების გასაუმჯობესებლად. განვითარებად საბაზრო გარემოში სულ უფრო მნიშვნელოვანი გახდა უმაღლეს საგანმანათლებლო დაწესებულებებს შორის განსხვავების დადგენა. მრავალ ქვეყანაში უნივერსიტეტები გახდა მომგებიანი ბიზნესი, რომლისთვისაც რანჟირება იყო ისეთივე მნიშვნელოვანი, როგორც კერძო კომპანიისათვის საბაზრო წილის გაზრდა. გლობალური რანჟირების სისტემები წარმოიქმნა XX საუკუნის 90-იან წლებში და სწრაფად ვითარდება XXI საუკუნეში, რაც არსებითად არის განპირობებული გლობალიზაციით და ინტერნეტის განვითარებით. ამჟამად გლობალური რანჟირება წარმოადგენს სტუდენტებისა და სხვა დაინტერესებული პირებისათვის უნივერსიტეტების კლასიფიკაციის ერთ-ერთ ყველაზე გავრცელებულ მეთოდს.

უნივერსიტეტების რეიტინგების დადგენის სისტემები გასხვავდება ერთმანეთისაგან მეთოდოლოგიური მიდგომებით, რომლებიც ეყრდნობა სხვადასხვა მახასიათებლებს. ჩვენ მოკლედ შევეხებით ორ მათგანს: უნივერსიტეტების ვებ-რანჟირების სისტემას ანუ Webometrics (Ranking Web of Universities) და აკადემიური აქტივობით უნივერსიტეტების რანჟირების სისტემას ანუ URAP (University Ranking by Academic Performance), რომელთა რეიტინგულ სიებში თსუ-ს სტაბილური ადგილი უკავია.

რანჟირების Webometrics სისტემა [2] წარმოადგენს უმაღლესი საგანმანათლებლო დაწესებულებების აკადემიური რანჟირების ერთ-ერთ უმსხვილეს სისტემას. 2004 წლიდან დაწყებული ყოველ ექვს თვეში ერთხელ ესპანეთის კვლევის ეროვნული საბჭოს (Spanish National Research Council) კიბერმეტრიკის ლაბორატორია (Cybermetrics Lab) ახდენს მთელი მსოფლიოს უნივერსიტეტების საქმიანობის შესახებ დამოუკიდებელ, ობიექტურ, თავისუფალ და ღია სამეცნიერო კვლევას საიმედო, მრავალმხრივი, განახლებული და სასარგებლო ინფორმაციის მისაღებად საგანმანათლებლო დაწესებულებების ინტერნეტში განთავსებისა და პოპულარობის მიხედვით. კიბერმეტრიკის ლაბორატორია არ არის დაკავშირებული რომელიმე კომპანიას, გაზეთსა ან არასამთავრობო ორგანიზაციასთან. ამავე დროს, ის არ იღებს თანხებს უნივერსიტეტებიდან რანჟირების სიაში მოსახვედრად და არ სთავაზობს მათ სარეკლამო ბანერებს.

რანჟირების სისტემის შექმნამდე კიბერმეტრიკის ლაბორატორია გასული საუკუნის 90-იანი წლებიდან აწარმოებდა ინტერნეტში აკადემიური მასალების რაოდენობრივ შესწავლას. კვლევის შედეგები წარმოდგენილი იყო სამეცნიერო გაზომვების და ინფორმაციის გაზომვების საერთაშორისო საზოგადოების (International Society for Scientometrics and Informetrics) კონფერენციებზე (ISSI, 1995-2011) და სამეცნიერო და ტექნოლოგიური ინდიკატორების კონფერენციებზე (STI-ENID, 1996-2012), გამოქვეყნებული იყო მაღალი რეიტინგის მქონე ჟურნალებში, კერძოდ, Journal of Informetrics, Journal of the American Society for Information Science and Technology, Scientometrics, Journal of Information Science, Information Processing & Management, Research Evaluation. 1997 წლიდან კიბერმეტრიკის ლაბორატორიამ გამოსცა ელექტრონული თავისუფალი წვდომის რეცენზირებადი ჟურნალი Cybermetrics, რომელიც ეძღვნება ინტერნეტში განთავსებულ მასალებზე დაფუძნებული მახასიათებლების მიღებასთან დაკავშირებული ნაშრომების გამოქვეყნებას. უმაღლესი საგანმანათლებლო დაწესებულებების აკადემიური აქტივობების შეფასების პირველი ინდიკატორი წარმოდგენილი იყო 1996 წელს ბილეფელდში (Bielefeld) ჩატარებულ კონფერენციაზე EASST/4S და 1999 წლიდან ევროკავშირის მიერ დაფინანსებული პროექტის EICSTES მხარდაჭერით დაიწყო ევროპული უნივერსიტეტებიდან ინტერნეტში განთავსებული მონაცემების შეგროვება. 2003 წელს შანჰაი იატონგის უნივერსიტეტის (Shanghai Jiatong University) მიერ ნოვატორული მსოფლიო უნივერსიტეტების აკადემიური რანჟირების (Academic Ranking of World Universities - ARWU) გამოქვეყნების შემდეგ კიბერმეტრიკის ლაბორატორიამ გადაწყვიტა გაეზიარებინა რანჟირების სისტემის ახალი ინოვაციური მიდგომები და აეგო რანჟირების სისტემა, რომელიც დაეყრდნობოდა საყოველთაოდ მისაწვდომ ინტერნეტში განთავსებულ მონაცემებს, ცვლადების კომბინირებით მიღებულ ინდიკატორს და ექნებოდა გლობალური დაფარვა. პირველი გამოცემა გამოქვეყნებული იყო 2004 წელს და 2006 წლის შემდეგ გამოდის წელიწადში ორჯერ, ხოლო 2008 წლიდან მოიცავს აგრეთვე რანჟირებებს კვლევითი ცენტრებისათვის, ნაშრომების საცავებისათვის, საავადმყოფოებისა და ბიზნესის სკოლებისათვის.

რანჟირების Webometrics სისტემის თავდაპირველი მიზანი იყო აკადემიური დაწესებულებების ინტერნეტში წარმოდგენის გაუმჯობესება და

ამით ღია მისაწვდომობის (Open Access) ინიციატივის მხარდაჭერა, რომელიც მნიშვნელოვნად ზრდის უნივერსიტეტების მიერ შექმნილი სამეცნიერო და კულტურული ცოდნის გავრცელებას მთელ საზოგადოებაში. აკადემიურ საზოგადოებაში ცოდნის გაცვლის პროცესების დაწყებისა და გაერთიანების ერთ-ერთ მძლავრ და წარმატებულ საშუალებას წარმოადგენს რეიტინგების გამოქვეყნება, რაც ზრდის აკადემიური პერსონალის პასუხისმგებლობას და ხელს უწყობს აუცილებელი გრძელვადიანი სტრატეგიების შემუშავებას. რანჟირების მიზანი არ არის მნახველების რაოდენობის მიხედვით ვებსაიტების შეფასება, მათი დიზაინის, გამოყენებადობის ან მათი შინაარსის პოპულარობის თვალსაზრისით. ვებ-ინდიკატორები განიხილება, როგორც სანდო მახასიათებლები უნივერსიტეტების გლობალური წარმოჩენის კუთხით კორექტული, სრული და ღრმა შეფასებისათვის, რომლებიც ითვალისწინებენ დაწესებულებების აქტივობებს, მიღწეულ შედეგებს და მათ მნიშვნელობას და გავლენას. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ საიმედო რანჟირება შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა უნივერსიტეტის შესახებ ინტერნეტში განთავსებული ინფორმაცია რეალურად ასახავს მის საქმიანობას. უკანასკნელ წლებში ინფორმაციის ინტერნეტში განთავსება წარმოადგენს ყველა უნივერსიტეტის სამომავლო განვითარების ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს მიმართულებას, ვინაიდან ის უკვე წარმოადგენს აკადემიური თანამშრომლობის და დისტაციური სწავლების უმნიშვნელოვანეს საშუალებას, საზოგადოების კომუნიკაციის ღია ფორუმს და ნიჭიერი ახალგაზრდების, ფინანსური და სხვა რესურსების მოსაზიდად უნივერსიტეტების წარმოჩენის უნივერსალურ საშუალებას.

