avtorTa stili daculia

მ. ამაღლობელი, ვ. მაზუროვი

ალგებრის კურსი
ნაწილი I

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

2009

კურსი განკუთვნილია მათემატიკური და საბუნებისმეტყველო პროფილის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის და მასში მოცემულია ალგებრის საფუძვლები, რაც წლების განმავლობაში ავტორების მიერ იკითხებოდა ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის და ნოვოსიბირსკის უნივერსიტეტების მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტებზე.

სახელმძღვანელო "ალგებრის კურსი, ნაწილი I" მოიცავს შემდეგ თემებს: ალგებრული სტრუქტურები, კომპლექსური რიცხვები, წრფივ განტოლებათა სისტემები, კვადრატულ მატრიცთა რგოლი, კვადრატულ მატრიცთა დეტერმინანტები, ვექტორული სივრცეები და წრფივი ასახვები. განსაკუთრებული ყურადღება აქვს დათმობილი ალგებრულ ალგორითმებს (ინფორმატიკის და პროგრამირების სასწავლო კურსებზე ორიენტაციით).

ავტორების შესახებ

მიხეილ ამაღლობელი.

დაიბადა 1960 წელს. 1982 წელს დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი. 1983 წელს დაიწყო მუშაობა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, სადაც მუშაობს დღემდე ალგებრა-გეომეტრიის კათედრის პროფესორად. 1993 წელს დაიცვა საკანდიდატო, ხოლო 2001 წელს სადოქტორო დისერტაციები რუსეთის აკადემიის ციმბირის განყოფილების მათემატიკის ინსტიტუტში. ორი მონოგრაფიისა და 40-მდე სამეცნიერო ნაშრომის ავტორია ჯგუფთა თეორიასა და ალგებრის ალგორითმულ პრობლემებში.

ვიქტორ მაზუროვი.

დაიბადა 1943 წელს. 1965 წელს დაამთავრა ურალის სახელმწიფო უნივერსიტეტი (ქ. სვერდლოვსკი). 1965 წელს დაიწყო მუშაობა საბჭოთა კავშირის მეცნიერებათა აკადემიის ციმბირის განყოფილების მათემატიკის ინსტიტუტში (ახლა რუსეთის მეცნიერებათა აკადემია), სადაც დღემდე მუშაობს ალგებრის განყოფილების გამგედ. 1967 წელს დაიცვა საკანდიდატო, ხოლო 1973 წელს სადოქტორო დუსერტაციები. 2003 წელს არჩეულია რუსეთის აკადემიის წევრ-კორესპონდენტად. 1967 წლიდან დღემდე შეთავსებით მუშაობს ნოვოსიბირსკის სახელმწიფო უნივერსიტეტში. ამჟამად მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის ალგებრისა და ლოგიკის კათედრის გამგეა. 200-ზე მეტი სამეცნიერო ნაშრომის ავტორია ჯგუფთა თეორიასა და ალგებრის ალგორითმულ პრობლემებში.

კურსის პროგრამა

1. ალგებრული სტრუქტურები

შესავალი: ალგებრული ოპერაცია, ალგებრული სტრუქტურა, იზომორფიზმი, ნატურალური რიცხვები. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი, კომბინატორიკის ელემენტები. ბინომის ნატურალური ხარისხი. ნატურალურ, მთელ, რაციონალურ და ნამდვილ რიცხვთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების თვისებები. ჯგუფი, რგოლი, ველი: აქსიომატიკა, მაგალითები, ქვეჯგუფი, ქვერგოლი, ქვეველი. ნაშთთა კლასების რგოლები. რგოლის ნულის გამყოფები. ველის მახასიათებელი. იდეალები და რგოლთა ჰომომორფიზმები. კომპლექსურ რიცხვთა ველი: განსაზღვრება, წარმოსახვითი ერთეულის, კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების, მოდულის და არგუმენტის თვისებები. კომპლექსური რიცხვების გამრავლება ტრიგონომეტრიული ფორმით. მუავრის ფორმულა კომპლექსურ რიცხვთა ველში $x^n - \alpha$ განტოლების ამოხსნისათვის. კომპლექსურ კოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლებები.

2. წრფივ განტოლებათა სისტემები. კვადრატულ მატრიცთა რგოლი

წრფივ განტოლებათა სისტემები ველის მიმართ. სისტემის ამონახსნი. სისტემის მატრიცი და გაფართოებული მატრიცი. წრფივ განტოლებათა სისტემების ექვივალენტობა. წრფივ განტოლებათა სისტემების (მატრიცთა სტრიქონების) ელემენტარული გარდაქმნები. წრფივ განტოლებათა სისტემის (მისი გაფართოებული მატრიცის) სტრიქონთა ელემენტარული გარდაქმნებით (მთავარ) საფეხურიან სახეზე მიყვანა. საფეხურიანი წრფივ განტოლებათა სისტემების გამოკვლევა. სისტემის ზოგადი ამონახსნი. გაუსის მეთოდის ზოგიერთი შედეგი. გაუსის მეთოდის გამოყენების მაგალითები. მატრიცთა შეკრება, გამრავლება და მატრიცის სკალარზე ნამრავლი. კვადრატულ მატრიცთა რგოლი ველის მიმართ: აქსიომების შემოწმება. მატრიცთა ტრანსპონირება. ელემენტარული გარდაქმნების მატრიცები.

3. კვადრატულ მატრიცთა დეტერმინანტები

მეორე რიგის დეტერმინენტები. n-ური რიგის ჩასმები, მათი წყვილადობა. კვადრატულ $(n \times n)$ მატრიცთა დეტერმინანტები. დატერმინანტის თვისებები: საბაზო 1–4 თვისებები და მათი შედეგები. დეტერმინანტთა გამოთვლა. დეტერმინანტის ფუნქციის საბაზო თვისებებით დახასიათება. დეტერმინანტის გამოთვლის დაყვანა უფრო დაბალი რიგის დატერმინანტის გამოთვლაზე. ვანდერმონდის დეტერმინანტი. მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტი. დატერმინანტთა ზოგიერთი გამოყენება: კრამერის წესი, შებრუნებული მატრიცი, მატრიცული განტოლებები.

4. ვექტორული სივრცეები

ვექტორული სივრცე ველის მიმართ: აქსიომები, მაგალითები. ვექტორული სივრცე როგორც ალგებრული სტრუქტურა. ვექტორთა სისტემის წრფივი კომბინაცია და წრფივი გარსი, ვექტორთა სისტემების წრფივი გამოსახვა, ექვივალენტური სისტემები: ამ ცნებებს შორის კავშირი, სისტემების ელემენტარული გარდაქმნები. ვექტორთა სისტემის ბაზისი და რანგი. მატრიცის მთავარი საფეხურიანი სახის ერთადერთობა. სასრულგანზომილებიანი ვექტორული სივრცე: ბაზისი, საკოორდინატო სტრიქონი, ნებისმიერი სივრცის იზომორფიზმი სტრიქონთა სივრცესთან. ქვესივრცე: ქვესივრცის ბაზისის ჩართვა სივრცის ბაზისში, ქვესივრცეთა თანაკვეთა და ჯამი, მათ განზომელებებს შორის კავშირი. მატრიცის რანგი – ექვივალენტური განსაზღვრებები წრფივად დამოკიდებულების და საბაზისო მინორების ტერმინებში. მატრიცთა ნამრავლის რანგი. წრფივ განტოლებათა სისტემები: თავსებადობის კრიტერიუმი, ზოგადი ამონახსნი – განსაზღვრება და პოვნა, ნებისმიერი სისტემის კავშირი ერთგვაროვანთან. ერთგვაროვანი სისტემები: ამონახსნთა სივრცე, ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემები. სტრიქონთა სივრცის ნებისმიერი ქვესივრცის მოცემა წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სივრცის სახით, ქვესივრცეთა ჯამისა და თანაკვეთის ბაზისების პოვნისათვის გამოყენება. წრფივი ასახვა (ოპერატორი): განსაზღვრება, ანასახი, ბირთვი, რანგი და დეფექტი, მათ შორის კავშირი. წრფივი ასახვების ჯამი და ნამრავლი, ასახვის სკალარზე

ნამრავლი: ამ ოპერაციების თვისებები. წრფივი ასახვის მატრიცი. წრფივ განტოლებათა სისტემები წრფივი ასახვების თვალსაზრისით. ფრედჰოლმის თეორემები.

5. პოლინომთა რგოლები

პოლინომები რგოლის მიმართ. პოლინომთა რგოლი. ნაშთით გაყოფა. პოლინომის გამყოფები. ორი პოლინომის უდიდესი საერთო გამყოფი: არსებობა და გამოთვლა (ევკლიდეს ალგორითმი). თანამარტივი პოლინომები. დაუყვანადი პოლინომები, პოლინომის დაშლა დაუყვანად მამრავლებად. მნიშვნელობები და ფესვები. ბეზუს თეორემა. წარმოებული და ჯერადი ფესვები. ტეილორის ფორმულა. ლაგრანჟის და ლაგრაჟ–სილვესტრის საინტერპოლაციო ფორმულები. პოლინომის ფესვის არსებობა ველის გაფართოებაში. პოლინომის დაშლის ველი. პოლინომის დაშლა წრფივ მამრავლებად. ვიეტის ფორმულები. რამდენიმე უცნობის პოლინომები, სიმეტრიულ პოლინომთა რგოლი. სიმეტრიული პოლინომების გამოსახვა ძირითადი სიმეტრიული პოლინომების საშუალებით. კომპლექსურ რიცხვთა ველის ალგებრულად ჩაკეტილობა. კომპლექსურ და ნამდვილ რიცხვთა ველზე დაუყვანადი პოლინომები. რაციონალურ რიცხვთა ველზე და მთელ რიცხვთა რგოლზე პოლინომების დაყვანადობებს შორის კავშირი. მთელ კოეფიციენტებიანი პოლინომის დაყვანადობის ალგორითმული ამოხსნადობა. მთელ კოეფიციენტებიანი პოლინომის დაყვანადობის კრიტერიუმი (აიზენშტაინის კრიტერიუმი). მთელობის არის ველში ჩადგმა. რაციონალურ წილადთა ველი.

6. ვექტორული სივრცეების წრფივი გარდაქმნები

წრფივი გარდაქმნის განსაზღვრება და მაგალითები. წრფივი გარდაქმნის მატრიცი. ვექტორის ანასახის კოორდინატები. წრფივ გარდაქმნათა და მატრიცთა ალგებრებს შორის კავშირი. წრფივ გარდაქმნათა მატრიცებს შორის კავშირი სხვადასხვა ბაზისში. მატრიცთა მსგავსობა. წრფივი გარდაქმნის ანასახი და ბირთვი, რანგი და დეფექტი. გადაუგვარებელი გარდაქმნები. ინვარიანტული ქვესივრცე და წრფივი გარდაქმნის შეზღუდვა ინვარიანტულ ქვესივრცეზე. საკუთრივი ვექტორები, საკუთრივი მნიშვნელობები, მახასიათებელი

ფესვები. პოლინომის მნიშვნელობები მატრიცზე და წრფივ გარდაქმნაზე. ჰამილტონ–კელის თეორემა. ბირთვული გაშლა. ფესვური ქვესივრცეები, სივრცის გაშლა ფესვური ქვესივრცეების პირდაპირ ჯამად. ნილპოტენტური წრფივი გარდაქმნა, სივრცის გაშლა ციკლური ქვესივრცეების პირდაპირ ჯამად. სივრცის ჟორდანის ბაზისი. მატრიცის ჟორდანისეული ფორმა. მატრიცების და წრფივი გარდაქმნების ფუნქციები, მათი მნიშვნელობების წარმოდგენა პოლინომების მნიშვნელობებით.

7. ევკლიდური და უნიტარული სივრცეები და მათი წრფივი გარდაქმნები

ევკლიდური და უნიტარული სივრცეები: აქსიომები, მაგალითები. ორთოგონალიზაციის პროცესი, ორთონორმირებული ბაზისები, სივრცის ორთოგონალური დამატება. შეუღლებული გარდაქმნები: მატრიცებს შორის კავშირი, ნორმალური გარდაქმნები, მათი საკუთრივი ვექტორების თვისებები, ნორმალური გარდაქმნის მატრიცის კანონიკური სახე. უნიტარული, ორთოგონალური და სიმეტრიული გარდაქმნები და მატრიცები. პოლარული დაშლა. სინგულარული რიცხვები.

8. კვადრატული ფორმები

კვადრატული ფორმის მატრიცი, მისი ცვლილება უცნობთა წრფივი გარდაქმნის შემდეგ. დიაგონალურ სახეზე მიყვანის ლაგრანჟის ალგორითმი. ინერციის კანონი. კვადრატულ ფორმათა კლასიფიკაცია. დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმები. მთავარ ღერძებზე დაყვანა. ორი ფორმის ერთდროული დიაგონალიზაცია.

9. ჯგუფთა თეორიის საწყისები

ჯგუფთა შემდგომი მაგალითები. ჩასმათა ჯგუფები: ციკლები, დამოუკიდებელი ციკლები, ჩასმის დაშლა დამოუკიდებელ ციკლებად, ჩასმის დეკრემენტი, ჩასმის წყვილადობა, ჩასმის დაშლა ტრანსპოზიციათა ნამრავლად, ჩასმის წყვილადობასთან კავშირი, ჩასმის ნიშანი, მისი მულტიპლიკაციურობა, ჩასმის რიგი. ჯგუფები გეომეტრიაში

და ფიზიკაში. სიმრავლის მიერ წარმოქმნილი ქვეჯგუფი. მოსაზღვრე კლასებად დაყოფა, მაგალითები. ლაგრანჟის თეორემა. ფაქტორ-ჯგუფები, მაგალითები. ჰომომორფიზმები: მაგალითები, ძირითადი თეორემა ჰომომორფიზმების შესახებ. ფაქტორ-ჯგუფთა გამოთვლის მაგალითები.

10. ალგებრის ძირითადი სტრუქტურები

ჯგუფის მოქმედება სიმრავლეზე, მოქმედების მაგალითები. სასრული ჯგუფის ჩადგმა ჩასმათა ჯგუფში. ჩასმათა შეუღლებულობის კრიტერიუმი. თეორემები ჯგუფთა ჰომომორფიზმების შესახებ: შესამასობის, იზომორფიზმის პირველი და მეორე თეორემები. ჯგუფთა პირდაპირი ნამრავლი. სასრული რანგის მქონე თავისუფალი აბელური ჯგუფი და მისი ქვეჯგუფები. სასრულად წარმოქმნილი აბელური ჯგუფების აგებულება. სილოვის თეორემა. pq რიგის ჯგუფების აღწერა. კომუტატორები და კომუტანტი, აბელურ ფაქტორ-ჯგუფებთან კავშირი. ამოხსნადი ჯგუფები. სასრულ ამოხსნად ჯგუფში მარტივი რიგის ციკლურ ფაქტორებიანი სუბნორმალური მწკრივის არსებობა. S_4 ჯგუფის კომუტანტთა მწკრივი. S_n ჯგუფის ამოუხსნადობა, როცა $n \geq 5$. ცენტრი. ნილპოტენტური ჯგუფები. სასრული p-ჯგუფის ნილპოტენტურობა. რგოლები, მაგალითები. იდეალი რგოლში, ფაქტორ-რგოლი. რგოლთა პირდაპირი ჯამი. ნაშთთა კლასების რგოლის პრიმარული რგოლების პირდაპირ ჯამად დაშლა. ნაშთთა კლასების რგოლის შებრუნებადი ელემენტები, ეილერის ფუნქცია. ველები, მაგალითები. ველთა გაფართოებები, გაფართოების ხარისხი, გაფართოებათა კოშკის ხარისხი. ალგებრული გაფართოება. მარტივი გაფართოების სტრუქტურა. დაშლის ველებზე იზომორფიზმის გაგრძელება. ველის ალგებრული ჩაკეტვა. ნორმალური გაფართოებები და მათი თვისებები. სეპარაბელური გაფართოებები. თეორემა პრიმიტიული ელემენტების შესახებ. სასრული ველები: არსებობა, ერთადერთობა, ავტომორფიზმები, ქვეველები. გალუას გაფართოება, გალუას ჯგუფი. გალუას თეორიის ძირითადი თეორემა. არტინის თეორემა უძრავი ქვეველის შესახებ. თეორემა ციკლური გაფართოების შესახებ. განტოლებათა რადიკალებში ამოხსნადობის კრიტერიუმი.

ფარგლით და სახაზავით აგებები, მათი ალგებრული ექვივალენტი. წრის კვადრატურა, კუბის გაორკეცება, კუთხის ტრისექცია.

ლიტერატურა

1. ლომაძე გ. ლექციები უმაღლეს ალგებრაში. თბილისი, 2006.
2. ქემხაძე შ. უმაღლესი ალგებრა. თბილისი, 1972.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, 15-е изд., стер., СПб.: Издательство “Лань”, 2006.
4. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре, 2-е изд., стер., СПб.: Издательство “Лань”, 2006.
5. Ван дер Варден Б.А. Алгебра, 3-е изд., стер., СПб.: Издательство “Лань”, 2006.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру (в трех частях). М.: Физматлит, 2001.
7. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
8. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп, 4-е изд., перер., М.: Физматлит, 1996.
9. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
10. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.
11. Шафаревич И.Р. Основные понятия алгебры. М.: ВИНИТИ, 1986; РХД, 1993.
12. Чуркин В.А. Жорданова классификация конечномерных линейных операторов. Новосиб. гос. ун-т, Новосибирск, 1991.
13. Кострикин А.И. (ред.) Сборник задач по алгебре. М.: Физматлит, 2007.
14. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, 15-е изд, перер., СПб.: Издательство “Лань”, 2005.
15. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003.

თავი I

ალგებრული სტრუქტურები

შესავალი

თუ კი საერთოდ ზუსტად შეიძლება განისაზღვროს ალგებრის საგანი, მაშინ ეს ელგებრული სტრუქტურების შესწავლაა – სიმრავლეების მათში განსაზღვრული ოპერაციებით. ოპერაციის ქვეშ M სიმრავლეზე გაიგება ნებისმიერი

$$f : M \times M \to M$$

ასახვა, ე.ი. წესი, რომლის თანახმად M სიმრავლის ნებისმიერ დალაგებულ ელემენტთა (a, b) წყვილს ცალსახად შეესაბამება ამ სიმრავლის რომელიღაც c ელემენტი, ბინარული f ოპერაციის მნიშვნელობა a, b ელემენტთა წყვილზე მოხერხებულია ჩაიწეროს არა $f((a, b)) = c$ სახით, როგორც სხვა ოპერაციებისათვის, არამედ $afb = c$ სახით – ეს აკეთებს 5 სიმბოლოს ეკონომიას და კარგად არის შეთანხმებული რიცხვითი ოპერაციების კანონიკურ აღნიშვნებთან: ჩვენ ვწერთ $5 + 7 = 12$, $5 \cdot 7 = 35$ და არა $+((5, 7)) = 12$, $\cdot((5, 7)) = 35$. გამოდგება აგრეთვე ნებისმიერი სხვა სიმბოლოც: $*$, $\circ$, $\cdots$. M სიმრავლის ელემენტები შეიძლება იყოს როგორც რიცხვები, ასევე სხვა სახის ობიექტები.

ალგებრული სტრუქტურების კარგად ცნობილი და მნიშვნელოვანი მაგალითებია შემდეგი რიცხვითი სიმრავლეები შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებით:

$\mathbb{N}$ – ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე,

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ – არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე,

$\mathbb{Z}$ – მთელ რიცხვთა სიმრავლე,

$\mathbb{Q}$ – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე,

$\mathbb{R}_0$ – არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე,

$\mathbb{R}$ – ყველა ნამრვილ რიცხვთა სიმრავლე.

ხაზი გავუსვათ იმას, რომ შეკრებისა და განრავლების ოპერაციები განსაზღვრულია არა ყველა რიცხვით სიმრავლეში. მაგალითად,

უარყოფით რიცხვთა სიმრავლეში არ არის განსაზღვრული გამრავლების ბინარული ოპერაცია, რადგან ორი უარყოფითი რიცხვის ნამრავლი დადებითი რიცხვია. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში არ არის განსაზღვრული არც შეკრება და არც გამრავლება, რადგან ორი ირაციონალური რიცხვის ჯამი და ნამრავლი შეიძლება იყოს რაციონალური.

ბინარულ $f : M \times M \to M$ ოპერციას ეწოდება **ასოციაციური**, თუ $(afb)fc = af(bfc)$ ყველა $a, b, c \in M$, და **კომუტაციური**, თუ $afb = bfa$ ყველა $(a, b) \in M$.

მაგალითები. 1) ბინარული ოპერაცია მთელ რიცხვთა სხვაობა

$$- : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad (a, b) \mapsto a - b,$$

არც ასოციაციურია და არც კომუტაციური.

2) ბინარული ოპერაცია

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto a^b,$$

(ხარისხში აყვანა) არაასოციაციურია და არაკომუტაციური; ბინარული ოპერაცია

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto a^b + b^a,$$

კომუტაციურია, მაგრამ არ არის ასოციაციური $((1f2)f3) \neq 1f(2f3)$, ე.ი. ასოციაციურობის და კომუტაციურობის მოთხოვნები დამოუკიდებელია.

მოვიყვანოთ ალგებრული სტრუქტურის არარიცხვითი მაგალითი.

მაგალითი. ვთქვათ M, N, P – რაიმე სიმრავლეებია და $f : M \to N$, $g : N \to P$ – რაიმე ასახვებია. f და g ასახვების **ნამრავლი**, ან **კომპოზიცია**, ეწოდება

$$g \circ f : M \to P$$

ასახვას, რომელიც განსაზღვრულია ფორმულით

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in M,$$

ე.ი. f-ის და g-ს მიმდევრობითი შესრულების შედეგი. კერძოდ, როცა $M = N = P$, ჩვენ ვღებულობთ ოპერაციას M სიმრავლის თავის თავში ყველა ასახვის სიმრავლეზე. ეს ოპერაცია იძლევა ალგებრული

სტრუქტურების უამრავ მაგალითს, რომლებსაც **ჯგუფებს** უწოდებენ.

თუ M არაცარიელი სიმრავლეა, n ნატურალური რიცხვია, მაშინ M^n-ით აღვნიშნოთ ყველა დალაგებულ მიმდევრობათა სიმრავლე $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in M$, $1 \leq i \leq n$. M სიმრავლეზე **n-არული** ("n ადგილიანი") **ალგებრული ოპერაციის** ქვეშ გაიგება ნებისმიერი ასახვა $f : M^n \to M$, ხოლო რიცხვ n-ს ეწოდება f **ალგებრული ოპერაციის "ადგილიანობა"**. ისტორიულად თავდაპირველად გაჩნდნენ ბინარული $(n = 2)$ და უნარული $(n - 1)$ ოპერაციები. ნულარული ოპერაციები M სიმრავლის ფიქსირებული ელემენტებია, რადგან M^0-ის ქვეშ გაიგება ერთელემენტიანი სიმრავლე. ტერნარული $(n = 3)$ ოპერაციის მაგალითს იძლევა M სიმრავლის N სიმრავლეზე ყველა ბიექციურ ასახვათა სიმრავლე ოპერციით $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_3$.

1. რიცხვები

1.1. ნატურალური რიცხვები. მივიჩნევთ, რომ ჩვენთვის ცნობილია **ნატურალურ რიცხვთა** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ სიმრავლე. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე შეიძლება აღვწეროთ **ინდუქციურად** (induction ლათინური სიტყვაა და ნიშნავს "მიყვანას"): $1 \in \mathbb{N}$ და თუ $n \in \mathbb{N}$, მაშინ $n + 1 \in \mathbb{N}$. აქედან გამომდინარეობს

1.1.1. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი. ვთქვათ ყოველი n-სთვის $(n \in \mathbb{N})$ გვაქვს რაიმე $A(n)$ წინადადება. თუ $A(1)$ წინადადება სამართლიანია და ყოველი ნატურალური n-სათვის $A(n)$-ის სამართლიანობიდან გამომდინარეობს $A(n+1)$-ის სამართლიანობა, მაშინ $A(n)$ წინადადება სამართლიანი ყველა n-სათვის $(n \in \mathbb{N})$.

1.1.2. შენიშვნა. ამ პრინციპზე დაფუძნებულია მტკიცებათა მეთოდი, რომელსაც **მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი** ეწოდება. მას ასეთი ფორმით აწარმოებენ: 1) ამტკიცებენ (ამოწმებენ) $A(1)$ წინადადების სამართლიანობას ("ინდუქციის ბაზისი") და 2) ვარაუდობენ, რომ $A(n)$ სამართლიანია ნებისმიერი მოცემული n-სათვის $(n \in \mathbb{N})$ და ამ ვარაუდის საფუძველზე ამტკიცებენ $A(n + 1)$-ის სამართლიანობას ("ინდუქციის ბიჯი").

1.1.3. შენიშვნა. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი შესაძლებელია გამოვიყენოთ დებულებათა სასრული $A(k)$ $(1 \leq k \leq n)$ ერთობლიობისათვის: თუ $A(1)$ სამართლიანია და ყოველი k-სათვის, როცა $1 \leq k \leq n-1$, $A(k)$-ს სამართლიანობიდან გამომდინარეობს $A(k+1)$-ის სამართლიანობაც, მაშინ სამართლიანია $A(k)$ ერთობლიობის ყველა დებულება.

მართლაც, შევავსოთ სასრული $A(k)$ $(1 \leq k \leq n)$ ერთობლიობა $A(k)$ $(k \geq 1)$ ერთობლიობამდე ისე, რომ ყოველი k-სათვის, როცა $k \geq n+1$, მივიღოთ $A(k) = A$, სადაც A რაიმე ფიქსირებული მართებული დებულებაა. ადვილად მოწმდება, რომ $A(k)$ $(k \geq 1)$ ერთობლიობას გააჩნია 1) და 2) თვისებები და ამიტომ ყველა $A(k)$ $(k \geq 1)$ სამართლიანია. კერძოდ, სამართლიანია ყველა $A(1), A(2), \ldots, A(n)$ დებულება.

1.1.4. შენიშვნა. ზოგჯერ $A(n)$ წინადადება n-ის ზოგიერთი ნატურალური მნიშვნელობისათვის ან მცდარია, ან აზრი არა აქვს, მაგრამ შესაძლებელია მისი სამართლიანობის დამტკიცება m-დან დაწყებული ყოველი ნატურალური n-სათვის. მეორეს, მხრივ, ზოგჯერ $A(n)$-ის დამტკიცება შესაძლებელია n-ის არა მარტო ნატურალური მნიშვნელობებისათვის, არამედ მთელი n-ებისათვისაც, მაგალითად, დეწყებული ნულიდან ან n-ის რომელიმე მთელი არაუარყოფითი მნიშვნელობიდან. ცხადია, ინდუქციით დამტკიცება გამოყენებადია ამ შემთხვევაშიაც, მხოლოდ დამტკიცების პირველი ნაბიჯი იქნება $A(m)$ წინადადების შემოწმება. დამტკიცების მეორე ნაბიჯის ჩატარების შემდეგ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $A(n)$ წინადადება სამართლიანია ნებისმიერი მთელი n-სათვის, $n \geq m$.

1.1.5. ნატურალურ რიცხვთა შეკრების $(+)$ და გამრავლების $(\cdot)$ ოპერაციებს გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

(შჩ) თუ $x, y \in \mathbb{N}$, მაშინ $x + y \in \mathbb{N}$
($\mathbb{N}$-ის ჩაკეტილობა შეკრების მიმართ);
(გჩ) თუ $x, y \in \mathbb{N}$, მაშინ $x \cdot y \in \mathbb{N}$
($\mathbb{N}$-ის ჩაკეტილობა გამრავლების მიმართ);
(შკ) თუ $x, y \in \mathbb{N}$, მაშინ $x + y = y + x$
(შეკრების კომუტაციურობა $\mathbb{N}$-ში);

(გკ) თუ $x, y \in \mathbb{N}$, მაშინ $xy = yx$
(გამრავლების კომუტაციურობა $\mathbb{N}$-ში);
(შა) თუ $x, y, z \in \mathbb{N}$, მაშინ $(x + y) + z = x + (y + z)$
(შეკრების ასოციაციურობა $\mathbb{N}$-ში);
(გა) თუ $x, y, z \in \mathbb{N}$, მაშინ $(xy)z = x(yz)$
(გამრავლების ასოციაციურობა $\mathbb{N}$-ში);
(მდ) თუ $x, y, z \in \mathbb{N}$, მაშინ $x(y + z) = xy + xz$
(მარცხენა დისტრიბუციულობა);
(დმ) თუ $x, y, z \in \mathbb{N}$, მაშინ $(x + y)z = xz + yz$
(მარჯვენა დისტრიბუციულობა).
(ეა) $\mathbb{N}$-ში არსებობს **ერთეულოვანი ელემენტი**, ე.ი. ისეთი ელემენტი $e \in \mathbb{N}$, რომ ნებისმიერი x-სთვის $\mathbb{N}$-დან ადგილი აქვს ტოლობას:

$$xe = ex = x$$

(ერთეულის არსებობა);
ასეთი ელემენტი $\mathbb{N}$-ში არის რიცხვი 1.
(ბდ) $\mathbb{N}$-ის **ბუნებრივი დალაგებაა**:

$$1 < 2 < 3 < \cdots < n - 1 < n < n + 1 < \cdots ;$$

(მთ) ყოველ არაცარიელ $M \subseteq \mathbb{N}$ ქვესიმრავლეს გააჩნია უმცირესი ელემენტი, ე.ი. ისეთი ნატურალური რიცხვი $m \in M$, რომ $m \leq n$ ნებისმიერი n-სთვის M-დან (**მინიმალურობის თვისება**).

1.1.6. მინიმალურობის თვისებაზე დაფუძნებილია მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის ჩამოყალიბების შემდეგი ექვივალენტური ფორმა.

ინდუქციის პრინციპი. ვთქვათ ყოველი n-სათვის $(n \in \mathbb{N})$ გვაქვს რაიმე $A(n)$ წინადადება. ვიგულისხმოთ, რომ ჩვენ ვფლობთ წესს, რომელიც საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ $A(n)$-ის სამართლიანობა ნებისმიერი მოცემული n-სთვის იმ პირობით, რომ $A(k)$ სამართლიანია ყველა $k < n$-სთვის (კერძოდ, იგულისხმება, რომ შეგვიძლია შევამოწმოთ $A(1)$-ის სამართლიანობა). მაშინ $A(n)$ სამართლიანია ყველა n-სთვის $(n \in \mathbb{N})$. მართლაც, დავუშვათ რომ ქვესიმრავლე

$$M = \{m \mid m \in \mathbb{N}, \;\; A(m) \;\; \text{მცდარია}\} \subseteq \mathbb{N}$$

არაცარიელია. მინიმალურობის თვისების თანახმად M შეიცავს უმცირეს m_0 ელემენტს. მაშინ $A(m_0)$ წინადადება მცდარია, ხოლო $A(m)$ სამართლიანია ყველა $m < m_0$-სთვის. ეს კი ეწინააღმდეგება $A(m_0)$-ის სამართლიანობის დამტკიცების შესაძლებლობას. $\square$

ამ შემთხვევაშიაც მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დამტკიცება ორი ნაწილისაგან შედგება: 1) ამტკიცებენ (ამოწმებენ) $A(1)$-ის სამართლიანობას და 2) ვარაუდობენ, რომ $A(k)$ სამართლიანია ყველა $k < n$ ნებისმიერი მოცემული n-სთვის ($n > 1$) და ამტკიცებენ მის სამართლიანობას $k = n$-სთვის.

1.2. კომბინატორიკის ელემენტები. მომავალში ჩვენ დაგვჭირდება ზოგიერთი ცნება და ფაქტი, რომლებიც შეეხებიან სასრულ სიმრავლეებს. ვთქვათ მოცემულია სასრული M სიმრავლე, რომელიც შედგება n ელემენტისაგან. ეს ელემენტები შესაძლებელია გადანომრილ იქნას პირველი n ნატურალური $1, 2, \ldots, n$ რიცხვის საშუალებით და, რადგან ჩვენთვის საინტერესო საკითხებში სრულიად არ აქვს მნიშვნელობა იმას, თუ რა ბუნების ელემენტებისაგან შედგება M სიმრავლე, ამიტომ ჩვენ უბრალოდ მივიღებთ, რომ M-ის ელემენტებს წარმოადგენს თვით ეს რიცხვები: $M = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. სასრული რაოდენობის ელემენტებისაგან ხშირად გვიხდება სხვადასხვა კომბინაციის შედგენა და რაიმე წესით შედგენილი ყველა შესაძლო კომბინაციის რაოდენობის გამოანგარიშება. ასეთ ამოცანებს კომბინატორულს უწოდებენ, ხოლო მათემატიკის ნაწილს, რომელიც დასახელებული ამოცანების ამოხსნას შეისწავლის – კომბინატორიკას. კომბინატორიკაში მხოლოდ სასრული სიმრავლეებია განხილული. ამ პუნქტში განხილული იქნება ზოგიერთი უმარტივესი კომბინატორული ამოცანა.

1.2.1. გადანაცვლებები. გადანაცვლებათა რიცხვი. ვთქვათ $M = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ – n ელემენტთა (ან n სიმბოლოთა) რაიმე სასრული სიმრავლეა. **სასრულ სიმრავლეში დადგენილ რიგს მისი ელემენტების <u>გადანაცვლება</u> ეწოდება**. n ელემენტთა გადანაცვლების ზოგადი სახეა $i_1, i_2, \ldots, i_n$ სტრიქონი, სადაც ყოველი i_k არის $1, 2, \ldots, n$ რიცხვებიდან ერთი, ამასთან არც

ერთი ამ რიცხვებიდან არ გვხვდება ორჯერ. ერთელემენტიანი სიმრავლე შეიძლება დალაგდეს მხოლოდ ერთი გზით: სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი ითვლება პირველ ელემენტად. ორელემენტიანი $\{1,2\}$ სიმრავლის დალაგება რიგზე ორი ხერხით შეიძლება: $1\,2$, $2\,1$. სამელემენტიანი $\{1,2,3\}$ სიმრავლე რიგზე ექვსი ხერხით შეიძლება დალაგდეს: 123, 132, 213, 231, 312, 321. n ელემენტისაგან შედგენილ გადანაცვლებათა რიცხვს P_n-ით აღნიშნავენ. ჩვენ ვნახეთ, რომ $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $p_3 = 6$.

P_n-ის გამოსათვლელად იყენებენ რეკურენტულ ფორმულას

$$P_n = nP_{n-1}. \tag{1}$$

დავამტკიცოთ იგი. n ელემენტთა გადანაცვლების ზოგადი სახეა $i_1, i_2, \ldots, i_n$. i_1-ის ამორჩევა შეიძლება n სხვადასხვა ხერხით. თუ ის უკვე ამორჩეულია, მაშინ დაგვრჩება $n-1$ ელემენტი, რომელთაც ბოლო $n-1$ ადგილის დაკავება მოუხდებათ. ამის შესრულება P_{n-1} ხერხით შეიძლება (P_{n-1}-ის აზრის მიხედვით). სულ მიიღება n-ელემენტიანი სიმრავლის დალაგების nP_{n-1} ხერხი, ე.ი. $P_n = nP_{n-1}$.

(1) ფორმულიდან მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ P_n ტოლია პირველი n ნატურალური რიცხვის ნამრავლისა:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n. \tag{2}$$

მოკლედ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ ნამრავლს $n!$-ით აღნიშნავენ. ამიტომ $P_n = n!$ კითხულობენ "ენ ფაქტორიალი". დამატებით პირობად მიღებულია, რომ $P_0 = 0! = 1$.

1.2.2. წყობები. წყობათა რიცხვი. სიმრავლეს მისი ელემენტების დალაგების მოცემულ წესთან ერთად **დალაგებული სიმრავლე** ეწოდება. სასრული სიმრავლის ნებისმიერ დალაგებულ ქვესიმრავლეს **წყობა** ეწოდება (თვით სიმრავლეს ვთვლით დაულაგებელს, ამიტომ მისი ყოველი ქვესიმრავლე შეიძლება დალაგდეს რაიმე შესაძლო წესით).

ვთქვათ მოცემულია $M = \{1,2,3,4\}$. საჭიროა M-იდან გამოიყოს ორი ელემენტი და ეს ორი ელემენტი განსაზღვრული თანმიმდევრობით დალაგდეს. რამდენი ხერხით შეიძლება ამის გაკეთება? ასეთი ხერხია თორმეტი. მართლაც, პირველი ელემენტის ამორჩევა ოთხი

ხერხით შეიძლება, ხოლო მეორის ამორჩევა დანარჩენი სამიდან გვიხდება:

$$\begin{array}{ccc} 12, & 13, & 14 \\ 21, & 23, & 24 \\ 41, & 42, & 43. \end{array}$$

მოცემული n ელემენტისაგან m-ელემენტიან წყობათა რიცხვი A_n^m-ით აღინიშნება. ზემოთ ვნახეთ, რომ $A_4^2 = 12$.

წყობათა რაოდენობის გამოსათვლელად გამოიყენება რეკლურენტული ფორმულა:

$$A_n^1 = n \quad \text{და} \quad A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m, \;\; \text{როცა} \;\; 1 \leq m < n. \tag{3}$$

თუ გამოვალთ (3) ფორმულიდან, მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}\,. \tag{4}$$

(4) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი $n, m \in \mathbb{N}$, თუ $0 \leq m \leq n$.

ამ ფორმულის გამოყვანა შეიძლება (2) ფორმულიდანაც. მართლაც, ვთქვათ საჭიროა n-ელემენტიანი სიმრავლის დალაგება. მაშინ რაღაც m ელემენტს მოუხდება n ადგილიდან პირველი m ადგილის დაკავება. ეს შეიძლება შესრულდეს A_n^m ხერხით. თუ პირველი m ადგილი დაკავებულია, მაშინ დარჩება $n-m$ ელემენტი. ესენი დაიკავებენ უკანასკნელ $n-m$ ადგილს. ეს შეიძება შესრულდეს P_{n-m} ხერხით (P_{n-m}-ის აზრის მიხედვით), სულ მიიღება n-ელემენტიანი სიმრავლის დალაგების $A_n^m \cdot P_{n-m}$ ხერხი, ე.ი. $P_n = A_n^m \cdot P_{n-m}$, ანუ $n! = A_n^m(n-m)!$. აქედან $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. (4) ფორმულა ხშირად ჩაიწერება ასეთი სახითაც:

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1). \tag{5}$$

სავარჯიშო 1. აჩვენეთ, რომ $A_n^{n-1} = A_n^n = n!$.

სავარჯიშო 2. n ელემენტისაგან m-ელემენტიანი **წყობა განმეორებით** ეწოდება ნებისმიერ $i_1, i_2, \ldots, i_m$ სტრიქონს. დაამტკიცეთ, რომ მათი რიცხვი გამოითვლება ფორმულით $\widehat{A}_n^m = n^m$. კერძოდ, $\widehat{A}_n^n = \widehat{P}_n = n^n$.

1.2.3. ჯუფთებები. ჯუფთებათა რიცხვი. ჯუფთებათა რიცხვის თვისებები. კომბინატორიკაში სასრული სიმრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს **ჯუფთება** ეწოდება. განვიხილოთ $M = \{1, 2, 3\}$ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე. მათი რიცხვია რვა: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$. n ელემენტისაგან m-ელემენტიანი ჯუფთებათა რიცხვი C_n^m სიმბოლოთი აღინიშნება.

თუ გამოვითვლით n ელემენტისაგან m-ელემენტიან წყობებს, მივიღებთ, რომ $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$. საიდანაც

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}\,. \tag{6}$$

(6) ფორმულა ხშირად ჩაიწერება ასეთი სახით:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}\,. \tag{7}$$

თვისება 1. ნებისმიერი n-ისა და m-ისათვის $(0 \le m \le n)$ მართებულია $C_n^m = C_n^{n-m}$ ტოლობა. მართლაც,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = C_n^{n-m}.$$

თვისება 2. n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა რიცხვი 2^n-ის ტოლია:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n. \tag{8}$$

მითითება: ინდუქცია n-ის მიმართ.

თვისება 3. ნებისმიერი n-ისა და m-სათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ $0 \le m < n$ პირობას, მართებულია

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1} \tag{9}$$

ტოლობა. მართლაც,

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m} + \frac{n(n-1)\cdots(n-m)}{1\cdot 2\cdots m(m+1)} =$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(m+1)}{1\cdot 2\cdots m(m+1)} + \frac{(n-1)\cdots(n-m)}{1\cdot 2\cdots m(m+1)} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(m+1-n-m)}{1\cdot 2\cdots m(m+1)} =$$
$$= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+1)}{(m+1)!}.$$

სავარჯიშო 1. დაამტკიცეთ (9) ტოლობა უშუალო მსჯელობებით.

სავარჯიშო 2. n ელემენტისაგან m-ელემენტიანი **ჯუფთება განმეორებით** ეწოდება ნებისმიერ m-ელემენტიან ქვესიმრავლეს, რომელშიც დასაშვებია ერთი და იგივე ელემენტის განმეორებით ამორჩევა. დაამტკიცეთ, რომ მათი რიცხვი გამოითვლება ფორმულით $\widehat{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-2)!}$.

სავარჯიშო 3. დაამტკიცეთ, რომ n-ელემენტიანი სიმრავლე $\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$ სხვადასხვა ხერხით შეიძლება დაიყოს k რაოდენობა ქვესიმრავლედ, რომლებიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებენ: მათ საერთო ელემენტები არა აქვთ, შესაბამისად, $m_1, m_2, \ldots, m_k$ რაოდენობის ელემენტებს შეიცავენ და $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

ცხრილს, რომლის n-ური სტრიქონი შედგება $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ $(n+1)$ რიცხვისაგან $(n\in\mathbb{N}_0)$, **პასკალის სამკუთხედს** უწოდებენ ფრანგი მათემატიკოსის ბ. პასკალის (1623–1662) პატივსაცემად, რომელმაც დასახელებული ცხრილის თვისებები გამოიკვლია.

1.2.4. ბინომის ნატურალური ხარისხი (ნიუტონის ფორმულა). ჩვენთვის ცნობილია ფორმულები:

$$(a+b)^1 = a+b,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

თურმე ნებისმიერი ნატურალური n-სათვის სამართლიანი ფორმულები

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \text{ სადაც } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^0 = 1; \quad (10)$$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n=\sum\frac{n!}{t_1!\cdot t_m!}\,a_1^{t_1}\cdots a_m^{t_m}, \tag{11}$$

სადაც აჯამვა წარმოებს ყველა ისეთი $(t_1,t_2,\dots,t_m)$ m-სტრიქონების მიმართ, რომელთათვისაც $t_1+t_2+\cdots+t_m=n$.

(10) ტოლობას **ნიუტონის ფორმულა** ეწოდება, ხოლო მის მარჯვენა ნაწილს **ბინომის ხარისხის დაშლა**.

დამტკიცება. ა) ფორმულა (10), რომელიც სამართლიანია $n=1,2$, დავამტკიცოთ ინდუქციით n-ის მიმართ.

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{n+1}=(a+b)^n(a+b)=\\
&\quad=(C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^kb^k+\cdots+C_n^nb^n)(a+b)=\\
&\quad=C_n^0a^{n+1}+C_n^1a^nb+\cdots+C_n^ka^{n-k+1}b^k+\cdots+C_n^nab^n+\\
&\quad+C_n^0a^nb+C_n^1a^nb^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^{k+1}+\cdots+C_n^nb^{n+1}=\\
&\quad=C_n^0a^{n+1}+(C_n^0+C_n^1)a^nb+\cdots+(C_n^{k-1}+C_n^k)a^{n-k+1}b^k+\\
&\qquad+\cdots+(C_n^{n-1}+C_n^n)ab^n+C_n^nb^{n+1}=\\
&\quad=C_{n+1}^0a^{n+1}+C_{n+1}^1a^{n_1}b+\cdots+C_{n+1}^ka^{n-k+1}b^k+\\
&\qquad+\cdots+C_{n+1}^nab^n+C_{n+1}^{n+1}b^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^ka^{n+1-k}b^k.
\end{aligned}$$

ბ) ინდუქცია m-ის მიმართ; $m=2$ – პუნქტი ა); თუ დებულება სამართლიანია m-თვის, მაშინ პუნქტი ა)-ს თანახმად:

$$\begin{aligned}
&(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n=[a_1+(a_2+\cdots+a_m)]^n=\\
&=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka_1^{n-k}(a_2+\cdots+a_{m+1})^k=\sum_{l+k=n}\frac{n!}{k!l!}\,a_1^l(a_2+\cdots+a_{m+1})^k=\\
&\quad=\sum_{l+k=n}\frac{n!}{k!l!}\,a_1^l\sum_{\substack{(t_2,\dots,t_{m+1})\\ t_2+\cdots+t_{m+1}=k}}\frac{k!}{t_2!\cdots t_{m+1}!}\,a_2^{t_2}\cdots a_m^{t_m}a_{m+1}^{t_{m+1}}=
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{(t_1,\dots,t_{m+1})\\ t_1+\cdots+t_{m+1}=k}} \frac{k!}{t_1!t_2!\cdots t_{m+1}!}\, a_1^{t_1}a_2^{t_2}\cdots a_m^{t_m}a_{m+1}^{t_{m+1}} \ \ (l=t_1). \quad \square$$

1.3. მთელი რიცხვები. მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ სიმრავლე მოიცავს $\mathbb{N}$-ს ქვესიმრავლის სახით. ისევე როგორც $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ სიმრავლე ჩაკეტილია შეკრებისა და გამრავლების მიმართ; შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები $\mathbb{Z}$-ში ასოციაციურია, კომუტაციურია და მათთვის სრულდება დისტრიბუციულობის აქსიომები.

ამის გარდა $\mathbb{Z}$-ში სრულდება თვისება:

(ეა) $\mathbb{Z}$-ში არსებობს **ერთეულოვანი ელემენტი**, ე.ი. ისეთი ელემენტი $e \in \mathbb{Z}$, რომ ნებისმიერი x-თვის $\mathbb{Z}$-დან ადგილი აქვს ტოლობას:

$$xe = ex = x$$

(**ერთეულის არსებობა**);

და მისი ანალოგიური თვისება შეკრებისათვის

(ნა) $\mathbb{Z}$-ში არსებობს **ნულოვანი ელემენტი**, ე.ი. ისეთი ელემენტი $n \in \mathbb{Z}$, რომ ნებისმიერი x-სთვის $\mathbb{Z}$-დან ადგილი აქვს ტოლობას:

$$x + n = n + x = x$$

(**ნულის არსებობა**);

ასეთი ელემენტი $\mathbb{Z}$-ში არის 0.

აღვნიშნოთ $\mathbb{Z}$-ში შეკრების ოპერაციის კიდევ ერთი თვისება:

(მა) ნებისმიერი a ელემენტისათვის $\mathbb{Z}$-დან მოიძებნება ისეთი $x \in \mathbb{Z}$ ელემენტი, რომ

$$a + x = x + a = n$$

(**მოპირდაპირე ელემენტის არსებობა**).

$\mathbb{Z}$-ში ეს ელემენტი ტოლია $(-a)$-სი.

1.4. რაციონალური და ნამდვილი რიცხვები.

1.4.1. ყველა რაციონალურ რიცხვთა (წილადთა) სიმრავლე $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\right\}$, სადაც

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow pn = qm$$

და წილადი $\frac{m}{1}$ გაიგივებულია m მთელ რიცხვთან, მოიცავს $\mathbb{Z}$-ს საკუთრივი ქვესიმრავლის სახით. ისევე როგორც $\mathbb{Z}$-ში, შეკრება და გამრავლება აკმაყოფილებს ზემოთ ჩამოთვლილ ჩაკეტილობის, ასოციაციურობის, კომუტაციურობის და დისტრიბუციულობის თვისებებს, შესრულებულია ნულოვანი და მოპირდაპირე ელემენტების არსებობის თვისება. ამის გარდა არანულოვანი რაციონალური რიცხვებისათვის ადგილი აქვს თვისებას, რომელიც ანალოგიურია მოპირდაპირე ელემენტის არსებობის შეკრებისათვის, სახელდობრ, თვისებას

(შა) თუ $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, მაშინ არსებობს ისეთი ელემენტი $x \in \mathbb{Q}$, რომ

$$xa = ax = 1$$

(**შებრუნებული ელემენტის არსებობა**).

ცხადია, რომ ასეთი შებრუნებული ელემენტი $a = \frac{p}{q}$-თვის არის $x = \frac{1}{a} = a^{-1} = \frac{q}{p}$.

1.4.2. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლეს ჩვეულებრივი შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ გააჩნია ყველა ის თვისება, რაც რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლეს.

ამ სიმრავლეს ხშირად აიგივებენ რიცხვითი წრფის (რიცხვითი ღერძის) წერტილთა სიმრავლესთან, ე.ი. წრფესთან, რომლისთვისაც მითითებულია დადებითი მიმართულება, რომელზედაც აღნიშნულია ერთეულოვანი სიგრძის მონაკვეთი და დაფიქსირებულია წერტილი 0. ამასთან x ნამდვილი რიცხვი გაიგივებულია რიცხვითი ღერძის X წერტილთან, რომელიც მდებარეობს 0 წერტილიდან დადებითი მიმართულებით, თუ $x \geq 0$, ხოლო უარყოფითი მიმართულებით, თუ $x < 0$.

რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლისაგან განსხვავებით $\mathbb{R}$ სიმრავლე ჩაკეტილია ნატურალური ხარისხის ფესვის ამოღების მიმართ დადებითი ელემენტებისაგან, ე.ი. ნებისმიერი დადებითი a-სთვის, $a \in \mathbb{R}$, და ნებისმიერი ნატურალური n-სთვის $\mathbb{R}$-ში არის ელემენტი x, რომლისთვისაც $x^n = a$.

1.4.3. წინა პუნქტებში ჩამოთვლილი ნატურალურ, მთელ, რაციონალურ და ნამდვილ რიცხვთა თვისებები იმისთვის კი არ არის მოყვანილი, რომ რაიმე ახალი გაგვეგო ამ სიმრავლეებზე, არამედ იმისათვის, რომ მივიდეთ ალგებრისათვის მნიშვნელოვან იდეამდე. ეს იდეა არის აქსიომატიკური მეთოდი ალგებრაში. ის მდგომარეობს ალგებრული სქტუქტურების მთელი რიგი კლასების ერთდროულ შესწავლაში, რომლებიც გამოიყოფა ამა თუ იმ აქსიომებით და წარმოადგენს ამ სტრუქტურებში ოპერაციების რომელიღაც თვისებებს. ამასთან სულაც არ არის მნიშვნელოვანი, როგორ განისაზღვრება ეს ოპერაციები ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში. როგორც კი შესრულებულია აქსიომები, მაშინ აგრეთვე სამართლიანია ამ აქსიომებიდან ლოგიკური გზით მიღებული ნებისმიერი თეორემა.

რა თქმა უნდა, ბევრი არ არის აქსიომათა სისტემები, რომლებიც საინტერესოა სინამდვილეში. შეუძლებელია "ჭერიდან" გამოიგონო ისეთი აქსიომათა სისტემა, რომელიც მიგვიყვანს შინაარსიან თეორიამდე. ყველა აქსიომათა სისტემას, რომელიც განხილულია თანამედროვე ალგებრაში, გააჩნია ხანგრძლივი ისტორია და არის იმ ალგებრული სტრუქტურების ანალიზის შედეგი, რომლებიც ბუნებრივი გზით წარმოიშვება. ასეთებია ჯგუფის, რგოლის, ველის, ვექტორული სივრცის და სხვა აქსიომათა სისტემები, რომლებსაც გავეცნობით ამ კურსში.

სანამ მოვიყვანთ ამ აქსიომათა ზუსტ ჩამოყალიბებას, რამდენიმე სიტყვა ვთქვათ ტერმინოლოგიაზე. ალგებრულ სტრუქტურებში ოპერაციების დასახელებას და აღნიშვნას პრინციპული მნიშვნელობა არ აქვს, მაგრამ უფრო ხშირად მაინც მათ "შეკრებას" და "გამრავლებას" უწოდებენ და შესაბამისი სახით აღნიშნავენ. ეს საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ რიცხვებზე ოპერაციების დამუშავებული ტერმინოლოგია და აღნიშვნათა სისტემა.

საჭიროა დავაზუსტოთ, რომ ალგებრას აინტერესებს ალგებრული სტრუქტურების და მათი შემადგენელი ელემენტების მხოლოდ ის თვისებები, რომლებიც შეიძლება გამოიხატოს მოცემული ოპერაციების ტერმინებში. იმისათვის, რომ განვასხვაოთ (ან, პირიქით, გავაიგივეოთ) ალგებრული სტრუქტურები, ყველაზე სწორ და რადიკალურ მიდგომას გვთავაზობს იზომორფიზმის ცნება.

1.5. ვთქვათ M სიმრავლეა $\circ$ ოპერაციით, ხოლო N – სიმრავლე $*$ ოპერაციით. $(M,\circ)$ ალგებრული სტრუქტურის ასახვას $(N,*)$ ალგებრულ ატრუქტურაში (წერენ $\varphi : M \to N$) ეწოდება **იზომორფული**, თუ განსხვავებული ელემენტების ანასახები განსხვავებულია:

$$\varphi(a) \neq \varphi(b), \quad \text{როცა} \quad a \neq b \quad (a, b \in M),$$

და f ასახვა ინახავს ოპერაციებს:

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b).$$

$\varphi(a)$ აღნიშვნასთან ერთად ხშირად გამოიყენება a^φ ან $a\varphi$ აღნიშვნები.

$(M,\circ)$ და $(N,*)$ ალგებრული სტრუქტურები **იზომორფულია** (წერენ $(M,\circ) \eqsim (N,*)$), თუ არსებობს იზომორფიზმი ერთი მათგანისა მეორეზე. ალგებრული სტრუქტურის თავის თავზე იზომორფიზმს ეწოდება მისი **ავტომორფიზმი**.

ანალოგიურად განიმარტება ალგებრული სტრუქტურების იზომორფიზმი ორი ან მეტი ალგებრული ოპერაციით.

1.6. მაგალითები.

1. ასახვა $a \mapsto 2^a$ წარმოადგენს შეკრების მიმართ $(\mathbb{R},+)$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის იზომორფიზმს დადებით ნამდვილ რიცხვთა $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ სიმრავლეზე გამრავლების ოპერაციის მიმართ, რადგან $2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b$. ფუძე 2-ის ნაცვლად შეიძლება აგველო 1-საგან განსხვავებული ნებისმიერი დადებითი ფუძე. ეს იმას გვიჩვენებს, რომ ოზომორფულ ალგებრულ სტრუქტურებს შორის შეიძლება არსებობდეს ბევრი განსხვავებული იზომორფიზმი.

ასახვა, განსაზღვრული ფორმულით $\varphi(a) = \lg a$, არის იზომორფიზმი $(\mathbb{R}^+,\cdot)$-სა და $(\mathbb{R},+)$-ზე.

2. ვთქვათ M სიბრტყის ყველა პარალელურ გადატანათა სიმრავლეა რაიმე ფიქსირებული წრფის ვექტორების მიმართ. ნებისმიერი ნამდვილი a რიცხვისათვის აღვნიშნოთ t_a-თი M სიმრავლის ის ელემენტი, რომელიც წარმოადგენს $|a|$ სიგრძის ვექტორით გადატანას ერთ-ერთი იმ ორი შესაძლო მიმართულებიდან, რომელიც a რიცხვის ნიშნით განისაზღვრება (თუ $a = 0$, მაშინ t_a იგივური გარდაქმნაა). ადვილი დასანახია, რომ $t_{a+b} = t_a \circ t_b$, სადაც $\circ$ აღნიშნავს პარალელურ გადატანათა გამრავლებას (კომპოზიციას). ამრიგად, $a \mapsto t_a$ ასახვა წარმოადგენს $(\mathbb{R}, +)$ და $(M, \circ)$ ალგებრული სტრუქტურების იზომორფიზმს.

გასაგებია, რომ თუ ორი ალგებრული სტრუქტურა იზომორფულია, მაშინ ნებისმიერი დებულება, რომელიც ჩამოყალიბებულია მხოლოდ მოცემული ოპერაციების ტერმინებში, იქნება სამართლიანი ერთ-ერთ ამ სტრუქტურაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის სამართლიანია მეორეში.

მაგალითად, M სიმრავლეში $\circ$ ოპერაციას ეწოდება **კომუტაციური**, თუ $a \circ b = b \circ a$ ნებისმიერი $a, b \in M$. თუ $(M, \circ)$ სტრუქტურა $(M, *)$ სტრუქტურის იზომორფულია და $\circ$ ოპერაცია M სიმრავლეში კომუტაციურია, მაშინ $*$ ოპერაციაც კომუტაციურია N სიმრავლეში.

2. ჯგუფები

დასაწყისში მოვიყვანოთ ჯგუფის განსაზღვრება, რომელშიც გამოყენებულია შეკრების ოპერაცია. ოპერაციის ჩაწერას “+”-ით ეწოდება ადიციური ჩაწერა.

2.1. G სიმრავლეს შეკრების ოპერაციის მიმართ **ჯგუფი** ეწოდება, თუ:

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ $\forall a, b, c \in G$ (ასოციაციურობა);
2) არსებობს ისეთი ელემენტი 0 (**ნული**), რომ $a + 0 = 0 + a = a$ $\forall a$;
3) ნებისმიერი a-სთვის არსებობს ისეთი ელემენტი $-a$ (**მოპირდაპირე ელემენტი**), რომ $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

თუ ოპერაცია G ჯგუფში კომუტაციურია, ე.ი. $a + b = b + a$ $\forall a, b \in G$, მაშინ G ჯგუფს ეწოდება **კომუტაციური** ან **აბელური** – ნ.ჰ. აბელის პატივსაცემად.

გამოვიყვანოთ ამ აქსიომებიდან ზოგიერთი უმარტივესი თვისება.

1) ნული ერთადერთია. მართლაც, ვთქვათ 0_1 და 0_2 – ორი ნულია, მაშინ $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$.

2) მოპირდაპირე ელემენტი ერთადერთია. მართლაც, ვთქვათ $(-a)_1$ და $(-a)_2$ a-ს ორი მოპირდაპირე ელემენტია, მაშინ

$$\begin{aligned}(-a)_1 &= (-a)_1 + (a + (-a)_2) = \\ &= ((-a)_1 + a) + (-a)_2 = (-a)_2.\end{aligned}$$

3) ნებისმიერი a, b-სთვის $x + b = a$ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც $a + (-b)$-ს ტოლია. ამ ამონახსნს ეწოდება a და b ელემენტების **სხვაობა** და $a - b$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მართლაც, თუ c არის მოცემული განტოლების ამონახსნი, ე.ი. $c + b = a$, მაშინ $(c + b) + (-b) = a + (-b)$. თუ გამოვიყენებთ 1)–3) აქსიომებს, მივიღებთ: $(c+b)+(-b) = c+(b+(-b)) = c+0 = c$. ამგვარად, $c = a+(-b)$. ეს გვიჩვენებს, რომ თუ ამონახსნი c არსებობს, მაშინ ის ერთადერთია და ტოლია $a + (-b)$. მეორეს მხრივ, $x = a+(-b)$-ს ჩასმა განსახილველ განტოლებაში გვიჩვენებს, რომ $a + (-b)$ მართლაც არის მისი ამონახსნი:

$$a + (-b) + b = a + ((-b) + b) = a + 0 = a.$$

4) ასოციაციურობის აქსიომა საშუალებას გვაძლევს ცალსახად განვსაზღვროთ ადიციური ჯგუფის ელემენტთა ნებისმიერი სასრული რიცხვის ჯამი, ე.ი. საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ ნებისმიერი n ელემენტის ჯამის დამოუკიდებლობა ფრჩხილების თავდაპირველი განაწილებისაგან.

ინდუქცია n რიცხვის მიმართ.

ინდუქციის ბაზისი $n = 3$ უზრუნველყოფილია ოპერაციის ასოციაციურობით.

ვთქვათ, რომ დებულება სამართლიანია ყველა k-სთვის, $3 \leq k < n$. განვიხილოთ ფრჩხილების ნებისმიერი განაწილება n რაოდენობა

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ შესაკრებზე, რომელიც შეესაბამება $+$ ბინარული ოპერაციის გამოყენებას (ყოველთვის ორი ელემენტისათვის). ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ $+$ ოპერაციის გამოყენება ფრჩხილების ნებისმიერი განაწილებისათვის ემთხვევა მარცხნიდან რეგულარულ $(\cdots((a_1 + a_2) + a_3) + \cdots + a_{n-1}) + a_n$ ფრჩხილების განაწილებას. ამასთან, როცა $n = 2$, გვაქვს $a_1 + a_2$, როცა $n = 1$, გვაქვს a_1.

ფრჩხილების ყოველ განაწილებაში არის $+$ ოპერაციის გამოყენების უკანასკნელი ნაბიჯი (მაგალითად: $(a_1 + a_2) \oplus a_3$; $(a_1 + a_2) \oplus (a_3 + a_4)$; $((a_1 + a_2) + a_3) \oplus (a_4 + a_5)$, აქ $\oplus$ აღნიშნავს $+$ ოპერაციის უკანასკნელ გამოყენებას ყოველ მოყვანილ განაწილებაში). ამგვარად, $+$ ოპერაციის გამოყენება წარმოებს k შესაკრებზე $a_1, \ldots, a_k$ რაღაც ფრჩხილების განაწილებით და $(n - k)$ შესაკრებზე $a_{k+1}, \ldots, a_n$ რაღაც ფრჩხილების განაწილებით, ამასთან $1 \leq k < n$, $1 \leq n - k < n$. მარცხენა და მარჯვენა ბლოკებში $+$ ოპერაციის გამოყენება არ არის დამოკიდებული ფრჩხილების განაწილებაზე (შესაძლებელია $k = 1$ ან $k = 2$; შესაძლებელია $n - k = 1$ ან $n - k = 2$; თუ $3 \leq k < n$, მაშინ ინდუქციური დაშვებით; თუ $3 \leq n - k < n$, მაშინ აგრეთვე ინდუქციური დაშვებით). თუ მარცხენა ჯამში ავირჩევთ **მარცხნიდან რეგულარულ**, ხოლო მარჯვენა ჯამში – **მარჯვნიდან რეგულარულ** ფრჩხილების განაწილებას და თანმიმდევრულად გამოვიყენებთ ასოციაციურობას სამი შესაკრებისთვის, მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
&[(\cdots((a_1 + a_2) + a_3) + \cdots + a_{k-1}) + a_k] + \\
&\quad + [a_{k+1} + (a_{k+2} + \cdots + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n))\cdots)] = \\
&\quad = [(\cdots((a_1 + a_2) + a_3) + \cdots + a_{k-1}) + a_k + a_{k+1}] + \\
&\quad + [a_{k+2} + \cdots + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n))\cdots] = \cdots = \\
&\qquad = (\cdots((a_1 + a_2) + a_3) + \cdots + a_{n-1}) + a_n
\end{aligned}
$$

(ჩვენს აღნიშვნებში, თუ $k = 1$, მაშინ $[a_1] = a_1$; ანალოგიურად, თუ $n - k = 1$, მაშინ $[a_n] = a_n$).

ამგვარად, $+$ ოპერაციის შედეგი ნებისმიერი საწყისი ფრჩხილების განაწილებისათვის დაემთხვა მარცხნიდან რეგულარულ განაწილებას. მაშასადამე, ასოციაციური ოპერაციის გამოყენების შედეგი არ არის დამოკიდებული ფრჩხილების გამაწილებაზე. $\square$

2.1.1*. ამოცანა. იპოვეთ ყველა განსხვავებულ ფრჩხილების დასმათა რიცხვი ბინარული ოპერაციის შესასრულებლად n ელემენტიან დალაგებულ ერთობლიობაზე.

პასუხი. $\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$.

2.1.1. მაგალითები. **1.** რიცხვითი $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ სიმრავლეები აბელური ჯგუფებია ჩვეულებრივი შეკრების ოპერაციის მიმართ.

2. სიბრტყისა და სივრცის ვექტორების სიმრავლე ვექტორთა ჩვეულებრივი შეკრების მიმართ აბელური ჯგუფია.

3. n რიცხვთა მიმდევრობას ვუწოდოთ n სიგრძის **სტრიქონი**. $\mathbb{R}^n$-ით აღვნიშნოთ ნამდვილი რიცხვებისაგან შედგენილი ყველა n სიგრძის სტრიქონი. განვსაზღვროთ სტრიქონების შეკრება წესით:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

ცხადია, რომ $\mathbb{R}^n$ სიმრავლე ამ ოპერაციის მიმართ აბელური ჯგუფია. მისი ნულოვანი ელემენტია **ნულოვანი სტრიქონი**

$$\theta = (0, 0, \ldots, 0).$$

4. რიცხვითი ღერძის მოცემულ ქვესიმრავლეზე განსაზღვრულ ყველა ფუნქციათა $F(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid X \subseteq \mathbb{R}\}$ სიმრავლე ფუნქციათა ჩვეულებრივი შეკრების მიმართ $((f+g)(x) = f(x) + g(x))$ აბელური ჯგუფია.

5. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ აბელური ჯგუფია რიცხვთა ჩვეულებრივი შეკრების ოპერაციის მიმართ.

6. ნაშთთა კლასების $(\mathbb{Z}_n, +)$ ჯგუფები მოდულით n. ვთქვათ $(\mathbb{Z}, +)$ მთელ რიცხვთა ჯგუფია შეკრების მიმართ, $1 < n \in \mathbb{N}$. ნებისმიერი k-სთვის, $k \in \mathbb{Z}$, ვთქვათ

$$\overline{k} = k + n\mathbb{Z} = \{k + nq \mid q \in \mathbb{Z}\}$$

($n\mathbb{Z}$ ქვეჯგუფის ძვრა k ელემენტით). ცხადია, რომ $\overline{k} = \overline{l}$, $l \in \mathbb{Z}$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $k - l = nq$, $q \in \mathbb{Z}$. რადგან $k = nq + r$, სადაც $q \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$, ამიტომ $\overline{k} = \overline{r}$. ამგვარად, სხვადასხვა ძვრების $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ სიმრავლე ბიექციურ თანადობაშია n-ზე გაყოფის შედეგად მიღებულ $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ ნაშთთა სიმრავლესთან.

განვსაზღვროთ $\mathbb{Z}_n$ სიმრავლეზე შეკრების ოპერაცია:

$$\overline{k}+\overline{l}=\overline{k+l}=\overline{r},$$

სადაც $k+l=nq+r$, $0\le r<n$, $q\in\mathbb{Z}$. შევამოწმოთ ამ ოპერაციის კორექტულობა. თუ $\overline{k}=\overline{k'}$, $\overline{l}=\overline{l'}$, მაშინ $k'=k+nq_1$, $l'=l+nq_2$, $q_1,q_2\in\mathbb{Z}$ და $k'+l'=(k+l)+n(q_1+q_2)$. ამგვარად, $\overline{k+l}=\overline{k'+l'}$. როცა $k,l,m\in\mathbb{Z}$, გვაქვს $(\overline{k}+\overline{l})+\overline{m}=\overline{(k+l)+m}=\overline{(k+(l+m)}=\overline{k}+(\overline{l}+\overline{m})$ და $\overline{k}+\overline{l}=\overline{k+l}=\overline{l+k}=\overline{l}+\overline{k}$. მაშასადამე, ეს ოპერაცია ასოციაციური და კომუტატიურია. გასაგებია, რომ $\overline{0}=0+n\mathbb{Z}=n\mathbb{Z}$ ნეიტრალური ელემენტია $(\mathbb{Z}_n,+)$-ში, ხოლო ელემენტი $\overline{-k}=-k+n\mathbb{Z}=(n-k)+n\mathbb{Z}=\overline{n-k}$ წარმოადგენს $\overline{k}$-ის მოპირდაპირე ელემენტს. ამგვარად, $(\mathbb{Z}_n,+)$ აბელური ჯგუფია, რომელსაც ეწოდება **ნაშთთა კლასების ჯგუფი მოდულით** n. ის სასრული ჯგუფია და მისი ელემენტების რიცხვია $|\mathbb{Z}_n|=n$.

აშკარა ტექნიკური უპირატესობის გამო მიღებულია შემდეგი შეთანხმება: არ იხმარება $\overline{k}$ ან სხვა აღნიშვნა და ოპერირება ხდება რომელიმე ფიქსირებულ **წარმომადგენელთა** სისტემაზე, ყველაზე ხშირად $\{0,1,\ldots,n-1\}$ სისტემაზე (მას ეწოდება **ნაშთთა დაყვანილი სისტემა** მოდულით n). ამ შეთანხმების შესაბამისად

$$k+l=\begin{cases}k+l, & \text{თუ }\ k+l<n,\\ k+l-n, & \text{თუ }\ k+l\ge n,\end{cases}$$

$-k=n-k$, $4(n-1)=-4=n-4$. კერძოდ, გვაქვს შემდეგი შეკრების ტაბულები $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$ და $\mathbb{Z}_5$ ჯგუფებისთვის:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

,

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

,

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

.

მოვიყვანოთ ახლა ჯგუფის განსაზღვრება, რომელიც იყენებს გამრავლების ოპერაციას. ოპერაციის ჩაწერას “$\cdot$”-ით ეწოდება მისი მულტიპლიკაციური ჩაწერა.

2.2. G სიმრავლეს გამრავლების ოპერაციის მიმართ **ჯგუფი** ეწოდება, თუ:

1) $(ab)c = a(bc)$ (ასოციაციურობა);
2) არსებობს ისეთი ელემენტი e (ერთეული), რომ $ae = ea = a \ \forall a$;
3) ნებისმიერი a-სთვის არსებობს ისეთი ელემენტი a^{-1} (**შებრუნებული ელემენტი**), რომ $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

თუ დამატებით $ab = ba \quad \forall a, b \in G$, მაშინ G ჯგუფს ეწოდება **მულტიპლიკაციური აბელური ჯგუფი**.

მულტიპლიკაციური ჯგუფის ერთეული ზოგჯერ სიმბოლო 1-ით აღინიშნება.

ჯგუფის აქსიომების შედეგები, რომლებიც მიღებული იყო ადიციურ ენაზე, მულტიპლიკაციურ ენაზე შემდეგნაირად გამოიყურებიან:

1) ერთეული ერთადერთია.
2) შებრუნებული ელემენტი ერთადერთია.
3) ნებისმიერ $a, b \in G$-სთვის $xb = a$ განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი. მას ეწოდება a-ს b-ზე **განაყოფი** (ან a და b ელემენტების **შეფარდება**) და ab^{-1} ან $\frac{a}{b}$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

2.2.1. მაგალითები. 1. რიცხვითი სიმრავლეები $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}^*(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}$ აბელური ჯგუფებია ჩვეულებრივი გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

2. $G = \{1, -1\}$ გამრავლების მიმართ აბელური ჯგუფია.

3. ვთქვათ M რაიმე სიმრავლეა, $S(M)$ – მისი ყველა ბიექციურ ასახვათა ერთობლიობა, ხოლო ასახვათა კომპოზიცია $S(M)$ სიმრავლეზე გამრავლების ოპერაციაა. მაშინ $S(M)$ არააბელური (როცა $|M| > 2$) მულტიპლიკაციური ჯგუფია.

2.2.2. სავარჯიშო. 1) ვთქვათ $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $G = \{a \in \mathbb{R} \mid -c < a < c\}$. აჩვენეთ, რომ $(G, *)$ ჯგუფია, სადაც

$$a * b = \frac{a + b}{a + \frac{ab}{c^2}}$$

(სიჩქარეების შეკრება ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში).

2) თუ G ჯგუფია, რომელშიც $x^2 = 1$ ყველა $x \in G$-სთვის, მაშინ G აბელური ჯგუფია.

2.2.3. სავარჯიშო. თუ G სიმრავლეში ასოციაციური ოპერაციით არსებობს ისეთი e ელემენტი (**მარცხენა ერთეული**), რომ $ea = a$ ნებისმიერ $a \in G$, და ნებისმიერი a-თვის არსებობს ისეთი ელემენტი a^{-1} (**მარცხენა შებრუნებული**), რომ $a^{-1}a = e$, მაშინ G ჯგუფია. დაამტკიცეთ.

2.3. ვთქვათ G ჯგუფია, $a \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ მთელი რიცხვია, ვთქვათ, რომ

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n}, & \text{თუ } n > 0, \\ 0, & \text{თუ } n = 0, \\ \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{m=-n}, & \text{თუ } n < 0, \text{ სადაც } m = -n > 0. \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $n > 0$, მაშინ $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$. მართლაც,

$$a^n(a^{-1})^n = (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n})(\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{n}) = e =$$
$$= (\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{n}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n}) = (a^{-1})^n a^n.$$

2.3.1. თეორემა. *ვთქვათ G ჯგუფია, $a \in G$, $m, n \in \mathbb{Z}$ მთელი რიცხვებია. მაშინ*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

დამტკიცება. ფორმალურად, ჩვენ უნდა განვიხილოთ $3 \times 3 = 9$ შემთხვევა.

შემთხვევა 1. $m > 0$, $n > 0$ (მაშასადამე, $m + n > 0$). მაშინ

$$a^m \cdot a^n = (\underbrace{a \cdots a}_{m}) \cdot (\underbrace{a \cdots a}_{n}) = (\underbrace{a \cdots a}_{m+n}) = a^{m+n}.$$

შემთხვევა 2. $m > 0$, $n < 0$ (ამიტომ $n' = -n > 0$). მაშინ

$$a^m \cdot a^n = (\underbrace{a \cdots a}_{m}) \cdot (\underbrace{a^{-1} \cdots a^{-1}}_{n'=-n}) =$$

$$
= \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-n'=m+n}, & \text{თუ } m > n' \ \ (\text{ე.ი. } m+n>0), \\ 1, & \text{თუ } m = n' = -n \ \ (\text{ე.ი. } m+n=0) \\ \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{n'-m=-n-m}, & \text{თუ } m < n' = -n \ \ (\text{ე.ი. } m+n<0), \end{cases}
$$
$$
= a^{m+n}.
$$

ანალოგიურად მტკიცდება დანარჩენი შემთხვევები: 3) $m < 0$, $n > 0$; 4) $m < 0$, $n < 0$; 5) $m = 0$, $n > 0$; 6) $m = 0$, $n = 0$; 7) $m = 0$, $n < 0$; 8) $m > 0$, $n = 0$; 9) $m < 0$, $n = 0$.

შედეგი. *$(a^m)^n = a^{mn}$ ყველა $m, n \in \mathbb{Z}$-სთვის.*

2.4. განვიხილოთ G ჯგუფის a ელემენტის ყველა მთელი ხარისხები:

$$
\ldots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a, a^2, a^3, \ldots .
$$

შესაძლებელია ორი შემთხვევა.

შემთხვევა 1. ამ მწკრივის ყველა ელემენტი განსხვავებულია (ე.ი. $a^k \neq a^l$ ყველა მთელი $k \neq l$ რიცხვისათვის). ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ a ელემენტი უსასრულო რიგისაა (აღნიშვნა $|a| = \infty$).

შემთხვევა 2. ამ მწკრივში $a^k = a^l$ ზოგიერთი $k \neq l$-სთვის. ვთქვათ $k > l$. მაშინ $a^{k-l} = e$, სადაც $k - l > 0$, ე.ი. შეგვხვდა e-ს ტოლი a ელემენტის ნატურალური ხარისხი. განვიხილოთ $T = \{t \in \mathbb{Z} \mid t > 0, \ a^t = e\}$ სიმრავლე. ის ნატურალურ რიცხვთა არაცარიელი ქვესიმრავლეა. მაშასადამე არსებობს უმცირესი ელემენტი n, რომელსაც a **ელემენტის რიგი** ვუწოდოთ და აღვნიშნოთ $|a| = n$. ამგვარად: 1) $a^n = e$, $n > 0$; თუ $a^m = e$, $m > 0$, მაშინ $m \geq n$.

2.4.1. მაგალითი. $G = \{1, -1\}$, $a = -1$. მაშინ $a^1 = -1$, $a^2 = 1$, ე.ი. $|a| = 2$.

2.4.2. ლემა. *თუ $|a| = n < \infty$, მაშინ:*

1) ყველა $e = a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ ელემენტი განსხვავებულია;

2) ნებისმიერი m-სთვის, $m \in \mathbb{Z}$, ელემენტი a^m ემთხვევა ერთ-ერთს $e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$-დან.

დამტკიცება. 1) გამომდინარეობს a ელემენტის $|a|$ რიგის განსაზღვრებიდან.

2) ვთქვათ $m \in \mathbb{Z}$. მაშინ $m = nq + r$, $0 \leq r < n$. ამგვარად, $a^m = (a^n)^q \cdot a^r = ea^r = a^r$. □

შედეგი. ვთქვათ $|a| = n < \infty$. მაშინ $a^m = e$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $m = nq$.

2.5. ვთქვათ M სიმრავლეა $\circ$ ოპერაციით და N მისი რაიმე ქვესიმრავლეა. ამბობენ, რომ N **ჩაკეტილია $\circ$ ოპერაციის მიმართ**, თუ

$$a, b \in N \Rightarrow a \circ b \in N.$$

2.5.1. ადიციური G ჯგუფის არაცარიელ H ქვესიმრავლეს ეწოდება G-ს **ქვეჯგუფი**, თუ

1) H ჩაკეტილია შეკრების მიმართ;
2) $a \in H \Rightarrow -a \in H$.

თუ H – G-ს ქვეჯგუფია, წერენ $H \leq G$. თუ $H \leq G$ და $H \neq G$, მაშინ წერენ $H < G$.

ცხადია, რომ ადიციური ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფი თვითონ არის ადიციური ჯგუფი იგივე ოპერაციის მიმართ.

2.5.2. მაგალითები. **1.** $\mathbb{R}$ ადიციურ ჯგუფში არის ქვეჯგუფების შემდეგი ჯაჭვი: $\mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R}$.

2. სივრცის ვექტორთა ადიციურ ჯგუფში იმ ვექტორთა სიმრავლე, რომლებიც მოცემული სიბრტყის ან წრფის პარალელურია, არის ქვეჯგუფი.

3. ნებისმიერ ადიციურ ჯგუფს გააჩნია ორი "ტრივიალური" ქვეჯგუფი: თვითონ ჯგუფი და ნულოვანი ქვეჯგუფი $\{0\}$.

სავარჯიშო. G ჯგუფის ნებისმიერ H_i ქვეჯგუფთა $\bigcap\limits_{i \in I} H_i$ თანაკვეთა G-ს ქვეჯგუფია.

2.5.3. ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{Z}$ ჯგუფის ყოველ ქვეჯგუფს აქვს სახე $n\mathbb{Z}$, სადაც $n \in \mathbb{N}_0$.