რანჟირების Webometrics სისტემა თითოეულ გამოცემაში აქვეყნებს უნივერსიტეტების მხოლოდ ერთ რანჟირებას. ინდიკატორების კომბინაცია წარმოადგენს საფუძვლიანი კვლევის შედეგს და არ არის ხელმისაწვდომი მომხმარებლების მიერ ინდივიდუალური შერჩევისათვის ამ მიმართულების სათანადო ცოდნისა და გამოცდილების გარეშე. ზოგიერთი რანჟირების სისტემა ერთი და იგივე მონაცემებზე დაყრდნობით აქვეყნებს საკმარისად განსხვავებულ რეიტინგებს, რაც ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება იყოს უსარგებლო და დამაბნეველი. რანჟირების აღნიშნული სისტემა მოიცავს მსოფლიოს თითქმის ყველა უნივერსიტეტს და არა მხოლოდ განვითარებული ქვეყნების რამოდენიმე ასეულ საგანმანათლებლო დაწესებულებას. რანჟირების Webometrics სისტემა უწყვეტად აწარმოებს კვლევას უკეთესი კლასიფიკაციის მისაღებად, ინდიკატორების ცვლილებით ან გამორიცხვით და წონების მოდელის მოდიფიცირებით. რანჟირების სისტემები, რომლებიც ეფუძნებიან ბიბლიომეტრულ ანუ მხოლოდ სამეცნიერო კვლევის მაჩვენებლებს ტენდენციურია ტექნოლოგიების, კომპიუტერული მეცნიერებების, სოციალური მეცნიერებების და ჰუმანიტარული დარგების მიმართ, რაც ხშირად შეადგენს მრავალპროფილიანი უნივერსიტეტის მეცნიერთა და სტუდენტთა ნახევარზე მეტს. რანჟირების Webometrics სისტემა არაპირდაპირი გზით ზომავს აგრეთვე უნივერსიტეტის სხვა აქტივობებს, კერძოდ, სწავლებას, ანუ ე.წ. მესამე მისიას, და ამისათვის ითვალისწინებს არა მხოლოდ უნივერსიტეტის აქტივობის სამეცნიერო მნიშვნელობას, არამედ ტექნოლოგიების წარმოებაში დანერგვის ეკონომიკურ მიზანშეწონილობას, საზოგადოებრივ ღირებულებას, კერძოდ, სოციალურ და კულტურულ მნიშვნელობას, ზემოქმედებას გარემოზე, და პოლიტიკურ გავლენასაც კი. სამეცნიერო შედეგების რანჟირების Webometrics სისტემა აგროვებს მონაცემებს პუბლიკაციების ციტირების ღია ბიბლიოგრაფიულ მონაცემთა ბაზიდან Google Scholar, რომელიც მოიცავს მთელი მსოფლიოს აკადემიური გამოცემების საკმარისად დიდ ნაწილს.

რანჟირების Webometrics სისტემა ეყრდნობა კავშირების ანალიზს (Link Analysis) ხარისხიანი შეფასებისათვის, რადგან ის უფრო ეფექტური მიდგომაა, ვიდრე ციტირების ანალიზი. ბიბლიომეტრული მაჩვენებლები ითვლის მხოლოდ ფორმალურ აღიარებას მკვლევარებს შორის, მაშინ როცა კავშირების ანალიზი ითვალისწინებს არა მხოლოდ ბიბლიოგრაფიულ ციტირებებს, არამედ მესამე მხარის ჩართულობას უნივერსიტეტის აქტივობებში. კვლევის შედეგების მასალები წარმოადენს რანჟირების Webometrics სისტემის ერთ-ერთ ძირითად მახასიათებელს, მაგრამ მოიცავს არა მხოლოდ ფორმალურ პუბლიკაციებს, როგორებიცაა გამოქვეყნებული ნაშრომები, აგრეთვე არაფორმალურ აკადემიურ კომუნიკაციას. ინტერნეტში გამოქვეყნება უფრო იაფია და ამავე დროს ინარჩუნებს რეცენზირების პროცესის მაღალ სტანდარტებს. შესაბამის პუბლიკაციებს აქვთ გაცილებით ფართო პოტენციური მკითხველის აუდიტორია და ხელმისაწვდომია მკვლევარებისა და ინსტიტუტებისათვის განვითარებული ქვეყნებიდან და აგრეთვე ადგილობრივი საზოგადოების მესამე პირებისათვის, კერძოდ, ეკონომიკური, ინდუსტრიული, პოლიტიკური ან კულტურული სფეროს წარმომადგენლებისათვის.

რანჟირების Webometrics სისტემის ერთ-ერთი მიზანია საგანმანათლებლო დაწესებულებებს და მეცნიერებს გაუძლიეროს მოტივაცია მათი აქტიურობების ინტერნეტში სათანადოდ განსათავსებლად. იმ შემთხვევაში, როცა უნივერსიტეტის აქტიურობის ინტერნეტში ასახვა არის აკადემიური მიღწევების შესაბამის მოსალოდნელ პოზიციაზე ქვემოთ, მაშინ დაწესებულების ხელმძღვანელობამ უნდა გადახედოს ინტერნეტ პოლიტიკას და ხელი შეუწყოს ელექტორნული პუბლიკაციების მოცულობის და ხარისხის მნიშვნელოვან გაზრდას. უნივერსიტეტის შერჩევისას სტუდენტებმა უნ-

და გამოიყენონ დამატებითი კრიტერიუმები. რანჟირების Webometrics სისტემა კარგად ასახავს უნივერსიტეტის განათლების ხარისხს და აკადემიურ პრესტიჟს, მაგრამ გასათვალისწინებელია აგრეთვე სხვა არააკადემიური მაჩვენებლებიც.

შანჰაის რანჟირების სისტემის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი იდეა მდგომარეობდა შედგენილი ინდიკატორის შემოტანაში, რომელშიც ინდიკატორების სისტემას შეესაბამებოდა წონების სისტემა. ტრადიციული ბიბლიომეტრული ინდექსები აგებულია ფარდობებზე დაყრდნობით, მაგალითად, გარფილდის ჟურნალის იმპაქტ ფაქტორი (Garfields' Journal Impact Factor), რომელიც ეფუძნება ხარისხოვანი კანონით განაწილების მქონე ცვლადებს და უსარგებლოა დიდი და კომპლექსური ანალიზისათვის. ინგვერსენის (Ingwersen) მიერ 1997 წელს შემოთავაზებული ვებ იმპაქტ ფაქტორი (Web Impact Factor - WIF), რომელიც იყენებს ბმულების (links) L რაოდენობის შეფარდებას ვებგვერდების გვერდების W რაოდენობასთან L/W, აგრეთვე გამოუსადეგარია. შანჰაის მოდელის გათვალისწინებით რანჟირების Webometrics სისტემაში გამოყენებულია ინდიკატორი, რომელიც L/W შეფარდებას გარდაქმნის aL+bW ფორმულის მიხედვით, სადაც L და W წინასწარ უნდა იყოს ნორმალიზებული და a და b წარმოადგენენ წონებს, რომელთა ჯამი 100% ტოლია. შედგენილი ინდიკატორი შეიძლება აგებული იყოს სხვადასხვა ცვლადების და წონების სიმრავლეებისათვის ინდიკატორის შემქმნელის მიზნებისა და მოდელის გათვალისწინებით.

რანჟირების Webometrics სისტემის ანალიზის ერთეულს წარმოადგენს საგანმანათლებლო დაწესებულების ინტერნეტ სივრცე. ამიტომ განიხილება მხოლოდ ის უნივერსიტეტები და კვლევითი ცენტრები, რომელთაც გააჩნიათ დამოუკიდებელი ვებ-სივრცეები. თუ დაწესებულებას გააჩნია ერთზე მეტი ძირითადი დამოუკიდებელი ვებ-სივრცე, მაშინ გამოიყენება ორი ან რამოდენიმე შესასვლელი სხვადასხვა ინტერნეტ მისამართებით. ამ შემთხვევაში განიხილება რამოდენიმე ვებ-სივრცის რანჟირება, მაგრამ ქვეყნდება მხოლოდ მათ შორის საუკეთესო მაჩვენებლები. ძიების სისტემების საშუალებით მიღებულ რაოდენობრივ მონაცემებზე დაყრდნობით მიიღება შემდეგი ოთხი ინდიკატორი: წარმოდგენილობა (Presence), ხილვადობა (Visibility or Impact), გამჭვირვალობა (Transparency or Openness), აკადემიური მიღწევები (Excellence or Scholar). მოყვანილი ინდიკატორების კომბინირებისას წარმოდგენილობა ინდიკატორის წილი შეადგენს 10%, ხილვადობა ინდიკატორის - 50%, გამჭვირვალობა ინდიკატორის - 10%, ხოლო აკადემიური მიღწევები ინდიკატორისა კი 30%. წარმოდგენილობა ასახავს დაწესებულების მთავარი ვებ-სივრცის ზომას ანუ გვერდების რაოდენობას განსაზღვრულს Google მიხედვით. ის მოიცავს ყველა ვებ-ქვესივრცეს და ყველა ტიპის ფაილს Adobe Acrobat (.pdf), Adobe PostScript (.ps), Microsoft Word (.doc) და Microsoft Powerpoint (.ppt) ტიპის მდიდარი ფაილების ჩათვლით. გვერდების საერთო რაოდენობის ჩართვა რეიტინგის დათვლისას განპირობებულია აკადემიური ინფორმაციის ახალი გლობალური ბაზრის მოთხოვნილებებით, და შესაბამისად ინტერნეტი წარმოადგენს უნივერსიტეტების ინტერნაციონალიზაციის ადექვატურ პლატფორმას. უნივერსიტეტის საქმიანობის და სტრუქტურის დაწვრილებითი და ეფექტური ასახვა ინტერნეტში შესაძლებლობას იძლევა მოიზიდოს სტუდენტები და მეცნიერები მთელი მსოფლიოდან. გვერდების დიდი რაოდენობა, რომელიც წარმოდგენილია .pdf და .doc ფორმატებში მიუთითებს იმაზე, რომ განთავსებულია არა მხოლოდ ადმინისტრაციული და ბიუროკრატიული ფორმები. ხილვადობა ახასიათებს ვებ-გვერდების მიერ გარე ქსელებიდან კავშირების საერთო რაოდენობას, რომელიც იანგარიშება Ahrefs და Majestic საშუალებით. ნორმალიზაციის შემდეგ აიღება ორი წყაროდან მიღებული მონაცემების მაქსიმუმი. უნივერსიტეტის ვებ-სივრცის მიერ მიღებული გარე კავშირების რაოდენობა ახასიათებს გამოქვეყნებული მასალის ხილვადობას და გავლენას, და მათ ძირითად ნაწილს აქვს ბიბლიოგრაფიული ციტირების მსგავსი დატვირთვა. გამჭვირვალობა ასახავს ციტირებების რაოდენობას საუკეთესო ავტორებისაგან Google Scholar Citations მიხედვით. აკადემიური მიღწევები წარმოადგენს ყველაზე ციტირებული სტატიებიდან 10% შორის მოხვედრილი სტატიების რაოდენობას განსაზღვრულს Scimago მიხედვით 26 დისციპლინაში. მონაცემები გროვდება ხუთი წლის (2010-2014) პერიოდისათვის.

Webometrics წარმოადგენს შეფასებული უმაღლესი საგანმანათლებლო დაწესებულებების რაოდენობის მიხედვით რანჟირების უმსხვილეს სისტემას, რომელიც მოიცავს მსოფლიოს 24 000 მეტ დაწესებულებას. გამოცემის მიხედვით მონაცემები გროვდება იანვრის ან ივლისის თვეში 1-ლი რიცხვიდან 20 რიცხვამდე. შეცდომების და ცდომილებების თავიდან ასაცილებლად თითოეული ცვლადი განისაზღვრება სულ მცირე ორჯერ ამ პერიოდის განმავლობაში და აიღება უდიდესი მნიშვნელობა. ძიების საშუალებების ძლიერად არასტაბილურობის გამო სურათი შეიძლება შეიცვალოს თუ ძიება განხორციელდება მოგვიანებით. საძიებო სისტემა Google არის გეოგრაფიულად დამოკიდებული და ამიტომ რანჟირების Webometrics სისტემისათვის გამოიყენება google.com სარკისებური სივრცე, რომლის ინტერფეისი ენაა ინგლისური, ხოლო ადგილმდებარეობა მადრიდი (ესპანეთი). საბოლოო რეიტინგები ქვეყნდება გვიან იანვარში ან ივლისში ჩვეულებრივ 28 რიცხვის შემდეგ. აღნიშნულ სისტემაში არ არის გამოყოფილი სხვადასხვა ტიპის უნივერსი-

ტეტები და ამიტომ რეიტინგულ სიაში კვლევითი უნივერსიტეტების გვერდზე წარმოდგენილია ადგილობრივი კოლეჯები და სასულიერო სემინარიები. მიუხედავად ამისა შესაძლებელია აიგოს ქვერეიტიგები სათანადო კრიტერიუმების მიხედვით. ვინაიდან რანჟირების Webometrics სისტემა სისტემატურად და ზოგ გამოცემაში მნიშვნელოვნად ცვლის მეთოდოლოგიას, ამიტომ სხვადასხვა გამოცემების რეიტინგული შედეგები არ არის ერთმანეთთან სადარი. ამავე დროს რეიტინგულ სიებში დაწინაურება ყოველთვის არ ნიშნავს საგანმანათლებლო დაწესებულების საქმიანობის გაუმჯობესებას. აღნიშნულის გათვალისწინებით, რანჟირების Webometrics სისტემა თავის ვებგვერდზე ათავსებს მხოლოდ მიმდინარე რეიტიგულ სიას, ხოლო რანჟირების წინა გამოცემები აღარ არის ხელმისაწვდომი.

რანჟირების Webometrics სისტემის ბოლო გამოცემა გამოქვეყნდა 2017 წლის იანვარში, რომლის მიხედვით თსუ მსოფლიო რანჟირების 11995 საფეხურიდან 1340 საფეხურზე იმყოფება (იხ. ნახ. 1), ხოლო ევროპის 5963 საგანმანათლებლო დაწესებულებიდან კი 539-ე ადგილზე (იხ. ნახ. 2). კავკასიის საგანმანათლებლო დაწესებულებებს შორის თსუ პირველ ადგილზეა და მნიშვნელოვნად უსწრებს უახლოეს საფეხურზე მყოფ ილიას უნივერსიტეტს (იხ. ნახ. 3), რომლის მსოფლიო რეიტინგია 2079, სომხეთის საუკეთესო 2349 რეიტინგის მქონე ერევანის სახელმწიფო უნივერსიტეტს და აზერბაიჯანის საუკეთესო 4121 რეიტინგის მქონე ბაქოს სახელმწიფო უნივერსიტეტს.

აკადემიური აქტივობით უნივერსიტეტების რანჟირების სისტემა URAP [3] შეიქმნა 2009 წელს შუა აღმოსავლეთის ტექნიკური უნივერსიტეტის (Middle East Technical University) ინფორმატიკის ინსტიტუტის (Informatics Institute) კვლევით ლაბორატორიაში. აღნიშნული უნივერსიტეტი წარმოადგენს თურქეთის სახელმწიფო უნივერსიტეტს, რომელიც მდებარეობს ანკარაში, დაფუძნებული იყო 1956 წელს და ამჟამად ამ უნივერსიტეტში სწავლობს დაახლოებით 26500 სტუდენტი. კვლევითი ლაბორატორია URAP წარმოადგენს არამომგებიან ორგანიზაციას. მისი გუნდის წევრები არიან შუა აღმოსავლეთის ტექნიკური უნივერსიტეტის მკვლევარები, რომლებიც საზოგადოებრივ საწყისებზე მუშაობენ URAP ლაბორატორიაში. URAP ლაბორატორიის მთავარი მიზანია განავითაროს რანჟირების სისტემა მსოფლიოს უნივერსიტეტების ფართო ქსელისათვის აკადემიურ მაჩვენებლებზე დაყრდნობით, რომელიც განისაზღვრება სამეცნიერო პუბლიკაციების ხარისხით და რაოდენობით. ამ მიზნის განსახორციელებლად 2010 წლიდან ყოველწლიურად ხორციელდება 2000 უმაღლესი საგანმანათლებლო დაწესებულების რანჟირება.