მოვიყვანოთ წინა განსაზღვრების მულტიპლიკაციური ვარიანტი.

2.5.4. მულტიპლიკაციური G ჯგუფის არაცარიელ H ქვესიმრავლეს ეწოდება G-ს ქვეჯგუფი, თუ

1) H ჩაკეტილია გამრავლების მიმართ;
2) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

2.5.5. მაგალითები. **1.** $\mathbb{R}^*$ ჯგუფში არის შემდეგი ქვეჯგუფების ჯაჭვი:

$$\{\pm 1\} < \mathbb{Q}^* < \mathbb{R}^*.$$

2. ვთქვათ a – G ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტია. განვიხილოთ G-ში შემდეგი ქვესიმრავლე

$$\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

(ე.ი. a ელემენტის ყველა მთელი ხარისხების ერთობლიობა).

ადვილი საჩვენებელია, რომ

ა) $\langle a \rangle$ – G ჯგუფის აბელური ქვეჯგუფია;

ბ) $|\langle a \rangle| = |a|$ (ე.ი. $\langle a \rangle$ ქვეჯგუფის ელემენტთა რიცხვი a ელემენტის რიგის ტოლია).

G ჯგუფს ეწოდება **ციკლური**, თუ მოიძებნება ისეთი $a \in G$ ელემენტი, რომ $\langle a \rangle = G$, ე.ი. G ჯგუფის ყველა ელემენტი წარმოადგენს ამ a ელემენტის მთელ ხარისხებს, რომელსაც ამ შემთხვევაში G ჯგუფის **ციკლური წარმომქნელი** ეწოდება. თუ $|a| = n < \infty$, მაშინ $G = \langle a \rangle$ სასრული n ელემენტიანი ჯგუფია; თუ კი $|a| = \infty$, მაშინ $G = \langle a \rangle$ უსასრულო (თვლადი!) ციკლური ჯგუფია.

2.5.6. შენიშვნა. ნებისმიერი $G = \langle a \rangle$ ციკლური ჯგუფი ან სასრული აბელური, ან თვლადი აბელური ჯგუფია. ამიტომ ნებისმიერი არააბელური ჯგუფი არ შეიძლება იყოს ციკლური და ნებისმიერი არათვლადი ჯგუფიც ვერ იქნება ციკლური.

2.5.7. მაგალითები. **1.** $(\mathbb{Z}, +) = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$ (რაც იმას გვიჩვენებს, რომ ციკლური წარმომქნელები შეიძლება იყოს ბევრი!).

2. ნამდვილ რიცხვთა $(\mathbb{R}, +)$ ჯგუფი არათვლადია, ამიტომ ის ვერ იქნება ციკლური.

3. აჩვენეთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა თვლადი $(\mathbb{Q}, +)$ ჯგუფი არ არის ციკლური.

2.5.8. ამოცანა. ჯგუფი, რომელსაც გააჩნია ქვეჯგუფების მხოლოდ სასრული რიცხვი, სასრულია.

2.6*. ჯგუფთა ჰომომორფიზმები. ერთი და იგივე ტიპის ალგებრულ ობიექტებს შორის კავშირები მყარდება ჰომომორფიზმების საშუალებით. ჰომომორფიზმის ცნება იზორმოფიზმის ცნებისაგან იმით განსხვავდება, რომ ის არ მოითხოვა ბიექციურობას.

2.6.1. ვთქვათ G და G' ჯგუფებია. $\varphi : G \to G'$ ასახვას ეწოდება G-ს **ჰომომორფული ასახვა** G'-ში (ან უბრალოდ **ჰომომორფიზმი**), თუ $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ ნებისმიერი $a, b \in G$-სთვის.

2.6.2. მაგალითი. ვთქთ $G = (\mathbb{Z}, +)$ და $G' = (\mathbb{Z}_n, +)$. მაშინ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ ასახვისათვის გვაქვს $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ ყველა $a, b \in \mathbb{Z}$-სთვის.

2.6.3. სავარჯიშო. იპოვეთ ყველა $\varphi : G \to G'$ ჰომომორფიზმი, სადაც $G = \langle a \rangle$, $|a| = m$, $G' = \langle b \rangle$, $|b| = n$ (კერძოდ, როცა $m = 12$, $n = 15$).

2.6.4. ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს სურექციული ჰომომორფიზმი $(\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$.

მითითება. $(\mathbb{Q}, +)$-ში $nx = a$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Q}$.

2.6.5. დავადგინოთ ჯგუფთა ჰომომორფიზმების ზოგიერთი ზოგადი თვისება. ვთქვათ G და G' ჯგუფებია, e და e' – შესაბამისად მათი ნეიტრალური ელემენტები, $\varphi : G \to G'$ – ჰომომორფიზმი. მაშინ

1) $\varphi(e) = e'$. მართლაც, ვთქვათ $\varphi(e) = h \in G'$; მაშინ $h^2 = \varphi(e)^2 = \varphi(e^2) = \varphi(e) = h$, საიდანაც $h = e'$.

2) $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$, რადგან $\varphi(a) \cdot \varphi(a^{-1}) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(e) = e'$.

3) $\varphi(G) = \operatorname{Im} \varphi = \{\varphi(a) \mid a \in G\}$ – G'-ის ქვეჯგუფია (რომელსაც ეწოდება φ ჰომომორფიზმის **ანასახი**).

4) თუ $G = \langle a \rangle$ ციკლური ჯგუფია, მაშინ $\varphi(G) = \langle \varphi(a) \rangle$ აგრეთვე ციკლური ჯგუფია. მართლაც, თუ $G = \langle a \rangle$ და $a' \in \varphi(G)$, $a' = \varphi(g)$, $g \in G$, მაშინ $g = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$, და ამიტომ $a' = \varphi(g) =$

$\varphi(a^n) = \varphi(a)^n$. ამგვარად, $\varphi(G) = \langle \varphi(a) \rangle$ ციკლური ჯგუფია $\varphi(a)$ წარმომქნელით.

5) $\varphi(g^{-1}hg) = \varphi(g)^{-1}\varphi(h)\varphi(g)$.

6) $\ker\varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = e'\}$ – G-ს ქვეჯგუფია (რომელსაც φ ჰომომორფიზმის **ბირთვი** ეწოდება), ამასთან, $g^{-1}(\ker\varphi)g \subseteq \ker\varphi$ ყველა $g \in G$ ელემენტისათვის. მართლაც,

$$h_1, h_2 \in H = \ker\varphi \Rightarrow \varphi(h_1h_2) = \varphi(h_1)\varphi(h_2) = e'e' = e' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h_1h_2 \in \ker\varphi,$$
$$h \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(h^{-1}) = \varphi(h)^{-1} = (e')^{-1} = e' \Rightarrow h^{-1} \in \ker\varphi,$$
$$h \in \ker\varphi,\ g \in G \Rightarrow \varphi(g^{-1}hg) = \varphi(g)^{-1}\varphi(h)\varphi(g) = e'.$$

2.6.6. $\varphi : G \to G'$ ჰომომორფიზმს ეწოდება **მონომორფიზმი**, თუ $\varphi = 1$; ეწოდება **ეპიმორფიზმი**, თუ G-ს ანასახი $\varphi(G) = \{a' \in G' \mid a' = \varphi(a)\} = G'$ და ეწოდება **იზომორფიზმი**, თუ φ ასახვა მონომორფული და ეპიმორფულია. ჯგუფის თავის თავში ჰომომორფულ ასახვას ეწოდება **ენდომორფიზმი**, ხოლო ჯგუფის თავის თავზე იზომორფულ ასახვას – მისი **ავტომორფიზმი**.

2.6.7. სავარჯიშო. თუ G, G', G'' ჯგუფებია, $\varphi : G \to G'$, $\psi : G' \to G''$ – ჰომომორფიზმები, მაშინ $\varphi\psi : G \to G'$ ჰომომორფიზმია.

2.6.8. სავარჯიშო. ვთქვათ G, G' ჯგუფებია, $\varphi : G \to G'$ – ჰომომორფიზმი. მაშინ:

1) φ მონომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\ker\varphi = \{e\}$;

2) φ იზომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\ker\varphi = \{e\}$, $\varphi(G) = G'$.

3. რგოლები და ველები

ჯგუფებისაგან განსხვავებით, რგოლები და ველები ისეთი ალგებრული სტრუქტურებია, რომლებშიც განსაზღვრულია ორი ბინარული ალგებრული ოპერაცია, რომლებსაც ჩვეულებრივ "შეკრებას" და

"გამრავლებას" უწოდებენ. მათი აქსიომები, ისევე როგორც ჯგუფის აქსიომები, ნაკარნახევია ნამდვილ რიცხვთა ოპერაციების თვისებებით. ამასთან რგოლის აქსიომები – ეს არის ალგებრულ ოპერაციათა თვისებების მიმართ გონივრულ მოთხოვნათა ის მინიმუმი, რომელნიც აგრეთვე საშუალებას გვაძლევს მოვიცვათ ალგებრული სტრუქტურების სხვა მნიშვნელოვანი მაგალითებიც, რომელთაგან ჯერ ჩვენ შეგვიძლია მოვიყვანოთ მხოლოდ უკვე ნახსენები სივრცის ვექტორთა სიმრავლე შეკრებისა და ვექტორული გამრავლების ოპერაციებით.

3.1. R სიმრავლეს შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებით **რგოლი** ეწოდება, თუ ამ ოპერაციებს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1) შეკრების მიმართ R აბელური ჯგუფია (რომელსაც R **რგოლის ადიციური ჯგუფი** ეწოდება);
2) $a(b+c) = ab + ac$ და $(a+b)c = ac + bc$ ნებიემიერი $a, b, c \in R$-სთვის (**გამრავლების დისტრიბუციულობა შეკრების მიმართ**).

გამოვიყვანოთ რგოლის აქსიომების ზოგიერთი შედეგი, რომელიც არ შედის §2-ში განხილულ ჯგუფთა აქსიომების შედეგების რიცხვში.

1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ ნებისმიერი $a \in R$-სთვის. მართლაც, ვთქვათ $a \cdot 0 = b$. მაშინ $b + b = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 = b$, საიდანაც $b = b + (-b) = b - b = 0$.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $0 \cdot a = 0$.

2) $a(-b) = (-a)b = -ab$ ნებისმიერი $a, b \in K$-სთვის. მართლაც,

$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = a,$$

და, ანალოგიურად, $ab + (-a)b = 0$.

3) $a(b-c) = ab - ac$ და $(a-b)c = ac - bc$ ნებისმიერი $a, b, c \in R$-სთვის. მართლაც,

$$a(b-c) + ac = a(b-c+c) = ab,$$

და, ანალოგიურად, $(a-b)c + bc = ac$.

R რგოლს ეწოდება **კომუტაციური**, თუ გამრავლება მასში კომუტაციურია, ე.ი.

$$ab = ba \quad \forall a, b,$$

და **ასოციაციური**, თუ გამრავლება მასში ასოციაციურია, ე.ი.

$$(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c.$$

რგოლის ელემენტს 1-ს ეწოდება **ერთეული**, თუ

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a.$$

ისევე როგორც მულტიპლიკაციური ჯგუფის შემთხვევაში, მტკიცდება, რომ რგოლში არ შეიძლება იყოს ორი განსხვავებული ერთეული (მაგრამ შეიძლება არ იყოს არც ერთი).

3.1.1. შენიშვნა. თუ $a = 0$, მაშინ ნებისმიერი a-სთვის გვექნება

$$a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0,$$

ე.ი. რგოლი შედგება მხოლოდ ნულოვანი ელემენტისაგან. ამგვარად, თუ რგოლი ერთ ელემენზე მეტს არ შეიცავს, მაშინ $1 \neq 0$.

4) თუ გამოვიყენებთ ინდუქციას n-ის მიმართ, დავრწმუნდებით, რომ

$$(a_1 + \cdots + a_n)b = a_1 b + \cdots + a_n b,$$

$$b(a_1 + \cdots + a_n) = ba_1 + \cdots + ba_n,$$

$$(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_m)b = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_m.$$

3.1.2. შენიშვნა. გამრავლების კომუტაციურობის შემთხვევაში რგოლის განსაზღვრებაში შემავალი ორი აქსიომიდან შეიძლება დავტოვოთ მხოლოდ ერთი. ანალოგიური შენიშვნა ეხება ერთეულის განსაზღვრებას.

3.1.3. მაგალითები. **1.** რიცხვითი $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ სიმრავლეები კომუტაციური, ასოციაციური რგოლებია ერთეულით ჩვეულებრივი შეკრებისა და გამრავლების მიმართ.

2. ყველა ლუწ რიცხვთა $2\mathbb{Z}$ სიმრავლე კომუტაციური, ასოციაციური რგოლია უერთეულოდ.

3. რიცხვითი ღერძის მოცემულ ქვესიმრავლეზე განსაზღვრულ ყველა ფუნქციათა $F(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid X \subseteq \mathbb{R}\}$ სიმრავლე ფუნქციათა ჩვეულებრივი შეკრების და გამრავლების ოპერაციების ($(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$) მიმართ კომუტაციური, ასოციაციური, ერთეულიანი რგოლია.

4. $C[0,1]$ – $[0,1]$ მონაკვეთზე განსაზღვრულ ყველა ნამდვილ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე ერთეულიანი რგოლია.

5. სივრცის ყველა ვექტორის სიმრავლე შეკრებისა და ვექტორული ნამრავლის ოპერაციებით არაკომუტაციური და არაასოციაციური რგოლია.

6. ნაშთთა კლასების $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ **რგოლები მოდულით** n**.** როგორც უკვე დავრწმუნდით, ნაშთთა კლასების

$$(\mathbb{Z}_n, +) = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}, \quad \overline{k} = k + n\mathbb{Z},$$

ჯგუფი მოდულით n შეკრების

$$\overline{k} + \overline{l} = \overline{k+l} = \overline{r},$$

სადაც $k + l = nq + r$, $0 \le r < n$, ოპერაციის მიმართ აბელური ჯგუფია (მაგალითი 2.1.1, 6).

განვსაზღვროთ გამრავლების ოპერაცია:

$$\overline{k} \cdot \overline{l} = \overline{kl} = \overline{r},$$

სადაც $kl = nq + r$, $0 \le r < n$. შევამოწმოთ ამ ოპერაციის კორექტულობა. თუ $\overline{k} = \overline{k'}$, $\overline{l} = \overline{l'}$, მაშინ $k' = k + nq_1$, $l] = l + nq_2$, $k'l' = kl + n(lq_1 + nq_1q_2)$, და ამიტომ $\overline{kl} = \overline{k'l'}$. რადგან

$$\begin{aligned}
&(\overline{k}\,\overline{l})\overline{m} = \overline{(kl)m} = \overline{k(lm)} = \overline{k}(\overline{l}\,\overline{m}),\\
&\overline{kl} = \overline{lk},\\
&\overline{1}\overline{k} = \overline{k} = \overline{k}\overline{1},\\
&(\overline{k} + \overline{l})\overline{m} = \overline{(k+l)m} = \overline{km + lm} = \overline{k}\overline{m} + \overline{l}\overline{m}.
\end{aligned}$$

ამიტომ $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ კომუტაციური, ასოციაციური რგოლია ერთეულით, რომელსაც უწოდებენ **ნაშთთა კლასების რგოლს მოდულით** n.

3.1.4. ამოცანა. ვთქვათ X რაიმე სიმრავლეა და 2^X – მისი ყველა ქვესიმრავლის სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ 2^X არის რგოლი სიმეტრიული სხვაობისა

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

და თანაკვეთის მიმართ, რომლებსაც განვიხილავთ როგორც შეკრებასა და გამრავლებას. დაამტკიცეთ, რომ ეს რგოლი კომუტაციური და ასოციაციურია.

3.1.5. თუ R რგოლია, $a, b \in R$ და $a \neq 0$, $b \neq 0$, $ab = 0$, მაშინ a ელემენტს ეწოდება **მარცხენა ნულის გამყოფი** R-ში, b ელემენტს ეწოდება **მარჯვენა ნულის გამყოფი** R-ში.

კომუტატიურ რგოლებში ცხადია, მარცხენა და მარჯვენა ნულის გამყოფებს შორის არ არის განსხვავება.

3.1.6. მაგალითი. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ და $\mathbb{R}$-ს არ გააჩნია ნულის გამყოფები.

3.1.7. მაგალითი. ფუნქციათა $F(X, \mathbb{R})$ რგოლში (იხ. მაგალითი 3.1.3, 3) არიან ნულის გამყოფები იმ შემთხვევაში, როცა X სიმრავლე ერთ ელემენტზე მეტს შეიცავს. დავყოთ X ორ არაცარიელ X_1 და X_2 ქვესიმრავლედ და ვთქვათ, როცა $i = 1, 2$,

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } \ x \in X_i, \\ 0, & \text{როცა } \ x \notin X_i, \end{cases}$$

მაშინ $f_1, f_2 \neq 0$, მაგრამ $f_1 f_2 = 0$.

3.1.8. მაგალითი. თუ $n = k \cdot l$, $0 < k.l < n$, მაშინ $\overline{k} \neq \overline{0}$, $\overline{l} \neq \overline{0}$. მაგრამ $\overline{k} \cdot \overline{l} = \overline{0}$, ე.ი. ნაშთთა კლასების $\mathbb{Z}_n$ რგოლს შედგენილი n რიცხვის მიმართ გააჩნია ნულის გამყოფები.

3.1.9. უნულგამყოფო რგოლში შესაძლებელია შეკვეცა:

$$\{ac = bc \ \ (\text{ან } \ ca = cb) \ \text{ და } \ c \neq 0\} \Rightarrow a = b.$$

მართლაც, $ac = bc$ ტოლობა შეიძლება გადაიწეროს $(a - b)c = 0$ სახით, საიდანაც, როცა $c \neq 0$, ვღებულობთ $a - b = 0$, ე.ი. $a = b$.

3.1.10. R რგოლის $x \neq 0$ ელემენტს **ნილპოტენტური** ეწოდება, თუ $x^n = 0$ რომელიღაც $0 < n \in \mathbb{N}$. ასეთ უმცირეს n ნატურალურ რიცხვს ეწოდება **ელემენტის ნილპოტენტურობის ხარისხი**.

გასაგებია, რომ ნილპოტენტური ელემენტი ნულის გამყოფია (თუ $n > 1$, მაშინ $x \cdot x^{n-1} = 0$, $x^{n-1} \neq 0$). შებრუნებული დებულება

არ არი სამართლიანი ($\mathbb{Z}_6$-ს არ გააჩნია ნილპოტენტური ელემენტები, მაგრამ $2, 3, 4$ არანულოვანი ნულის გამყოფებია).

3.1.11. სავარჯიშო. $\mathbb{Z}_n$ რგოლი მაშინ და მხოლოდ მაშინ შეიცავს ნილპოტენტურ ელემენტებს, როცა n იყოფა m^2-ზე, სადაც $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$.

3.1.12. R რგოლის x ელემენტს **იდემპოტენტი** ეწოდება, თუ $x^2 = x$. ცხადია, რომ $0^2 = 0$, $1^2 = 1$. თუ $x^2 = x$, $x \neq 1$ და $x \neq 0$, მაშინ $x(x-1) = x^2 - x = 0$ და ამიტომ არატრივიალური იდემპოტენტები ნულის გამყოფებია.

3.1.13. ერთეულიანი რგოლის a^{-1} ელემენტს ეწოდება a ელემენტის **შებრუნებული**, თუ $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (კომუტაციურ რგოლში საკმარისია მოვითხოვოთ, რომ $aa^{-1} = 1$).

ისევე როგორც მულტიპლიკაციური ჯგუფის შემთხვევაში, მტკიცდება, რომ ერთეულიან ასოციაციურ რგოლში არც ერთ ელემენტს არ გააჩნია ორი განსხვავებული შებრუნებული ელემენტი (მაგრამ შეიძლება არც ერთი არ გააჩნდეს). ელემენტს, რომელსაც შებრუნებული გააჩნია, **შებრუნებადი** ეწოდება.

3.1.14. სავარჯიშოები.

1. არანულოვანი ერთეულიანი რგოლის არანულოვანი a ელემენტის a^{-1} შებრუნებულიც არანულოვანია.
2. შებრუნებადი ელემენტი ნულის გამყოფი არაა. დაამტკიცეთ.
3. რგოლის შებრუნებად ელემენტთა ნამრავლი შებრუნებადია და
$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$
დაამტკიცეთ.

3.1.15. R რგოლის ყველა შებრუნებად ელემენტთა სიმრავლე აღინიშნება R^* ან $U(R)$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ $U(R)$ რგოლი გამრავლების ოპერაციის მიმართ ჯგუფია.

3.1.16. მაგალითი. $U(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$, $U(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.1.17. მაგალითი. ვთქვათ $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$, $\overline{k} = k + n\mathbb{Z}$, ნაშთთა კლასების რგოლია მოდულით n. აღვნიშნოთ, რომ $k + n\mathbb{Z} \in U(\mathbb{Z}_n)$, $k \in \mathbb{Z}$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(k + n\mathbb{Z})(l + n\mathbb{Z}) = 1 + n\mathbb{Z}$ რომელიღაც $l \in \mathbb{Z}$-სთვის, ე.ი. $kl + n\mathbb{Z} = 1 + n\mathbb{Z}$, რაც ნიშნავს $kl = 1 + nq$, $q \in \mathbb{Z}$, ე.ი. $(k, n) = 1$.

ამგვარად, $|U(\mathbb{Z}_n)| = \varphi(n)$, სადაც $\varphi(n)$ ყველა იმ k ნატურალურ რიცხვთა რიცხვია $1 \leq k < n$, რომლებიც თანამარტივია n-თან (**ეილერის ფუნქცია**). კერძოდ, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(p) = p - 1$ მარტივი p რიცხვისთვის. უფრო მეტიც, თუ $p \in \mathbb{N}$, მაშინ $\varphi(p) = p - 1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p მარტივი რიცხვია.

3.1.18. ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ $U(\mathbb{Z}_n)$ ჯგუფი ციკლურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $n \in \{2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha\}$, სადაც p კენტი მარტივი რიცხვია, $\alpha \in \mathbb{N}$.

3.2. R რგოლის L ქვესიმრავლეს ეწოდება **ქვერგოლი**, თუ

1) L არის R რგოლის ადიციური ჯგუფის ქვეჯგუფი;
2) L ჩაკეტილია გამრავლების მიმართ.

ცხადია, რომ ყოველი ქვერგოლი თვითონ არის რგოლი იგივე ოპერაციების მიმართ. ამასთან ის ინარჩუნებს ისეთ თვისებებს, როგორიცაა კომუტაციურობა და ასოციაციურობა.

3.2.1. მაგალითები. **1.** $\mathbb{R}$ ჯგუფის ქვეჯგუფების ჯაჭვი, რომელიც მოყვანილია მაგალით 2.5.1-ში, არის ამავე დროს ქვერგოლთა ჯაჭვი.

2. ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}_0$-სთვის სიმრავლე $n\mathbb{Z}$ არის $\mathbb{Z}$ რგოლის ქვერგოლი (იხ. ამოცანა 2.5.3).

3.2.2. ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ X სიმრავლის ყველა სასრული ქვესიმრავლე ქმნის 2^X რგოლის ქვერგოლს (იხ. ამოცანა 3.1.4).

3.3. K ერთეულოვან, კომუტაციურ, ასოციაციურ რგოლს, რომლის ყოველი არანულოვანი ელემენტი შებრუნებადია, **ველი** ეწოდება.

3.3.1. შენიშვნა. რგოლი, რომელიც შედგება მხოლოდ ნულისაგან, ველად არ ითვლება.

ველების მაგალითებია რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ ველი და ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ველი. $\mathbb{Z}$ რგოლი ველი არ არის: მასში შებრუნებადია მხოლოდ ± 1.

3.3.2. ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ველი, რომელიც შედგება ორი ელემენტისაგან (ცხადია, რომ ერთი ამ ელემენტებიდან უნდა იყოს ველის ნული, ხოლო მეორე – მისი ერთეული).

3.3.3. სავარჯიშო. შეადგინეთ 2, 3 და 5 ელემენტიანი ველების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების ცხრილები.

3.3.4. ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს ველი, რომელიც შედგენა 6 ელემენტისაგან.

3.3.5. სავარჯიშო. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{Q}(\sqrt{2} = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ველია რიცხვების ჩვეულებრივი შეკრებისა და გამრავლების მიმართ, შეიცავს $\mathbb{Q}$-ს, შედის $\mathbb{R}$-ში, მაგრამ არ ემთხვევა არც $\mathbb{Q}$-ს და არც $\mathbb{R}$-ს.

3.3.6. ნებისმიერ ველს გააჩნია შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება:

$$ab = 0 \Rightarrow \{a = 0 \ \text{ან} \ b = 0\}.$$

მართლაც, თუ $a \neq 0$, მაშინ $ab = 0$ ტოლობის ორივე მხარის a^{-1}-ზე გამრავლებით მივიღებთ $b = 0$.

ნულის გამყოფების უქონლობა ველში ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ორი არანულოვანი ელემენტის ნამრავლი აგრეთვე არანულოვანია. K ველის არანულოვანი ელემენტები ქმნიან აბელურ ჯგუფს გამრავლების მიმართ. მას ეწოდება K **ველის მულტიპლიკაციური ჯგუფი** და K^*-ით აღინიშნება.

3.3.7. თეორემა. $\mathbb{Z}_n$ რგოლი არის ველი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა n მარტივი რიცხვია.

დამტკიცება. 1) ვთქვათ n შედგენილი რიცხვია, ე.ი. $n = k \cdot l$, სადაც $1 < k, l < n$. მაშინ $\overline{k}, \overline{l} \neq \overline{0}$, მაგრამ

$$\overline{k} \cdot \overline{l} = \overline{k \cdot l} = \overline{n} = \overline{0}.$$

ამგვარად, $\mathbb{Z}_n$ რგოლს გააჩნია ნულის გამყოფები და, მაშასადამე, ის ველი არ არის.

2) ვთქვათ, პირიქით, n მარტივი რიცხვია და $\overline{a} \neq \overline{0}$, ე.ი. a არ იყოფა n-ზე. ვეძიოთ $\overline{a}$-ს შებრუნებული ელემენტი შერჩევით, ე.ი. $\overline{a}$-ს რგოლის ყველა ელემენტზე გამრავლებით. მივიღებთ ელემენტებს

$$\overline{0}, \overline{a}, \overline{2a}, \ldots, \overline{(n-1)a}. \tag{12}$$

დავამტკიცოთ, რომ ისინი ყველა განსხვავებულია. მართლაც, თუ $\overline{ka} = \overline{la}$ $(0 \leq k < l \leq n-1)$, მაშინ $\overline{(l-k)a} = \overline{0}$, ე.ი. $(l-k)a$ იყოფა n-ზე, რაც შეუძლებელია, რადგან არც $l-k$, არც a არ იყოფა n-ზე (აქ გამოიყენება n-ის მარტივობა). ამგვარად, ელემენტთა (12) მწკრივში გვხვდება $\mathbb{Z}_n$ რგოლის ყველა ელემენტი, მათ შორის $\overline{1}$-იც, ეს კი ნიშნავს, რომ $\overline{a}$ ელემენტი შებრუნებადია. $\square$

3.3.8. სასრული, კომუტაციური, უნულგამყოფო რგოლი ველია.

3.3.9. ნაშთთა კლასების რგოლებში ჩვენ გვაქვს საქმე ზოგიერთ ახალ მოვლენასთან, რომლებსაც არ აქვს ადგილი რიცხვით ველებში. სახელდობრ, $\mathbb{Z}_n$ ველში (n მარტივია) სრულდება ტოლობა

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p} = p1 = 0 \tag{13}$$

(რა თქმა უნდა, ეს სამართლიანია $\mathbb{Z}_n$ რგოლშიც ნებისმიერი n-სთვის). ამას მივყავართ ამ ველში ალგებრული გარდაქმნების ზოგიერთ თავისებურებამდე, რომლებზედაც ქვემოთ ვიტყვით.

ვთქვათ, საზოგადოდ, K ნებისმიერი ველია. ვიტყვით, რომ K ველის **მახასიათებელი** არის p, თუ p უმცირესი ნატურალური რიცხვია, რომლისთვისაც $p1 = 0$; თუ ასეთი p არ არსებობს, მაშინ ვიტყვით, რომ K-ს მახასიათებელი ნულია. ამგვარად, $\mathbb{Z}_p$ (p მარტივია) ველია p მახასიათებლით, ხოლო რიცხვით ველებს მახასიათებლად აქვთ ნული. K ველის მახასაითებელი აღინიშნება $\operatorname{char} K$-თი.

3.3.10. თეორემა.

1) *თუ* $\operatorname{char} K = p$, *მაშინ* p *მარტივი რიცხვია.*

2) *თუ* $\operatorname{char} K = p$, *მაშინ* $\forall a \in K$ $pa = 0$. *თუ კი* $\operatorname{char} K = 0$ *და* $a \in K$, *მაშინ* $a \neq 0$ *და* $n \neq 0$-*დან გამომდინარეობს* $na \neq 0$.

3) *თუ* $\operatorname{char} K = p$, $p \mid n$, $n \in \mathbb{N}$, *მაშინ ნებისმიერი* $0 \neq a \in K$-*თვის გვექნება* $na = 0$.

დამტკიცება. 1) თუ საწინააღმდეგოს დავუშვებთ, ე.ი. $p = s \cdot t$, სადაც $1 < s, t < p$, მაშინ დისტრიბუციოლობის საფუძველზე გვექნება

$$(s1) \cdot (t1) = (\underbrace{1 + \cdots + 1}_{s})(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{t}) =$$
$$= \underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{st} = 1 + \cdots + 1 = (st)1 = p1 = 0.$$

მაგრამ K ველში $s1 \neq 0$, $t1 \neq 0$, რაც ეწინააღმდეგება ველში ნულის გამყოფების არსებობას.

2) მართლაც, $pa = p(a \cdot 1) = \underbrace{a \cdot 1 + \cdots + a \cdot 1}_{p} = a(1 + \cdots + 1) = a \cdot (p1) = a \cdot 0 = 0$.

თუ $a \neq 0$ და $na = 0$, მაშინ $n(a \cdot 1) = 0$. აქედან $a \cdot (n1) = 0$. რადგან $a \neq 0$, ამიტომ $n1 = 0$. რადგან $\operatorname{char} K = 0$, ვღებულობთ $n = 0$.

3) $na = (pq)a = q(pa) = q0 = 0$. □

3.3.11. ელემენტარული ალგებრის ფორმულების დიდი ნაწილი სამართლიანია ნებისმიერ ველში, რადგან მათი გამოყვანის დროს გამოიყენება შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მხოლოდ ის თვისებები, რომელნიც შედიან ველის აქსიომების ჩამონათვალში ან არიან მათი შედეგი. დადებით მახასიათებლიანი ველის განსაკუთრებულება ვლინდება მხოლოდ იმ ფორმულებში, რომლებიც შეიცავენ ნატურალურ რიცხვზე გამრავლებას და გაყოფას.

განვიხილოთ, მაგალითად, ფორმულა

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

ის სამართლიანია ნებისმიერ ველში, თუ $2ab$-ს გავიგებთ როგორც $ab + ab$. მაგრამ ველში მახასიათებლით 2 ის იღებს უფრო მარტივ

სახეს

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2.$$

უფრო ზოგადად, p მახასიათებლიან ველში სამართლიანია იგივეობა

$$(a+p)^p = a^p + b^p.$$

მართლაც, ნიუტონის ბინომის ფორმულის თანახმად

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k a^{p-k} b^k.$$

მაგრამ, როცა $0 < k < p$

$$C_p^k = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$$

ცხადია, იყოფა p-ზე. მაშასადამე, ნიუტონის ბინომის ფორმულის ყველა შესაკრები, გარდა პირველი და უკანასკნელის, მოცემულ შემთხვევაში ნულის ტოლია.

3.3.12. ამოცანა. გამოიყვანეთ აქედან, რომ $\mathbb{Z}_p$ ველში (p მარტივია) $a^p = a$ ნებისმიერი a-სთვის (ფერმას მცირე თეორემა).

უფრო უარესად არის საქმე, როცა გვჭირდება ნატურალურ რიცხვზე გაყოფა, მაგალითად, როცა გვინდა ვიპოვოთ ab-ს გამოსახვა ზემოთ ამოწერილი ჯამის კვადრატის ფორმულიდან. იმისათვის, რომ ნებისმიერი ველში გაყოფას მივცეთ აზრი, შეიძლება გავიგოთ ნატურალურ n რიცხვზე გამრავლება როგორც ამ ველის $\underbrace{1+\cdots+1}_{n} = n1$ ელემენტზე გამრავლება; მაშინ n-ზე გაყოფა შეიძლება გავიგოთ როგორც ამ ელემენტზე გაყოფა. მაგრამ თუ n იყოფა ველის მახასიათებელზე, მაშინ ეს ელემენტი ნულის ტოლია და გაყოფა შეუძლებელია.

ფორმულა კვადრატული განტოლების ამოხსნისათვის, რომელიც შეიცავს 2-ზე გაყოფას მითითებული აზრით, გამოყენებადია ნებისმიერ ველში $\neq 2$ მახასიათებლით, მაგრამ 2 მახასიათებლიან ველში ის არ მუშაობს.

3.3.13. მაგალითი. ამოვხსნათ კვადრატული განტოლება $\mathbb{Z}_7$ ველში

$$4x^2 + x + 2 = 0.$$

ჩვეულებრივი ფორმულით ვპოულობთ:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{-31}}{8}\,.$$

რადგან $-31 = 4 = 2^2$, ამიტომ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\sqrt{-31} = 2$ (კვადრატული ფესვის ერთ-ერთი მნიშვნელობა). მაშასადამე,

$$x_1 = \frac{-1-2}{8} = \frac{-3}{8} = \frac{4}{1} = 4,$$
$$x_2 = \frac{-1+2}{8} = \frac{1}{8} = \frac{1}{1} = 1.$$

ამ შემთხვევაში კარგად ამოვიდა კვადრატული ფესვი. შეიძლება მომხდარიყო, რომ ფესვის ქვეშ მდგომი ელემენტი არ იყოს ველის რომელიღაც ელემენტის კვადრატი. ამ შემთხვევაში მოცემულ კვადრატულ განტოლებას არ ექნებოდა ფესვები საწყის ველში.

3.3.14. შენიშვნა. $\mathbb{Z}_p$ აღნიშვნის სანაცვლოდ p ელემენტიანი "აბსტრაქტული" ველისათვის იყენებენ $\mathbb{F}_p$ ან $GF(p)$ (Galois FIeld – **გალუას ველი**) აღნიშვნებს. სასარგებლოა იქონიოთ მხედველობაში, რომ არსებობს $GF(q)$ სასრული ველი $q = p^n$ რაოდენობა ელემენტებით, სადაც p მარტივია, ხოლო $n \geq 1$.

3.4. K ველის L ქვესიმრავლეს ეწოდება **ქვეველი**, თუ

1) L არის K რგოლის ქვერგოლი;
2) $a \in L$, $a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in L$;
3) $1 \in L$.

ცხადია, რომ ყოველი ქვეველი თვითონ არის ველი იგივე ოპერაციების მიმართ.

3.4.1. მაგალითი. $\mathbb{Q} < \mathbb{Q}(\sqrt{2}) < \mathbb{R}$.

3.4.2. სავარჯიშო. დაამტკიცეთ, რომ K ველის L ქვესიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ქვეველი, როცა

1) L ჩაკეტილია გამრავლების და გაყოფის მიმართ;
2) $L \ni 0, 1$.

3.4.3. სავარჯიშო. K ველის ნებისმიერ K_i ქვეველთა $\bigcap\limits_{i \in I} K_i$ თანაკვეთა ქვეველია.

3.4.4. ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{Q}$-ს არ გააჩნია არატრივიალური (ე.ი. მისგან განსხვავებული) ქვეველები.

3.5. იდეალები და რგოლთა ჰომომორფიზმები.

3.5.1. ვთქვათ R რგოლია. $\varnothing \neq I \subset R$ ქვესიმრავლეს ეწოდება R რგოლის **მარცხენა იდეალი**, თუ:

1) I – R რგოლის $(R, +)$ ადიციური ჯგუფის ქვეჯგუფია;

2) $rI \subseteq I$ ნებისმიერი $r \in R$ ელემენტისათვის (ე.ი. $ri \in I$ ყველა $i \in I$-სთვის).

ანალოგიურად განისაზღვრება **მარჯვენა იდეალი**: 2)-ის ნაცვლად პირობა

2′) $Ir \subseteq I$ ნებისმიერი $r \in R$ ელემენტისათვის (ე.ი. $ir \in I$ ყველა $i \in I$-სთვის).

თუ R რგოლში I ქვესიმრავლე მარცხენა იდეალიცაა და მარჯვენაც, მაშინ I-ს ეწოდება R რგოლის **ორმხრივი იდეალი** (ე.ი. I $(R, +)$-ის ქვეჯგუფია, $rI \subseteq I$, $Ir \subseteq I$ ყველა $r \in R$-სთვის). R რგოლის ორმხრივი I იდეალისთვის ვიყენებთ $I \lhd R$ აღნიშვნას.

3.5.2. მაგალითები. 1) $\{0\}$ და R – R რგოლის იდეალებია.

2) $\mathbb{Z}_n \lhd \mathbb{Z}$ ნებისმიერი $n \in \mathbb{Z}$-სთვის.

3) $I_a = \{f \in C[0, 1] \mid f(a) = 0\} \lhd C[0, 1]$ ნებისმიერი $a \in [0, 1]$-სთვის.

4) თუ R კომუტაციური რგოლია, $a \in R$, მაშინ $Ra = \{ra \mid r \in R\}$ ქვესიმრავლე R რგოლის იდეალია, რომელსაც ეწოდება $a \in R$ ელემენტის მიერ წარმოქმნილი **მთავარი იდეალი**.

3.5.3. სავარჯიშო. დაამტკიცეთ, რომ მთელ რიცხვთა $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ რგოლში ყოველ იდეალს აქვს $\mathbb{Z}n$ სახე, $n \in \mathbb{Z}$, ე.ი. ყველა იდეალი მთავარია (ასეთ კომუტაციურ რგოლებს **მთავარ იდეალთა რგოლებს** უწოდებენ).

3.5.4. ვთქვათ R და R' რგოლებია. $\varphi : R \to R'$ ასახვას ეწოდება **რგოლთა ჰომომორფიზმი**, თუ $\varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b)$ და $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ ყველა $a, b \in R$-სთვის.

$\operatorname{Im}\varphi = \varphi(R)$-ით აღვნიშნოთ φ **ჰომომორფიზმის ანასახი**, ე.ი.

$$\varphi(R) = \{\varphi(r) \in R' \mid r \in R\};$$

$\ker\varphi$-ით φ **ჰომომორფიზმის ბირთვი**, ე.ი.

$$\ker\varphi = \{a \in R \mid \varphi(a) = 0\}.$$

როგორც ჯგუფების შემთხვევაში, $\varphi : R \to R'$ ჰომომორფიზმს ეწოდება **მონომორფიზმი**, თუ $\ker\varphi = \{0\}$; **ეპიმორფიზმი**, თუ $\operatorname{Im}\varphi = R'$ და **იზომორფიზმი**, თუ φ მონომორფულია და ეპიმორფული.

აღვნიშნოთ რგოლთა $\varphi : R \to R'$ ჰომომორფიზმების ზოგიერთი თვისება.

1. რადგან φ აბელურ $(R,+)$, $(R',+)$ ჯგუფთა ჰომომორფიზმია, ამიტომ $\varphi(0) = 0'$, $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.

2. თუ $1 \in R$, $1' \in R$ და $\operatorname{Im}\varphi = R'$, მაშინ $\varphi(1) = 1'$, $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ შებრუნებადი a ელემენტისთვის. მართლაც, თუ $a' \in R'$, ამიტომ $a' = \varphi(a)$, $a \in R$. მაშინ

$$\varphi(1)a' = \varphi(1)\varphi(a) = \varphi(1\cdot a) = \varphi(a) = a',$$
$$a'\varphi(1) = \varphi(a)\varphi(1) = \varphi(a\cdot 1) = \varphi(a) = a',$$

ე.ი. $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

ეს დებულება შეიძლება არ იყოს სამართლიანი, თუ $\operatorname{Im}\varphi \neq R'$.

3. თუ $\varphi : R \to R'$ რგოლთა ჰომომორფიზმია, მაშინ $\ker\varphi$ R რგოლის ორმხრივი იდეალია. მართლაც, რადგან $\varphi : (R,+) \to (R',+)$ ჯგუფთა ჰომომორფიზმია, ამიტომ $\ker\varphi$ – $(R,+)$-ის ქვეჯგუფია. თუ $a \in \ker\varphi$, ე.ი. $\varphi(a) = 0$, $r, s \in R$, მაშინ

$$\varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) = \varphi(r)\cdot 0 = 0,$$

$$\varphi(as) = \varphi(a)\varphi(s) = 0 \cdot \varphi(s) = 0.$$

ამგვარად, $ra \in \ker\varphi$, $as \in \ker\varphi$, ე.ი. $\ker\varphi \lhd R$.

4. რგოლთა $\varphi : R \to R'$ ჰომომორფიზმი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის იზომორფიზმი, როცა $\ker\varphi = \{0\}$ და $\operatorname{Im}\varphi = R'$.

გასაგებია, რომ იზომორფულ რგოლებს გააჩნიათ რგოლის ერთნაირი თვისებები. მაგალითად, თუ $\varphi : R \to R'$ რგოლთა იზომორფიზმია, R ველია, მაშინ R'-იც აგრეთვე ველია.

3.5.5. შენიშვნა. K და K' ველებს **იზომორფულს** უწოდებენ, თუ ისინი იზომორფულია როგორც რგოლები. გასაგებია, რომ $\varphi(0) = 0'$ და $\varphi(1) = 1'$ ნებისმიერი φ იზომორფიზმისათვის. არსებითი აზრი არ აქვს ვილაპარაკოთ ველების ჰომომორფიზმზე, რადგან

$$\ker\varphi \neq \{0\} \Rightarrow \varphi(a) = 0,\ a \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(1) = \varphi(aa^{-1}) = 0 \cdot \varphi(a^{-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall b \in K\ \varphi(b) = \varphi(1 \cdot b) = \varphi(1)\varphi(b) = 0 \cdot \varphi(b) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ker\varphi = K.$$

პირიქით, **ავტომორფიზმები**, ე.ი. K ველის თავის თავზე იზომორფული ასახვები, დაკავშირებულია ველების ყველაზე ღრმა თვისებებთან და წარმოადგენენ ამ თვისებების შესწავლის მძლავრ ინსტრუმენტს ე.წ. გალუას თეორეაში.

3.5.6. სავარჯიშო. თუ R კომუტაციური რგოლია, მაშინ R ველია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა R-ში არ არის $\{0\}$ და R-სგან განსხვავებული იდეალები.

3.5.7. სავარჯიშო. ასახვა $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6$, როცა $k + 3\mathbb{Z} \to 4k + 6\mathbb{Z}$, წარმოადგენს რგოლთა მონომორფიზმს.

4. კომპლექსურ რიცხვთა ველი

ჩვენი ამოცანაა: ნამდვილ რიცხვთა სისტემა გავაფართოოთ რიცხვთა ისეთ სისტემამდე, რომელშიაც $x^2 + 1 = 0$ განტოლებას უკვე ექნება ფესვი. უფრო ზუსტად, გვინდა ავაგოთ ისეთი $\mathbb{C}$ ველი, რომ:

1) $\mathbb{R} < \mathbb{C}$;

2) $\mathbb{C}$ შეიცავს ისეთ i ელემენტს, რომ $i^2 = -1$;
3) $\mathbb{C}$ უმცირესია ასეთი თვისებების მქონე ველებს შორის, ე.ი. თუ $K \leq \mathbb{C}$ ისეთი ქვეველია, რომელიც შეიცავს $\mathbb{R}$-ს და i-ს, მაშინ $K = \mathbb{C}$.

განვიხილოთ სიბრტყე დეკარტეს კოორდინატთა სისტემით. აბსცისთა ღერძი გავაიგივეოთ რიცხვით $\mathbb{R}$ ღერძთან. მაშინ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი შეიძლება მოიცეს ამ წერტილის კოორდინატებით, ე.ი. ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული (a, b) წყვილით. ამასთან წყვილი $(a, 0)$ არის რიცხვითი ღერძის a ნამდვილი რიცხვი. ამ სიბრტყის ყველა წერტილთა სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathbb{C}$-თი. ამგვარად, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. განვსაზღვროთ $\mathbb{C}$-ზე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები ტოლობებით:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

4.1. თეორემა. *$\mathbb{C}$ ველია ამ ოპერაციების მიმართ, რომელიც შეიცავს ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ველს. $\mathbb{C}$-ში არის ელემენტი i, რომლისთვისაც $i^2 = -1$. ნებისმიერი ელემენტი $\mathbb{C}$-დან ცალსახად წარმოიდგინება $a + bi$ სახით, სადაც $a, b \in \mathbb{R}$. თუ $K \leq \mathbb{C}$ ისეთი ქვეველია, რომელიც შეიცავს $\mathbb{R}$-ს და i-ს, მაშინ $K = \mathbb{C}$.*

დამტკიცება. უშუალოდ მოწმდება ველის აქსიომები. კერძოდ, ამ ველის ნულია წყვილი $(0, 0)$, ე.ი. ნამდვილი რიცხვი 0, (a, b) წყვილის მოპირდაპირე $-(a, b)$ წყვილი ტოლია $(-a, -b)$-სი, ველის ერთეულია წყვილი $(1, 0)$ – ნამდვილი რიცხვი 1, $(a, b) \neq (0, 0) = 0$ ელემენტის შებრუნებული ელემენტია $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

ამის გარდა, რიცხვითი ღერძის ელემენტებზე $\mathbb{C}$-ში განსაზღვრული შეკრება და გამრავლება ემთხვევა ნამდვილ რიცხვთა ჩვეულებრივ შეკრებას და გამრავლებას და ადგილი აქვს ტოლობას $a(c, d) = (ac, ad)$, სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

ვთქვათ $i = (0, 1)$. მაშინ $i^2 = (-1, 0) = 1$ და $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$.

ამგვარად, $\mathbb{C}$ ველის ყოველი $\alpha = (a, b)$ ელემენტი ცალსახად წარმოიდგინება $a + bi$ სახით, სადაც $a, b \in \mathbb{R}$. ამიტომ, თუ რომელიღაც $K \leq \mathbb{C}$ ქვეველი შეიცავს $\mathbb{R}$ და i-ს, მაშინ $K = \mathbb{C}$. $\square$

4.2. $\mathbb{C}$ სიმრავლეს ზემოთ განსაზღვრული შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებით ეწოდება **კომპლექსურ რიცხვთა ველი**, მის ელემენტებს **კომპლექსური რიცხვები** ეწოდება, ელემენტ i-ს – **წარმოსახვითი ერთეული**, ხოლო ორდინატთა ღერძს, ე.ი. სიმრავლეს $\mathbb{R}i = \{bi = (0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ – **წარმოსახვითი ღერძი**. აბსცისთა ღერძს (რიცხვით ღერძს) **ნამდვილ ღერძს** უწოდებენ. $\alpha = (a, b) = a + bi$ კომპლექსური რიცხვის წარმოდგენას ეწოდება მისი **ალგებრული ფორმა**; ამასთან a ნამდვილ რიცხვს ეწოდება α რიცხვის **ნამდვილი ნაწილი** და $\operatorname{Re}\alpha$-თი აღინიშნება, ხოლო b ნამდვილ რიცხვს – მისი **წარმოსახვითი ნაწილი** და $\operatorname{Im}\alpha$-თი აღინიშნება. ალგებრული ფორმით ჩაწერილ კომპლექსურ რიცხვთა შეკრება, გამრავლება და გაყოფა ხდება შემდეგნაირად:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i;$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i, \quad c + di \neq 0.$$

გეომეტრიული ინტერპრეტაციით $\alpha = a + bi$ კომპლექსური რიცხვი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში გამოისახება $0 = (0, 0)$ წერტილიდან $\alpha = (a, b)$-საკენ მიმავალი ვექტორით.

4.2.1. შენიშვნა. აგებულ $\mathbb{C}$ ველში $x^2 + 1 = 0$ განტოლებას აქვს მხოლოდ ორი ფესვი: $x = i$, $x = -i$. მართლაც, თუ $(a+bi)^2 = -1$, მაშინ $a^2 - b^2 = -1$, $2ab = 0$. რადგან $b \neq 0$ (სხვანაირად, $a^2 = -1$), ამიტომ $a = 0$ და $b^2 = 1$, ე.ი. $b = \pm 1$.

4.3. $\overline{\alpha} = a - bi$ რიცხვს ეწოდება α-ს **შეუღლებული** კომპლექსური რიცხვი. კომპლექსური $\alpha = a + bi$ რიცხვიდან შეუღლებულ $\overline{\alpha}$ კომპლექსურ რიცხვზე გადასვლის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია აშკარაა: ის ნამდვილი ღერძის მიმართ არეკვლაა.

4.3.1. თეორემა. *1) კომპლექსური შეუღლების $\alpha \to \overline{\alpha}$ ოპერაცია კომპლექსურ რიცხვთა $\mathbb{C}$ ველის ავტომორფიზმია (ე.ი. ბიექცია, რომლისთვისაც $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$, როცა $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ და, როგორც*

შედეგები, $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$, $\overline{(\frac{\alpha}{\beta})}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$, *როცა* $\beta\neq 0$), *რომელიც ყველა ნამდვილ რიცხვს და მხოლოდ მათ ტოვებს უცვლელად* ($\overline{a}=a$, *როცა* $a\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$; *თუ* $\overline{\alpha}=\alpha$, *მაშინ* $\alpha\in\mathbb{R}$).

2) კომპლექსური შეუღლების კვადრატი იგივური ასახვის ტოლია ($\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$).

3) თუ $\alpha=a+bi\in\mathbb{C}$, *მაშინ* $\alpha+\overline{\alpha}=2a\in\mathbb{R}$, $\alpha-\overline{\alpha}=2bi\in\mathbb{R}i$, $N(\alpha)=\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2\in\mathbb{R}$, *ამასთან,* $N(\alpha\beta)=N(\alpha)\cdot N(\beta)$, *როცა* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

4) თუ $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *კომპლექსურ რიცხვთა* $\mathbb{C}$ *ველის ისეთი ავტომორფიზმია, რომ* $\varphi(a)=a$ *ყველა* $a\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, *მაშინ ან* $\varphi=id_{\mathbb{C}}$ *ან* $\varphi(\alpha)=\overline{\alpha}$, *როცა* $\alpha\in\mathbb{C}$.

დამტკიცება. 1), 2) და 3) უშუალოდ გამომდინარეობს შეუღლებული კომპლექსური რიცხვის განსაზღვრებიდან.

4) რადგან $i^2=-1$, $\varphi(i)^2=\varphi(-1)=-1$, ამიტომ

ან $\varphi(i)=i$, და მაშინ $\varphi(a+bi)=\varphi(a)+\varphi(b)\varphi(i)=a+bi$,

ან $\varphi(i)=-1$, და მაშინ $\varphi(a+bi)=\varphi(a)+\varphi(b)\varphi(i)=a-bi$. $\square$

4.3.2. შენიშვნა. 1) თუ α კომპლექსური რიცხვი როგორც გამოსახულება მიღებულია $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ კომპლექსური რიცხვებისაგან შეკრების, გამოკლების, გამრავლების და გაყოფის ოპერაციების საშუალებით, მაშინ იგივე გამოსახვა $\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_n$ კომპლექსური რიცხვები იძლევა $\overline{\alpha}$-ს.

2) $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვის არანულოვან $0\neq c+di$ კომპლექსურ რიცხვზე ალგებრული ფორმით გაყოფის წესით:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

4.4. არითმეტიკულ კვადრატულ ფესვს $\alpha\overline{\alpha}$-დან ეწოდება α კომპლექსური რიცხვის **მოდული** და $|\alpha|$-თი აღინიშნება: $|\alpha|=+\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$. ამგვარად,

$$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$$

და

$$\alpha^{-1}=\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}\,.$$

ამის გარდა,

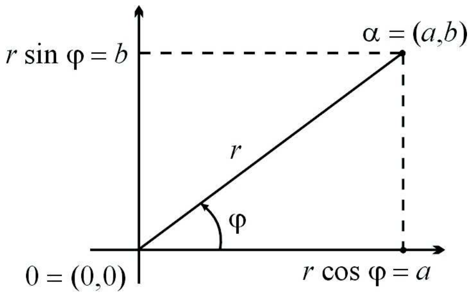
$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

$\alpha = a + bi$ რიცხვის მოდული კოორდინატთა სათავიდან $\alpha = (a, b)$ წერტილამდე მანძილის ტოლია. ამიტომ

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

ნამდვილი ღერძის წერტილებისათვის მოდულის ეს განსაზღვრება ემთხვევა ნამდვილი რიცხვის მოდულის ჩვეულებრივ განსაზღვრებას.

4.5. კუთხე ნამდვილი ღერძის დადებით მიმართულებასა და კოორდინატთა სათავისა და (a, b) წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს შორის, რომელიც აითვლება საათის ისრის საწინააღმდეგოდ, ეწოდება $\alpha = a + bi$ კომპლექსური რიცხვის **არგუმენტი** და აღინიშნება $\arg \alpha$-თი. რიცხვი $0 = (0, 0)$-ის არგუმენტი არ არის განსაზღვრული, ხოლო დანარჩენი კომპლექსური რიცხვებისათვის არგუმენტი განსაზღვრულია 2π-ს მთელი ჯერადების მიმატებამდე სიზუსტით.



თუ φ კომპლექსური $\alpha = a + bi$ რიცხვის არგუმენტია, მაშინ $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, ე.ი. $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, სადაც $r = |\alpha|$. კომპლექსური რიცხვის ასეთ წარმოდგენას ეწოდება მისი **ტრიგონომეტრიული ფორმა**.

კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი ამ რიცხვს ცალსახად განსაზღვრავს. თუ რიცხვის მოდული 0-ის ტოლია, მაშინ რიცხვი 0-ის ტოლია. ორი კომპლექსური რიცხვი ტოლია, თუ ტოლია მათი მოდულები და მათი არგუმენტების სხვაობაა $2\pi k$ რომელიღაც k-სთვის, $k \in \mathbb{Z}$, ე.ი. თუ $r_1, r_2 > 0$,

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{r_1 = r_2, \;\; \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}\}.$$

მართლაც, ალგებრული ფორმის ერთადერთობიდან გვაქვს

$$r_1 \cos\varphi_1 = r_2 \cos\varphi_2, \quad r_1 \sin\varphi_1 = r_2 \sin\varphi_2.$$

კვადრატში აყვანის და შეკრების შედეგად ვღებულობთ

$$r_1^2(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1) = r_1^2 = r_2^2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2) = r_2^2.$$

თუ $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, მაშინ $r_1 = r_2$. ამიტომ $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$, $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$ და, მაშასადამე, $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.6. კომპლექსური რიცხვების ტრიგონომეტრიული ფორმა კარგადაა შეწყობილი გამრავლების, გაყოფის, ახარისხების და ფესვის ამოღების ოპერაციებთან. სახელდობრ, ორი კუთხის ჯამის კოსინუსისა და სინუსის ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big),\end{aligned}$$

ე.ი. კომპლექსური რიცხვების გამრავლებისას მათი მოდულები მრავლდება, ხოლო არგუმენტები იკრიბება. აქედან გამომდინარეობს გაყოფისა და ახარისხების შემდეგი ფორმულები:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big),$$

$$\begin{aligned}\alpha^n = \big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big]^n = \\ = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \;\; (\textbf{მუავრის ფორმულა}).\end{aligned}$$

4.6.1. სავარჯიშო. მუავრის ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი მთელი n რიცხვისათვის. დაამტკიცეთ.

4.6.2* ამოცანა (კომპლექსური რიცხვის ჩაწერის ეილერის ექსპონენციალური ფორმა). განვიხილოთ $c_n = a_n + b_n i \in \mathbb{C}$ მიმდევრობა, სადაც $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. თუ არსებობენ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n i) = a + bi \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

იმ მეტრიკაში, რომელიც განსაზღვრულია $|\alpha|$-თი, $\alpha \in \mathbb{C}$). აჩვენეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n = e^a(\cos b + i\sin b).$$

ეს იძლევა $e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$, სადაც $e^{bi} = \cos b + i\sin b$, აღნიშვნის შემოტანის საფუძველს (ეულერი). თუ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, მაშინ $e^\alpha \cdot e^\beta = e^{\alpha+\beta}$. ტრიგონომეტრიული ფორმით ჩაწერილი $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს $\alpha = re^{\varphi i}$ სახით (α-ს ჩაწერის **ექსპონენციალური** ფორმა), რომლისგანაც გამომდინარეობს ზემოთ მიღებული ყველა შედეგი.

4.6.3. n-ური ხარისხის **ფესვის ამოღება** $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვიდან არის $\beta^n = \alpha$ განტოლების ამონახსნი. ვთქვათ $|\beta| = \rho$, $\arg\beta = \psi$; მაშინ $\rho^n = r$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). ამგვარად,

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{(ფესვის არითმეტიკული მნიშვნელობა)},$$

$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\,.$$

საბოლოოდ ვღებულობთ

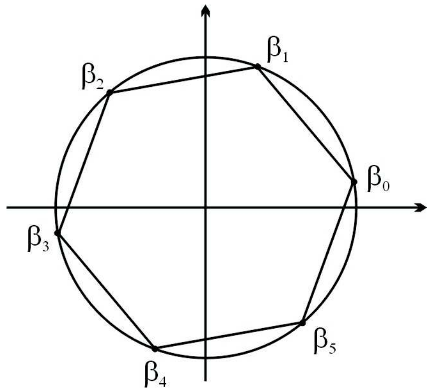
$$\beta = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\Big).$$

$0 \neq \alpha$-სთვის, როცა $k = 0, 1, \ldots, n-1$, მიიღება β-ს n განსხვავებული მნიშვნელობა, ამასთან ისინი ამოწურავს ყველა მის ფესვს, რადგან $k = nq + r$-დან, $0 \le r \le n-1$, გამომდინარეობს

$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi r}{n} + 2\pi q.$$

გეომეტრიული გამოსახულებით n ხარისხის ფესვის ყველა მნიშვნელობა განლაგებულია ნულ ცენტრიან და $\sqrt[n]{r}$ რადიუსიან წრეწირზე და ქმნის **წესიერი n-კუთხედის** წვეროებს არგუმენტებით

$$\frac{\varphi}{n},\quad \frac{\varphi+2\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(n-1).$$



(გამოსახულია შემთხვევა $n = 6$).

4.6.4. სავარჯიშო. გამოარკვიეთ გამრავლებისა და გაყოფის გეომეტრიული აზრი.

4.6.5. სავარჯიშო. 1) სამი განსხვავებული $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ კომპლექსური რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ მდებარეობს ერთ წრფეზე, როცა

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3} \in \mathbb{R}.$$

2) ოთხი განსხვავებული $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ კომპლექსური რიცხვი, რომლებიც $\mathbb{R}^2$-ში ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ, მაშინ და მხოლოდ მაშინ არიან განლაგებული ერთ წრეწირზე, როცა მათი ორმაგი შეფარდება

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3} : \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_4} \in \mathbb{R}.$$

3) განვიხილოთ **ინვოლუციის** $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ასახვა,

$$\alpha = a + bi \mapsto b + ai = \underline{\alpha}\,, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

აჩვენეთ, რომ

ა) ასახვა $\alpha \to \underline{\alpha}$ ბიექციაა, ამასთან $\underline{\alpha + \beta} = \underline{\alpha} + \underline{\beta}$, $|\underline{\alpha}| = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$;

ბ) $\underline{\alpha\beta} = \frac{1}{i}\,\underline{\alpha} \cdot \underline{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

გ) $|\underline{\alpha\beta}| = |\underline{\alpha} \cdot \underline{\beta}| = |\underline{\alpha}| \cdot |\underline{\beta}|$, კერძოდ, $|\alpha\,\underline{\alpha}| = |\alpha|^2$, როცა $\alpha \in \mathbb{C}$.

4.7. რადგან $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, $r = 1$, $\varphi = 0$, მაშინ 1-დან n-ური ხარისხის ფესვების ფორმულას აქვს სახე

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

კომპლექსურ სიბრტყეზე 1-დან n ხარისხის ფესვები განლაგებულია ერთეულობან წრეწირში ჩახაზული წესიერი n-კუთხედის წვეროებზე, რომლის ერთ-ერთი წვეროა $(1, 0) = 1$ წერტილი. აქედან გამომდინარეობს, რომ 1-დან n ხარისხის ფესვები, რომელნიც არ არიან ნამდვილი, წყვილ-წყვილად შეუღლებულია.

4.7.1. სავარჯიშო. k-ს რა მნიშვნელობებისთვის მიიღებიან 1-დან n ხარისხის ფესვის ნამდვილი მნიშვნელობები.

4.7.2. თეორემა. *1-დან n ხარისხის ფესვთა $\mathbb{C}_n = \{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid \varepsilon^n = 1\}$ სიმრავლე გამრავლების ოპერაციის მიმართ არის მულტიპლიკაციური აბელური ჯგუფი ($\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$-ის ქვეჯგუფი).*

დამტკიცება. თუ $\varepsilon_k, \varepsilon_l \in \mathbb{C}_n$, მაშინ $(\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l)^n = \varepsilon_k^n \cdot \varepsilon_l^n = 1 \cdot 1 = 1$. ამის გამო $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l \in \mathbb{C}_n$, ე.ი. $\mathbb{C}_n$ ჩაკეტილია გამრავლების მიმართ.

ცხადია, რომ $1^n = 1$, ე.ი. $1 \in \mathbb{C}_n$ და 1 ერთეულოვანი ელემენტია $\mathbb{C}_n$-ში.

თუ $\varepsilon_k \in \mathbb{C}_n$, მაშინ $\left(\frac{1}{\varepsilon_k}\right)^n = \frac{1}{\varepsilon_k^n} = \frac{1}{1} = 1$, და ამიტომ $\varepsilon_k^{-1} \in \mathbb{C}$. $\square$

4.7.3. სავარჯიშო. აჩვენეთ, რომ

$$\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l = \begin{cases} \varepsilon_{k+l}, & \text{თუ } k+l < n, \\ \varepsilon_{k+l-n}, & \text{თუ } k+l \geq n. \end{cases}$$

კერძოდ, $\varepsilon_k^{-1} = \varepsilon_{n-k}$.

4.7.4. შენიშვნა. თუ $\alpha \neq 0$, $\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$, მაშინ $\sqrt[n]{\alpha} = \{\beta\varepsilon_0, \beta\varepsilon_1, \ldots, \beta\varepsilon_{n-1}\}$, სადაც β არის ერთ-ერთი n-ური ხარისხის ფესვი α-დან, ე.ი. $\beta^n = \alpha$.

თუ განვიხილავთ 1-დან n ხარისხის ყველა ფესვთა ერთობლიობას, მაშინ ამ ფესვთაგან ზოგიერთი უკვე იქნება 1-დან m ხარისხის ფესვი, n რიცხვის გამყოფ რომელიმე m-სათვის (რადგან 1-დან m ხარისხის

ფესვი არის 1-დან n ხარისხის ფესვიც, ყოველი m-ის ჯერადი n-სათვის: $\varepsilon^n = (\varepsilon^m)^t = 1^t = 1$). მაგრამ ყოველი n-სათვის არსებობს n ხარისხის ისეთი ფესვები, რომელნიც არ არიან 1-დან არც ერთი უფრო ნაკლები ხარისხის ფესვები. ასეთები იქნება, მაგალითად, $\varepsilon = \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, ε_{n-1}. ნებისმიერი სხვა ε_k ფესვი არის ε_1-ის k-ური ხარისხი, $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$, რაც ადვილად ჩანს მუავრის ფორმულიდან. ვიტყვით, რომ 1-დან n ხარისხის ფესვი ε არის **პირველადი**, ან ის **ეკუთვნის** n **მაჩვენებლს**, თუ n არის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც $\varepsilon^n = 1$.

4.7.5. თეორემა. *ფესვი ε_k მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის პირველადი, როცა k და n თანამარტივია: $(k, n) = 1$.*

დამტკიცება. ვთქვათ $(k, n) = 1$ და $\varepsilon_k^m = 1$, სადაც m ნატურალური რიცხვია, $1 \leq m \leq n$. მაშინ $\frac{2\pi km}{n} = 2\pi t$ რომელიღაც $t \in \mathbb{Z}$-სთვის და $\frac{km}{n} = t$, ე.ი. km იყოფა n-ზე. მაგრამ $(k, n) = 1$. ამის გამო m იყოფა n-ზე, ე.ი. $n \geq m$. ამგვარად, $m = n$.

პირიქით, ვთქვათ ε_k პირველადი ფესვია და $d = (k, n)$, $n = n_1 d$, $k = k_1 d$. მაშინ $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k_1}{n_1} + i\sin\frac{2\pi k_1}{n_1}$ და $\varepsilon_k^{n_1} = 1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $d = 1$, ე.ი. $(k, n) = 1$, სხვანაირად იქნებოდა $n_1 < n$, რაც ε_k-ს პირველადობას ეწინააღმდეგება. $\square$

შედეგი. *ფესვი $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ ეკუთვნის n_1 მაჩვენებელს, სადაც $n_1 = \frac{n}{d}$, $d = (k, n)$.*

4.7.6. ამოცანა. 1-დან n ხარისხის ფესვი ε მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის პირველადი, თუ მისი ε^k ხარისხები, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ განსხვავებულია, ე.ი. თუ მათ მიერ ამოიწურება 1-დან n ხარისხის ყველა ფესვი.

4.7.7. სავარჯიშო. 1. ვთქვათ α და β კომპლექსური რიცხვებია. დაამტკიცეთ ტოლობები (სიმრავლე αA განსაზღვრებით არის $\{\alpha a \mid a \in A\}$):

ა) $\sqrt[n]{\alpha^n \beta} = \alpha\sqrt[n]{\beta}$;

ბ) $\sqrt[n]{-\alpha^n \beta} = -\alpha\sqrt[n]{\beta}$;

გ) $\sqrt[n]{\alpha\beta} = u\sqrt[n]{\beta}$, სადაც u – $\sqrt[n]{\alpha}$-ის ერთერთი მნიშვნელობაა.

2. დაამტკიცეთ, რომ $\sqrt[n]{\alpha}$ და $\sqrt[n]{-\alpha}$ სიმრავლეების გაერთიანება არის $\sqrt[2n]{\alpha^2}$ სიმრავლე.

3. სამართლიანია თუ არა ტოლობა $\sqrt[ns]{\alpha^s} = \sqrt[n]{\alpha}$ $(s > 1)$?

4.8. კვადრატული განტოლებები. ვთქვათ მოცემულია კვადრატული განტოლება $x^2+px+q=0$ ნებისმიერი კომპლექსური კოეფიციენტებით; ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ჩავთვალოთ უფროსი კოეფიციენტი 1-ის ტოლად. ეს განტოლება შეიძლება შემდეგნაირად გადაიწეროს:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=0.$$

როგორც ვიცით, $\frac{p^2}{4}-q$ კომპლექსური რიცხვიდან შეიძლება კვადრატული ფესვის ამოღება კომპლექსურ რიცხვთა ველიდან გამოუსვლელად. ამ ფესვის ორ მნიშვნელობას, რომელნიც ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან, ჩვენ ჩავწერთ $\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ სახით. ამიტომ

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,,$$

ე.ი. მოცემული განტოლების ფესვები შეიძლება მოიძებნოს ჩვეულებრივი ფორმულით

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,.$$

4.8.1. განვიხილოთ $\alpha=a+bi$ კომპლექსური რიცხვიდან კვადრატული ფესვის მნიშვნელობები. ვთქვათ $\sqrt{\alpha}=\sqrt{a+bi}=u+vi$. $(u+vi)^2=a+bi$ ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\begin{cases} u^2-v^2=a, \\ 2uv=b. \end{cases} \qquad (*)$$

$(*)$ ტოლობებიდან თითოეულის ორივე მხარის კვადრატში აყვანით და შემდეგ შეკრებით მივიღებთ:

$$(u^2-v^2)^2+4u^2v^2=(u^2+v^2)^2=a^2+b^2,$$

საიდანაც $u^2 + v^2 = +\sqrt{a^2 + b^2}$.

ამ ტოლობიდან და $(*)$ ტოლობათაგან პირველიდან მივიღებთ:

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right),$$
$$v^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right).$$

u და v-სათვის მიღებული მნიშვნელობები არ შეიძლება კომბინირებულ იქნან ერთმანეთთან ნებისმიერად, რადგან $(*)$ ტოლობათაგან მეორის ძალით, uv ნამრავლის ნიშანი უნდა ემთხვეოდეს b-ს ნიშანს. ეს იძლევა u და v-ს მნიშვნელობათა ორ შესაძლებელ კომბინაციას, ე.ი. $u + vi$ სახის ორ რიცხვს, რომლებიც იქნებიან α რიცხვიდან კვადრატული ფესვის მნიშვნელობები; ეს რიცხვები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან ნიშნით.

კერძოდ, უკვე შესაძლებელია კვადრატული ფესვის ამოღება უარყოფითი ნამდვილი რიცხვიდან, ამასთანავე ამ ფესვის მნიშვნელობები იქნებიან წმინდა წარმოსახვითი. მართლაც, თუ $a < 0$ და $b = 0$, გვაქვს $\sqrt{a^2 + b^2} = -a$, რადგან ეს ფესვი უნდა იყოს დადებითი, ხოლო მაშინ $u^2 = \frac{1}{2}(a - a) = 0$, ე.ი. $u = 0$, საიდანაც $\sqrt{a} = \pm vi$, $v = \sqrt{-a}$.

4.9. კომპლექსურ რიცხვთა $\mathbb{C}$ ველის ნებისმიერ ქვეველს ეწოდება **რიცხვითი ველი**.

4.9.1. სავარჯიშო. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{Q}(i) = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ არის რიცხვითი ველი, რომელიც არ შედის $\mathbb{R}$-ში და არ ემთხვევა $\mathbb{C}$-ს.

4.9.2. სავარჯიშო. თუ $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$, მაშინ

$$-\alpha = r\left(\cos(\varphi + \pi) + i\sin(\varphi + \pi)\right),$$
$$\alpha = r\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right).$$

4.9.3. სავარჯიშო. ვიპოვოთ

$$x^2 - (2 + i)x + (-1 + 7i) = 0$$

განტოლების ფესვები $\mathbb{C}$-ში.

ამოხსნა.

$$x_{1,2} = \frac{(2+i) \pm \sqrt{(2+i)^2 - 4(-1+7i)}}{2} = \frac{(2+i) \pm \sqrt{7-24i}}{2};$$

ვთქვათ $\sqrt{7-24i} = u + vi$. მაშინ $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{49+576} = 25$. ამიტომ $u^2 = \frac{1}{2}(7+25) = 16$, $v^2 = \frac{1}{2}(-7+25) = 9$, საიდანაც $u = \pm 4$, $v = \pm 3$; u და v-ს ნიშნები უნდა იყოს განსხვავებული b-ს უარყოფითობის გამო, ამიტომ $\sqrt{7-24i} = \pm(4-3i)$,

$$x_{1,2} = \frac{(2+i) \pm (4-3i)}{2}; \quad x_1 = \frac{(2+i)-(4-3i)}{2} = -1+2i,$$

$$x_2 = \frac{(2+i)+(4-3i)}{2} = 3-i.$$

თავი II

წრფივ განტოლებათა სისტემები. კვადრატულ მატრიცთა რგოლი

1. წრფივ განტოლებათა სისტემები და მართკუთხოვანი მატრიცები. გაუსის მეთოდი

1.1. ძირითადი განსაზღვრებები. K ველის მიმართ **წრფივ განტოლებათა სისტემა** $x_1, x_2, \dots, x_n$ **უცნობებით** (ან **უცნობების მიმართ**) ეწოდება

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{1}$$

სახის გამოსახულებათა ერთობლიობას, სადაც $a_{ij}, b_i \in K$.

თითოეულ ამ გამოსახულებას ეწოდება **წრფივი განტოლება**, a_{ij}-ებს – **კოეფიციენტები უცნობებთან**, b_i-ებს – **განტოლებათა თავისუფალი წევრები** (ან **თავისუფალი კოეფიციენტები**). a_{ij} – კოეფიციენტია x_j უცნობთან i-ურ განტოლებაში, b_i – i-ური განტოლების თავისუფალი წევრია.

n უცნობიანი m წრფივ განტოლებათა სისტემა ჩაიწერება შემდეგი ზოგადი სახით:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$a_{ij} \in K$ კოეფიციენტთა მართკუთხოვან $(m \times n)$ ცხრილს (m სტრიქონი, n სვეტი)

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ეწოდება (1) სისტემის **კოეფიციენტთა მატრიცი**, ხოლო მართკუთხოვან $(m \times (n+1))$ ცხრილს (m სტრიქონი, $n+1$ სვეტი)

$$\overline{A} = (a_{ij} \mid b_i) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

– (1) სისტემის **გაფართოებული მატრიცი** (რომელიც მას უკვე მთლიანად განსაზღვრავს).

თუ $m = n$ (განტოლებათა რიცხვი ტოლია უცნობთა რიცხვის), მაშინ წრფივ განტოლებათა სისტემას (და მის კოეფიციენტთა $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ მატრიცს) ეწოდება **კვადრატული**.

კვადრატულ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

მატრიცში შეიძლება განისაზღვროს **დიაგონალი** და **გვერდითი დიაგონალი**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}.$$

თუ წრფივ განტოლებათა (1) სისტემაში $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, მაშინ სისტემას ეწოდება **ერთგვაროვანი**.

წრფივ განტოლებათა (1) სისტემის **ამონახსნი** ეწოდება სტრიქონს $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in K^n$, რომლისთვისაც

$$a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \cdots + a_{in}x_n^0 = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

სისტემა **თავსებადია**, თუ მას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი, წინააღმდეგ შემთხვევაში – **არათავსებადი**. თავსებად სისტემას ეწოდება **განსაზღვრული**, თუ მას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, და **განუსაზღვრელი**, თუ ამონახსნი ერთზე მეტია. უცნობთა ერთი და იგივე $x_1, \dots, x_n$ ერთობლიობის მიმართ ორ წრფივ განტოლებათა სისტემას ეწოდება **ტოლფასი** (ან **ექვივალენტური**), თუ მათ აქვთ ამონახსნთა ერთი და იგივე სიმრავლე: პირველი სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი არის მეორე სისტემის ამონახსნი და მეორეს ნებისმიერი ამონახსნი არის პირველის ამონახსნი.

1.2. გაუსის მეთოდი. ვთქვათ ახლა (1) – ნებისმიერი სისტემაა. ამ სისტემის ყველა ამონახსნის მოძებნის გაუსის მეთოდი მდგომარეობს (1) სისტემის ისეთი ექვივალენტური სისტემით შეცვლაში, რომლის ამონახსნი აშკარაა.

1.2.1. ლემა. 1) *თუ* (1) *სისტემის ნებისმიერ განტოლებას მივუმატებთ სხვა განტოლებას, გამრავლებულს რაიმე $c \in K$ ელემენტზე, მივიღებთ საწყისი სისტემის ექვივალენტურ სისტემას (იცვლება მხოლოდ ერთი განტოლება, ის, რომელსაც ემატება მეორე, გამრავლებული c-ზე).*

2) *თუ* (1) *სისტემაში გადავანაცვლებთ ნებისმიერ ორ განტოლებას, მივიღებთ საწყისი სისტემის ექვივალენტურ სისტემას.*

3) *თუ* (1) *სისტემის რაიმე განტოლებას გავამრავლებთ არანულოვან $0 \neq c \in K$ ელემენტზე, მივიღებთ საწყისი სისტემის ექვივალენტურ სისტემას.*

4) *თუ* (1) *სისტემას დავუმატებთ განტოლებას, რომელიც არის* (1) *სისტემის განტოლებების წრფივი კომბინაცია, ე.ი.*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = d$$

სახის განტოლება, სადაც, როცა $j = 1, 2, \dots, n$,

$$c_j = l_1a_{1j} + l_2a_{2j} + \cdots + l_ma_{mj}, \quad d = l_1b_1 + l_2b_2 + \cdots + l_mb_m,$$

$l_1, l_2, \dots, l_m \in K$ – ამ წრფივი კომბინაციის კოეფიციენტებია, მაშინ მიიღება (1) *სისტემის ექვივალენტური სისტემა.*

დამტკიცება. 1) ვთქვათ $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ არის (1) სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი და ამ სისტემის i-ურ განტოლებას ემატება k-ური განტოლება, გამრავლებული c-ზე: $(i) + c(k)$, $i \neq k$. ვაჩვენოთ, რომ x^0 აკმაყოფილებს ახალი $(1')$ სისტემის i-ურ განტოლებას:

$$(a_{i1} + ca_{k1})x_1^0 + \cdots + (a_{in} + ca_{kn})x_n^0 = (a_{i1}x_1^0 + \cdots + a_{in}x_n^0) + \\ + c(a_{k1}x_1^0 + \cdots + a_{kn}x_n^0) = b_i + cb_k. \quad (*)$$

პირიქით, თუ x^0 არის $(1')$ სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი, მაშინ ის (1) სისტემის ამონახსნიცაა. მართლაც (1) და $(1')$ სისტემები განსხვავდებიან მხოლოდ i-ური განტოლებით. იქედან, რომ x^0 აკმაყოფილებს $(1')$ სისტემის i-ურ განტოლებას, ე.ი. სამართლიანია $(*)$ ტოლობა, გამომდინარეობს $a_{i1}x_1^0 + \cdots + a_{in}x_n^0 = b_i$ ტოლობა. ეს კი ნიშნავს, რომ x^0 (1) სისტემის ამონახსნია.

ლემის 2), 3) და 4) დებულებები ცხადია. □

დამტკიცებულ ლემაში მითითებულ 1)–3) გარდაქმნებს ეწოდება (1) სისტემის **ელემენტარული გარდაქმნები**.

1.2.2. შენიშვნა. აღვნიშნოთ, რომ საწყისი სისტემა შეიძლება მიღებულ იქნას ახლისაგან იგივე ტიპის ელემენტარული გარდაქმნების შედეგად, რადგან ეს გარდაქმნები შებრუნებადია. ასე, მაგალითად, თუ i-ურ განტოლებას მივუმატებთ c-ზე გამრავლებულ k-ურ განტოლებას, შეიძლება უკან დავბრუნდეთ, თუ ახალი სისტემის i-ურ განტოლებას მივუმატებთ მის k-ურ განტოლებას (რომელიც ისეთივეა, როგორც საწყისი სისტემის), გამრავლებულს $(-c)$-ზე.