რანჟირების URAP სისტემის ძირითად მიზანს წარმოადგენს საგანმანათლებლო დაწესებულების აკადემიური ხარისხის შეფასება. URAP ლაბორატორია აგროვებს მონაცემებს დაახლოებით 3500 უმაღლესი საგანმანათლებლო დაწესებულებიდან იმისათვის, რომ შეაფასოს მათი აკადემიური აქტივობა და მათ შორის 2000 საუკეთესოსათვის დგინდება რეიტინგული შეფასება. თითეული დაწესებულების მთლიანი შეფასება

ranking	World Rank	University	Det.	Country	Presence Rank*	Impact Rank*	Openness Rank*	Excellence Rank*
537	1333	Czech University of Life Sciences Prague (University of Agriculture) / Česká Zemědělská Univerzita v Praze			2044	1608	2809	1402
538	1334	Selçuk University			939	3502	1384	1031
539	1340	Ivane Javakhishvili Tbilisi State University			848	2892	2881	1004
540	1343	Robert Gordon University			2060	1465	1245	1873
541	1350	Southern Federal University (Rostov State University) / Южный федеральный университет			575	1205	1972	2121
542	1359	Roehampton University			2127	1947	831	1733
543	1361	Blekinge Institute of Technology / Blekinge Tekniska Högskola			4099	1760	1262	1558
544	1363	Institute of Tropical Medicine Antwerp			2515	3150	1201	1094
545	1367	Université du Maine Le Mans Laval			2458	2089	1022	1588
546	1368	Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse			3041	3638	1174	945
547	1370	Université Paris Est Marne la Vallée			4350	3621	1061	909

ნახ. 1

ranking	University	Det.	Country	Presence Rank*	Impact Rank*	Openness Rank*	Excellence Rank*
1337	Xi'An University of Technology / 西安理工大学			3893	977	3956	1530
1339	Suffolk University			3992	1036	1060	2079
1340	Ivane Javakhishvili Tbilisi State University			848	2892	2881	1004
1340	Universidade Federal de Juiz de Fora UFJF			720	3111	1483	1190
1340	Juntendo University / 順天堂大学			5770	3597	1024	827
1343	Universidade Federal do Espírito Santo			780	2405	1397	1471
1343	Robert Gordon University			2060	1465	1245	1873
1345	Guangxi Normal University / 广西师范大学			3544	1236	3350	1471
1346	Hunan University / 湖南大学			3427	1517	99999	377
1347	Universiti Malaysia Sabah			892	1540	1185	1983
1348	University of Miyazaki / 宮崎大学			2611	1980	1326	1501
1349	Qatar University			1270	3296	935	1209
1350	Southern Federal University (Rostov State University) / Южный федеральный университет			575	1205	1972	2121

ნახ. 2

Georgia

ranking	World Rank	University	Det.	Presence Rank*	Impact Rank*	Openness Rank*	Excellence Rank*
1	1340	Ivane Javakhishvili Tbilisi State University		848	2892	2881	1004
2	2079	Ilia State University		1330	3868	1850	2324
3	4759	Tbilisi State Medical University		3773	11455	5219	3860
4	5097	Tbilisi Teaching University Gorgasali		7575	1483	8635	5778
5	5742	International Black Sea University		3763	10648	6021	4673
6	8548	Georgian Technical University		11344	12746	8635	4142
7	9611	Georgia State Agriculture University		13108	13597	2952	5778
8	10649	Caucasus University		8491	11687	7697	5778
9	11207	Batumi Shota Rustaveli State University		8452	12343	8635	5228
10	11468	Free University of Tbilisi		14523	13856	5517	5778

ნახ. 3

ეფუძნება რამოდენიმე ინდიკატორს. რანჟირება მოიცავს უმაღლესი განათლების დაწესებულებებს სამთავრობო აკადემიური ინსტიტუციების გარდა, მაგალითად, ჩინეთის და რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიები, და სხვა. რანჟირების URAP სისტემა მთლიანად ეყრდნობა საიმედო ღია წყაროებიდან მიღებულ ობიექტურ ინფორმაციას. უნივერსიტეტების რანჟირება ხორციელდება რამოდენიმე კრიტერიუმის მიხედვით. არსებული რანჟირების სისტემების უმრავლესობა დამოკიდებულია დაწესებულების ზომაზე და დარგებზე. URAP ლაბორატორიის გუნდი ამჟამად ამუშავებს ახალ მეთოდოლოგიას, რათა შეამციროს ზომასა და დარგებზე დამოკიდებულება. რანჟირების URAP სისტემის შემქმნელების მიზანი არ არის უნივერსიტეტებისათვის უკეთესის ან უარესის სტატუსის მინიჭება. მათი ამოცანაა დაეხმარონ უნივერსიტეტებს და აკადემიური აქტივობის მაჩვენებელი ინდიკატორების საშუალებით განსაზღვრონ პოტენციური წინსვლის მიმართულებები. სხვა რანჟირების სისტემების მსგავსად URAP სისტემაც არ არის არც ამომწურავი, არც სრულყოფილი და მიმდინარე კვლევების საფუძველზე მუდმივად განიცდის მოდიფიკაციას და გაუმჯობესებას. პირველ 2010-2011 წლის გამოცემაში გამოყენებულია 6 განსხვავებული დარგი, სახელდობრ, საინჟინრო დარგი, სოფლის მეურნეობა/გარემოს შემსწავლელი მეცნიერებები, მედიცინა, სიცოცხლის შემსწავლელი მეცნიერებები, საბუნებისმეტყველო მეცნიერებები და სოციალური

მეცნიერებები. 2016 წელს რანჟირებისას გამოყენებული დარგების რაოდენობა გაიზარდა 41-მდე, რომელთა შერჩევა ეფუძნება ავსტრალიის და ახალი ზელანდიის კვლევის კლასიფიკაციის სტანდარტს (Australian and New Zealand Standard for Research Classification) [4]. ამ გაფართოების მიზეზს წარმოადგენს URAP მსოფლიოო დარგების რანჟირებისას უმაღლესი საგანმანათლებლო დაწესებულებებიდან ხშირი მოთხოვნა ქვედარგებად უფრო დეტალურ დაყოფაზე.

რანჟირების URAP სისტემის 2016-2017 გამოცემა ეფუძნება აკადემიური აქტივობის 6 ინდიკატორს: სტატია (Article), ციტირება (Citation), სრული ნაშრომი (Total Document), ნაშრომის სრული იმპაქტი (Article Impact Total), ციტირების სრული იმპაქტი (Citation Impact Total), საერთაშორისო თანამშრომლობა (International Collaboration). ვინაიდან URAP სისტემა რანჟირებისას ეყრდნობა აკადემიურ აქტივობას, ამიტომ პუბლიკაციები წარმოადგენს რანჟირების მეთოდოლოგიის საფუძველს. მხედველობაში მიიღება პუბლიკაციების როგორც რაოდენობა, ასევე ხარისხი და საერთაშორისო სამეცნიერო თანამშრომლობა.

ინდიკატორი სტატია წარმოადგენს მიმდინარე სამეცნიერო პროდუქტიულობის საზომს, რაც მოიცავს 2015 წელს გამოქვეყნებულ ნაშრომებს, რომლებიც ინდექსირებულია Web of Science და InCites მიერ. სტატიაში იგულისხმება ორიგინალური სტატია, მიმოხილვა ან ანონსი. ამ ინდიკატორის წყაროს წარმოადგენს InCites და მისი წონა რეიტინგულ შეფასებაში შეადგენს 21%.

ინდიკატორი ციტირება ახასიათებს კვლევის გავლენას და იზომება 2011-2015 წელს გამოქვეყნებული და Web of Science მიერ ინდექსირებული სტატიების მიერ 2011-2015 წლებში მიღებული ციტირებების საერთო რაოდენობით. ამ ინდიკატორის წყაროს წარმოადგენს InCites და მისი წონა რეიტინგულ შეფასებაში შეადგენს 21%.

სრული ნაშრომი ასახავს სამეცნიერო პროდუქტიულობის უწყვეტობას და მდგრადობას და იზომება 2011-2015 წლებში გამოქვეყნებული ყველა სამეცნიერო ნაშრომით, რაც ჟურნალებში გამოქვეყნებულ ნაშრომებთან ერთად მოიცავს კონფერენციის თეზისებს და შრომებს, მიმოხილვებს, წერილებს, დისკუსიებს, ლექციების მასალებს. ამ ინდიკატორის წყაროს წარმოადგენს Web of Science და მისი წონა რეიტინგულ შეფასებაში შეადგენს 10%.

ნაშრომის სრული იმპაქტი (Article Impact Total) წარმოადგენს სამეცნიერო პროდუქტიულობის საზომს, რომელიც კორექტირებულია 41 დარგში 2011-2015 პერიოდში მსოფლიოო $CPP_{(i,world)}$ მიმართ ნორმალიზებული უნივერსიტეტის i-ური დარგის CPP_i კოეფიციენტით, სადაც $CPP_{(i,world)}$ წარმოადგენს მსოფლიოში *i*-ური დარგის ციტირებების რაოდენობას ერთ პუბლიკაციაზე გათვლით, ხოლო CPP_i კი უნივერსიტეტში *i*-ური დარგის ციტირებების რაოდენობას ერთი პუბლიკაციაზე გათვლით. უნივერსიტეტის CPP_i და მსოფლიოო $CPP_{(i,world)}$ შეფარდება უჩვენებს, რომ ინსტიტუტის შესაბამისი დარგის აღიარება არის მსოფლიოო საშუალო დონის ზემოთ თუ ქვემოთ. ეს შეფარდება მრავლდება შესაბამის დარგში პუბლიკაციების რაოდენობაზე და მიღებული მახასიათებლები იკრიბება დარგების მიხედვით. აღნიშნულის გათვალისწინებით, ნაშრომის სრული იმპაქტი AIT გამოითვლება შემდეგი ფორმულის მიხედვით

$$AIT = \sum_{i=1}^{41} \left(\frac{CPP_i}{CPP_{world,i}} \right) A_i,$$

სადაც A_i წარმოადგენს უნივერსიტეტის *i*-ური დარგის ნაშრომების რაოდენობას. AIT ინდიკატორის მიზანია დააბალანსოს უნივერსიტეტის სამეცნიერო პროდუქტიულობა თითოეულ დარგში პუბლიკაციების დარგების მიხედვით ნორმალიზებული იმპაქტით. ამ ინდიკატორის წყაროს წარმოადგენს InCites და მისი წონა რეიტინგულ შეფასებაში შეადგენს 18%.

ციტირების სრული იმპაქტი წარმოადგენს სამეცნიერო შედეგების გავლენის საზომს, რომელიც კორექტირებულია 41 დარგში 2011-2015 პერიოდში მსოფლიოო $CPP_{(i,world)}$ მიმართ ნორმალიზებული უნივერსიტეტის *i*-ური დარგის CPP_i კოეფიციენტით. უნივერსიტეტის CPP_i და მსოფლიოო $CPP_{(i,world)}$ შეფარდება უჩვენებს ინსტიტუტის შესაბამისი დარგის აღიარება მსოფლიოო საშუალო დონის ზემოთ არის თუ ქვემოთ. ეს შეფარდება მრავლდება შესაბამის დარგში პუბლიკაციების ციტირებაზე და მიღებული მახასიათებლები იკრიბება დარგების მიხედვით. აღნიშნულის გათვალისწინებით, ციტირების სრული იმპაქტი CIT გამოითვლება შემდეგი ფორმულის მიხედვით

$$CIT = \sum_{i=1}^{41} \left(\frac{CPP_i}{CPP_{world,i}} \right) C_i,$$

სადაც C_i წარმოადგენს უნივერსიტეტის *i*-ური დარგის ნაშრომების ციტირებების რაოდენობას. ამ ინდიკატორის მიზანია დააბალანსოს უნივერსიტეტის სამეცნიერო იმპაქტი თითოეულ დარგში პუბლიკაციების დარგების მიხედვით ნორმალიზებული იმპაქტით. CIT ინდიკატორის წყაროს წარმოადგენს InCites და მისი წონა რეიტინგულ შეფასებაში შეადგენს 15%.

საერთაშორისო თანამშრომლობა წარმოადგენს უნივერსიტეტის მსოფლიოო კავშირების საზომს. საერთაშორისო თანამშრომლობის ინდიკატორის გამოთვლის საფუძველს წარმოადგენს 2011-2015 პერიოდში უცხოურ უნივერსიტეტებთან თანამშრომლობით გამოქვეყნებული სტატიების საერთო რაოდენობა. ამ ინდიკატორის წყაროს წარმოადგენს InCites და მისი წონა რეიტინგულ შეფასებაში შეადგენს 15%.

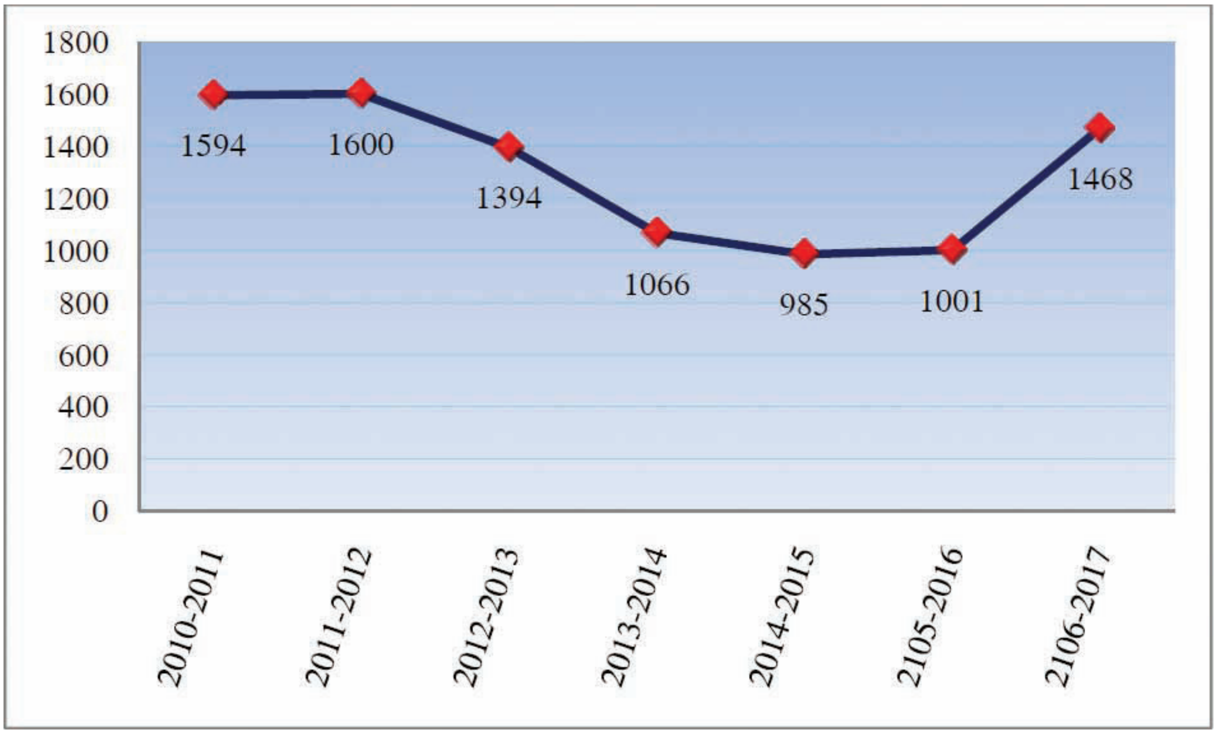
რანჟირების URAP სისტემის 2016-2017 გამოცემაში გამოყენებულია ბიბლიომეტრული მონაცემები Thomson Reuters' InCites კვლევის ანალიზის [5] დახმარებით, რომელიც იძლევა Web of Science მონაცემთა ბაზაში არსებული დაწესებულებების შესაბამის ინფორმაციას. InCites მონაცემთა ბაზაში არსებული 5914 უმაღლესი საგანმანათლებლო დაწესებულებიდან ჯერ ხდება იმ დაწესებულებების შერჩევა, რომელთაც გააჩნიათ ოთხწლიანი საბაკალვრო პროგრამა. გამოყოფილი 3556 უმაღლესი საგანმანათლებლო დაწესებულებიდან შერჩეულია 2442 ისეთი, რომელთაც 2015 წელს გამოქვეყნებული აქვთ 50 ან მეტი ნაშრომი. დამუშავებულია მათი მონაცემები და მათგან 2000 დაწესებულებისათვის დადგენილი რეიტინგები. რანჟირებისას გამოყენებული 41 დარგი ეფუძნება ავსტრალიის კვლევის საბჭოს მიერ Web of Science ინდექსირებული ჟურნალებისათვის შექმნილი დარგების კლასიფიკატორს [6]. რანჟირების დროს მონაცემთა სიმრავლიდან ამოღებულია CERN-თან თანამშრომლობით გამოქვეყნებული სტატიები, რადგან უკანასკნელ წლებში გაიზარდა მათ მიერ გამოქყვეყნებული მრავალავტორიანი და მაღალი ციტირების მქონე სტატიები, რაც უსამართლო უპირატესობას ანიჭებს რანჟირების სისტემაში უნივერსიტეტების დიდ რაოდენობას. მაგალითად, ნაშრომს “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC”, რომელიც გამოქვეყნებულია Physics Letters B ATLAS ჯგუფის მიერ ჰყავდა 2918 ავტორი 267 დაწესებულებიდან და ჰქონდა 3462 ციტირება 2016 წლის ოქტომბრისათვის.