1.2.3. თეორემა (სისტემების ექვივალენტობის საკმარისი პირობა). *ორი წრფივი სისტემა ექვივალენტურია, თუ ერთი მათგანი მიიღება მეორესაგან ელემენტარული გარდაქმნების სასრული რაოდენობით.*

დამტკიცება. ლემა 1.2.1-ის მარტივი გამოყენება და შენიშვნა 1.2.2-ის გათვალისწინება. □

რადგან უფრო მოსახერხებელია ვიმუშაოთ არა სისტემებთან, არამედ მათ (გაფართოებულ) მატრიცებთან, ამიტომ შემოვიტანოთ შესაბამისი განსაზღვრება მატრიცებისათვის.

1.2.4. მატრიცის **სტრიქონების ელემენტარული გარდაქმნები** ეწოდება შემდეგი სამი ტიპის გარდაქმნას:

1) მატრიცის ნებისმიერ სტრიქონზე ველის ელემენტზე გამრავლებული სხვა სტრიქონის მიმატება;
2) ნებისმიერი ორი სტრიქონის გადანაცვლება;
3) ნებისმიერი სტრიქონის გამრავლება ველის არანულოვან ელემენტზე.

1.2.5. შენიშვნა. ანალოგიურად განისაზღვრება მატრიცის **სვეტების ელემენტარული გარდაქმნები**.

ცხადია, რომ წრფივ განტოლებათა სისტემის ყოველგვარ ელემენტარულ გარდაქმნას მივყავართ მისი შესაბამისი მატრიცისა და გაფართოებული მატრიცის ელემენტარულ გარდაქმნებამდე.

ვიტყვით, რომ A და B მატრიცები ექვივალენტურია, თუ ერთი მეორისაგან მიიღება ელემენტარულ გარდაქმნათა სასრული რაოდენობით და წერენ $A \sim B$.

K ველის მიმართ ყველა $(m \times n)$-მატრიცთა სიმრავლე აღინიშნება $M_{m\times n}(K)$ სიმბოლოთი.

ვიტყვით, რომ A მატრიცის i-ური

$$(0, \ldots, 0, a_{is}, \ldots, a_{in}) \in K^n$$

სტრიქონი **ვლინდება მე-s-ე სვეტში**, თუ $a_{is} \neq 0$, ხოლო ყველა $a_{it} \neq 0$, როცა $t < s$ (ხშირად a_{is} ელემენტს აგრეთვე უწოდებენ i-ური სტრიქონის **წამყვან ელემენტს** ან i-ური სტრიქონის **ლიდერს**).

1.2.6. მატრიცს ეწოდება **საფეხურიანი**, თუ

1) ნულოვანი სტრიქონები, თუ ისინი არიან, განლაგებულია ყველა არანულოვანი სტრიქონის შემდეგ;

2) თუ არანულოვანი სტრიქონი ვლინდება მე-s-ე სვეტში, მაშინ ყველა უფრო დიდ ნომრიანი არანულოვანი სტრიქონები ვლინდება სვეტებში, რომელთა ნომრები მეტია s-ზე, ე.ი. თუ a_{is} – i-ური სტრიქონის პირველი არანულოვანი ელემენტია, მაშინ $a_{rj} = 0$ ყველა $i < r \leq m$, $1 \leq j \leq s$ (ელემენტები $a_{rj} = 0$ ყველა (r, j) ადგილისათვის, რომლებიც განლაგებულია სტრიქონებში i-ურის ქვემოთ და $j = 1,$

$\ldots, s$ სვეტებში). სხვა სიტყვებით, უფრო დიდ ნომრიანი სტრიქონის ლიდერი დგას მკაცრად მარჯვნივ.

ამგვარად, საფეხურიანი მატრიცი – ეს შემდეგი სახის მატრიცია

$$\begin{pmatrix} |\underline{a_{1j_1}} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & |\underline{a_{2j_2}} & \ldots\ldots\ldots & \\ & & \ldots\ldots\ldots & \\ & & & |\underline{a_{rj_r}\ldots} \\ \text{O} & & & \end{pmatrix},$$

სადაც $a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r}$ ელემენტები, რომლებიც საფეხურიანი წირის კუთხეებშია განლაგებული, განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ყველა ელემენტი, რომელიც ამ წირის მარხცნივ და ქვემოთ მდებარეობს, ნულის ტოლია. ამასთან, $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n$.

ნულოვან მატრიცს აქვს საფეხურიანი სახე (ნულოვანი $O \in M_{m\times n}(K)$ მატრიცია ნულებით ყველა ადგილზე).

1.2.7. ვიტყვით, რომ არანულოვან საფეხურიან A მატრიცს აქვს **მთავარი** საფეხურიანი სახე, თუ A მატრიცის არანულოვანი სტრიქონების $a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r}$ $(1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n)$ ლიდერები 1-ის ტოლია და ყოველი l-სთვის, $1 \le l \le r$, A მატრიცის j_l სვეტში ერთადერთი არანულოვანი ელემენტია $a_{lj_l} = 1$:

$$\begin{pmatrix} |\underline{1\ldots} & 0\ldots & \ldots & 0\ldots \\ & |\underline{1\ldots} & \ldots & 0\ldots \\ & & \ddots & 0\ldots \\ & & & |\underline{1\ldots} \\ \text{O} & & & \end{pmatrix}.$$

1.2.8. მაგალითები. მატრიცს

$$\begin{pmatrix} |\underline{1 \quad 3} & 4 & 1 \\ 0 \quad 0 & |\underline{7} & \underline{0} \\ 0 \quad 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

აქვს საფეხურიანი სახე (სტრიქონების ლიდერები გამოყოფილია), მაგრამ არა მთავარი საფეხურიანი სახე.

მატრიცს

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

აქვს მთავარი საფეხურიანი სახე.

მატრიცი

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

არ არის საფეხურიანი (ნულოვანი სტრიქონი მდებარეობს არანულოვანი სტრიქონების ზემოთ).

მატრიცებს

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

არ აქვთ საფეხურიანი სახეები (მესამე სტრიქონის ლიდერი არ მდებარეობს მეორე სტრიქონის ლიდერზე მკაცრად მარჯვნივ).

1.2.9. ლემა. ვთქვათ $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$, a_s – a სტრიქონის ლიდერია, b_t – b სტრიქონის ლიდერია, c_u – c სტრიქონის ლიდერია, $c = a + b = (c_1, \ldots, c_n)$, $c_i = a_i + b_i$, $1 \leq i \leq n$. მაშინ $s \leq u$. თუ $s < u$, მაშინ $s = t$.

დამტკიცება. თუ

$$a = (0, \ldots, 0, a_s, \ldots, a_n), \quad a_s \neq 0,$$
$$b = (0, \ldots, 0, b_t, \ldots, b_n), \quad b_t \neq 0,$$

$s \leq t$, მაშინ

$$a + b = (0, \ldots, 0, a_s + b_s, \ldots, a_n + b_n),$$

და ამიტომ $s \leq u$ (თუ $b_s = -a_s$, მაშინ $a_s + b_s = 0$ და ამიტომ $s < u$). ვთქვათ $s < u$. თუ $s < t$, მაშინ $b_s = 0$,

$$a + b = (0, \ldots, 0, a_s, \ldots, a_n + b_n), \quad a_s \neq 0,$$

და ამიტომ $s = u$, რაც $s < u$ პირობას ეწინააღმდეგება. ამგვარად, $s = t$. $\square$

შედეგი. ვთქვათ $a, b_1, \ldots, b_m \in K^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in})$, $1 \leq i \leq m$, $a = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j b_j$, $\lambda_j \in K$, a_s – a სტრიქონის ლიდერია, b_{t_i} – b_i სტრიქონის ლიდერია. მაშინ $s \geq \min\{t_i\}$.

1.2.10. თეორემა (გაუსის ალგორითმი). *ყოველი არანულოვანი მატრიცი სტრიქონების 1), 2) და 3) ტიპის ელემენტარული გარდაქმნების სასრული რიცხვით მიიყვანება მთავარ საფეხურიან სახეზე.*

დამტკიცება. არანულოვანი **მატრიცის გარდაქმნა მე-s-ე სვეტის მიმართ** ვუწოდოთ შემდეგ პროცედურას:

1. თუ მატრიცის არც ერთი სტრიქონი არ ვლინდება მე-s-ე სვეტში, მაშინ პროცედურა ამით მთავრდება.

2. თუ არსებობს სტრიქონი, რომელიც ვლინდება მე-s-ე სვეტში, მაშინ ავიღოთ პირველი ასეთი, ვთქვათ სტრიქონი

$$(0, \ldots, 0, a_{is}, \ldots, a_{in})$$

და

ა) გავამრავლოთ ის a_{is}^{-1}-ზე (ამის შედეგად მატრიცი შეიცვლება მისი ექვივალენტურით, რადგან ჩვენ შევასრულეთ სტრიქონთა ელემენტარული გარდაქმნა, i-ური სტრიქონის მე-s-ე კომპონენტი გახდება 1-ის ტოლი და კვლავინდებურად ეს სტრიქონი ვლინდება მე-s სვეტში), ხოლო შემდეგ

ბ) ყოველი სტრიქონი r ნომრით, $r \neq i$,

$$(a_{r1}, \ldots, a_{rs}, \ldots, a_{rn})$$

გარდავქმნათ შემდეგნაირად: მას გამოვაკლოთ გარდაქმნილი i-ური სტრიქონი, გამრავლებული a_{rs}-ზე (შედეგად მივიღებთ, რომ მატრიცი შეიცვლება მისი ექვივალენტურით და ყველა სტრიქონის მე-s-ე

კომპონენტი, გარდა i-ურისა, გახდება 0-ის ტოლი). ნებისმიერ შემთხვევაში გარდაქმნილ მატრიცში იქნება არა უმეტეს ერთი სტრიქონისა, რომელიც ვლინდება მე-s-ე სვეტში.

გაუსის მეთოდი: გარდავქმნათ მატრიცი 1-ლი სვეტის მიმართ, შემდეგ გარდაქმნილი მატრიცი გარდავქმნათ მე-2 სვეტის მიმართ, მიღებული მატრიცი – მე-3 სვეტის მიმართ და ა.შ., სანამ არ ამოვწურავთ ყველა სვეტს. შედეგად მატრიცი შეიცვლება ექვივალენტურით და მატრიცის ყოველი სვეტისათვის იქნება არა უმეტეს ერთი სტრიქონისა, რომელიც ამ სვეტში ვლინდება.

თეორემის დამტკიცების დასრულებისათვის, თუ ეს საჭირო გახდა, გადავანაცვლოთ სათანადო სტრიქონები. □

1.2.11. შენიშვნა. თუ თეორემის მოყვანილ დამტკიცებაში ელემენტარულ გარდაქმნებს შევასრულებთ მატრიცის იმ r სტრიქონისათვის, სადაც $r > i$, მაშინ ამ გარდაქმნების შედეგად მატრიცი მიიყვანება საფეხურიან სახეზე.

1.2.12. შენიშვნა. მოგვიანებით იქნება დამტკიცებული, რომ მთავარი საფეხურიანი სახე, რომელზეც მიიყვანება მოცემული მატრიცი, განსაზღვრულია ცალსახად.

1.2.13. წრფივ განტოლებათა სისტემას ეწოდება **საფეხურიანი**, თუ მისი გაფართოებული მატრიცი საფეხურიანია.

დამტკიცებული თეორემის თანახმად საკმარისია ვისწავლოთ საფეხურიანი სისტემების ამოხსნა.

ვისარგებლოთ შემდეგი ტერმინოლოგიით. კვადრატულ $A = (a_{ij})$ მატრიცს ეწოდება (**ზედა**) **სამკუთხა**, თუ $a_{ij} = 0$, როცა $i > j$ და **მკაცრად** (**ზედა**) **სამკუთხა**, თუ ამის გარდა $a_{ii} = 0$ ყველა i-სთვის. წრფივ განტოლებათა სისტემას ეწოდება (**მკაცრად**) **სამკუთხა**, თუ მისი კოეფიციენტთა მატრიცი (მკაცრად) სამკუთხაა.

განვიხილოთ ახლა ნებისმიერი წრფივ განტოლებათა (1) სისტემა. მივიყვანოთ მისი გაფართოებული მატრიცი ექვივალენტურ მთავარ საფეხურიან სახეზე. ვთქვათ მისი კოეფიციენტთა მატრიცის არანულოვან სტრიქონთა რიცხვი არის r (რიცხვი r მნიშვნელოვანი ინვარიანტია – ის არის უცნობებთან არანულოვან კოეფიციენტებიანი

განტოლებების რიცხვი საფეხურიან სახეში; მოგვიანებით იქნება დამტკიცებული r რიცხვის დამოუკიდებლობა საფეხურიან სახეზე მიყვანის ნებისმიერი ხერხისაგან; ის კოეფიციენტთა მატრიცის რანგია), ხოლო გაფართოებული მატრიცის არანულოვან სტრიქონთა რიცხვი არის $\overline{r}$. ცხადია, რომ $\overline{r} = r$ ან $\overline{r} = r + 1$.

შესაძლებელია შემდეგი სამი პრინციპულად განსხვავებული შემთხვევა.

შემთხვევა 1. $\overline{r} = r + 1$. ამ შემთხვევაში საფეხურიანი სისტემა შეიცავს

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1$$

სახის განტოლებას, სადაც $1 \neq 0$ და, მაშასადამე, (1) სისტემა არათავსებადია.

შემთხვევა 2. $\overline{r} = r = n$. ამ შემთხვევაში ნულოვანი განტოლებების უკუგდების შემდეგ მიიღება საფეხურიანი მკაცრად სამკუთხა სისტემა. უკანასკნელი განტოლებიდან ცალსახად განისაზღვრება x_n, შემდეგ უკანასკნელის წინა განტოლებიდან განისაზღვრება x_{n-1} და ა.შ. ამგვარად, (1) სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

შემთხვევა 3. $\overline{r} = r < n$. ვთქვათ ამ შემთხვევაში $i_1, i_2, \ldots, i_r$ იმ სვეტების ნომრებია, რომლებშიც განლაგებულია საფეხურიანი სისტემის არანულოვან განტოლებათა წამყვანი კოეფიციენტები, ე.ი. იმ უცნობების ნომრები, რომლებითაც იწყება მოცემული საფეხურიანი სისტემის განტოლებები. ამ $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ უცნობებს ვუწოდოთ **მთავარი**, ხოლო დანარჩენ $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-r}}$ – **თავისუფალი უცნობები** (ე.ი. უცნობები, რომლებითაც არ იწყება მითითებული (მთავარი) საფეხურიანი სისტემის არც ერთი განტოლება; ისინი შეიძლება საერთოდ არ იყვნენ, როცა $\overline{r} = r = n$) ნულოვანი განტოლებების უკუგდების შემდეგ მიიღება შემდეგი სისტემა

$$\left\{\begin{array}{l} x_{i_1} + f_1(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}) = c_{i_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{i_r} + f_r(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}) = c_{i_r}, \end{array}\right. \tag{2}$$

აქ $f_t(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}})$ არის თავისუფალი უცნობების რაღაც წრფივი კომბინაცია კოეფიციენტებით K ველიდან და $c_{i_t} \in K$. თუ მიღებული

სისტემის ყველა განტოლებაში წევრებს თავისუფალი უცნობებით გადავიტანთ მარჯვენა მხარეს, მივიღებთ მკაცრად სამკუთხა სისტემას მთავარი უცნობების მიმართ:

$$\begin{cases} x_{i_1} = c_{i_1} - f_1(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{i_r} = c_{i_r} - f_r(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}), \end{cases} \tag{3}$$

ახლა ნებისმიერი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r} \in K$-სთვის სტრიქონი $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, სადაც

$$\begin{cases} x_{j_s}^0 = \alpha_s, \quad s = 1, \ldots, n-r, \\ x_{i_u}^0 = c_{i_u} - f_u(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}), \quad u = 1, \ldots, r, \end{cases} \tag{4}$$

არის (2) სისტემის ამონახსნი (და მაშინ (1) სისტემის ამონახსნიც).

პირიქით, (1) სისტემის ნებისმიერი $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ (4) ფორმულების მიხედვით სათანადო $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r} \in K$-სთვის (რატომ?).

ფორმულა (4)-ს, რომელიც აღწერს (1) სისტემის ყველა ამონახსნთა ერთობლიობას, ეწოდება ამ სისტემის **ზოგადი ამონახსნი**. სისტემის ყველა ამონახსნი მიიღება ზოგადი ამონახსნისაგან, თუ მასში ჩავსვამთ ველის ნებისმიერ ელემენტებს. ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში მიღებულ ამონახსნს, ე.ი. $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ n-ეულს ეწოდება სისტემის **კერძო ამონახსნი**.

წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა ყოველთვის თავსებადია, რადგან მას ყოველთვის გააჩნია ნულოვანი ამონახსნი. თუ ის განსაზღვრულია (ე.ი. გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი), მაშინ მას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი, თუ კი განუსაზღვრელია, მაშინ მას გააჩნია ერთი მაინც არანულოვანი ამონახსნი (უსასრულოდ ბევრი ამონახსნიც, როცა ველი K უსასრულოა). არსებულ აღნიშვნებში ბოლო შემთხვევას ადგილი აქვს, როცა $\overline{r} = r < n$.

1.2.14. თეორემა. *ყოველგვარ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომლისთვისაც განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე, გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი.*

დამტკიცება. პირობის თანახმად $\overline{r} = r < n$ და $m < n$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველთვის $r \leq m$, მივიღებთ დასამტკიცებელს. □

ზემოთ განხილული სამი შემთხვევა ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი დებულებების სახით.

1.2.15. თეორემა (წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობის კრიტერიუმი მისი საფეხურიანი სახის მიხედვით). *წრფივ განტოლებათა $(a_{ij} \mid b_i)_{m\times n}$ სისტემა $x_1, \ldots, x_n$ უცნობების მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის თავსებადი, როცა მის საფეხურიან სახეში $\overline{r} = r \leq n$.*

შედეგი. *წრფივ განტოლებათა სისტემა არათავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მის საფეხურიან სახეში მოიძებნება $0x_1+\cdots+0x_n = 1$ სახის განტოლება.*

1.2.16. თეორემა (წრფივ განტოლებათა სისტემის განსაზღვრულობის კრიტერიუმი). *წრფივ განტოლებათა $(a_{ij} \mid b_i)_{m\times n}$ სისტემა $x_1, \ldots, x_n$ უცნობების მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის განსაზღვრული, როცა მის საფეხურიან სახეში:*

1) არ არის $0x_1+\cdots+0x_n = 1$ სახის განტოლება (თავსებადობის კრიტერიუმი);

2) $\overline{r} = r = n$ (ე.ი. ყველა უცნობი მთავარია, სხვა სიტყვებით – თავისუფალი უცნობების არქონა).

1.2.17. გაუსის მეთოდის ზოგიერთი შედეგი.

შედეგი 1. რაციონალურ რიცხვთა $K = \mathbb{Q}$ ველის მიმართ (და ნებისმიერი უსასრულო ველის მიმართ) წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა რიცხვი შეიძლება იყოს 0 (არათავსებადი სისტემა), 1 (განსაზღვრული სისტემა) და ∞ (განუსაზღვრელი სისტემა).

შენიშვნა. სასრული ორ ელემენტიანი $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ ველის მიმართ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$ სისტემას აქვს ზუსტად ორი ამონახსნი.

შედეგი 2 (წრფივ განტოლებათა კვადრატული სისტემები).

1) ვთქვათ $m = n$ (ე.ი. განტოლებათა რიცხვი უცნობთა რიცხვის ტოლია). მაშინ შემდეგი პირობები ექვივალენტურია:

ა) სისტემა განსაზღვრულია (ე.ი. აქვს ერთადერთი ამონახსნი);

ბ) საფეხურიან სახეში $r = n$ (ე.ი. არ გააჩნია თავისუფალი უცნობები);

გ) შესაბამის ერთგვაროვან სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $(0, \ldots, 0)$.

2) ფრედჰოლმის ალტერნატივა: როცა $m = n$ ან წრფივ განტოლებათა სისტემა განსაზღვრულია, ან მის შესაბამის ერთგვაროვან სისტემას გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი. დაამტკიცეთ.

1.2.18. შენიშვნა. განუსაზღვრელ წრფივ განტოლებათა სისტემებს შეიძლება გააჩნდეთ სხვადასხვა "განუსაზღვრელობის ხარისხი", რათაც ბუნებრივია ჩავთვალოთ თავისუფალ უცნობთა რიცხვი სისტემის ზოგად ამონახსნში. ასე მაგალითად, წრფე სივრცეში მოიცემა ერთ თავისუფალ უცნობიანი წრფივ განტოლებათა სისტემით, ხოლო სიბრტყე – ორ თავისუფალ უცნობიანი სისტემით (რომელიც ერთი განტოლებისაგან შედგება). ცხადია, რომ ეს პრინციპულად განსხვავებული შემთხვევებია. მაგრამ ერთი და იგივე წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის დასაშვებია განსხვავებული ზოგადი ამონახსნები,
რომლებშიც სხვადასხვა უცნობები შეიძლება აღმოჩნდეს თავისუფალი, და ბუნებრივია კითხვა, ყოველთვის იგივეა თუ არა თავისუფალ უცნობთა რიცხვი. დადებით პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა ვექტორული სივრცის განზომილების ცნება, რომელიც მოგვიანებით იქნება შემოტანილი.

1.3. გაუსის მეთოდის გამოყენების მაგალითები

$$1) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \qquad\quad = \ 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2\,x_3 - \ x_4 \ = \ 4 \\ 2x_1 + x_2 - \ \ x_3 + 3x_4 = -2, \\ 2x_1 \qquad - 2x_3 + 3x_4 \ = \ 1. \end{cases}$$

ჩავწეროთ ამ სისტემის გაფართოებული მატრიცი და მივიყვანოთ ის

ჯერ საფეხურიან სახეზე, ხოლო შემდეგ მთავარ საფეხურიან სახეზე

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

თუ გამოვაკლებთ მეორე, მესამე და მეოთხე სტრიქონებს პირველ სტრიქონს, გამრავლებულს შესაბამისად 1-ზე, 2-ზე და 2-ზე, მივიღებთ მატრიცს

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & -4 & 3 & -3 \end{array}\right).$$

შემდეგ, თუ მესამე და მეოთხე სტრიქონებს მივუმატებთ მეორე სტრიქონს, გამრავლებულს შესაბამისად 3-ზე და 4-ზე, მივიღებთ

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right).$$

მესამე და მეოთხე სტრიქონების გადანაცვლების შედეგად მივიღებთ საფეხურიან მატრიცს

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

ამგვარად, მოცემული სისტემა შემდეგი საფეხურიანი სისტემის ექვივალენტურია

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 2, \\ x_2 + x_3 & -x_4 & = 2, \\ & -x_4 & = 5. \end{array}\right.$$

რადგან x_1, x_2, x_4 – მთავარი უცნობებია, ხოლო x_3 – თავისუფალი უცნობი, ამიტომ სისტემა შემდეგნაირად გადაიწერება

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -x_3 + 2, \\ x_2 - x_4 = -x_3 + 2, \\ - x_4 = 5. \end{cases}$$

თუ ამ სისტემას ამოვხსნით x_2, x_2 და x_4 უცნობების მიმართ, მივიღებთ მის (და საწყისი სისტემის) ზოგად ამონახსნს

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 8, \\ x_2 = -x_3 - 3, \\ x_4 = -5. \end{cases}$$

დავუბრუნდეთ საფეხურიან

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

მატრიცს და მივიყვანოთ ის მთავარ საფეხურიან სახეზე. მეორე სტრიქონს გამოვაკლოთ მესამე სტრიქონი:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

თუ პირველ სტრიქონს გამოვაკლებთ მეორეს, გამრავლებულს 2-ზე და მესამე სტრიქონს გავამრავლებთ (-1)-ზე, მივიღებთ მატრიცს

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

ამგვარად, საწყისი სისტემა შემდეგი სისტემის ექვივალენტურია

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad -x_3 \quad\quad = 8, \\ \quad\quad x_2 + x_3 \quad\quad = -3, \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad x_4 = -5, \end{cases}$$

რომელსაც აქვს მთავარი საფეხურიანი სახე. თუ წევრებს x_3 უცნობით გადავიტანთ მარჯვენა ნაწილში, მივიღებთ უკვე მოძებნილ ზოგად ამონახსნს:

$$x_1 = x_3 + 8, \quad x_2 = -x_3 - 3, \quad x_4 = -5.$$

$$2) \quad \begin{cases} \quad\quad x_2 - 8x_3 = -17, \\ \quad x_1 + \ x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 \quad\quad = 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -8 & -17 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 0 & -1 & -1 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{array}\right).$$

სისტემა თავსებადია (არ არის $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ სახის განტოლება), ყველა x_1, x_2, x_3 უცნობი მთავარია, $x_3 = 3$, $x_2 = 7$, $x_1 = 7$. სისტემა განსაზღვრულია, აქვს ერთადერთი ამონახსნი $(7, 7, 3)$.

$$3) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & 11 & 13 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & 11 & 13 \\ 0 & -7 & 11 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

გაჩნდა $0x_1+0x_2+0x_3=1$ სახის განტოლება, მაშასადამე, სისტემა არათავსებადია.

2. ოპერაციები მატრიცებზე. კვადრატულ მატრიცთა რგოლი

2.1. საერთოდ, $(m\times n)$-მატრიცი (ან $m\times n$ **ზომის მატრიცი**) K **სიმრავლის მიმართ** ეწოდება

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(მოკლე აღნიშვნა $A=(a_{ij})_{m\times n}$),

სახის მართკუთხოვან ცხრილს, რომელიც შევსებულია (არა აუცილებლად განსხვავებული) ელემენტებით $a_{ij}\in K$ ($i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,n$). ორმაგი ij ინდექსი (ელემენტის ნომერი) იმას მიუთითებს, რომ a_{ij} ელემენტი მდებარეობს A მატრიცის i-ურ სტრიქონში და j-ურ სვეტში. ყველა $(m\times n)$-მატრიცების სიმრავლე K-ზე აღვნიშნოთ $M_{m\times n}(K)$ სიმბოლოთი.

ორ $m\times n$ ზომის $A=(a_{ij})$ და $B=(b_{ij})$ მატრიცს **ტოლი** ვუწოდოთ $A=B$, თუ მათი ყველა შესაბამისი ელემენტები ტოლია, ე.ი. თუ $a_{ij}=b_{ij}$.

ყველაზე უფრო საინტერესო და მნიშვნელოვანია ის შემთხვევა, როცა განიხილება $(m\times n)$-მატრიცები სიმრავლეზე, რომელშიც განსაზღვრულია რიცხვების შეკრებასთან და გამრავლებასთან თავისი ალგებრული თვისებებით ახლოს მდგომი შეკრება და გამრავლება.

ვთქვათ K რგოლია, $m,n,p\in\mathbb{N}$.

ერთი და იგივე ზომის $A=(a_{ij})_{m\times n}$ და $B=(b_{ij})_{m\times n}$ მატრიცების **ჯამი** ეწოდება მატრიცს

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}\,.$$

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ მატრიცის **ნამრავლი** $c\in K$ **ელემენტზე** (სკალარზე) ეწოდება მატრიცს

$$cA=(ca_{ij})_{m\times n}\,.$$

მატრიცთა შეკრების ძირითადი თვისებები:

1) $A+B=B+A$ – შეკრების კომუტაციურობა;

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ – შეკრების ასიცოაციურობა;

3) $O_{m\times n}$ მატრიცი, რომელიც მხოლოდ ნულებისაგან შედგება, ნულოვანი ელემენტია: $A+O_{m\times n}=O_{m\times n}+A=A$;

4) ნებისმიერი $A\in M_{m\times n}(K)$ მატრიცისათვის არსებობს ისეთი $B\in M_{m\times n}(K)$ მატრიცი, რომ $A+B=B+A=O_{m\times n}$ (ამასთან თუ $A=(a_{ij})$, მაშინ $B=(b_{ij})$, სადაც $b_{ij}=-a_{ij}$).

მატრიცთა სკალარზე ნამრავლის ძირითადი თვისებები:

1) $(c_1+c_2)A=c_1A+c_2A$;

2) $c(A+B)=cA+cB$;

3) $c_1(c_2A)=(c_1c_2)A$;

4) $1A=A$.

$A=(a_{ij})$ $m\times n$ ზომის მატრიცის **ნამრავლი** $B=(b_{jk})$ $n\times p$ ზომის მატრიცზე ეწოდება $m{\times}p$ ზომის მატრიცს, რომლის ელემენტები მოიცემა შემდეგი ფორმულებით

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}$$

ყველა $i=1,\ldots,m$ და $k=1,\ldots,p$ და ვწერთ $C=A\cdot B$.

2.1.1. მატრიცთა ნამრავლის გამოთვლის მაგალითები.

1) $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad a,b\in K.$

2) $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in M_{1\times n}(K)$ მატრიცს, რომელიც შედგება მხოლოდ ერთი სტრიქონისაგან, უბრალოდ სტრიქონი ეწოდება. $(y_1,y_2,\ldots,y_n)^t\in M_{n\times 1}(K)$ მატრიცს, რომელიც ერთი სვეტისაგან შედგება, სვეტი ეწოდება. სტრიქონისა და სვეტის ნამრავლს, ცხადია აზრი აქვს მხოლოდ იმ პირობით, როცა სტრიქონის "სიგრძე" სვეტის "სიმაღლის" ტოლია. ასეთ შემთხვევაში ნამრავლში მიიღება 1-ლი რიგის კვადრატული მატრიცი (რომელსაც აქვს ერთი სტრიქონი

და ერთი სვეტი), ე.ი. უბრალოდ ველის ელემენტი:

$$\underset{(1\times n)}{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \underset{(n\times 1)}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} = \underset{1\times 1}{(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)} \in M_1(K) = K.$$

m სიმაღლის სვეტის გამრავლება n სიგრძის სტრიქონზე ყოველთვის შესაძლებელია და ნამრავლში მიიღება $m \times n$ ზომის მატრიცი:

$$\underset{(m\times 1)}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}} \underset{(1\times n)}{(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & x_2y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_my_1 & x_my_2 & \ldots & x_my_n \end{pmatrix}.$$

3) $$\underset{(m\times n)}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{(n\times 1)}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} =$$

$$= \underset{(m\times 1)}{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(K).$$

4) $$\underset{(1\times m)}{(x_1, x_2, \ldots, x_m)} \underset{(m\times n)}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}} =$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m,$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m,$$

$$\ldots, a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) =$$
$$= \underset{(1\times n)}{(c_1, c_2, \ldots, c_n)} \in M_{1\times n}(K).$$

5)* ვთქვათ $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ მატრიცებია K ველის მიმართ. თუ ჰორიზონტალური და ვერტიკალური ხაზებით A და B მატრიცები ისეა დაყოფილი A_{ij} და B_{jk} ნაწილებად (მათ უწოდებენ შესაბამისი მატრიცების **ქვემატრიცებს** ან უჯრედებს):

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{A_{11}}^{n_1} & \ldots & \overbrace{A_{1t}}^{n_t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{s1} & \ldots & A_{st} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}m_1 \\ \vdots \\ \}m_s \end{matrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \overbrace{A_{11}}^{p_1} & \ldots & \overbrace{B_{1u}}^{p_u} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{t1} & \ldots & BA_{tu} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n_1 \\ \vdots \\ \}n_t \end{matrix}$$
$$A = (A_{ij})_{s\times t} \qquad\qquad B = (B_{jk})_{t\times u}\,,$$

რომ ყველა $i = 1, \ldots, s$; $j = 1, \ldots, t$ და $k = 1, \ldots, u$-სთვის განსაზღვრულია მატრიცი

$$C_{ij} = A_{i1}B_{ij} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{is}B_{sj}\,,$$

მაშინ $AB = C = (C_{ij})_{s\times n}$. დაამტკიცეთ.

ხაზი გავუსვათ იმას, რომ ორი მატრიცის ნამრავლი განსაზღვრულია მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ზომები შეთანხმებულია, სახელდობრ, როცა პირველი მატრიცის სვეტთა რიცხვი მეორე მატრიცის სტრიქონთა რიცხვის ტოლია.

მატრიცთა გამრავლება არ არის კომუტაციური. მაგალითად,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

მატრიცებისათვის

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 2 & -5 & -11 \\ 2 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

ორივე ნამრავლს, AB და BA-ს, აქ აქვს აზრი, მაგრამ არიან განსხვავებული მატრიცები.

2.2. მატრიცთა გამრავლების ძირითადი თვისებების დამტკიცება საჭიროებს გამოვიყენოთ შეჯამებადობის საყოველთაოდ მიღებული შემდეგი სიმბოლიკა. $a_1 + a_2 + \cdots a_n$ სახის ყოველი ჯამი შემოკლებით $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$-ით იქნება აღნიშნული. აღვნიშნოთ $\sum$ სიმბოლოს ორი ცხადი თვისება

$$c\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} ca_i,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i).$$

თუკი განიხილება ჯამი S, რომლის a_{ij} შესაკრებებს ორი ინდექსი გააჩნიათ, ამასთან $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$, მაშინ S შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$\begin{aligned} S = {} & a_{11} + a_{12} + \cdots a_{1n} + \\ & + a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn}\,, \end{aligned}$$

ე.ი. a_{ij} ელემენტები შეადგენენ მატრიცს

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

ვთქვათ b_i არის $(*)$-ის i-ური სტრიქონის ყველა ელემენტის ჯამი, ე.ი. $b_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$. მაშინ, ცხადია, $S = b_1 + b_2 + \cdots + b_m = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i =$

$\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) \equiv \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$. მეორეს მხრივ, თუ c_j არის $(*)$ მატრიცის j-ური სვეტის ყველა ელემენტის ჯამი, მაშინ $c_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$ და

$$S = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \sum_{j=1}^{n} c_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right) \equiv \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

ამგვარად,

$$S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij},$$

ე.ი. ორმაგ ჯამში შესაძლებელია შეჯამების რიგის შეცვლა. ამ გარემოების გათვალისწინებით $m = n$-ის შემთხვევაში ხშირად წერენ $S = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}$, ე.ი. არ მიუთითებენ რა რიგით წარმოებს აჯამვა.

2.3. მატრიცთა ნამრავლი ასოციაციურია

$$(AB)C = A(BC), \tag{1}$$

თუ A, B, C მატრიცების ზომები შეთანხმებულია იმგვარად, რომ მითითებულ ნამრავლებს აქვს აზრი.

მართლაც, ვთქვათ $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$, $C = (c_{kl})_{p\times q}$ და

$$(AB)C = (u_{il})_{m\times q}\,, \quad A(BC) = (v_{il})_{m\times q}\,.$$

მაშინ გვაქვს:

$$u_{il} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl},$$

$$v_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kl},$$

ასე რომ, $u_{il} = v_{il}$.

შემდეგი თვისებები აკავშირებენ მატრიცთა გამრავლების ოპერაციას სხვა ოპერაციებთან (როგორც ასოციაციურობის შემთხვევაში,

აქ იგულისხმება, რომ მატრიცების ზომები ისეა შეთანხმებული, რომ ყველა მითითებულ ოპერაციას აქვს აზრი):

$$\text{ა)}\ (A+B)C = AC+BC, \quad A(B+C) = AB+AC, \tag{2}$$

$$\text{ბ)}\ (cA)B = A(cB) = c(AB)\ \ \forall c \in K. \tag{3}$$

ა) ვთქვათ $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, $C = (c_{jk})_{n\times p}$. ნებისმიერი (i,k) ადგილისათვის გვექნება

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_{jk},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{ij}+c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk},$$

რაც ამტკიცებს ჩვენს დებულებებს.

ბ) თუ $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$, მაშინ ნებისმიერი (i,k) ადგილისათვის გვექნება

$$\sum_{j=1}^{n}(ca_{ij})b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(cb_{jk}) = c\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\,.$$

როგორც უკვე ვიცით, $n \times n$ ზომის მატრიცს ეწოდება n-ური რიგის კვადრატული მატრიცი. კვადრატულ მატრიცს ეწოდება **დიაგონალური**, თუ ყველა მისი ელემენტი მთავარი დიაგონალის გარეთ ნულის ტოლია. დიაგონალურ მატრიცებზე გამრავლება გამოიყურება განსაკუთრებით მარტივად:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \hdotsfor{4} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \dots & a_1b_{1p} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \dots & a_2b_{2p} \\ \hdotsfor{4} \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \dots & a_nb_{np} \end{pmatrix}$$

(მეორე მატრიცის ყოველი სტრიქონი მრავლდება პირველი მატრიცის შესაბამის დიაგონალურ ელემენტზე) და, ანალოგიურად,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_1 & a_{12}b_2 & \dots & a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 & a_{22}b_2 & \dots & a_{2n}b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_n & a_{n2}b_2 & \dots & a_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

(პირველი მატრიცის ყოველი სვეტი მრავლდება მეორე მატრიცის შესაბამის დიაგონალურ ელემენტზე).

n-ური რიგის კვადრატულ მატრიცთა ჯამი და ნამრავლი კარგად არის განსაზღვრული და აგრეთვე კვადრატული მატრიცებია. მატრიცთა შეკრების ძირითადი თვისებები და გამრავლების 1), 2) თვისებები გვიჩვენებს, რომ ასოციაციური K რგოლის მიმართ ყველა n-ური რიგის კვადრატულ მატრიცთა $M_{n\times n}(K) = M_n(K)$ სიმრავლისათვის სამართლიანია შემდეგი

2.3.1. თეორემა. *ვთქვათ K ასოციაციური რგოლია, $n \in \mathbb{N}$. მაშინ $M_n(K)$ სიმრავლე მატრიცთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ ასოციაციური რგოლია.*

2.4. რადგან ნებისმიერი ველი რგოლიცაა, ამიტომ ყველა n-ური რიგის კვადრატულ მატრიცთა სიმრავლე K ველის მიმართ აგრეთვე რგოლია. სწორედ მატრიცთა სიმრავლე K ველის მიმართ აგრეთვე რგოლია. სწორედ ეს რგოლი იქნება ნაგულისხმევი $M_n(K)$-ს ქვეშ მომავალში. შევნიშნოთ, რომ $M_n(K)$ ერთეულიანი რგოლია. ერთეულს წარმოადგენს დიაგონალური მატრიცი $E_n = (e_{ij}) \in M_n(K)$,

სადაც $e_{ii} = 1$ ყველა i-სთვის, ხოლო დანარჩენი $e_{ij} = 0$:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

წინა ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $m \times n$ ზომის A მატრიცისათვის

$$AE_n = A, \quad E_m A = A, \tag{4}$$

სადაც პირველ შემთხვევაში E აღნიშნავს n-ური რიგის ერთეულოვან მატრიცს, ხოლო მეორე შემთხვევაში – m რიგის ერთეულოვან მატრიცს.

აღვნიშნოთ $M_n(K)$ რგოლის ზოგიერთი “უარყოფითი” თვისება, როცა $n \geq 2$ (რგოლი $M_1(K)$ არის K ველი).

1) $M_n(K)$ რგოლი არ არის კომუტაციური. როცა $n = 2$, განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ანალოგიური მაგალითების მოყვანა შეიძლება ნებისმიერი $n > 2$.

2) $M_n(K)$ რგოლს გააჩნია ნულის გამყოფები. ამას გვიჩვენებს ზემოთ მოყვანილი მეორე ტოლობა, უფრო მეტიც, არსებობენ ისეთი არანულოვანი მატრიცები, რომელთა კვადრატი ნულის ტოლია. მაგალითად,

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0).$$

3) $M_n(K)$ რგოლის არა ყველა არანულოვანი ელემენტია შებრუნებადი. ეს გამომდინარეობს ნულის გამყოფების არსებობიდან და იმ ფაქტიდან, რომ ნულის გამყოფი არ შეიძლება იყოს შებრუნებადი. ასე მაგალითად, მატრიცები $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ არ არიან შებრუნებადი $M_2(K)$-ში.