რანჟირების URAP სისტემისათვის მონაცემები გროვდება Web of Science და სხვა წყაროებიდან, რომლებშიც მოცმულია უმაღლესი განათლების დაწესებულებების სიები. რანჟირების საიმედოობა ძირითადად დამოკიდებულია გამოყენებული მონაცემების ხარისხზე. საიმედო მონაცემების მისაღებად გამოიყენება მონაცემთა წინასწარი დამუშავების და გასუფთავების მეთოდები. რეიტინგული სიების შესადგენად გამოყენებული ნედლი ბიბლიომეტრული მონაცემების სტატისტიკური ანალიზი უჩვენებს, რომ მათ აქვთ ძალიან გადახრილი განაწილებები. აქედან გამომდინარე, ინდიკატორების მნიშვნელობები, რომლებიც მეტია ან ნაკლებია მედიანაზე წრფივად არიან დაჯგუფებული ორ ჯგუფად. ინდიკატორებისათის წონების დადგენა ხდება ექსპერტთა ჯგუფის მონაწილეობით დელფი (Deplhi) სისტემის გამოყენებით. რანჟირების URAP სისტემის მაქსიმალური რეიტინგი შეადგენს 600 ქულას და ნაწილდება 6 ინდიკატორზე ზემომოყვანილი პროცენტული თანაფარდობის მიხედვით.

რანჟირების URAP სისტემის ბოლო გამოცემა გამოქვეყნდა 2016 წლის ოქტომბერში, რომლის მიხედვით თსუ მსოფლიო რანჟირებულ 2000 უნივერსიტეტს შორის 1468-ე ადგილზე იმყოფება (იხ. ნახ. 4), ხოლო საქართველოსა და კავკასიის საგანმანათლებლო დაწესებულებებს შორის თსუ პირველ ადგილზეა და უსწრებს URAP რეიტინგულ სიაში პირველად მოხვედრილ ილიას უნივერსიტეტს, რომლის მსოფლიო რეიტინგია 1577, სომხეთის საუკეთესო ერევანის სახელმწიფო უნივერსიტეტის რეიტინგია 1639, აზერბაიჯანის უნივერსიტეტები კი რანჟირების 2016-2017 წლის გამოცემაში მოხვედრილი არ არის, ხოლო წინა 2015-2016 წლის გამოცემაში აზერბაიჯანის საუკეთესო ბაქოს სახელმწიფო უნივერსიტეტის რეიტინგი 1872 ტოლი იყო. უნდა აღინიშნოს, რომ თსუ მოხვდა რანჟირების URAP სისტემის პირველივე გამოცემაში და სტაბილურად ინარჩუნებს ადგილს ამ რეიტინგულ სიაში. პირველ 2010-2011 წლის გამოცემაში თსუ-ს რეიტინგმა შეადგინა 1594, 2011-2012 წლის გამოცემაში რეიტინგი ტოლი იყო 1600, შემდეგ თსუ-ს რეიტინგი სისტემატურად უმჯობესდებოდა და საუკეთესო მაჩვენებელი 985 ჰქონდა 2014-2015 გამოცემაში, 2015-2016 წლის გამოცემაში თსუ რეიტინგი იყო 1001. თსუ რეიტინგების ამსახველი დიაგრამა მოყვანილია ნახ. 5-ზე.

World Ranking	University Name	Country	Category	Article	Citation	Total Document	AIT	CIT	Collaboration	Total
1465	Estonian University of Life Sciences		B+	20.67	45.00	13.14	37.58	43.98	36.34	196.71
1466	Henan Agricultural University		B+	57.08	46.77	20.44	32.42	22.13	17.81	196.65
1467	Eulji University		B+	47.73	49.88	30.01	29.81	20.74	18.43	196.61
1468	Ivane Javakhishvili Tbilisi State University		B+	22.40	17.85	12.10	56.90	48.20	38.72	196.15
1469	University of Peshawar		B+	63.00	31.92	18.10	24.81	12.74	45.08	195.65
1470	Yanbian University		B+	43.55	40.10	18.67	29.93	18.22	45.06	195.53
1471	College of Staten Island (CUNY)		B+	26.58	48.00	15.02	40.26	43.85	20.92	194.62
1472	Shaanxi University of Science & Technology		B+	54.87	40.08	28.31	37.03	24.78	9.43	194.49

ნახ. 4



ნახ. 5

ჩვენს მიერ განხილული რანჟირების Webometrics და URAP სისტემებში თსუ წარმატება გვიჩვენებს, რომ მიუხედავად მრავალი ობიექტური და სუბიექტური პრობლემისა უნივერსიტეტს უკავია ღირსეული ადგილი მსოფლიოს უმაღლეს საგანმანათლებლო დაწესებულებებს შორის, რაც უდავოდ მეტყველებს მისი კოლექტივის დიდ პედაგოგიურ და სამეცნიერო პოტენციალზე, რომლის სათანადოდ განვითარების შემთხვევაში თსუ შეძლებს დაიმკვიდროს ადგილი მსოფლიოს მოწინავე უნივერსიტეტებს შორის.

ლიტერატურა

1. J. Shin, R. Toutkoushian, U. Teichler, University Rankings: Theoretical Basis, Methodology and Impacts on Global Higher Education, Springer Netherlands, 2011.
2. http://www.webometrics.info/en
3. http://www.urapcenter.org/2016/
4. http://www.abs.gov.au/Ausstats/abs@.nsf/Latestproducts/4AE1B46AE2048A28CA25741800044242?opendocument
5. http://researchanalytics.thomsonreuters.com/incites
6. http://www.arc.gov.au/sites/default/files/filedepot/Public/ERA/ERA%202015/ERA_2015_Discipline_Matrix.pdf

ავტორის ელექტრონული ფოსტის მისამართი:
gia.avalishvili@tsu.ge

ტრადიციული საფაკულტეტო-სამეცნიერო კონფერენციები თსუ-ს ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტზე

თეიმურაზ ნადარეიშვილი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი;
ასისტენტ-პროფესორი;
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ფიზიკის დეპარტამენტი.
გაზეთ „თბილისის უნივერსიტეტის“ რედკოლეგიის წევრი

თსუ-ის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი 2013 წლიდან ატარებს ყოველწლიურ საფაკულტეტო კონფერენციას. კონფერენციები, რომელბზეც განვლილ 2013-2016 წლებში თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ყველა დეპარტამენტის მიერ ასეულობით სამეცნიერო მოხსენება იქნა წარდგენილი, პროფესორ რამაზ ბოჭორიშვილის ინიციატივით დაფუძნდა და მაღალ სამეცნიერო დონეზე ჩატარდა.

მაია ტორაძე

ჟურნალისტიკის დოქტორი;
ასოცირებული პროფესორი;
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოციალურ და პოლიტიკურ მეცნიერებათა ფაკულტეტის ჟურნალისტიკისა და მასობრივი კომუნიკაციის დეპარტამენტი. გაზეთ „თბილისის უნივერსიტეტის“ მთავარი სპეციალისტი

სტატისტიკისთვის მოვიყვანთ, რომ 2013 წელს, უნივერსიტეტის დაარსებიდან 95-ე წლისთავისადმი მიძღვნილ კონფერენციაზე 35-მა სამეცნიერო სექციამ იმუშავა და მასზე 350-მდე მოხსენება წარადგინეს როგორც მეცნიერ-მკვლევრებმა, ასევე დოქტორანტებმა; 2014 წელს 10-მა სექციამ იმუშავა და 280 სამეცნიერო მოხსენება იყო წარდგენილი; 2015 წელს იმუშავა 8 სექციამ და მათზე 250-ზე მეტი მოხსენება იქნა წარდგენილი,

კონფერენციებზე მეცნიერები, ტრადიციულად, დარგების მიხედვით იყვნენ გადანაწილებული, მათემატიკის, კომპიუტერული მეცნიერების, გეოგრაფიის, გეოლოგიის, ელექტრული და ელექტრონული ინჟინერიის, ქიმიის, ბიოლოგიის, ფიზიკის სექციებში. ასევე მუშაობდა ინტერდისციპლინური სექციები მათემატიკასა და კომპიუტე-

რულ მეცნიერებებში და ბიოლოგიასა და ფიზიკაში.

სამეცნიერო მოხსენებები, რომლებიც თსუ-ის მეცნიერებმა კონფერენციაზე წარმოადგინეს, თემატიკის მიხედვით თანამედროვე სამეცნიერო ტენდენციებს ეხმიანებოდა.

საფაკულტეტო კონფერენცია ყოველ ჯერზე სრულდება პლენარული სხდომებით, რომელზეც ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მიმართულებების ხელმძღვანელები საანგარიშო მოხსენებებით წარდგებიან მიმართულებებზე მიმდინარე სამეცნიერო კვლევებისა და ზოგადად არსებული მდგომარეობის შესახებ.

პლენარულ სხდომებზე ასევე ისმენენ მიმართულებებიდან შერჩეულ მეცნიერთა მოხსენებებს.

მესამე საფაკულტეტო კონფერენციაზე ახალ ტრადიციას ჩაეყარა საფუძველი. გადაწყდა, გარკვეული სექციების მუშაობა მიძღვნოდა იმ ქართველი მეცნიერების ხსოვნას, რომლებმაც მნიშვნელოვანი როლი შეასრულეს დარგის განვითარებაში. 2015 წელს მათემატიკის სექციის მუშაობა მიეძღვნა გამოჩენილი ქართველი მეცნიერის, აკადემიკოს შალვა მიქელაძის ხსოვნას; ხოლო ბიოლოგიის სექციის მუშაობა - ქართული ფიზიოლოგიური სკოლის ფუძემდებლის აკადემიკოს ივანე ბერიტაშვილის ხსოვნას.

განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს მეოთხე საფაკულტეტო კონფერენცია, რომელიც 2016 წელს ჩატარდა და მიეძღვნა ივანე ჯავახიშვილის დაბადებიდან 140 წლისთავს. კონფერენციაზე იმუშავა მათემატიკის, კომპიუტერული მეცნიერებების, ფიზიკის, ელექტრონიკის, ქიმიის, ბიოლოგიის, გეოგრაფიის და გეოლოგიის სექციებმა.

კონფერენციაზე ტრადიცია გაგრძელდა და მათემატიკის სექციის მუშაობა მიეძღვნა აკადემიკოს ანდრო ბიწაძის დაბადებიდან 100 წლისთავს; ბიოლოგიის სექცია - საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტ გრიგოლ თუმანიშვილის დაბადებიდან 90 წლისთავს; გეოგრაფიის სექცია - საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტ ალექსანდრე ასლანიკაშვილის დაბადებიდან 100 წლისთავს; გეოლოგიის სექცია - პროფესორ ვლადიმერ ქოიავას დაბადებიდან 90 წლისთავს.

ივანე ჯავახიშვილის დაბადებიდან 140 წლისთავის აღსანიშნავად ფაკულტეტზე მომზადდა ბროშურა, რომელშიც გამოკვეთილია ივანე ჯავახიშვილის როლი თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში მათემატიკისა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებების დაფუძნებასა და განვითარებაში. ბროშურის ავტორებია თსუ-ის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პროფესორი რამაზ ბოჭორიშვილი და ასოცირებული პროფესორი თამარ ჭელიძე, რედაქტორი ასოცირებული პროფესორი გურამ ქუთელია. „ივანე ჯავახიშვილი არა მარტო უნივერსიტეტის ერთ-ერთი დამაარსებელი, არამედ სიბრძნისმეტყველების ფაკულტეტის დეკანიც იყო და იმ დროს სწორედ ამ ფაკულტეტის ნაწილს წარმოადგენდა მათემატიკა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებები. ივანე ჯავახიშვილის კარგად გააზრებული ხედვა უნივერსიტეტის მოწყობის შესახებ იმაშიც გამოიხატა, რომ ეს დარგები უნივერსიტეტში დაარსების დღიდან არის წარმოდგენილი და მათ გასული 98 წლის განმავლობაში განვითარების შესაძლებლობა მიეცა. ივანე ჯავახიშვილს საქმისადმი განსხვავებული მიდგომა რომ ჰქონოდა, ძნელი სათქმელია, თუ როგორ მოხდებოდა საქართველოში მეცნიერების განვითარება“, - ნათქვამია ბროშურაში, რომელიც კონფერენციის მონაწილეებს დაურიგდა.

კონფერენციის სექციებზე საანგარიშო წელს მიღებული სამეცნიერო შედეგები წარმოადგინეს ფაკულტეტის აკადემიურმა პერსონალმა, ფაკულტეტთან არსებულმა სამეცნიერო კვლევითი ინსტიტუტების და სასწავლო-სამეცნიერო ლაბორატორიების თანამშრომლებმა, მოწვეულმა მომხსენებლებმა და სტუდენტებმა.

როგორც ცნობილია, 2015 წლიდან თსუ-ში დაიწყო მიზნობრივი სამეცნიერო პროგრამის განხორციელება, რომლის ფარგლებშიც ხდებოდა სტუდენტების მონაწილეობით სამეცნიერო პროექტების დაფინანსება. ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტზე 2015 წელს დაფინანსდა 16 სამეცნიერო პროექტი, რომელშიც 56 სტუდენტი მონაწილეობდა. საფაკულტეტო კონფერენციაზე შესაბამის სექციებზე წარმოდგენილი იყო მიზნობრივი პროექტების ფარგლებში მიღებული სამეცნიერო შედეგები; მოხსენებების ნაწილი წარმოადგინეს პროექტებში მონაწილე სტუდენტებმაც.