2.4.1. ამოცანა. E_{ij} მატრიცს, რომელშიც (i,j) ადგილზე დგას 1, ხოლო დანარჩენ ადგილებზე – ნულები, ეწოდება **მატრიცული ერთეული** (არ აგერიოთ ერთეულოვან მატრიცში!). ამოწერეთ მატრიცული ერთეულების გამრავლების ცხრილი $(i,j=1,\dots,n)$. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $A=(a_{ij})\in M_n(K)$ ერთადერთი გზით წარმოიდგინება $A=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$ სახით.

ამოხსნა. თუ $i,j=1,2,\dots,n$, მაშინ ჩვენ მივიღებთ E_{ij} სახის n^2 მატრიცს, რომლებიც მატრიცთა გამრავლების ფორმულის თანახმად შემდეგნაირად არიან დაკავშირებული:

$$E_{ij}E_{kl}=E_{il},\ \text{როცა}\ j=k,\quad \text{და}\quad E_{ij}E_{kl}=0,\ \text{როცა}\ j\neq k.$$

თუ გამოვიყენებთ მატრიცთა ჯამისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციებს, მივიღებთ ნებისმიერი კვადრატული მატრიცისათვის შემდეგ წარმოდგენას

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}\,,$$

ამასთან, ცხადია წარმოდგენის ერთადერთობა. □

2.4.2. ამოცანა. cE $(c\in K)$ სახის მატრიცებს ეწოდება **სკალარული მატრიცები**. ცხადია, რომ სკალარული cE მატრიცი გადანაცვლებადია ნებისმიერ სხვა მატრიცთან $M_n(K)$-დან: $(cE)A=c(EA)=c(AE)=A(cE)$. დაამტკიცეთ შებრუნებული დებულება: მატრიცი $M_n(K)$-დან, რომელიც გადანაცვლებადია ყველა მატრიცთან $M_n(K)$-ში, სკალარულია.

მითითება. გამოიყენეთ წინა ამოცანა.

2.4.3. ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ $M_2(\mathbb{R})$ რგოლში

$$\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix},\quad a,b\in\mathbb{R},$$

სახის მატრიცები ქმნიან ქვევლეს, რომელიც კომპლექსურ რიცხვთა ველის იზომორფულია.

2.5. ყოველი

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

მატრიცისათვის განვსაზღვროთ მისი **ტრანსპონირებული მატრიცი**

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

სადაც მისი სტრიქონები დაიჭერენ სვეტების ადგილს თავისივე ნომრებით და პირიქით, ე.ი. თუ $A = (a_{ij})_{m\times n}$, მაშინ $A^t = (a^t_{ij})_{n\times m}$, სადაც $a^t_{ij} = a_{ji}$.

ცხადია, რომ $(A^t)^t = A$. ცხადია აგრეთვე, რომ

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$
$$(cA)^t = cA^t \;\; \forall c \in K.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$(AB)^t = B^tA^t.$$

მართლაც, ვთქვათ $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$, $AB = C = (c_{ik})_{m\times p}$; მაშინ

$$c^t_{ik} = c_{ki} = \sum_{j=1}^n a_{kj}b_{ji} = \sum_{j=1}^n a^t_{jk}b^t_{ij} = \sum_{j=1}^n b^t_{ij}a^t_{jk},$$

საიდანაც ჩანს, რომ $C^t = B^tA^t$.

2.6. * **ელემენტარული გარდაქმნების მატრიცები.** მატრიცებს, რომლებიც მიიღებიან ერთეულოვანი E მატრიცისაგან ერთი ელემენტარული გარდაქმნით, ვუწოდოთ **ელემენტარული მატრიცები**:

$$1)\ T_{ij}(c)=\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{cccccc}1 & & & \cdot & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ \cdot & \cdots & 1\cdots & c & \cdots & \cdot \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & \vdots & \ddots & \\ & & & \cdot & & 1\end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & & & j & & \end{array} & \end{array} = E+cE_{ij}\ \ (i\neq j);$$

$$2)\ S_{ij}=\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{ccccccc}1 & & \cdot & & \cdot & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \cdot & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdot \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \cdot & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdot \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & & \cdot & & \cdot & & 1\end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array} =$$

$$= E-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji}\ \ (i\neq j);$$

$$3)\ D_i(c)=\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{ccccc}1 & & \cdot & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ \cdot & \cdots & c & \cdots & \cdot \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \cdot & & 1\end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} & \end{array} = E+(c-1)E_{ii}\ \ (n\neq 0).$$

ელემენტარული მატრიცების მაგალითებია:

$$T_{23}(c)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix},\quad S_{23}(c)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad D_2(c)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

ჩავწეროთ ფორმალურად ელემენტარული მატრიცები:

1) $T_{ij}(c)=(t_{pq})_{n\times n}$, სადაც

$$t_{pq}=\begin{cases}1, & \text{თუ } p=q,\\ c, & \text{თუ } p=i,\ \ q=j,\\ 0 & \text{დანარჩენ შემთხვევებში.}\end{cases}$$

2) $S_{ij}=(s_{pq})_{n\times n}$, სადაც

$$s_{pq}=\begin{cases}1, & \text{თუ } p=q\neq i,j,\\ 1, & \text{თუ } p=i,\ \ q=j \ \text{ან}\ p=j,\ \ q=i,\\ 0 & \text{დანარჩენ შემთხვევებში.}\end{cases}$$

3) $D_i(c)=(d_{pq})_{n\times n}$, სადაც

$$d_{pq}=\begin{cases}c, & \text{თუ } p=q=i,\\ 1, & \text{თუ } p=q\neq i,\\ 0, & \text{დანარჩენ შემთხვევებში.}\end{cases}$$

2.6.1. ლემა. *A მატრიცის $T_{ij}(c)$ მატრიცზე გამრავლება მარცხნიდან (მარჯვნიდან) i-ურ სტრიქონზე (j-ურ სვეტზე) c-ზე გამრავლებული j-ური სტრიქონის (i-ური სვეტის) მიმატების ტოლფასია.*

დამტკიცება. თუ $\underset{(m\times n)}{B}=\underset{(m\times m)}{T_{ij}(c)}\cdot\underset{(m\times n)}{A}$, მაშინ

$$b_{pq}=\sum_{k=1}^{m}t_{pk}a_{kp}=\begin{cases}t_{ii}a_{iq}+t_{ij}a_{jq}=a_{iq}+ca_{jq}, & \text{თუ } p=i,\\ t_{pp}a_{pq}=a_{pq}, \ \text{თუ } p\neq i.\end{cases}$$

ანალოგიურად მტკიცდება დებულება სვეტების მიმართ. □

2.6.2. ლემა. *A მატრიცის S_{ij} მატრიცზე გამრავლება მარცხნიდან (მარჯვნიდან) i-ური და j-ური სტრიქონების (i-ური და j-ური სვეტების) გადანაცვლების ტოლფასია.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\underset{(m\times m)}{B} = \underset{(m\times m)}{S_{ij}}\underset{(m\times n)}{A}$, მაშინ გვექნება

$$b_{pq} = \sum_{k=1}^{m} s_{pk}a_{kq} = \begin{cases} s_{ij}a_{jq} = a_{jq}, & \text{თუ } p = i, \\ s_{ji}a_{iq} = a_{iq}, & \text{თუ } p = j, \\ s_{pp}a_{pq} = a_{pq}, & \text{თუ } p \neq i, j. \end{cases}$$

ანალოგიურად მტკიცდება დებულება სვეტების მიმართ. □

2.6.3. ლემა. *A მატრიცის $D_i(c)$ მატრიცზე გამრავლება მარცხნიდან (მარჯვნიდან) i-ური სტრიქონის (j-ური სვეტს) c-ზე გამრავლების ტოლფასია.*

დამტკიცება. პუნქტი 2.3-ის უშუალო გამოყენება. □

ყველა ელემენტარული მატრიცი შებრუნებადია, თანაც მათი შებრუნებული მატრიცებიც აგრეთვე ელემენტარული მატრიცებია, რომლებიც შეესაბამებიან შებრუნებულ ელემენტარულ გარდაქმნებს:

$$T_{ij}^{-1}(c) = (E + cE_{ij})^{-1} = E - cE_{ij} = T_{ij}(-c),$$
$$S_{ij}^{-1} = S_{ij}, \quad D_i^1(c) = D_i(c^{-1}).$$

2.6.4. განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ i = 1, \ldots, m, \end{cases}$$

სისტემა.

თუ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$-ით აღვნიშნავთ უცნობების სტრიქონს, ხოლო $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^t$-ით – თავისუფალი წევრების სვეტს, მაშინ მოცემული სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი **მატრიცული ფორმით**:

$$A \cdot x^t = b.$$

აღვნიშნოთ, რომ $x^0 \in K^n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის მოცემული სისტემის ამონახსნი, როცა $A \cdot (x^0)^t = b$ ან, რაც იგივეა, $x^0 \cdot A^t = b^t$

(აქ ^{t} ნიშნავს ტრანსპონირებას, გამრავლება $\cdot$ – მატრიცთა გამრავლებას), ე.ი. როცა ($m \times n$ ზომის) A მატრიცის ნამრავლი ($n \times 1$ ზომის) $(x^0)^t$ მატრიცზე ($m \times 1$ ზომის) b მატრიცის ტოლია.

გაუსის მეთოდის მატრიცული ინტერპრეტაცია მდგომარეობს $Ax^t = b$ განტოლების მარცხნიდან ელემენტარულ მატრიცებზე გამრავლებაში, რომლის მიზანია ამ სისტემის გაფართოებული მატრიცის საფეხურიან სახეზე მიყვანა.

თავი III

კვადრატულ მატრიცთა დეტერმინანტები

1. მცირე რიგის დეტერმინანტები

გაუსის ალგორითმისათვის არსებითია, რომ მთავარ უცნობებთან მდგომი კოეფიციენტები იყოს ნულისაგან განსხვავებული. მაგრამ მის მნიშვნელოვან ნაკლს წარმოადგენს ის, რომ ეს მეთოდი საშუალებას არ გვაძლევს ვიპოვოთ სისტემის ამონახსნის ფორმულები, რომლებიც მისი კოეფიციენტებისა და თავისუფალი წევრების საშუალებით იქნებიან გამოსახული. ყოველივე ეს კი აუცილებელია სხვადასხვა თეორიულ საკითხში, კერძოდ, გეომეტრიულ გამოკვლევებში. ამიტომ საჭიროა წრფივ განტოლებათა სისტემების თეორია შევისწავლოთ სხვა, უფრო ღრმა მეთოდით.

1.1. თავდაპირველად განვიხილოთ ორუცნობიანი ორი წრფივი განტოლების სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

და შევეცადოთ ვიპოვოთ მისი $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ ამონახსნის x_1^0, x_2^0 კომპონენტებისათვის ზოგადი ფორმულები.

(1) სისტემის უცნობების კოეფიციენტები ადგენენ მეორე რიგის კვადრატულ მატრიცს

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

x_1^0-ის გამოთვლისათვის პირველი განტოლება გავამრავლოთ a_{22}-ზე, მეორე განტოლება $(-a_{12})$-ზე და შევკრიბოთ ისინი. ანალოგიურად, x_2^0-ის გამოთვლისათვის გავამრავლოთ პირველი განტოლება $(-a_{12})$-ზე, მეორე განტოლება a_{11}-ზე და შევკრიბოთ ისინი (სისტემის ელემენტარულ გარდაქმნათა ამ ერთობლიობას (იხ. ლემა 1.2.1) ზოგჯერ უცნობების კოეფიციენტთა გატოლების მეთოდს უწოდებენ).

მივიღებთ:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 = b_1 \\
a_{21}x_1 + \quad a_{22}x_2 = b_2 \\
(a_{11}a_{aa} - a_{12}a_{21})x_1 + \quad 0\,x_2 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\
0\,x_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}
\end{cases}
\qquad (1')
$$

დავუშვათ, რომ $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. მაშინ

$$
x_1^0 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2^0 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\,. \qquad (3)
$$

თუ უცნობების მიღებულ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ $(1')$ სისტემის პირველ ორ განტოლებაში, ე.ი. (1) სისტემაში, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (3) წარმოადგენს (1)-ის ერთადერთ ამონახსნს.

x_1 და x_2 უცნობების x_1^0 და x_2^0 მნიშვნელობების საერთო მნიშვნელი $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ძალიან მარტივად გამოისახება (2) მატრიცის ელემენტების საშუალებით. ის მიიღება, თუ მთავარი დიაგონალის ელემენტების ნამრავლს გამოვაკლებთ მეორე დიაგონალის ელემენტების ნამრავლს. ამ ელემენტს (2) მატრიცის **განმსაზღვრელი** (ანუ **დეტერმინანტი**) ეწოდება და აღინიშნება

$$
d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{ან} \quad d = \det(a_{ij})_{2\times 2}, \quad \text{ან} \quad d = |a_{ij}|_{2\times 2}\,. \qquad (4)
$$

ერთხელ კიდევ აღვნიშნოთ, რომ იმ დროს, როცა მატრიცი K ველის ელემენტებისაგან შედგენილი ცხრილია, დეტერმინანტი ველის ელემენტია; დეტერმინანტი კვადრატულ მატრიცთან სრულიად განსაზღვრული წესითაა დაკავშირებული. $a_{11}a_{22}$ და $a_{12}a_{21}$ ნამრავლებს მეორე რიგის დეტერმინანტის **წევრები** ეწოდება.

1.1.1. სავარჯიშო. აჩვენეთ, რომ როცა

$$
d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,
$$

(1) სისტემა ან არათავსებადია, ამ განუსაზღვრელი (მოიყვანეთ მაგალითები ორივე შემთხვევისათვის).

x_1^0 და x_2^0 მნიშვნელობების მრიცხველები აგრეთვე შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

მატრიცების დეტერმინანტები. ამგვარად,

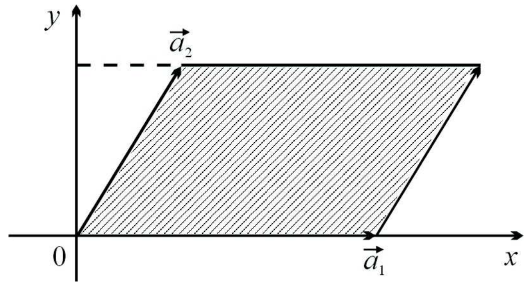
$$x_1^0 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2^0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \tag{5}$$

ე.ი. x_1^0-ის გამოსახულების მრიცხველი იმ მატრიცის დეტერმინანტს წარმოადგენს, რომელიც მიიღება (2) მატრიცისაგან მისი პირველი სვეტის შეცვლით (1) სისტემის თავისუფალი წევრების სვეტით, x_2^0-ის გამოსახულების მრიცხველი კი არის დეტერმინანტი იმ მატრიცისა, რომელიც მიიღება (2) მატრიცისაგან მისი მეორე სვეტის ასეთივე შეცვლით. (1) სისტემის ამოხსნის ეს წესი **კრამერის წესად** არის წოდებული, როცა $n = 2$.

1.1.2. სავარჯიშო. როცა $n = 2$, $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ მატრიცის

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი იმ ორიენტირებული პარალელოგრამის ფართობის ტოლია, რომელიც აგებულია $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12})$ და $\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22})$ ვექტორების დეკარტეს კოორდინატთა $\mathbb{R}^2$ სისტემაში.



არაკოლინეარულ ვექტორთა $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ წყვილს ეწოდება **დადებითად ორიენტირებული**, თუ $\vec{a}_1$-დან $\vec{a}_2$-მდე მობრუნება (π-ზე ნაკლები კუთხით) ხდება დადებითი მიმართულებით.

1.2. იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ კოეფიციენტთა გატოლების მეთოდი სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნისათვის, საჭიროა ვიცოდეთ სამუცნობიანი ორი წრფივი განტოლების ერთგვაროვანი

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

სისტემის ამონახსნი. ჩვენ გვაინტერესებს ამ სისტემის არანულოვანი ამონახსნი, ე.ი. რომელშიაც ერთი მაინც $x_i \neq 0$. ვთქვათ, მაგალითად, $x_2 \neq 0$. ორივე ნაწილი გავყოთ $(-x_3)$-ზე და შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $y_1 = -\frac{x_1}{x_3}$ და $y_2 = -\frac{x_2}{x_3}$. მაშინ (6) სისტემა ჩაიწერება იგივე სახით, როგორც (1) სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = a_{13}, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = a_{23}. \end{cases}$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, მაშინ (5) ფორმულები იძლევა

$$y_1^0 = -\frac{x_1^0}{x_3^0} = \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y_2^0 = -\frac{x_2^0}{x_3^0} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

ჩვენ ვიპოვეთ (6) სისტემისათვის არა თვითონ x_1^0, x_2^0, x_3^0, არამედ მათი შეფარდებები. სისტემის ერთგვაროვნებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ თუ (x_1^0, x_2^0, x_3^0) არის ამონახსნი და c-ველის ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ (cx_1^0, cx_2^0, cx_3^0) აგრეთვე ამონახსნი იქნება. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$x_1^0 = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad x_2^0 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad x_3^0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

და ვთქვათ, რომ ნებისმიერი ამონახსნი მიიღება მოცემულისაგან ყველა x_i^0-ის გამრავლებით რომელიღაც $c \in K$ ელემენტზე. პასუხს რომ უფრო სიმეტრიული სახე მივცეთ, შევნიშნოთ, რომ ყოველთვის

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix},$$

რაც უშუალოდ მეორე რიგის დეტერმინანტის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს. ამიტომ (7) შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$x_1^0 = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad x_2^0 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad x_3^0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

ეს ფორმულები გამოყვანილია იმ პირობით, რომ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$ ადვილი შესამოწმებელია, რომ დამტკიცებული დებულება სამართლიანია, თუ (8) დეტერმინანტებიდან ერთ-ერთი განსხვავებულია ნულისაგან. თუკი სამივე დეტერმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ (8) ფორმულები იძლევა ამონახსნს (სახელდობრ ნულოვანს), მაგრამ ჩვენ არ შეგვიძლია იმის მტკიცება, რომ ყველა ამონახსნი მიიღება მისგან ველის ელემენტებზე გამრავლებით (განიხილეთ სისტემა, შედგენილი ორი ერთნაირი $x_1 + x_2 + x_2 = 0$ განტოლებისაგან).

1.3. გადავიდეთ ახლა სამუცნობიანი სამი წრფივი განტოლებათა სისტემის შემთხვევის განხილვაზე:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ x_2 და x_3 უცნობების კოეფიციენტების გამატოლებელი მამრავლები, პირველი განტოლება გავამრავლოთ c_1-ზე, მეორე – c_2-ზე, მესამე – c_3-ზე და შევკრიბოთ ისინი:

$$(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + a_{31}c_3)x_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{32}c_2)x_2 + \\ + (a_{13}c_1 + a_{23}c_2 + a_{33}c_3)x_3 = b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3.$$

ჩვენი მიზანია c_1, c_2, c_3 ისე შევარჩიოთ, რომ მიღებულ განტოლებაში წევრები x_2-ით და x_3-ით გახდნენ ნულოვანი. თუ გაუტოლებთ ნულს

შესაბამის კოეფიციენტებს, მაშინ c_1, c_2, c_3-სთვის ჩვენ მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{32}c_3 = 0, \\ a_{13}c_1 + a_{23}c_2 + a_{33}c_3 = 0, \end{cases}$$

როგორიც იგივე სახისაა, რაც (6) სისტემა, ამიტომ შეიძლება ავიღოთ

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad c_2 = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad c_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველთვის $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$. ამის გათვალისწინებით x_1^0-სთვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას

$$\left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right) x_1 =$$
$$= b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

x_1 უცნობთან მდგომ კოეფიციენტს ეწოდება

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

მატრიცის **დეტერმინანტი** და აღინიშნება

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

ამგვარად, მესამე რიგის დეტერმინანტად ჩვენ ვიღებთ გამოსახულებას

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}\,, \quad (10)$$

რომელიც მეორე რიგის დეტერმინანტების საშუალებით მიიღება. ადვილი დასანახია, რომ (9) ტოლობის მარჯვენა მხარე მიიღება x_1-ის კოეფიციენტისაგან, თუ a_{11}-ს შევცვლით b_1-ით, a_{21}-ს – b_2-ით და a_{31}-ს – b_3-ით. ამის გამო (9) ტოლობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

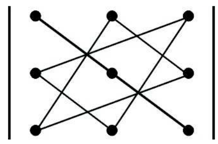
ან $d \cdot x_1 = d_1$. ვიგულისხმოთ, რომ $d \neq 0$. მაშინ $n = 2$-ის ანალოგიურად

$$x_1^0 = \frac{d_1}{d}\,, \quad x_2^0 = \frac{d_2}{d}\,, \quad x_3^0 = \frac{d_3}{d} \quad (\textbf{კრამერის ფორმულები}). \quad (11)$$

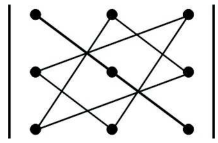
ცხადია, რომ ასეთივე მსჯელობები შეიძლება გამოვიყენოთ ოთხ, ხუთ და ა.შ. განტოლებათა სისტემებისათვის, რომელთაც გააჩნიათ ოთხი, ხუთი და ა.შ. უცნობები. ამისათვის ჯერ საჭიროა გამოვიყვანოთ (9) ფორმულების ანალოგიური ფორმულები სამი განტოლების ოთხუცნობიანი ერთგვაროვანი სისტემისათვის; შემდეგ ოთხი განტოლების ოთხუცნობიანი სისტემისათვის ვიპოვოთ c_1, c_2, c_3, c_4 მამრავლები. ჩვენ მოვძებნით c_i-ის $(i = 1, 2, 3, 4)$ მნიშვნელობებს სამ განტოლებიანი ერთგვაროვანი სისტემიდან.

კოეფიციენტს, რომელიც მიიღება x_1-თან და აიგება მესამე რიგის დეტერმინანტებისაგან (9) ფორმულების ნიმუშის მიხედვით, ჩვენ დავარქმევთ მეოთხე რიგის დეტერმინანტს. თუ იგივე მსჯელობებს ჩავატარებთ x_2, x_3 და x_4-სთვის, ჩვენ ვიპოვით x_i^0-სთვის (11)-ის ანალოგიურ ფორმულებს. ასე შეიძლება გავაგრძელოთ უსასრულოდ. რწმენას იმაში, რომ ჩვენ როდესღაც მივაღწევთ მიზანს, გვაძლევს მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი.

1.3.1. სავარჯიშო. მესამე რიგის დეტერმინანტის წევრების ნიშნების განსაზღვრის მნემონიური წესი: სამი ნამრავლი



შედის "+" ნიშნით; სამი ნამრავლი



შედის "−" ნიშნით.

იპოვეთ ანალოგიური წესი მეოთხე რიგის დეტერმინანტისათვის.

1.3.2. სავარჯიშო. აჩვენეთ, რომ მესამე რიგის დეტერმინანტის ყველა ექვსი წევრი არ შეიძლება იყოს ერთდროულად დადებითი.

1.3.3. შეამოწმეთ, რომ

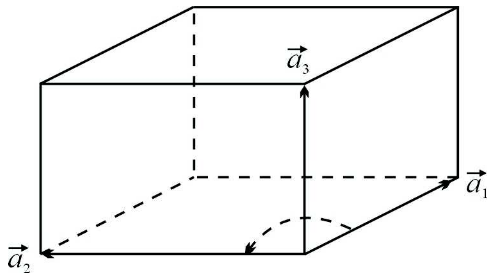
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

1.3.4. სავარჯიშო. როცა $n = 3$, $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ მატრიცის

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი იმ ორიენტირებული პარალელეპიპედის მოცულობის ტოლია, რომელიც აგებულია $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ და $\vec{a}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ ვექტორებზე დეკარტეს კოორდინატთა $\mathbb{R}^3$ სისტემაში.

ვექტორთა $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ არაკომპლანარულ სამეულს ეწოდება **დადებითად ორიენტირებული**, თუ მობრუნება $\vec{a}_1$-დან $\vec{a}_2$-მდე $\vec{a}_3$-ის მხრიდან დანახული ხდება დადებითი მიმართულებით:



2. კვადრატრულ $(n \times n)$-მატრიცთა დეტერმინანტები

2.1. ახლა შემოვიტანოთ ცნებები, რომლებიც აუცილებელია n-ური რიგის მატრიცის დეტერმინანტის განსაზღვრისათვის. საწყის მასალას ამისათვის იძლევა $n = 2$ და $n = 3$-ის შემთხვევები.

როგორც უკვე ვიცით (თავი I, პუნქტი 1.2.1) $1, 2, \ldots, n$ რიცხვთა ყოველგვარ $i_1, i_2, \ldots, i_n$ დალაგებას რომელიმე განსაზღვრული რიგით, სადაც ყოველი i_k არის $1, 2, \ldots, n$ რიცხვებიდან ერთი, ამასთან არც ერთი არ გვხვდება ორჯერ, n ელემენტთა (ან n სიმბოლოთა) **გადანაცვლება** ეწოდება. რადგან i_1-ს შეუძლია მიიღოს n განსხვავებული მნიშვნელობა, i_2-ს მოცემულ i_1-სთვის შეუძლია მიიღოს $n-1$ მნიშვნელობა, i_3-ს მოცემული i_1-სთვის და i_2-სთვის შეუძლია მიიღოს $n-2$ მნიშვნელობა და ა.შ., ამიტომ სულ n ელემენტისაგან გვაქვს $n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$ გადანაცვლება. $1, 2, \ldots, n$ გადანაცვლებას ეწოდება **ტრივიალური**.

ვთქვათ $i_1, i_2, \ldots, i_n$ არის $1, 2, \ldots, n$ რიცხვების მოცემული გადანაცვლება. ვიტყვით, რომ რიცხვთა (i_k, i_l), $k < l$, წყვილი ქმნის **ინვერსიას**, თუ $i_k > i_l$. სხვანაირად, ვიტყვით, რომ მოცემულ გადანაცვლებაში i და j რიცხვები ქმნიან ინვერსიას, თუ $i > j$ და გადანაცვლებაში i წინ უსწრებს j-ს. გადანაცვლებას ეწოდება **ლუწი** (შესაბამისად **კენტი**), თუ მისი ელემენტები ქმნიან ინვერსიათა ლუწ (შესაბამისად კენტ) რიცხვს. $i_1, i_2, \ldots, i_n$ გადანაცვლებაში ინვერსიათა რიცხვი $\mathbf{I} = \mathbf{I}(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

2.1.1. მაგალითები.

1. $\mathbf{I}(3, 5, 1, 4, 2, 6, 8, 7) = 7$ (ინვერსიას ქმნიან $(3, 1)$, $(3, 2)$; $(5, 1)$, $(5, 4)$, $(5, 2)$; $(4, 2)$, $(8, 7)$ წყვილები).

2. გადანაცვლებაში ინვერსიათა რიცხვის დათვლის კიდევ ერთი წესი:

ა) გამოვყოთ რიცხვი 1 და დავთვალოთ იმ რიცხვთა რაოდენობა, რომლებიც წინ უსწრებენ 1-ს და მეტია 1-ზე; გადავხაზოთ რიცხვი 1.

ბ) გამოვყოთ რიცხვი 2 და დავთვალოთ იმ გადაუხაზავ რიცხვთა რაოდენობა, რომლებიც წინ უსწრებენ 2-ს და მეტია 2-ზე; გადავხაზოთ რიცხვი 2 (თუ რიცხვები 1 და 2 ქმნიან ინვერსიას, მაშინ ის დათვლილია პირველ ნაბიჯზე) და ა.შ. ასეთნაირად მიღებული რიცხვთა ჯამი მოგვცემს ინვერსიათა $\mathbf{I}$ რიცხვს მოცემულ გადანაცვლებაში. დავთვალოთ ინვერსიათა რიცხვი $3, 4, 2, 1, 5, 6, 7$ გადანაცვლებაში. დათვლა დავიწყოთ უმცირესი რიცხვიდან. რიცხვი 1 ინვერსიას ქმნის სამ რიცხვთან, ეს რიცხვებია 3, 4 და 2. რიცხვი 1 გადავხაზოთ და დავნიშნოთ მის მიერ შექმნილი ინვერსიების რიცხვი 3. ახლა გადანაცვლებაში

$$3, 4, 2, \cancel{1}, 5, 6, 7$$

2 ინვერსიას ქმნის ორ რიცხვთან. ეს რიცხვებია 3 და 4. გადავხაზოთ 2 და დავინიშნოთ მის მიერ შექმნილი ინვერსიების რიცხვი ორი.

$$3, 4, \cancel{2}, \cancel{1}, 5, 6, 7.$$

ამ გადანაცვლებაში 3 არც ერთ რიცხვთან არ ქმნის ინვერსიას, ე.ი. რიცხვი 3-ის მიერ შექმნილი ინვერსიების რიცხვი მოცემულ გადანაცვლებაში 0-ის ტოლია. ასევე ადვილად დავრწმუნდებით, რომ გადანაცვლებაში სხვა დანარჩენი რიცხვების მიერ შექმნილი ინვერსიების რიცხვი 0-ის ტოლია. მაშასადამე, $\mathbf{I}(3, 4, 2, 1, 5, 6, 7) = 5$. ამრიგად, მოცემული გადანაცვლება კენტია.

3. ტრივიალურ გადანაცვლებას არ გააჩნია ინვერსიები $\mathbf{I}(1, 2, \ldots, n) = 0$. პირიქით, $n, n-1, \ldots, 2, 1$ გადანაცვლებაში რიცხვთა ნებისმიერი წყვილი ქმნის ინვერსიას. ამიტომ ამ გადანაცვლებაში ინვერსიათა რიცხვია $\mathbf{I}(n, n-1, \ldots, 2, 1) = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

გადანაცვლებაში ორი ელემენტის ადგილების შეცვლას ამ ელემენტების **ტრანსპოზიცია** ეწოდება.

2.1.2. წინადადება. *ყოველი ტრანსპოზიცია ცვლის გადანაცვლების წყვილადობას.*

დამტკიცება. მეზობელი ელემენტების ტრანსპოზიციის შედეგად იცვლება მხოლოდ ამ ორი ელემენტის ურთიერთგანლაგება, ასე რომ 1-ით იცვლება ინვერსიათა რიცხვი (იზრდება ან მცირდება); მაშასადამე, იცვლება წყვილადობაც. i და j ელემენტების $\ldots, i, a_1, \ldots, a_s, j, \ldots \mapsto \ldots, a_1, \ldots, a_s, i, \ldots$ ტრანსპოზიცია, რომლებიც სხვა s ელემენტითაა დაშორებული, შეიძლება განხორციელდეს $2s+1$ მეზობელი ელემენტების ტრანსპოზიციის შედეგად: ჯერ i-ს ვანაცვლებთ ყველა შუალედურ ელემენტთან და j-სთან ($s+1$ ტრანსპოზიცია), შემდეგ კი j-ს ვანაცვლებთ ყველა შუალედურ ელემენტთან (კიდევ s ტრანსპოზიცია). ამგვარად, ჩვენ გადანაცვლების წყვილადობა $(2s+1)$-ჯერ შევცვალეთ, რის გამოც მიღებულ გადანაცვლებას აქვს საწინააღმდეგო წყვილადობა. □

შედეგი. როცა $n > 1$ ლუწ გადანაცვლებათა რიცხვი n ელემენტთა გადანაცვლებებში კენტ გადანაცვლებათა რიცხვის ტოლია.

დამტკიცება. ამოვწეროთ ყველა ლუწი გადანაცვლება და ყოველ მათგანში მოვახდინოთ, მაგალითად, პირველი ორი ელემენტის ტრანსპოზიცია. მაშინ ჩვენ მივიღებთ, ამასთან თითოჯერ, ყველა კენტ გადანაცვლებას. □

2.2. განვმარტოთ ახლა ერთი ახალი ცნება, სახელდობრ, **n-ური ხარისხის ჩასმის** ცნება. პირველი n ნატურალური $\{1, 2, \ldots, n\}$ რიცხვის ყოველ ურთიერთცალსახა a ასახვას თავისთავზე ეწოდება **n-ური ხარისხის ჩასმა**. აღნიშვნა:

$$a = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix} \quad \text{ან} \quad a = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \ldots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

სადაც $j_1 = i_1 a = \alpha_{i_1}$, $j_2 = i_2 a = \alpha_{i_2}, \ldots, j_n = i_n a = \alpha_{i_n}$ არიან $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ ელემენტების ანასახები a ასახვის დროს. ცხადია, რომ ასეთი ცხრილი შეიცავს სრულ ინფორმაციას a ასახვის შესახებ, რადგან ის განსაზღვრავს $\{1, 2, \ldots, n\}$ სიმრავლის ყოველი ელემენტის ანასახს. a ჩასმას აქვს (1) სახის მრავალი

სხვადასხვა ჩანაწერი. a ჩასმის ერთი ჩანაწერიდან მეორეზე გადასვლა შეიძლება სვეტთა რამდენიმე ტრანსპოზიციის საშუალებით. ამასთან შესაძლებელია (1) სახის ისეთი ჩანაწერის მიღება, რომლის ზედა (აქ ქვედა) სტრიქონში დგას n ელემენტთა წინასწარ მოცემული გადანაცვლება. კერძოდ, ყოველი n-ური რიგის a ჩასმა შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგი **კანონიკური სახით**:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad (1')$$
$$\alpha_1 = 1a, \;\; \alpha_2 = 2a, \dots, \alpha_n = na,$$

ე.ი. ზედა სტრიქონში რიცხვთა ნატურალური განლაგებით. ასეთნაირი ჩაწერის დროს სხვადასხვა ჩასმები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან ქვედა სტრიქობის გადანაცვლებებით, და ამიტომ **n-ური ხარისხის ჩასმების რიცხვი ტოლია n ელემენტისაგან შედგენილი გადანაცვლებების რიცხვისა, ე.ი. ტოლია $n!$-ისა**.

n-ური ხარისხის ჩასმის მაგალითს წარმოადგენს **იგივური ჩასმა**

$$\mathrm{e} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

რომლის დროსაც ადგილზე რჩება ყველა ელემენტი.

ავიღოთ n-ური ხარისხის a ჩასმის ნებისმიერი ჩანაწერი

$$a = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

a ჩასმას ეწოდება **ლუწი**, თუ მისი ნებისმიერი ჩაწერის დროს ორივე სტრიქონის ინვერსიათა საერთო რიცხვი ლუწია და **კენტი** – საწინააღმდეგო შემთხვევაში. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჩასმა ლუწია, თუ მის სტრიქონებს აქვს ერთნაირი წყვილადობა და კენტია – თუ საწინააღმდეგო წყვილადობა.

2.2.1. შენიშვნა. წინადადება 2.1.2-ის ძალით a ჩასმის წყვილადობა არ არის დამოკიდებული მისი კონკრეტული ჩანაწერისაგან ორი სტრიქონის სახით, ე.ი. ერთი და იგივე ჩასმის ყველა ჩანაწერს აქვს ერთნაირი წყვილადობა.

თუ a ჩასმა ჩაწერილია $(1')$ სახით, მაშინ a ჩასმის წყვილადობა განისაზღვრება ქვედა სტრიქონში მდგომი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ გადაცვლების წყვილადობით. აქედან გამომდინარეობს, რომ **n-ური ხარისხის ლუწი ჩასმების რიცხვი ტოლია კენტი ჩასმების რიცხვის, ე.ი. ტოლია $\frac{1}{2}\,n!$-ისა**.

2.3. არსებობს წყვილადობის გარკვევის სხვა მეთოდი, რომელიც ზემოთ მოყვანილის ექვივალენტურია. ამ მიზნისათვის განვმარტოთ **ჩასმათა ნამრავლი**, რომელიც თავისთავადაც დიდ ინტერესს იწვევს. ორი n-ური ხარისხის ჩასმის თანმიმდევრობით შესრულებას მივყავართ სავსებით განსაზღვრულ მესამე n-ური ხარისხის ჩასმათან, რომელსაც ეწოდება მოცემული ჩასმათაგან პირველის **ნამრავლი** მეორეზე (იმ ჩასმას ვთვლით პირველად, რომელიც მარცხნივაა ჩაწერილი). მაგალითად, თუ მოცემულია მეექვსე ხარისხის ჩასმები

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

მართლაც, a ჩასმისას სიმბოლო 1 გადადის 5-ში, მაგრამ b-ში სიმბოლო 5 გადადის 3-ში, ამიტომ ab-ში სიმბოლო 1 გადადის 3-ში, და ა.შ. თითქმის ცხადია, რომ ჩასმათა ნამრავლი ასოციაციურია. აგრეთვე ცხადია, რომ იგივური ჩასმა თამაშობს ერთეულოვან ელემენტის როლს ასეთი გამრავლების დროს. ადვილი სანახავია, რომ

$$a = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

ჩასმისათვის შებრუნებული ჩასმა არის

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \ldots & j_n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

რომელიც მიიღება a-საგან ზედა და ქვედა სტრიქონების გადანაცვლებით. n-ური ხარისხის ჩასმათა ნამრავლი, როცა $n \geq 3$, არაკომუტაციურია. მართლაც,

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

ჩასმებისათვის გვაქვს

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & \dots & n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = ba.$$

ამგვარად, n-ური ხარისხის ჩასმათა სიმრავლე მულტიპლიკაციური არააბელური (როცა $n \geq 3$) ჯგუფია და მას **n-ური ხარისხის სიმეტრიული ჯგუფი** ეწოდება და S_n სიმბოლოთი აღინიშნება.

ციკლური ჩასმა ან **ციკლი** ეწოდება რამდენიმე რიცხვის მიმდევრობას, რომელშიც მოცემული ჩასმის დროს პირველი რიცხვი გადადის მეორეში, მეორე – მესამეში და ა.შ., უკანასკნელი – პირველში. ციკლი აღინიშნება მისი რიცხვების საერთო მრგვალ ფრჩხილებში ჩასმით იმ რიგით, როგორითაც ისინი ერთიმეორეში გადადიან მოცემული ჩასმის დროს. თუ რიცხვი თავის თავში გადადის, მაშინ ის ერთი ქმნის ციკლს. ციკლებს ეწოდება **დამოუკიდებელი**, თუ მათ არ გააჩნიათ საერთო რიცხვი. ყოველი ჩასმა შეიძლება ერთადერთი სახით დაიშალოს დამოუკიდებელი ციკლების ნამრავლად. მაგალითად,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (163)(25)(4).$$

ჩასმის **დეკრემენტი** d ეწოდება $n - s$ სხვაობას, სადაც n ყველა მისი ელემენტის რიცხვია, ხოლო s – დამოუკიდებელ ციკლთა რიცხვი მის დაშლაში: $d = n - s$. ჩასმის წყვილადობა თანხვდება ამ ჩასმის დაკრემენტის წყვილადობას. მოცემულ მაგალითში $n = 6$, $s = 3$, $d = 3$, ე.ი. ჩასმა კენტია.

თურმე ტრანსპოზიციათა უმცირესი რიცხვი, რომელიც აუცილებელია რომ n ელემენტთა ერთი $i_1, i_2, \dots, i_n$ გადანაცვლებიდან გადავიდეთ იმავე ელემენტთა $j_1, j_2, \dots, j_n$ გადანაცვლებაზე

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

ჩასმის დეკრემენტის ტოლია. ამგვარად, n ელემენტთა ნებისმიერი გადანაცვლებისათვის არსებობენ იმავე ელემენტთა გადანაცვლებები, რომლებიც არ შეიძლება გადავიყვანოთ მოცემულ გადანაცვლებაში $(n-1)$-ზე ნაკლები ტრანსპოზიციის საშუალებით.

2.4. ვთქვათ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

– n-ური რიგის კვადრატული მატრიცია, $a_{ij} \in K$, სადაც K ნებისმიერი ველია (მაგალითად, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ან $\mathbb{Z}_p$).

როცა $n = 1: \ |a| = a \in K.$

როცა $n = 2$, გვაქვს

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

როცა $n = 3$,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

$n = 2$ და $n = 3$ შემთხვევების "კარნახის" საფუძველზე გადავიდეთ დეტერმინანტის განსაზღვრების განზოგადოებაზე ნებისმიერი n-ური რიგის კვადრატული მატრიცისათვის.

2.4.1. განსაზღვრება.. A მატრიცის შესაბამისი n**-ური რიგის დეტერმინანტი** ეწოდება $n!$ წევრთა ალგებრულ ჯამს

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}\,, \quad (2)$$

სადაც $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ გაირბენს პირველი n ნატურალური რიცხვის ყველა $n!$ გადანაცვლებას და შედგენილია შემდეგნაირად: მის წევრებს წარმოადგენს ყოველი სტრიქონიდან და ყოველი სვეტიდან თითოთითოდ აღებული n ელემენტის ყოველგვარი ნამრავლი, ამასთან წევრი აღებულია "$+$" ნიშნით, თუ მისი ინდექსები ქმნიან ლუწ ჩასმას და "$-$" ნიშნით – წინააღმდეგ შემთხვევაში. დეტერმინატის ყოველ შესაკრებში ნამრავლებს ჩვენ ჩავწერთ სტრიქონთა მიყოლის რიგით. ხშირად იყენებენ აგრეთვე $\det A$, $\det(a_{ij})$, $|a_{ij}|_{n\times n}$, d, Δ აღნიშვნებს.

2.4.2. დეტერმინანტის თვისებები. საბაზო 1-4 თვისებები.

თვისება 1. *თუ*

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

მაშინ $|E| = 1$.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

დიაგონალურ ელემენტთა ნამრავლი შედის “+” ნიშნით ნებისმიერი მატრიცის დეტერმინანტის გამოსახულებაში, რადგან მას შეესაბამება იგივური ჩასმა. ზედა სამკუთხა მატრიცის შემთხვევაში ამ გამოსახულებაში ყველა დანარჩენი წევრი ნულის ტოლია. მართლაც, თუ $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n} \neq 0$, მაშინ $1 \leq \alpha_1$, $2 \leq \alpha_2, \ldots, n \leq \alpha_n$. მაგრამ $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = 1+2+\cdots+n$. ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2, \ldots, \alpha_n = n$. კერძოდ, $|E| = 1$. $\square$

შედეგი.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა $a_{ii} \neq 0$, $0 \leq i \leq n$.

2.4.3. ამოცანა. რისი ტოლია დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(ე.ი. ის დეტერმინანტი, რომელშიც ყველა ელემენტი გვერდითი დიაგონალის ქვემოთ ნულის ტოლია).

ვთქვათ $A \in M_{m\times n}(K)$:

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} \widehat{a}_1 & \widehat{a}_2 & \ldots & \widehat{a}_n \end{matrix} & \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix} \end{array}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_m$-ით აღვნიშნოთ A მატრიცის სტრიქონები, რომლებიც K^n-ს ეკუთვნიან, ხოლო $\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \ldots, \widehat{a}_n$-ით A მატრიცის სვეტები, რომლებიც $\widehat{K}^m$-ს ეკუთვნიან, ე.ი. $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ და $\widehat{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^t$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

თვისება 2. *A მატრიცის ნებისმიერი ორი a_i და a_j, $i \neq j$, გადანაცვლებით იცვლის მხოლოდ ნიშანს* $\big(|A'| = -|A|$, *სადაც* A'

მატრიცაა, რომელიც მიღებულია A მატრიცისაგან ორი სტრიქონის გადანაცვლებით).

დამტკიცება. ვთქვათ

$$|A| = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \quad \dots \quad a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{j1} \quad \dots \quad a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

და

$$|A'| = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ a_{j1} \quad \dots \quad a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \quad \dots \quad a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ b_{i1} \quad \dots \quad b_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{j1} \quad \dots \quad b_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}, \quad i < j.$$

პირობის თანახმად

$$\begin{cases} b_{ik} = a_{jk}, & k = 1, \dots, n, \\ b_{jk} = a_{ik}, & k = 1, \dots, n, \\ b_{pk} = a_{pk}, & k = 1, \dots, n; \;\; p \neq i, j. \end{cases}$$

ავიღოთ $|A'|$-ის ზოგადი წევრი უნიშნოდ:

$$b_{1\alpha_1} \cdots b_{i\alpha_i} \cdots b_{j\alpha_j} \cdots b_{n\alpha_n} = a_{1\alpha_1} \cdots a_{j\alpha_i} \cdots a_{i\alpha_j} \cdots a_{n\alpha_n} .$$

მისი შესაბამისი ჩასმაა

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

თუ უკანასკნელი წევრის თანამამრავლებს ჩავწერთ სტრიქონთა მიყოლის რიგით, მივიღებთ $|A|$ დეტერმინანტის წევრს

$$a_{1\alpha_1} \dots a_{i\alpha_j} \dots a_{j\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} ,$$

რომლის ჩასმაა

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

მიღებული ჩასმები საწინააღმდეგო წყვილადობისაა. ამგვარად, $|A'|$ და $|A|$ შედგება ერთი და იგივე წევრებისაგან, რომლებიც განსხვავდება მხოლოდ ნიშნით, ე.ი. $|A'| = |A|$. $\square$

თვისება 3. *თუ* $a'_i = ca_i$ *(ე.ი. A მატრიცის i-ური სტრიქონი გამრავლებულია c ელემენტზე), მაშინ* $|A'| = c|A|$.

დამტკიცება. $|A'|$-ში შემავალ ყველა ნამრავლში i-ური სტრიქონიდან შედის მხოლოდ ერთი თანამამრავლი $ca_{i\alpha_i}$. ამგვარად,

$$\begin{vmatrix} \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ ca_{i1} & \dots & ca_{in} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \end{vmatrix}. \qquad \square$$

შედეგი. *თუ* $a_i = (0, \dots, 0)$, *მაშინ* $|A| = 0$. *რადგან* $a_i = 0 \cdot a_i$, *მაშინ* $|A| = 0 \cdot |A| = 0$.

თვისება 4 (წრფივობის თვისება). *თუ*

$$a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) = (b_{i1}, \dots, b_{in}) + (c_{i1}, \dots, c_{in}) = b_i + c_i$$

(ე.ი. A მატრიცის i-ური სტრიქონი წარმოდგენილია ორი სტრიქონის ჯამად), მაშინ $|A|$ ორი $|A'| + |A''|$ დეტერმინანტის ჯამის ტოლია, რომლებშიც A-ს i-ური a_i სტრიქონის ნაცვლად დგანან შესაბამისად b_i და c_i სტრიქონები:

$$\begin{vmatrix} \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ b_{i1}+c_{i1} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \end{vmatrix}.$$

დამტკიცება.

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} (-1)^{\mathbf{I}(\alpha_i,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdots (b_{i\alpha_i} + c_{i\alpha_i}) \cdots a_{n\alpha_n} = \\ &= \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} (-1)^{\mathbf{I}(\alpha_i,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdots b_{i\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n} + \\ &\quad + \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} (-1)^{\mathbf{I}(\alpha_i,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdots c_{i\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n} = \\ &= |A'| + |A''|. \end{aligned} \qquad \square$$

დანარჩენი თვისებები გამოვიყვანოთ 1-4 “საბაზო” თვისებიდან.

თვისება 5. *თუ* $i \neq j$ *და* $a_i = a_j$, *მაშინ* $|A| = 0$.

დამტკიცება. განვიხილოთ $|A|$-ს ნებისმიერი წევრი

$$b = (-1)^{\mathbf{I}_1} a_{1\alpha_1} \cdots a_{i\alpha_i} \cdots a_{j\alpha_j} \cdots a_{n\alpha_n}, \quad i < j,$$
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots \alpha_n).$$

რადგან $a_{ik} = a_{jk}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, მივიღებთ წევრს

$$c = (-1)^{\mathbf{I}_1} a_{1\alpha_1} \cdots a_{j\alpha_i} \cdots a_{i\alpha_j} \cdots a_{n\alpha_n}.$$

თუ c-ს თანამამრავლებს ჩავწერთ სტრიქონთა მიყოლის რიგით, გვექნება

$$c = (-1)^{\mathbf{I}_2} a_{1\alpha_1} \cdots a_{i\alpha_j} \cdots a_{j\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n},$$

სადაც

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots \alpha_n).$$

ცხადია, რომ $(-1)^{\mathbf{I}_1} = -(-1)^{\mathbf{I}_2}$. თუ ასეთ გარდაქმნას გამოვიყენებთ $|A|$-ს ყველა წევრისათვის, ჩვენ მივიღებთ, რომ ისინი იყოფა წყვილებად, რომელთა ჯამი ნულის ტოლია და ამიტომ თვით დეტერმინანტი ნულის ტოლია. □

თვისება 6. *თუ კვადრატული* A *მატრიციდან გადავდივართ* A' *მატრიცზე, სადაც* $a'_i = a_i + ca_j$, $i \neq j$, $c \in K$, *მაშინ* $|A'| = |A|$.

დამტკიცება. მართლაც, თუ $|A'|$ დეტერმინანტს დავშლით ორი დეტერმინანტის ჯამად (i-ური სტრიქონის მიხედვით), ჩვენ მივიღებთ $|A|$-ს და ნულოვან დეტერმინანტს, რომელშიც i-ური სტრიქონიდან c ელემენტის გატანის შედეგად გვაქვს ორი ერთნაირი სტრიქონი (a_j i-ური სტრიქონის ადგილზე და a_j თავის j-ურ ადგილზე). □

დამტკიცებული თვისება საშუალებას გვაძლევს ნებისმიერ სვეტში ყველა ელემენტი, გარდა ერთისა, ნულებად ვაქციოთ.

ვიტყვით, რომ $A \in M_n(K)$ მატრიცის i-ური სტრიქონი არის დანარჩენი სტრიქონების **წრფივი კომბინაცია**, თუ არსებობენ ისეთი $l_1, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots, l_n \in K$, რომ $a_i = l_1 a_1 + \cdots l_{i-1} a_{i-1} + l_{i+1} a_{i+1} + \cdots + l_n a_n$. l_j კოეფიციენტებიდან, $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, შეიძლება ზოგიერთი ნულის ტოლი იყოს, ე.ი. სინამდვილეში i-ური სტრიქონი იქნება წრფივი კომბინაცია არა ყველა დანარჩენი

სტრიქონისა, არამედ მათი ნაწილისა. კერძოდ, თუ l_j კოეფიციენტებიდან მხოლოდ ერთი განსხვავდება ნულისაგან, მივიღებთ ორი სტრიქონის პროპორციულობის შემთხვევას. დაბოლოს, თუ სტრიქონი შედგება ნულებისაგან, მაშინ ის ყოველთვის იქნება დანარჩენი სტრიქონების წრფივი კომბინაცია, – ეს ის შემთხვევაა, როცა ყველა l_i ნულის ტოლია.

თვისება 7 (დეტერმინანტის ნულთან ტოლობის საკმარისი პირობა). *თუ კვადრატულ A მატრიცაში მოიძებნება სტრიქონი a_i, რომელიც წარმოადგენს დანარჩენი სტრიქონების წრფივ კომბინაციას, მაშინ $|A| = 0$.*

დამტკიცება. მართლაც, თუ

$$a_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} l_j a_j = l_1 a_1 + \cdots + l_{i-1} a_{i-1} + l_{i+1} a_{i+1} + \cdots + l_n a_n =$$
$$= \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} l_j a_{j1}, \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} l_j a_{j2}, \ldots, \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} l_j a_{jn} \right),$$

მაშინ გავშალოთ $|A|$ დეტერმინანტი $(n-1)$ დეტერმინანტის ჯამად და ყოველ j-ურ დეტერმინანტ-შესაკრების i-ური სტრიქონიდან გამოვიტანოთ l_j ელემენტი. შედეგად მივიღებთ დეტერმინანტებს ორი ერთნაირი სტრიქონით (i-ური სტრიქონის ადგილას დგას a_j სტრიქონი, j-ური სტრიქონის ადგილას დგას a_j სტრიქონი).

თვისება 8 (ნიშნების განსაზღვრის ზოგადი წესი). *ნიშანი, რომლითაც წევრი $a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \cdots a_{\alpha_n\beta_n}$ შედის $|A|$ დეტერმინანტში არის $(-1)^{\mathbf{I}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\mathbf{I}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}$.*

დამტკიცება. მართლაც, თუ $a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \cdots a_{\alpha_n\beta_n}$ წევრს ჩავწერთ სტრიქონთა მიყოლის რიგით, მივიღებთ, რომ $a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \cdots a_{\alpha_n\beta_n} = a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \cdots a_{n\gamma_n}$. მაგრამ, როგორც ვიცით,

$$(-1)^{\mathbf{I}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\mathbf{I}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)} = (-1)^{\mathbf{I}(1,2,\ldots,n)+\mathbf{I}(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)}.$$

ეს კი ის $\pm$ ნიშანია, რომლითაც ჩვენთვის საინტერესო $a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \cdots a_{\alpha_n\beta_n}$ წევრი შედის დეტერმინანტის შემადგენლობაში. $\square$

თვისება 9. $|A^t| = |A|$ *(ტრანსპონირებული დეტერმინენტები ტოლია).*

დამტკიცება. განვიხილოთ $|A^t|$-ს ზოგადი წევრი:

$$\begin{aligned}(-1)^{\mathbf{I}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a^t_{1\alpha_1} a^t_{2\alpha_2} \cdots a^t_{n\alpha_n} = \\ = (-1)^{\mathbf{I}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \cdots a_{\alpha_n n} = \\ = (-1)^{\mathbf{I}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} \cdots a_{n\beta_n} = \\ = (-1)^{\mathbf{I}(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} \cdots a_{n\beta_n},\end{aligned}$$

რადგან $(-1)^{\mathbf{I}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} = (-1)^{\mathbf{I}(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}$.

მივიღეთ, რომ $|A^t|$-ს ყოველი წევრი თავისი ნიშნით შედის $|A|$-ს შემადგენლობაში, ე.ი. $|A^t| = A$. □

შედეგი. *თვისებები 1-8 აგრეთვე სრულდება A კვადრატული $(n \times n)$-მატრიცის $|A|$ დეტერმინანტის სვეტებისათვისაც, ე.ი. დეტერმინანტში (მატრიცებიდან განსხვავებით) სტრიქონები და სვეტები თანასწორუფლებიანია.*

3. დეტერმინანტთა გამოთვლა

3.1. დეტერმინანტის რეალური გამოთვლა მისი განსაზღვრების საფუძველზე, როგორც $n!$ შესაკრებ-ნამრავლის ჯამი გაძნელებულია იმ შემთხვევაშიც კი, როცა n ძალიან დიდი არ არის.

3.1.1. თეორემა. *ვთქვათ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ მატრიცი სტრიქონთა 1) და 2) ტიპის ელემენტარული გარდაქმნებით (2) ტიპის t გარდაქმნა) მიყვანილია ზედა სამკუთხა სახეზე (ნებისმიერი კვადრატული საფეხურიანი მატრიცი, ცხადია, ზედა სამკუთხაა)*

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & & & \\ 0 & a'_{22} & * & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots\dots\dots & & a'_{nn} \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$|A| = (-1)^t a'_{11} \cdots a'_{nn}.$$

დამტკიცება. რადგან $|A'| = (-1)^t|A|$, ამიტომ $|A| = (-1)^t|A'| = (-1)^t a'_{11}\cdots a'_{nn}$. $\square$

3.2. მატრიცის დეტერმინანტის ფუნქციის საბაზო თვისებებით დახასიათება.

3.2.1. თეორემა (დეტერმინანტის ფუნქციის 1–4 საბაზო თვისებებით მოცემის ერთადერთობის შესახებ). *ვთქვათ ფუნქცია d ყოველ $A \in M_n(K)$ კვადრატულ მატრიცს უთანადებს $d(A) \in K$ ელემენტს და აკმაყოფილებს დეტერმინანტის ფუნქციის 1–4 საბაზო თვისებებს. მაშინ $d(A) = |A|$, ე.ი. დეტერმინანტის ფუნქცია $|A|$ ცალსახად განისაზღვრება 1–4 თვისებებით.*

დამტკიცება. მივიყვანოთ A მატრიცი სტრიქონების 1) და 2) ტიპის ელემენტარული გარდაქმნებით (2) ტიპის t გარდაქმნა) სამკუთხა სახეზე

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & & & \\ 0 & a'_{22} & * & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots\dots\dots & & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

მაშინ $d(A') = (-1)^t d(A)$ და, მაშასადამე, $d(A) = (-1)^t d(A')$.

თუ ბოლო სტრიქონიდან გავიტანთ a'_{nn} ელემენტს და მის ზემოთ 0-ებს წარმოვქმნით, მივიღებთ

$$d(A') = a'_{nn} d\begin{pmatrix} a'_{11} & & * & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = a'_{11}\cdots a'_{nn}.$$

ასეთი მსჯელობის შედეგად მივიღებთ, რომ

$$d(A') = a'_{11}\cdots a'_{nn} d\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

ამგვარად, $d(A) = (-1)^t d(A') = (-1)^t a'_{11}\cdots a'_{nn} = |A|$. $\square$

3.3. დეტერმინანტის გამოთვლის დაყვანა უფრო დაბალი რიგის დეტერმინანტების გამოთვლაზე. დავაფიქსიროთ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ კვადრატული მატრიცის a_{ij} ელემენტი. განვიხილოთ n-ური რიგის დეტერმინანტი

$$A_{ij} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} (i), \\ \scriptstyle (j) \end{array}$$

რომლის მატრიცი მიიღება საწყისი დეტერმინანტის მატრიცისაგან a_{ij} ელემენტის 1-ით შეცვლით, ხოლო i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ყველა სხვა ელემენტის ნულებით შეცვლით. ამგვარად აგებულ დეტერმინანტს ეწოდება a_{ij} ელემენტის **ალგებრული დამატება**. მისთვის მიღებულია A_{ij} აღნიშვნა. შევნიშნოთ, რომ A_{ij} არ არის დამოკიდებული საწყისი დეტერმინანტის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ელემენტებზე, რადგან $|A|$ დეტერმინანტის ყველა შესაკრებნამრავლი, რომელიც შეიცავს i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ელემენტებს, გარდა a_{ij}-სა, ნულის ტოლია, ხოლო იმ შესაკრებ-ნამრავლებს, რომლებიც შეიცავენ $a_{ij} = 1$-ს, აგრეთვე ვთვლით, რომ მასზე არ არიან დამოკიდებული.

3.3.1. თეორემა. *ვთქვათ $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ და $\widehat{A} = (A_{ij})_{n\times n}$ – მატრიცაა, რომლის ელემენტებს წარმოადგენენ A მატრიცის ელემენტების ალგებრული დამატებები. მაშინ $A \cdot \widehat{A}^t = \widehat{A}^t \cdot A = |A|E$, სადაც E – ერთეულოვანი მატრიცაა. სხვა სიტყვებით, სამართლიანია ტოლობები:*

1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = |A|, \quad i = 1, 2, \dots, n$-*სთვის*

(დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის მიხედვით გაშლა),

2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0, \quad i,k = 1,2,\ldots,n$-სთვის, $i \neq k$
(დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის მიხედვით ყალბი გაშლა),

3) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = |A|, \quad j = 1,2,\ldots,n$-სთვის
(დეტერმინანტის j-ური სვეტის მიხედვით გაშლა),

4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0, \quad j,k = 1,2,\ldots,n$-სთვის, $j \neq k$
(დეტერმინანტის j-ური სვეტის მიხედვით ყალბი გაშლა).

დამტკიცება. 1) რადგან

$$(a_{i1},\ldots,a_{ij},\ldots,a_{in}) = (a_{i1},0,\ldots,0) + \cdots + (0,\ldots,a_{ij},\ldots,0) + \\ + \cdots + (0,\ldots,0,a_{in}),$$

მაშინ დეტერმინანტის 3, 4, და 6 თვისებების თანახმად ვღებულობთ

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix} * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & * & 0 & * & * & * \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

შედეგი. 1) ვთქვათ $|A|$ დეტერმინანტში ამორჩეულია i-ური სტრიქონი და მოცემულია K ველის ნებისმიერი n ელემენტი $b_1,\ldots,b_n$. ამ ელემენტების i-ური სტრიქონის ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ტოლია დეტერმინანტისა, რომლის მატრიცში

$a_{i1}, \dots, a_{in}$ ელემენტების ნაცვლად დგანან $b_1, \dots, b_n$ ელემენტები

$$\sum_{j=1}^{n} b_j A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

მართლაც,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A'_{i1} + \dots + b_n A'_{in},$$

სადაც $A'_{i1}, \dots, A'_{in}$ არიან ამ დეტერმინანტის i-ური სტრიქონის ელემენტების ალგებრული დამატებები. მაგრამ ალგებრული დამატებები არ არიან დამოკიდებული i-ური სტრიქონის ელემენტებზე, ასე რომ ისინი ემთხვევა $A_{i1}, \dots, A_{in}$ საწყისი დეტერმინანტის ალგებრულ დამატებებს.

2)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} & * & \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ & * & \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ & * & \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ i \\ \\ k \\ \\ \end{array} = 0$$

(შედეგის თანახმად იმ დეტერმინანტის k-ური სტრიქონის მიხედვით გაშლა, რომელიც მიღებულია საწყისი დეტერმინანტისაგან k-ური სტრიქონის i-ური სტრიქონით შეცვლის შედეგად და რომელიც ნულის ტოლია, რადგან მას გაუჩნდა ორი ერთნაირი სტრიქონი).

3) და 4) – ეს 1) და 2) ტოლობებია ტრანსპონირებული A^t მატრიცისათვის (რადგან $|A| = |A^t|$, ამიტომ $|A^t|$-ს j-ური სტრიქონის მიხედვით გაშლა წარმოადგენს $|A|$-ს j-ური სვეტის მიხედვით გაშლას). $\square$

3.3.2. მომდევნო თვისება ეხება ალგებრული დამატებების გამოთვლას, რომელიც აგრეთვე იძლევა საშუალებას დეტერმინანტის გამოთვლა დავიყვანოთ უფრო დაბალი რიგის დეტერმინანტების გამოთვლაზე.

დავაფიქსიროთ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ კვადრატული მატრიცის a_{ij} ელემენტი. თუ ამ მატრიცში ამოვშლით i-ურ სტრიქონს და j-ურ სვეტს (რომლებიც გადიან a_{ij}-ზე), მივიღებთ $n-1$ რიგის მატრიცს, რომლის $n-1$ რიგის დეტერმინანტს ეწოდება მოცემული მატრიცის დეტერმინანტის a_{ij} ელემენტის (**დამატებითი**) **მინორი** და M_{ij} სიმბოლოთი აღინიშნება. ზოგჯერ მინორს უწოდებენ თვით ამ $n-1$ რიგის კვადრატულ ქვემატრიცს. შევნიშნოთ, რომ მოცემული $A = (a_{ij})_{n\times n}$ მატრიცისათვის გვაქვს n^2 დამატებითი M_{ij} მინორი.

3.3.3. თეორემა. *ალგებრული დამატება A_{ij}-ს შესაბამისი M_{ij} მინორისაგან განსხვავდება მხოლოდ $(-1)^{i+j}$ მამრავლით: $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ (ე.ი. $A_{ij} = M_{ij}$ ან $A_{ij} = -M_{ij}$ იმის და მიხედვით, ლუწია თუ კენტი რიცხვი $i+j$).*

დამტკიცება. დამტკიცებისათვის განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1) $i = j = 1$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = M_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}.$$

$$A_{11} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{I(\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n} = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = M_{11},$$

რადგან $I(1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = I(\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ და M_{11} დეტერმინანტში ელემენტების პირველი და მეორე ინდექსები ერთით მეტია სტრიქონების და სვეტების ნომრებზე. ამგვარად, $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$.

2) ვთქვათ ახლა i და j ნებისმიერია:

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

გადავიტანოთ 1-იანი ($a_{ij} = 1$) მარცხენა ზედა კუთხეში ისე, რომ შევინარჩუნოთ დანარჩენი სტრიქონებისა და სვეტების ურთიერთგანლაგება. ეს საჭიროა იმისათვის, რომ $n-1$ რიგის M_{ij} მინორი არ შეიცვალოს. ამ მიზნით მოვახდინოთ i-ური სტრიქონის მიმდევრობითი (მეზობელი) ტრანსპოზიცია ქვემოდან ზემოთ და ასევე მოვიქცეთ შემდეგ j-ური სვეტის მიმართ მარჯვნიდან მარცხნივ. მივიღებთ

$$A_{ij} = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

ზემოთ განხილული $i = j = 1$ შემთხვევის ძალით. □

3.3.4. მაგალითი. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

ა) განსაზღვრების თანახმად,

$$\Delta = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -18.$$

ბ) პირველი სტრიქონის მიხედვით გაშლის შედეგად ვღებულობთ

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -18.$$

გ) სტრიქონთა ელემენტარული გარდაქმნების გამოყენებით გვაქვს

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix},$$

და ჩვენ მივედით მკაცრად ზედა სამკუთხა სახემდე. აქ ჩვენ გამოვიყენეთ მხოლოდ 1) ტიპის ელემენტარული გარდაქმნები, რომლებიც არ ცვლის დეტერმინანტს. ამგვარად, $\Delta = 1 \cdot (-1) \cdot 18 = -18$.

3.3.5. მაგალითი. გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

მესამე სტრიქონი დავტოვოთ უცვლელად და გამოვიყენოთ სტრიქონთა ელემენტარული გარდაქმნები

$$\Delta \to \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to$$
$$\to \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

ჩვენ გამოვიყენეთ მხოლოდ 1) ტიპის ელემენტარული გარდაქმნები, რომლებიც არ ცვლიან დეტერმინანტს. თუ უკანასკნელ დეტერმინანტს

გავშლით პირველი სეტის მიხედვით, გვექნება

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -4.$$

3.3.6. მაგალითი (n-ური რიგის დეტერმინანტის გამოთვლა რეკურენტული თანაფარდობის საშუალებით). გამოვთვალოთ დეტერმინანტი

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

გავშალოთ დეტერმინანტი პირველი სტრიქონის მიხედვით:

$$\Delta_n = 9 \cdot \Delta_{n-1} + (-1) \cdot 5 \cdot \Delta = 9 \cdot \Delta_{n-1} + (-5) \cdot 4 \cdot \Delta_{n-2}$$

(შესაბამის Δ მინორში გამოვიყენეთ პირველი სვეტის მიხედვით გაშლა). თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\Delta_1 = 9$ და $\Delta_2 = 61$, მაშინ მიღებული რეკურენტული ფორმულა გვაძლევს საშუალებას გამოვთვალოთ Δ_n ნებისმიერი n-სთვის. ადვილი დასარწმუნებელია, რომ $\Delta_n = 5^{n+1} - 4^{n+1}$ (ამის დამტკიცება შეიძლება, მაგალითად, ინდუქციით n-ის მიმართ).

3.3.7. ამოცანა. გამოთვალეთ n-ური რიგის დეტერმინანტები:

ა)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(გვერდითი დიაგონალის გარეთ ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, ხოლო გვერდითი დიაგონალის ყველა ელემენტი 1-ის ტოლია).

ბ)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

3.3.8. მაგალითი. გამოვთვალოთ ეგრეთ წოდებული **ვანდერმონდის დეტერმინანტი**

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad x_1, \dots, x_n \in K.$$

თუ გამოვიყენებთ სვეტების $\widehat{x}_n - x_1\widehat{x}_{n-1}$, $\widehat{x}_{n-1} - x_1\widehat{x}_{n-2}, \dots, \widehat{x}_2 - x_1\widehat{x}_1$ ელემენტარულ გარდაქმნებს და მიღებული დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის მიხედვით დაშლას, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} V(x_1,&x_2, \dots, x_n) = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} = \\ &= (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) V(x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

თუ ასე გავაგრძელებთ, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

შევნიშნოთ, რომ $V(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_i \neq x_j$, $i \neq j$ (ე.ი. როცა ყველა $x_1, x_2, \dots, x_n$ ელემენტი განსხვავებულია).

3.3.9. ამოცანა. აჩვენეთ (ბოლო სვეტის მიხედვით დაშლით), რომ

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix} = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

3.3.10. ამოცანა. ვთქვათ $f(x) = (c_1 - x)(c_2 - x)\cdots(c_n - x)$, $a \neq b$. მაშინ

$$\begin{vmatrix} c_1 & a & a & \dots & a \\ b & c_2 & a & \dots & a \\ b & b & c_3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & c_n \end{vmatrix} = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

3.3.11. ამოცანა. გამოთვალეთ n-ური რიგის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

(მთავარი დიაგონალის ელემენტები n-ის ტოლია, ყველა დანარჩენი ელემენტები – 1-ის). **პასუხი.** $(2n-1)(n-1)^{n-1}$.

3.3.12. ამოცანა. დაამტკიცეთ (სტრიქონის მიხედვით დაშლით და რეკურენტული თანაფარდობის მიღების საშუალებით), რომ

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^k,$$

სადაც $n = 2k$ – მატრიცის ზომაა.

3.4. თუ M მინორია (ე.ი. k-ური რიგის მატრიცის დეტერმინანტი), რომელიც მოთავსებულია n-ური რიგის მატრიცის $i_1, \ldots, i_k$ ნომრიან სტრიქონებში და $j_1, \ldots, j_k$ ნომრიან სვეტებში, $1 \leq k \leq n-1$, მაშინ მისი $\overline{M}$ **დამატებითი მინორი** განისაზღვრება როგორც $n-k$ რიგის მატრიცის დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება $i_1, \ldots, i_k$ სტრიქონებისა და $j_1, \ldots, j_k$ სვეტების ამოშლის შედეგად. ვთქვათ

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$k = 2$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $j_1 = 1$, $j_2 = 4$. მაშინ

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

კერძოდ, a_{ij} ელემენტი და $n-1$ რიგის მინორი, რომელიც მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ამოშლითაა მიღებული, ურთიერთდამატებით მინორების წყვილს წარმოადგენენ. M მინორის $A(M)$ **ალგებრული დამატება** შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$A(M) = (-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}\overline{M} = (-1)^s\overline{M}$$

სადაც $s = (i_1 + \cdots + i_k) + (j_1 + \cdots + j_k)$.

3.4.1. წინადადება. *ნებისმიერი k-ური რიგის M მინორის ნამრავლი მის $A(M) = (-1)^s\overline{M}$ ალგებრულ დამატებაზე დეტერმინანტის $k!(n-k)!$ სხვადასხვა წევრების ჯამს წარმოადგენს იგივე ნიშნით, როგორითაც ისინი დეტერმინანტის შემადგენლობაში შედიან.*

დამტკიცება. $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ მატრიცის k-ური რიგის მინორი შეიცავს $k!$ წევრს, ხოლო მისი ალგებრული დამატება $A(M)$ შეიცავს $(n-k)!$ წევრს. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა M

მინორი მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეშია მოთავსებული

$$A = \left|\begin{array}{ccc:ccc}
a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\
\dots & M & \dots & \dots & & \dots \\
a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\
\hdashline
a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\
\dots & & \dots & \dots & \overline{M} & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn}
\end{array}\right|,$$

ე.ი. $i_1 = 1, \dots, i_k = k$ და $j_1 = 1, \dots, j_k = k$. მაშინ $\overline{M}$ მინორი მარჯვენა ქვედა კუთხეს დაიკავებს. M-ის ალგებრულ დამატებას თვით $\overline{M}$ მინორი წარმოადგენს, რადგან რიცხვი $s = (1+\dots+k)+(1+\dots+k) = 2(1+\dots+k)$ ლუწია. M მინორის ზოგად წევრს აქვს სახე $(-1)^{I_1}a_{1\alpha_1}\cdots a_{k\alpha_k}$, $I_1 = I(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, ხოლო $\overline{M}$-ის ზოგად წევრს – $(-1)^{I_2}a_{k+1,\beta_{k+1}}\cdots a_{n\beta_n}$, $I_1 = I(\beta_{k+1}, \dots, \beta_n)$, მაშინ $M\overline{M}$ ნამრავლის ზოგად წევრს ექნება სახე:

$$(-1)^{I_1+I_2}a_{1\alpha_1}\cdots a_{k\alpha_k}a_{k+1,\beta_{k+1}}\cdots a_{n\beta_n}, \qquad (*)$$

რომელიც არის ისეთ n ელემენტთა ნამრავლი, რომელიც მატრიცის სხვადასხვა სტრიქონებში და სხვადასხვა სვეტებში არიან განლაგებული. მაშასადამე, ის $|A|$ დეტერმინანტის წევრია. ვაჩვენოთ, რომ $I_1 + I_2 = I(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n)$. მართლაც, რადგან ყველა $\alpha_i \le k$ და ყველა $\beta_j \ge k+1$, ამიტომ არც ერთ α_i-ს არ შეუძლია შექმნას ინვერსია არც ერთ β_j-სთან. $(*)$ სახის წევრთა რიცხვი $k!(n-k)!$-ის ტოლია. ამით დასრულებულია წინადადების ამ კერძო შემთხვევის დამტკიცება.

ახლა გადავიდეთ ზოგადი შემთხვევის განხილვაზე, ე.ი. ვიგულისხმოთ, რომ M მინორი $i_1 < \dots < i_k$ ნომრიან სტრიქონებში და $j_1 < \dots < j_k$ ნომრიან სვეტებში არის განლაგებული. სტრიქონებისა და სვეტების ტრანსპოზიციით M მინორი მარცხენა ზედა კუთხეში

გადავაადგილოთ, ამასთან ისე, რომ დამატებითი $\overline{M}$ მინორი არ შეიცვალოს. ამისათვის მთლიანად საჭიროა

$$(i_1-1)+(i_2-2)\cdots+(i_k-k)+(j_1-1)+(j_2-2)+$$
$$+\cdots+(j_k-k)=(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)-$$
$$-2(1+2+\cdots+k)=s-2(1+2+\cdots+k)$$

სტრიქონთა და სვეტთა მეზობელი ტრანსპოზიცია. ყველა ამ გარდაქმნის შედეგად ახალ $|A'|$ დეტერმინანტს მივიღებთ, რომელშიაც M მინორს მარცხენა ზედა კუთხე უკავია და მის დამატებით მინორად $\overline{M}$ მინორი რჩება. $M\overline{M}$ ნამრავლი, როგორც ზემოთაა დამტკიცებული, წარმოადგენს ჯამს $|A'|$ დეტერმინანტის $k!(n-k)!$ წევრთა, რომლებიც იმავე ნიშნით არიან აღებული, როგორითაც ისინი $|A'|$-ში შედიან. მაგრამ $|A'|=(-1)^s|A|$ (რადგან რიცხვი $2(1+2+\cdots+k)$ ლუწია). აქედან გამომდინარეობს, რომ $(-1)^sM\overline{M}=M$. $(-1)^s\overline{M}=M\cdot A(M)$ ნამრავლი $|A|$ დეტერმინანტის $k!(n-k)!$ რაოდენობის წევრებისაგან შედგება, რომლებიც ისეთივე ნიშნებით არიან აღებული, როგორიც მათ $|A|$ დეტერმინანტში აქვთ. □

3.4.2. შენიშვნა. თუ M და $\overline{M}$ ურთიერთდამატებითი მინორებია, მაშინ s და $\overline{s}$ რიცხვებს ერთი და იგივე წყვილადობა აქვთ, რადგან $s+\overline{s}$ ჯამი ტოლია მატრიცის ყველა სტრიქონისა და სვეტის ნომრების საერთო ჯამისა, ე.ი. ტოლია $2(1+2+\cdots+k)$ ლუწი რიცხვისა.

3.4.3. თეორემა (ლაპლასის თეორემა). *თუ $A=(a_{ij})\in M_n(K)$, $1\le k\le n-1$, $i_1,\ldots,i_k$ – k სტრიქონის ფიქსირებული ნომრებია, მაშინ $|A|$ დეტერმინანტი ყველა $MA(M)$ ნამრავლების ჯამის ტოლია, სადაც M გაირბენს ყველა C_n^k მინორს, რომელიც მოთავსებულია $i_1,\ldots,i_k$ ნომრიან სტრიქონებში.*

ვთქვათ

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix},$$

$i_1=1$, $i_2=2$. მაშინ ლაპლასის თეორემის თანახმად

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} -$$
$$- \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

დამტკიცება. n-ური რიგის A მატრიცში ავირჩიოთ k სტრიქონი. ამორჩეულ k სტრიქონში მოთავსებულია $t = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ რაოდენობის k-ური რიგის მინორი. ვაჩვენოთ, რომ

$$|A| = M_1 A(M_1) + M_2 A(M_2) + \cdots + M_t A(M_t).$$

მართლაც, M_i შეიცავს $k!$ წევრს, $A(M_i)$ შეიცავს $(n-k)!$ წევრს, $k!(n-k)! \cdot t = k!(n-k)! \cdot C_n^k = n!$, ე.ი. მარჯვენა მხარეში არის $n!$ წევრი. თუ გამოვიყენებთ წინადადება 3.3.1-ს, ეს წევრები $|A|$-ს წევრებიც არიან, ამასთანავე სხვადასხვა (ე.ი. ამ ჯამში არ არის $|A|$-ს საერთო წევრების გამეორებები). ეს მართლაც ასეა, რადგან M_i და M_j მინორები ერთი სვეტით მაინც განსხვავდებიან. □

შედეგი 1 (ნულოვან კუთხიანი დეტერმინანტის შესახებ).

$$|C| = \begin{vmatrix} A & X \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|,$$

სადაც $A \in M_n(K)$, $X \in M_{n\times m}(K)$, $O \in M_{m\times n}(K)$ – ნულოვანი $(m \times n)$ მატრიცაა, $B \in M_m(K)$.

შედეგი 2. ვთქვათ A_i, $1 \le i \le r$, კვადრატული მატრიცებია. მაშინ

$$\begin{vmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{vmatrix} = |A_1|\,|A_2| \cdots |A_r|.$$

3.4.4. შენიშვნა. ლაპლასის თეორემის გამოყენება მიზანშეწონილია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მატრიცში k სტრიქონის (ან სვეტის) არჩევა ისეა შესაძლებელი, რომ ამ სტრიქონებში მოთავსებული k რიგის მინორებიდან ბევრი ნულის ტოლი იქნება.

3.4.5. სავარჯიშო. გამოთვალეთ

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & X \end{vmatrix},$$

სადაც $0 \in M_{n\times m}(K)$ ნულოვანი $(n \times m)$ მატრიცაა, $A \in M_n(K)$, $B \in M_m(K)$, $X \in M_{m\times n}(K)$.

3.5. მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტი. დავამტკიცოთ ფუნდამენტურად მნიშვნელოვანი თეორემა მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტის შესახებ.