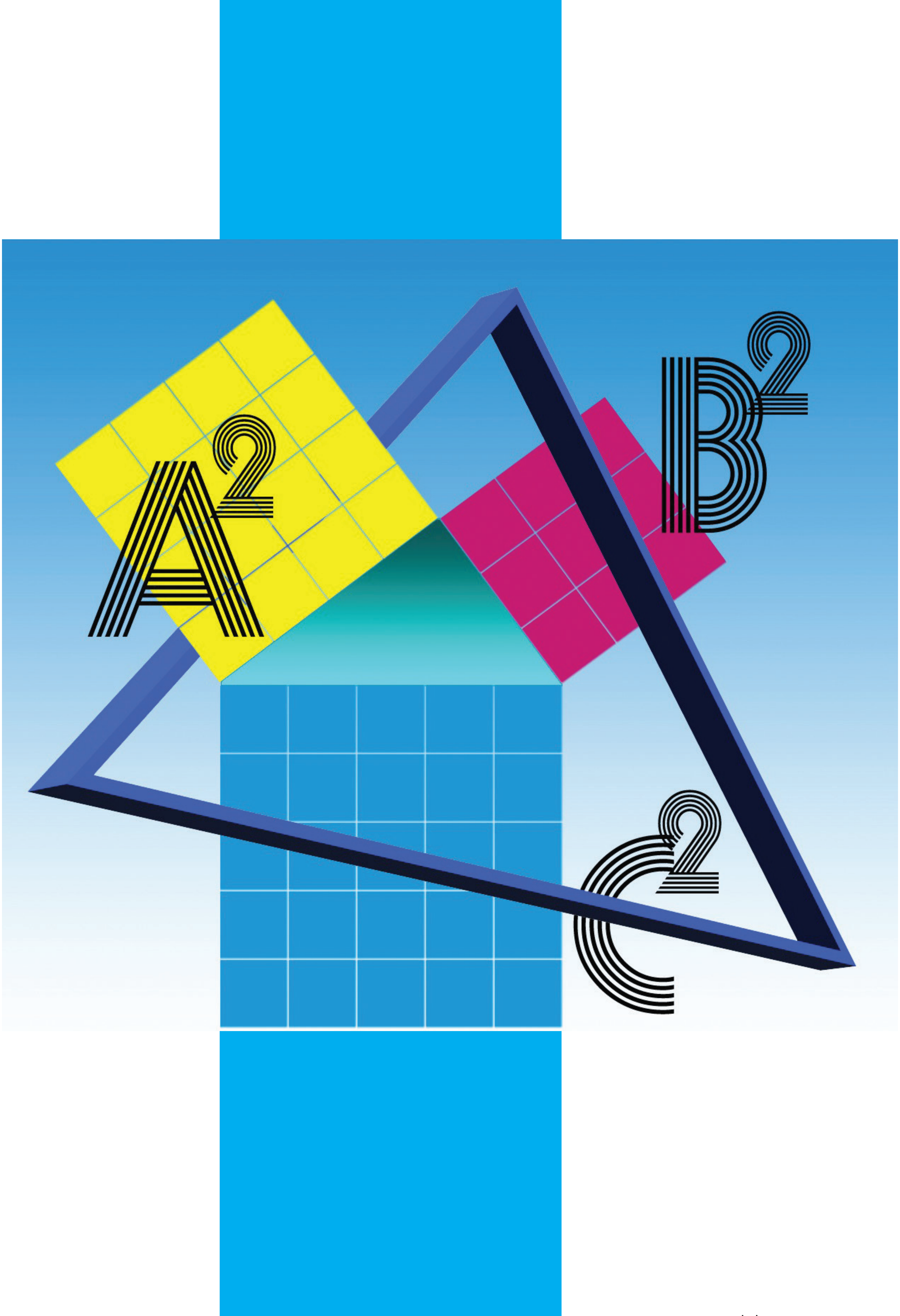
პროექტების შემაჯამებელი ანგარიშები წარმოდგენილი იყო პლენარულ სექციაზე, რომლითაც ტრადიციულად იხურება კონფერენცია.

წინა წლებში პლენარულ სესიაზე თითოეული დეპარტამენტის ხელმძღვანელი წარადგენდა დეპარტამენტის შემაჯამებელ სამეცნიერო ანგარიშს. 2016 წელს კი დეპარტამენტების სამეცნიერო ანგარიშების წარმოდგენა მოხდა სტენდური მოხსენების სახით, რაც უფრო ინფორმაციული და

აღქმადი აღმოჩნდა. კონფერენციაზე დამსწრე საზოგადოება ბევრ ახალ საინტერესო სამეცნიერო შედეგებს გაეცნო. შედეგების ნაწილი წარდგენილი ან მიღებული არის მაღალრეიტინგულ (ტომსონის კლასიფიკატორით იმპაქტ-ფაქტორის მქონე) სამეცნიერო გამოცემებში. შრომების დიდი ნაწილი შესრულებულია სხვადასხვა უცხოურ უნივერსიტეტებთან და სამეცნიერო ცენტრებთან სამეცნიერო კოლაბორაციის ფარგლებში.

ამგვარი დიდი და მრავალფეროვანი კონფერენციის გამართვა რთულია. კონფერენცია წარმატებული რომ იყოს ყოველწლიურად ხდება ფორმატის დახვეწა მიღებული გამოცდილების საფუძველზე. ბოლო ხანებში ორი მოსაზრება ყველაზე უფრო ხშირად განიხილება: 1) ზოგიერთი სექციის საერთაშორისო კონფერენციად გარდაქმნა; 2) ზოგი დიდი დარგობრივი სექციის ქვესექციებად დაყოფა და დარგობრივი პლენარული სესიების ორგანიზება. ამ ფონზე 2017 წლისთვის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ტრადიციული კონფერენცია კიდევ უფრო წარმომადგენლობითი იქნება.

მომზადებულია
თსუ საზოგადოებასთან ურთიერთობის
სამსახურის მასალების მიხედვით


A^2
B^2
C^2

ინსტრუქცია ავტორებისთვის

1. სტატია აკრეფილი უნდა იყოს Sylfaen-ში, შრიფტის ზომა 11, სტრიქონებს შორის ინტერვალი 1,5, სიტყვებს შორის 1 ინტერვალი, გვერდის მინდვრები - Normal.
2. სტატია ფორმდება შემდეგნაირად: სტატიის სათაური (შრიფტის ზომა 14 Bold), სახელი და გვარი (შრიფტის ზომა 12 Bold), წოდება, თანამდებობა, სამუშაო ადგილი (შრიფტის ზომა 11).
3. ავტორ(ებ)ის/მთარგმნელ(ებ)ის ფოტოსურათი თავსდება სათაურის გვერდით მარჯვენა მხარეს.
4. ფორმულები და სიმბოლოები იკრიფება Microsoft Eq.-ით. თუ ფორმულა ორ სტრიქონს იკავებს უნდა გაიყოს (რედაქტირების გაადვილების მიზნით).
5. ქვესათაური გამოიყოფა იმავე ზომის Bold შრიფტით. ტექსტი გრძელდება იმავე სტრიქონზე.
6. აბზაცისათვის გამოიყენება Tab.
7. ნახატები, ნახაზები, ცხრილები და სხვა არატექსტური გამოსახულებები უნდა იყოს მაღალი გარჩევადობის ნახატის ტიპის ჩანართები. ისინი უნდა იყვნენ გადანომრილები, შესაბამისი მითითება გაკეთდება ტექსტში (შინაარსობრივი და ვიზუალური მხარის კორექტირებისათვის). გრაფიკულ გამოსახულებაზე, მაგ. ნახ. 1, წარწერა კეთდება 10 ზომის შრიფტით.
8. ლიტერატურის ციტირება ხდება ქრონოლოგიურად (და არა ავტორის გვარების ალფავიტის შესაბამისად): სტატიის ბოლოს, შუაში, იწერება - ლიტერატურა, [] სიმბოლოში იწერება ნომერი (ასეთივე აღნიშვნა იხმარება ტექსტში), გვარი და ინიციალები, წიგნის, სტატიის (ან ინტერნეტ რესურსის მისამართი) სრული ბიბლიოგრაფიული მონაცემები: გამომცემლობა (წიგნის შემთხვევაში), ტომი, ნომერი, გვერდები, წელი. ლიტერატურის მითითება ხდება იმ ენაზე, რომელი წყაროთიც ავტორი სარგებლობდა.
9. ტექსტური ჩანართები გაკეთდეს Tex Box-ის საშუალებით. რომელშიდაც, ისევე როგორც მთელი ტექსტის კიდეები სწორდება მარჯვნივ და მარცხვივ ფორმატირების საშუალებით.
10. Word ფაილთან ერთად ავტორმა უნდა წარმოადგინოს PDF ფაილიც, რითაც მიანიშნებს რედაქტორს სტატიის ვიზუალურ მხარეზე. აქ იგულისხმება ის, რომ ჩანართებმა არ უნდა დაიკავოს გვერდის მნიშვნელოვანი ნაწილი, ე.ი. ნახატის ტიპის ჩანართები არ უნდა იყოს დიდი ან ბევრი, ან არ დარჩეს გვერდზე ტექსტის გარეშე ბევრი თავისუფალი ადგილი).
11. გვერდები არ ინომრება.
12. ტექსტში, თეორემა, დებულება, განმარტება ან სხვა მნიშვნელოვანი ცნება (ავტორის შეხედულებისამებრ) გამოიყოფა *Italic*-ით. შრიტის განსხვავებული ფერი ტექსტში არ იხმარება.
13. თეორემის, დებულების დამტკიცების დაწყება ან დამთავრება რაიმე ნიშნით არ გამოიყოფა.
14. სტატიას ბოლოში, მარჯვენა კუთხეში 10 ზომის შრიფტით მიუთითეთ ავტორის ელექტრონული მისამართი. კორპორაციული ელექტრონული ფოსტის გამოყენება სავალდებულოა თსუ თანამშრომლებისთვის.

ISSN 2298-0938