3.5.1. თეორემა. *ნებისმიერი $A.B \in M_n(K)$ კვადრატული მატრიცებისთვის გვაქვს*

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

პირველი დამტკიცება. ვთქვათ $A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj})$, $C = AB = (c_{ij})$, სადაც $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i1}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. თუ $|C|$ დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის ყოველ ელემენტს განვიხილავთ როგორც n შესაკრების ჯამს, ჩვენ შევძლებთ მის დაშლას n რაოდენობა n-ური რიგის დეტერმინანტის ჯამად. თავის მხრივ, თუ ყოველი ასეთი n დეტერმინანტის მეორე სტრიქონის ყოველ ელემენტს განვიხილავთ, როგორც n შესაკრების ჯამს, ჩვენ მივიღებთ, რომ $|C|$ დაიშლება n^2 რაოდენობა n-ური რიგის დეტერმინანტების ჯამად და ა.შ. საბოლოოდ, $|C|$ წარმოიდგინება n^n რაოდენობა შემდეგი n-ური რიგის დეტერმინანტების ჯამად:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} \cdot b_{\alpha_1 1}, & a_{1\alpha_1} \cdot b_{\alpha_1 2}, & \ldots, & a_{1\alpha_1} \cdot b_{\alpha_1 n} \\ a_{2\alpha_2} \cdot b_{\alpha_2 1}, & a_{2\alpha_2} \cdot b_{\alpha_2 2}, & \ldots, & a_{2\alpha_2} \cdot b_{\alpha_2 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n\alpha_n} \cdot b_{\alpha_n 1}, & a_{n\alpha_n} \cdot b_{\alpha_n 2}, & \ldots, & a_{n\alpha_n} \cdot b_{\alpha_n n} \end{vmatrix}.$$

გავიტანოთ Δ_s დეტერმინანტის პირველი სტრიქონიდან საერთო მამრავლი $a_{1\alpha_1}$, მეორე სტრიქონიდან საერთო მამრავლი $a_{2\alpha_2}$ და ა.შ.,

n-ური სტრიქონიდან საერთო მამრავლი $a_{n\alpha_n}$:

$$\Delta_s = a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}\begin{vmatrix} b_{\alpha_1 1} & b_{\alpha_1 2} & \ldots & b_{\alpha_1 n} \\ b_{\alpha_2 1} & b_{\alpha_2 2} & \ldots & b_{\alpha_2 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{\alpha_n 1} & b_{\alpha_n 2} & \ldots & b_{\alpha_n n} \end{vmatrix}. \qquad (*)$$

თუ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ რიცხვები ყველანი განსხვავებული არ არის, მაშინ $(*)$ დეტერმინანტის მარჯვენა ნაწილს ექნება ორი ერთნაირი სტრიქონი მაინც და ამიტომ ნულის ტოლი იქნება და, მაშასადამე, Δ_s-იც ნულის ტოლი იქნება. ამგვარად, რჩება ის დეტერმინენტები Δ_s, რომელთათვისაც ყველა $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ერთმანეთისგან განსხვავებული იქნება, ე.ი. როცა ისინი ქმნიან $1, 2, \ldots, n$ რიცხვების რაიმე გადანაცვლებას. $(*)$ დეტერმინანტის მარჯვენა ნაწილში წყვილ-წყვილად გადავანაცვლოთ სტრიქონები ისე, რომ პირველი სტრიქონის ელემენტებს ჰქონდეს ინდექსი არა α_1, არამედ 1, მეორე სტრიქონის ელემენტებს არა α_2, არამედ 2, n-ურ სტრიქონის ელემენტებს არა α_n, არამედ n. ამ პროცედურის შედეგად მივიღებთ:

$$\Delta_s = (-1)^t a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (**)$$

სადაც t არის იმ ტრანსპოზიციათა რიცხვი, რომელიც აუცილებელია $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ გადანაცვლებიდან $1, 2, \ldots, n$ გადანაცვლებაზე გადასვლისათვის. $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ რიცხვს და t-ს აქვთ ერთი და იგივე წყვილადობა (რატომ?). ჩვენ ვხედავთ, რომ $(**)$-ის მარჯვენა ნაწილში გაჩნდა $|B|$ დეტერმინანტი. ამგვარად, $|C|$ არის $\Delta_s = (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}|B|$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ არის $1, 2, \ldots, n$ რიცხვების ნებისმიერი გადანაცვლება) სახის შესაკრებების ჯამი საერთო $|B|$ მამრავლით:

$$|C| = \left(\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}\right)\cdot|B| = |A|\cdot|B|.$$

მეორე დამტკიცება. განვიხილოთ დამხმარე $(2n \times 2n)$-ზომის დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & \vdots & O_n \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{smallmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{smallmatrix} & \vdots & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

(ლაპლასის თეორემა პირველი n სტრიქონის მიმართ).

მეორეს მხრივ, თუ B მატრიცზე გამავალ ყოველ სვეტს მივუმატებთ A მატრიცზე გამავალ შესაბამის სვეტთა წრფივ კომბინაციას, ე.ი.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} + b_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ \hline -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + b_{nj} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$j = n+1, \ldots, 2n,$$

მივიღებთ, რომ

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & \vdots & O_n \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{smallmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{smallmatrix} & \vdots & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \vdots & C = AB \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{smallmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{smallmatrix} & \vdots & O_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^s |C| \cdot (-1)^n = (-1)^{s_n} |C|$$

სადაც $s = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) + (n+2) + \cdots + 2n = 2n^2 + n$ (ლაპლასის თეორემა – დაშლა უკანასკნელი n სვეტის მიმართ). ამგვარად, $\Delta = |A| \cdot |B| = (-1)^{2(n^2+n)} |C| = |C|$. □

შედეგი. 1) თუ $A, B \in M_n(K)$, მაშინ $|AB| = |A|\,|B| = |BA|$ (ე.ი. თუმცა AB და BA მატრიცები შეიძლება იყვნენ განსხვავებული, მაგრამ მათი დეტერმინანტები ტოლი).

2) თუ $A_1, \ldots, A_k \in M_n(K)$, მაშინ $|A_1 \cdots A_k| = |A_1| \cdots |A_k|$. კერძოდ, $|A^k| = |A|^k$, $k \in \mathbb{N}$.

4. დეტერმინანტთა ზოგიერთი გამოყენება

4.1. კრამერის წესი.

4.1.1. თეორემა (კრამერის წესი). კვადრატულ $(a_{ij} \mid b_i)$ წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის $A = (a_{ij})_{n\times n}$ მატრიცით გვაქვს:

1) სისტემა განსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|A| \neq 0$;

2) ამ შემთხვევაში (ე.ი. თუ $|A| \neq 0$) $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ერთადერთ ამონახსნს, როცა $j = 1, \ldots, n$, აქვს შემდეგი სახე

$$x_j^0 = \frac{|A_j|}{|A|}$$

სადაც

$$|A_j| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & & j \end{array}$$

დეტერმინანტია, რომელიც მიღებულია $|A|$ დეტერმინანტისაგან j-ური სვეტის $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ თავისუფალი წევრების სვეტით შეცვლის შედეგად.

დამტკიცება. 1) თუ ელემენტარული გარდაქმნებით მივიყვანთ სისტემას საფეხურიან $(a'_{ij} \mid b'_i)$ სახეზე საფეხურიანი $A' = (a'_{ij} \mid b'_i)$ მატრიცით, მაშინ კვადრატული სისტემის განსაზღვრულობის კრიტერიუმიდან გვაქვს: სისტემა $(a_{ij} \mid b_i)$ განსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

საფეხურიანი მატრიცი მკაცრად სამკუთხაა, ე.ი. $a'_{11} \neq 0, \ldots, a'_{nn} \neq 0$, რის გამოც

$$|A| = (-1)^t |A'| = (-1)^t a'_{11} \cdots a'_{nn} \neq 0.$$

2) თუ $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ – მოცემული სისტემის ერთადერთი ამონახსნია

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + \cdots a_{ij}x_j^0 + \cdots a_{1n}x_n^0 = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1^0 + \cdots a_{nj}x_j^0 + \cdots a_{nn}x_n^0 = b_n, \end{cases}$$

მაშინ, თუ გავამრავლებთ 1-ელ განტოლებას A_{1j}-ზე, i-ურ განტოლებას – A_{ij}-ზე, n-ურ განტოლებას A_{nj}-ზე და ამ განტოლებებს შევკრებთ, მივიღებთ

$$0 \cdot x_1^0 + \cdots + |A| x_j^0 + \cdots + 0 \cdot x_n^0 = b_1 A_{1j} + \cdots b_n A_{nj} = |A_j|.$$

ამგვარად, $|A| x_j^0 = |A_j|$, ამიტომ $x_j^0 = \frac{|A_j|}{|A|}$.

2) **დებულების მეორე დამტკიცება.** ვაჩვენოთ, რომ $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, სადაც $x_j^0 = \frac{|A_j|}{|A|}$ არის მოცემული სისტემის ამონახსნი.

მართლაც, ჩავსვათ $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ სტრიქონი i-ურ $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ განტოლებაში:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} |A_j|}{|A|} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{kj}}{|A|} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} \Big)}{|A|} = \frac{b_i |A|}{|A|} = b_i \,.$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ $|A_j|$ დეტერმინანტის j-ური სვეტის მიხედვით $|A_j| = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$ გაშლა, აგრეთვე, როცა $k = i$ – $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} Aij = |A|$ გაშლა და როცა $k \neq i$ – $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$ ყალბი გაშლა. □

შედეგი 1. *თუ ცნობილია, რომ კვადრატული წრფივ განტოლებათა სისტემა არათავსებადია, მაშინ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია.*

შედეგი 2. *თუ კვადრატულ წრფივ განტოლებათა სისტემას გააჩნია ერთზე მეტი ამონახსნი, მაშინ ამ სისტემის კოეფიციენტთა მატრიცის დეტერმინანტი ნულის ტოლია.*

შედეგი 3. *ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა კვადრატულ სისტემას მაშინ და მხოლოდ მაშინ გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი, როცა ამ სისტემის კოეფიციენტთა მატრიცის დეტერმინანტი ნულის ტოლია.*

4.1.2. ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ თუ $|A| = 0$, მაგრამ $|A_j| \neq 0$ რომელიღაც j-სთვის, მაშინ სისტემა არათავსებადია.

4.1.3. ამოცანა. აჩვენეთ, რომ თუ

$$|A| = |A_1| = \cdots = |A_n| = 0,$$

მაშინ კვადრატული სისტემა შეიძლება იყოს როგორც არათავსებადი, ისე განუსაზღვრელი (მოიყვანეთ მაგალითები, რომლებიც გვიჩვენებენ ორივე შესაძლებლობის რეალიზაციას).

4.2. შებრუნებული მატრიცი. თუ $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ მატრიცისათვის არსებობს ისეთი $X \in M_n(K)$ მატრიცი, რომ $AX = XA = E$, მაშინ A მატრიცს ეწოდება **შებრუნებადი** (ან **გადაუგვარებელი**). ხოლო X-ს – A მატრიცის **შებრუნებული** (აღნიშვნა $X = A^{-1}$).

4.2.1. თეორემა. *მატრიცი $A \in M_n(K)$ შებრუნებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|A| \neq 0$. თუ $|A| \neq 0$, მაშინ $A^{-1} = (x_{ij})_{n\times n}$, სადაც $x_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$ (ყურადღება მიაქციეთ ინდექსების გადანაცვლებას ამ ტოლობაში).*

სხვა სიტყვებით, $A^{-1} = |A|^{-1}\widehat{A}^t$.

დამტკიცება.

$$AX = E \Rightarrow |A| \cdot |X| = |E| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0.$$

თუ $|A| \neq 0$, მაშინ, როგორც თეორემა 3.2.1-დან გამომდინარეობს, $|A|^{-1}\widehat{A}^t$ – A მატრიცის შებრუნებული მატრიცაა. თუ X და Y – A-ს ორი შებრუნებული მატრიცაა, მაშინ $X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y$. $\square$

4.2.2. სავარჯიშო (შებრუნებად მატრიცთა ზოგიერთი თვისება).

1) $(A^{-1})^{-1} = A$,
2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
3) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$,
4) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

4.2.3. სავარჯიშო. ვთქვათ

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K), \quad |A| = ad - bc \neq 0.$$

მაშინ

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

სასარგებლოა დავიმახსოვროთ ეს მარტივი ფორმულა.

4.2.4. სავარჯიშო. ვთქვათ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

მაშინ

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & -1 & \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2.5. სავარჯიშო. იპოვეთ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{-1} \in M_n(\mathbb{Q})$$

($n \times n$ ზომის მატრიცი, რომლის მთავარ დიაგონალზე დგას ნულები, ხოლო ყველა დანარჩენი ელემენტი 1-ის ტოლია).

4.3. შებრუნებული A^{-1} მატრიცის პოვნა. ვთქვათ მოცემულია ისეთი კვადრატული მატრიცი $A \in M_n(K)$, რომ $|A| \neq 0$.

პირველი გზა. $A^{-1} = B = (b_{ij})_{n\times n}$, $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$ (მოითხოვება n^2 რაოდენობა $(n-1)\times(n-1)$ ზომის A_{ji} დეტერმინანტების გამოთვლა).

მეორე გზა. ვიპოვოთ ისეთი $X = (x_{ij}) \in M_n(K)$ მატრიცი, რომ $AX = E$ (მაშინ $XA = E$, $X = A^{-1}$). ეს კი ისეთი $\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n$ სვეტების პოვნის ტოლფასია, რომ

$$A\widehat{x}_1 = \widehat{e}_1, \dots, A\widehat{x}_n = \widehat{e}_n,$$

ე.ი. n რაოდენობა წრფივ განტოლებათა სისტემების ამონახსნების, რომელთა მატრიცია A და თავისუფალი წევრების სვეტებია $\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_n$ (ერთეულოვანი მატრიცის სვეტები). რადგან $|A| \neq 0$, ამიტომ სტრიქონთა 1), 2) და 3) ტიპის ელემენტარული გარდაქმნებით შესაძლებელია A მატრიცი მივიყვანოთ ერთეულოვან E მატრიცზე. თუ ამ გარდაქმნებს გამოვიყენებთ ერთდროულად ჩვენი n სისტემის მიმართ, მივიღებთ

$$(A \mid E) \mapsto \dots \mapsto (E \mid B).$$

მაგრამ მაშინ B მატრიცის სვეტები – ჩვენი n სისტემის ერთადერთი ამონახსნებია, $AB = E$, $B = A^{-1}$.

4.3.1. შენიშვნები. 1) შეიძლება ამ ალგორითმის სხვაგვარი დასაბუთება. მოიძებნება 1), 2) და 3) ტიპის T_i ელემენტარული მატრიცები, რომ $T_s \cdots T_1 A = E$, ე.ი. $TA = E$, სადაც $T = T_s \cdots T_1$, და, მაშასადამე, $T = A^{-1}$. მაგრამ მაშინ $B = TE = T = A^{-1}$.

2) ამ ალგორითმის გამოყენება შესაძლებელია იმის გამოსარკვევადაც, არსებობს თუ არა შებრუნებული მატრიცი, რადგან თუ $|A| = 0$, მაშინ ჩვენ ვერ შევძლებთ A მატრიცის E-მდე მიყვანას ელემენტარული გარდაქმნებით (A მატრიცის საფეხურიანი სახე იქნება ზედა სამკუთხა მატრიცი ერთი ნულით მაინც დიაგონალზე). ის კი იმას ნიშნავს, რომ შეიძლება არ გამოვთვალოთ A მატრიცის დეტერმინანტი ალგორითმის გამოყენების დაწყებამდე.

4.3.2. მაგალითი.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = 1 \neq 0,$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

ე.ი.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3.3. მაგალითი. ვიპოვოთ შებრუნებული მატრიცი

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

მატრიცისათვის, თუ ის არსებობს.

ამოხსნა.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -13 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -8 & -35 & 1 & 5 & -5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -13 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 7 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & -13 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 7 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -9 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 7 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 9 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 21 & -64 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -40 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 9 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -5 & 16 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -40 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 9 & -1 \end{array}\right).$$

ამგვარად,

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 16 & -2 \\ 13 & -40 & 5 \\ -3 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

4.3.4. ამოცანა. ვთქვათ A – შებრუნებადი მთელრიცხოვანი (ე.ი. მთელი რიცხვებისაგან შედგენილი) კვადრატული მატრიცაა. დაამტკიცეთ, რომ A^{-1} მატრიცი მთელრიცხოვანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|A| = \pm 1$.

4.4. მატრიცული $AX = B$ განტოლება (შემთხვევა $YA = B$ დაიყვანება წინაზე, $A^tY^t = B^t$).

შემთხვევა 1. $A \in M_n(K)$, $|A| \neq 0$. მაშინ არსებობს A^{-1} შებრუნებული მატრიცი და ამიტომ არსებობს $AX = B$ განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $X = A^{-1}B$ ($YA = B$ განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $Y = BA^{-1}$). შებრუნებული A^{-1} მატრიცის ცალკე გამოთვლა არ არის აუცილებელი, თუ გამოვიყენებთ ჩვენს ალგორითმს, ე.ი. A მატრიცს მივუწერთ B მატრიცს, $(A \mid B)$, და მას სტრიქონების ელემენტარული გარდაქმნებით მივმიყვანთ $(E \mid A^{-1}B)$-მდე.

4.4.1. ვთქვათ

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\-2&-1&1\\1&2&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}8&-16&9\\-6&7&-3\\7&-13&7\end{pmatrix},\quad AX=B.$$

ვიპოვოთ $X=A^{-1}B$.

ამოხსნა.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&3&2&8&-16&9\\-2&-1&1&-6&7&-3\\1&2&2&7&-13&7\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{rrr|rrr}0&1&0&1&-3&2\\-2&-1&1&-6&7&-3\\1&2&2&7&-13&7\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{rrr|rrr}0&1&0&1&-3&2\\0&3&5&8&-19&11\\1&2&2&7&-13&7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrr|rrr}0&1&0&1&-3&2\\0&0&5&5&-10&5\\1&2&2&7&-13&7\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{rrr|rrr}0&1&0&1&-3&2\\0&0&1&1&-2&1\\1&2&2&7&-13&7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrr|rrr}0&1&0&1&-3&2\\0&0&1&1&-2&1\\1&0&2&5&-7&3\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{rrr|rrr}0&1&0&1&-3&2\\0&0&1&1&-2&1\\1&0&0&3&-3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&0&0&3&-3&1\\0&1&0&1&-3&2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right).$$

ამგვარად,

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}3&-3&1\\1&-3&2\\1&-2&1\end{pmatrix}.$$

მატრიცული განტოლების ზოგადი შემთხვევა $AX=B$, $A\in M_{m\times n}(K)$, $X\in M_{n\times s}(K)$, $B\in M_{m\times s}(K)$, s წრფივ განტოლებათა სისტემის განხილვის ტოლფასია, რომელთა მატრიცაა A, ხოლო თავისუფალი წევრების სვეტებია $\widehat{b}_1,\dots,\widehat{b}_s$. A მატრიცის A' საფეხურიან სახეზე მიყვანას, $(A\mid B)\to(A'\mid B')$, ეს ამოცანა

დაყავს s საფეხურიანი სისტემის ანალიზზე, რომელთა მატრიცია A', ხოლო თავისუფალი წევრების სვეტებია $\widehat{b_1}, \ldots, \widehat{b_s}$.

4.4.2. შენიშვნა. $Y = BA^{-1}$ მატრიცის გამოთვლა შეიძლება სვეტების ელემენტარული გარდაქმნების გამოყენებით:

$$\left(\frac{A}{B}\right) \to \left(\frac{E}{BA^{-1}}\right).$$

თავი IV

ვექტორული სივრცეები

1. განსაზღვრება და მაგალითები

1.1. ვექტორები, რომლებიც განიხილება ანალიზურ გეომეტრიაში, შეიძლება არა მარტო შევკრიბოთ, არამედ შეიძლება მათი ნამდვილ რიცხვებზე გამრავლებაც. ამ ორი ოპერაციის თვისებების ანალიზს მივყავართ ვექტორული სივრცის ცნებამდე.

ვიდრე ჩვენ მოვიყვანდეთ განსაზღვრებას, აუცილებელია აღვნიშნოთ, რომ ჩვენ გავდივართ სიმრავლეზე ოპერაციის იმ გაგების ჩარჩოებიდან, რომელიც აქამდე გაიგებოდა. ვექტორის რიცხვზე გამრავლება არ არის ოპერაცია ერთი და იგივე სიმრავლის ელემენტებზე. ეს ოპერაციაა, რომელიც ყოველ წყვილს (რიცხვი, ვექტორი) უთანადებს ვექტორს. ვექტორული სივრცის ზოგად განსაზღვრებაში საქმის ვითარება იგივეა, მაგრამ ნამდვილი რიცხვები იცვლება ნებისმიერი (მაგრამ ფიქსირებული) ველის ელემენტებით.

1.1.1. V სიმრავლეს შეკრებისა და K ველის ელემენტებზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ ეწოდება **ვექტორული** (ან **წრფივი**) **სივრცე** K **ველის მიმართ**, თუ

1) შეკრების მიმართ V არის აბელური ჯგუფი;
2) $a(u+v) = au + av$ ნებისმიერი $a \in K$m $u, v \in V$;
3) $(a+b)u = au + bu$ ნებისმიერი $a, b \in K$, $u \in V$;
4) $(ab)u = a(bu)$ ნებისმიერი $a, b \in K$, $u \in V$;
5) $1u = u$ ნებისმიერი $u \in V$, $1 \in K$.

ვექტორული სივრცის ელემენტებს ეწოდება **ვექტორები**, ხოლო ველის ელემენტებს – **სკალარები**.

1.2.2. ვექტორებს ელემენტარული გეომეტრიის აზრით ვუწოდოთ **გეომეტრიული ვექტორები**. მათზე ოპერაციები აკმაყოფილებენ ვექტორული სივრცის ყველა აქსიომას, რაც გახდა ვექტორული სივრცის ზემოთ მოცემული განსაზღვრებების საფუძველი. ევკლიდური სიბრტყის (შესაბამისად სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის)

გეომეტრიული ვექტორების სიმრავლე აღვნიშნოთ E^2-ით (შესაბამისად E^3-ით). ხაზი გავუსვათ, რომ E^2 და E^3 ვექტორული სივრცეებია $\mathbb{R}$ ველის მიმართ.

1.2.3. მაგალითი. K ველის ელემენტების n სიგრძის სტრიქონების K^n (შესაბამისად n სიმაღლის სვეტების $\widehat{K}^n$) სიმრავლე ვექტორული სივრცეა K ველის მიმართ შემდეგნაირად განსაზღვრული ოპერაციებით:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$
$$c(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n).$$

1.2.4. მაგალითი. ცხადია, რომ K ველის ელემენტების ყველა მიმდევრობის (უსასრულო სიგრძის სტრიქონების) K^ω სიმრავლე ვექტორული სივრცეა K ველის მიმართ შეკრებისა და K ველის სკალარზე გამრავლების ოპერაციებით, რომლებიც ისევე განისაზღვრება, როგორც სასრული სიგრძის სტრიქონებისთვის. მიმდევრობას ეწოდება **ფინიტური**, თუ მისი წევრების მხოლოდ სასრული რიცხვია ნულისაგან განსხვავებული. ფინიტური მიმდევრობები ქმნიან ვექტორულ სივრცეს K ველის მიმართ. აღვნიშნოთ ის K^∞-ით.

1.2.5. ყველა ფუნქციის $F(X, K) = \{f : X \to K\}$ სიმრავლე X სიმრავლიდან K ველში ვექტორული სივრცეა K ველის მიმართ შემდეგი ოპერაციებით:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(af)(x) = af(x).$$

1.2.6. ყველა $(m \times n)$-მატრიცთა $M_{m\times n}(K)$ სიმრავლე მატრიცთა შეკრებისა და მატრიცის K ველის ელემენტზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

1.2.7. ვთქვათ K – L-ის ქვეველია: $K \leq L$. მაშინ L ველი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ვექტორული სივრცე K ველის მიმართ, თუ L ველის ელემენტების ნამრავლს K ველის ელემენტებზე განვსაზღვრავთ, როგორც გამრავლებას L-ში. კერძოდ, $\mathbb{C}$ ველი ამ გაგებით ვექტორული სივრცეა $\mathbb{R}$-ის მიმართ.

1.3. მივუთითოთ ვექტორული სივრცის აქსიომებიდან გამომდინარე ზოგიერთ შედეგზე, რომლებიც არ არიან აბელური ჯგუფის აქსიომების შედეგები. ყველა ისინი რგოლის აქსიომების შედეგების ანალოგიურად მტკიცდება ($0 \in K$, $\theta \in V$):

1) $a\theta = \theta$ ნებისმიერი $a \in K$;
2) $a(-u) = -au$ ნებისმიერი $a \in K$, $u \in V$;
3) $a(u - v) = au - av$ ნებისმიერი $a \in K$, $u, v \in V$;
4) $0u = \theta$ ნებისმიერი $u \in V$;
5) $(-1)u = -u$ ნებისმიერი $u \in V$;
6) $(a - b)u = au - bu$ ნებისმიერი $a, b \in K$, $u \in V$.

2. ვექტორთა წრფივი კომბინაციები

2.1. რადგან შესწავლის ობიექტი ვექტორული სივრცეებია, ჩვენ დავადგენთ მათ ელემენტებს შორის იმ დამოკიდებულებებს, რომლებიც ჩვენთვის იქნება საინტერესო.

V სივრცის u ვექტორს ეწოდება v ვექტორის **პროპორციული**, თუ არსებობს ისეთი $a \in K$ სკალარი, რომ $u = av$. კერძოდ, $\theta = 0v$ ნებისმიერი $v \in V$-სთვის. თუ კი $u = av$ და $u \neq 0$, საიდანაც $a \neq 0$, მაშინ $v = a^{-1}u$, ე.ი. არანულოვანი ვექტორებისთვის პროპორციულობას სიმეტრიულობის თვისება აქვს.

ცნებები, რომლებსაც ახლა შემოვიტანთ, ეხება არსებითად არა ცალკეულ ვექტორებს, არამედ ვექტორების ერთობლიობებს, ან, როგორც ამბობენ, **ვექტორთა სისტემებს**.

2.2. ვექტორთა სისტემა V ვექტორულ სივრცეში ეწოდება V-ს ნებისმიერ ვექტორთა სასრულ მიმდევრობას.

შესაძლებელია ამასთანავე ვილაპარაკოთ ერთადერთ ვექტორთა ცარიელ სისტემებზე, ე.ი. ისეთ სისტემაზე, რომელიც არც ერთ ვექტორს არ შეიცავს.

2.2.1. შენიშვნა. ვექტორთა სისტემის ცნება განსხვავდება ვექტორთა სიმრავლის ცნებიდან იმით, რომ, ჯერ ერთი, ვექტორთა სისტემის ვექტორები იგულისხმება, რომ გადანომრილია, მეორეც, მათ

შორის შეიძლება იყოს ტოლი. ამგვარად, n ვექტორისაგან შედგენილი სისტემა არსებითად არის $\{1, 2, \ldots, n\}$ სიმრავლის მოცემული ასახვა V სივრცეში.

ვექტორთა სისტემის მოცემა ხშირად იქნება თანხლებული მისი წევრების ნუმერაციით 1-დან რომელიმე მთელ n-მდე, $n \geq 1$, დაკავებული ადგილის ნომრის შესაბამისად. მაგრამ ვექტორთა სისტემა აგრეთვე შეიძლება მოიცეს მისი წევრების მარცხნიდან მარჯვნივ ჩაწერით მათი რიგითობის მიხედვით მიმდევრობაში. ჩვენ ყოველთვის დავიცავთ შემდეგ წესს: ვექტორთა სისტემაში წევრების მიყოლის რიგი მოიცემა მათი მარცხნიდან მარჯვნივ ჩაწერით და არ არის აუცილებელი აღნიშვნებში მონაწილე ნომრებთან დამთხვევა. მაგალითად, სისტემაში u_4, v_2, v_3, v_4 პირველი წევრია u_4. ვექტორთა სისტემის სიგრძე ეწოდება მასში შემავალი წევრების რიცხვს. მაგალითად, u_2, u_3, u_6, u_2, u_4, u_2 ვექტორთა სისტემის სიგრძეა ექვსი. ჩვენ ვილაპარაკებთ ანალოგიური აზრით სკალართა სისტემებზე K-ში, ვექტორთა სიმრავლეების სისტემებზე V-ში და ა.შ.

2.2.2. ვექტორთა სისტემის (სკალართა სისტემის) **ქვესისტემა** (ან **ნაწილი**) ეწოდება ან თვით ამ სისტემას, ან ნებისმიერ სისტემას, რომელიც მისგან მიიღება მისი ზოგიერთი წევრის ამოშლის შედეგად.

2.3. ვექტორთა პროპორციულობის ცნების განზოგადოებას წარმოადგენს შემდეგი განსაზღვრება, რომელსაც მატრიცის სტრიქონებისათვის ჩვენ უკვე შევხვდით.

2.3.1. ყოველგვარ

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s \quad (a_1, a_2, \ldots, a_s \in K)$$

სახის გამოსახულებას ეწოდება $v_1, v_2, \ldots, v_s$ ვექტორების (ან $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ ვექტორთა სისტემის) **წრფივი კომბინაცია** $a_1, a_2, \ldots, a_s$ კოეფიციენტებით, ხოლო

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s$$

ვექტორს ეწოდება ამ წრფივი კომბინაციის **მნიშვნელობა**.

ერთი და იგივე ვექტორი შეიძლება იყოს სხვადასხვა წრფივი კომბინაციების მნიშვნელობა. პრინციპში ამის გამო არ შეიძლება გავაიგივეოთ წრფივი კომბინაციები მათ მნიშვნელობებთან. ტრადიციისამებრ ზოგჯერ ჩვენ ამას მაინც გავაკეთებთ.

2.3.2. შენიშვნა. ორი $a_1v_1+\cdots+a_sv_s$ და $b_1u_1+\cdots+b_tu_t$ წრფივი კომბინაცია ბუნებრივია და სასარგებლოა ჩავთვალოთ როგორც ერთნაირი, თუ $s=t$, $a_i=b_i$ და $v_i=u_i$, როცა $i=1,\ldots,s$. თუ კი წრფივ კომბინაციებს გავაიგივებთ მათ მნიშვნელობებთან, მაშინ ჩვენ უნდა ჩავთვალოთ, მაგალითად, რომ $1u+(-1)u$ და $0x+0y$ არიან ერთი და იგივე წრფივი კომბინაციები. კერძოდ, მაშინ აზრს დაკარგავს ტრივიალური წრფივი კომბინაცია, გაჩნდება სიძნელეები (ან ორაზროვნებები) ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის განსაზღვრისას.

2.3.3. მაგალითი. ვთქვათ $V=K^n$,

$$
\begin{aligned}
v_1 &= (1,0,0,\ldots,0),\\
v_2 &= (0,1,0,\ldots,0),\\
v_3 &= (0,0,1,\ldots,0),\\
\cdots&\cdots\cdots\\
v_n &= (0,0,0,\ldots,1).
\end{aligned}
$$

მაშინ $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\cdots+a_nv_n=(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$.

2.3.4. წრფივ $a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_sv_s$ კომბინაციას ეწოდება **ტრივიალური** წრფივი კომბინაცია, თუ ყველა მისი $a_1,a_2,\ldots,a_s$ კოეფიციენტი ნულია ტოლია.

ვექტორების ტრივიალური წრფივი კომბინაციის მნიშვნელობა ყოველთვის θ-ს ტოლია.

წრფივ $a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_sv_s$ კომბინაციას ეწოდება **არატრივიალური** წრფივი კომბინაცია, თუ მის $a_1,a_2,\ldots,a_s$ კოეფიციენტებს შორის მოიძებნება ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებული, ე.ი. ეს კომბინაცია არ არის ტრივიალური.

2.3.5. სასარგებლოა შემდეგი შეთანხმებები: არსებობს ცარიელი სისტემის ერთადერთი ტრივიალური წრფივი კომბინაცია, რადგან მისი კოეფიციენტების სისტემა ცარიელია, ხოლო ამ წრფივი კომბინაციის მნიშვნელობა არის ნულოვანი ვექტორი θ.

2.4. სიმრავლეს $L(v_1, v_2, \ldots, v_s) = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s \mid a_i \in K\}$, რომლის ელემენტები არიან $v_1, v_2, \ldots, v_s$ ვექტორების ყველა წრფივი კომბინაცია, ეწოდება $v_1, v_2, \ldots, v_s$ ვექტორების **წრფივი გარსი** ან $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ ვექტორთა სისტემის წრფივი გარსი (შევნიშნოთ, რომ შეკრების კომუტაციურობის გამო გარსი არ არის დამოკიდებული ვექტორთა ნუმერაციაზე სისტემაში).

2.4.1. თუ ავიღებთ ვექტორებს მაგალითი 2.3.2-დან, მაშინ მათი წრფივი გარსი ემთხვევა მთელ სივრცეს $L(v_1, v_2, \ldots, v_n) = K^n$.

2.4.2. ჩავთვალოთ, რომ ცარიელი ვექტორთა სისტემის გარსი ემთხვევა $\{\theta\}$ სიმრავლეს, რომლის ერთადერთი ელემენტი ნულოვანი θ ვექტორია.

2.5. ვიტყვით, რომ ვექტორი u **წრფივად გამოისახება** $v_1, v_2, \ldots, v_s$ ვექტორებით (ან $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ სისტემით), თუ ის მათი რომელიღაც წრფივი კომბინაციის მნიშვნელობის ტოლია, ე.ი. $u \in L(v_1, v_2, \ldots, v_s)$. ვიტყვით. რომ ვექტორთა სისტემა (დავარქვათ მას პირველი სისტემა) წრფივად გამოისახება სხვა სისტემით (დავარქვათ მას მეორე სისტემა), თუ პირველი სისტემის ყოველი ვექტორი წრფივად გამოისახება მეორე სისტემის საშუალებით.

2.5.1. მაგალითი. ვექტორი $(a, b, 0, 0, \ldots, 0) \in K^n$ წრფივად გამოისახება $v_1 = (1, 0, \ldots, 0), v_2 = (0, 1, \ldots, 0)$ ვექტორებით ნებისმიერი $a, b \in K$-სთვის, ხოლო $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ ვექტორი არ გამოისახება ამ ვექტორებით, თუ $n > 2$. მეორეს მხრივ, K^n-ს ნებისმიერი ვექტორი წრფივად გამოისახება $v_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $v_n = (0, 0, \ldots, 1)$ ვექტორებით.

2.5.2. ცხადია, რომ ნულოვანი θ ვექტორი წრფივად გამოისახება ნებისმიერი არაცარიელი ვექტორთა სისტემის საშუალებით. ეს თვისება რომ გავხადოთ უნივერსალური, ჩავთვალოთ, რომ ნულოვანი θ ვექტორი წრფივად გამოისახება ცარიელი ვექტორთა სისტემის საშუალებითაც, რადგან უკვე შევთანხმდით, რომ ერთადერთი ცარიელი სისტემის წრფივი გარსი ემთხვევა $\{\theta\}$ სიმრავლეს.

2.6. ვიტყვით, რომ ვექტორთა $v_1, v_2, \dots, v_s$, $s \geq 1$, სისტემა **წრფივად დამოკიდებულია**, თუ θ არის ამ სისტემის არატრივიალური წრფივი კომბინაცია და **წრფივად დამოუკიდებელია** წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამგვარად, $v_1, v_2, \dots, v_s$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, თუ $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s = \theta$ ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $a_1 = a_2 = \cdots = a_s = 0$.

2.6.1. მაგალითი. ვექტორები $v_1 = (-2, -3, 0)$, $v_2 = (2, 0, 0)$, $v_3 = (0, -2, 0)$ $\mathbb{Q}^3$-დან წრფივად დამოკიდებულია, ხოლო ვექტორები $v_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, 0, \dots, 1)$ K^n-დან წრფივად დამოუკიდებელი.

2.6.2. შენიშვნა. ტერმინი "წრფივი კომბინაცია" სინამდვილეში გამოიყენება ორი აზრით: როგორც მოქმედებების მითითება, რომელიც წარმოებს მოცემულ ვექტორებზე, რაც $a_1, a_2, \dots, a_s$ სკალარების მოცემის ტოლფასია, და როგორც ამ მოქმედებების შედეგი. გამონათქვამში "მოცემული ვექტორების არატრივიალური წრფივი კომბინაცია ნულოვანი ვექტორის ტოლია" არატრივიალურობა გაიგება პირველი აზრით, ხოლო ნულოვან ვექტორთან ტოლობა – მეორე აზრით.

2.6.3. ვიტყვით, რომ ვექტორთა ორი სისტემა **ექვივალენტურია**, თუ მათი წრფივი გარსები ემთხვევა.

2.7. ამ პარაგრაფში შემოტანილ ყველა ცნებას შორის სხვადასხვა კავშირს ამყარებს შემდეგი თეორემა.

2.7.1. თეორემა. *ა) თუ L რომელიღაც ვექტორთა სისტემის გარსია, $u, v \in L$ და $a \in K$, მაშინ $au \in L$ და $u + v \in L$.*

ბ) $\mathcal{U}$ ვექტორთა სისტემა მაშინ და მხოლოდ მაშინ გამოისახება წრფივად $\mathcal{V}$ სისტემით, თუ $\mathcal{U}$ სისტემის გარსი შედის $\mathcal{V}$ სისტემის გარსში. $\mathcal{U}$ და $\mathcal{V}$ ექვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathcal{U}$ გამოისახება $\mathcal{V}$-თი, ხოლო $\mathcal{V}$ კი $\mathcal{U}$-თი. თუ $\mathcal{U}$ გამოისახება $\mathcal{V}$-თი, მაშინ $\mathcal{U}$ და $\mathcal{V}$-ს სტრუქტურული გაერთიანება, ე.ი. $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ სისტემა, შედგენილი $\mathcal{U}$-ს ყველა ვექტორისაგან და $\mathcal{V}$-ს ყველა ვექტორისაგან, ექვივალენტურია $\mathcal{V}$-სი.

გ) თუ $v_1, v_2, \ldots, v_s$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ მათი ორი წრფივი კომბინაციის ტოლობა ნიშნავს ამ წრფივი კომბინაციების კოეფიციენტების ტოლობას:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_sv_s \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_s) = (b_1, b_2, \ldots, b_s),$$

ე.ი. $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_s = b_s$.

დ) ცარიელი ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ერთი u ვექტორისგან შედგენილი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $u = \theta$. სისტემა, რომლის ვექტორთა ნაწილი წრფივად დამოკიდებულია, თვითონ წრფივად დამოკიდებულია. კერძოდ, სისტემა, რომელიც შეიცავს θ-ს, ყოველთვის წრფივად დამოკიდებულია.

ე) ვექტორები $u_1, u_2, \ldots, u_s$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ არიან წრფივად დამოკიდებული, როცა არსებობს ისეთი $r \in \mathbb{N}$, $r \leq s$, რიცხვი, რომ u_r წრფივად გამოისახება $\{u_i \mid i < r\}$ სისტემით.

ვ) თუ $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია და წრფივად გამოისახება $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ვექტორებით, მაშინ $s \leq m$. ექვივალენტური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემები შეიცავენ ვექტორთა ტოლ რაოდენობას.

დამტკიცება. ა) ვთქვათ $L = L(v_1, v_2, \ldots, v_s)$, $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s$, $v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_sv_s$. მაშინ $au = (aa_1)v_1 + (aa_2)v_2 + \cdots + (aa_s)v_s \in L$, $u + v = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \cdots + (a_s + b_s)v_s \in L$.

ბ) ვთქვათ $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$, $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$, აღვნიშნოთ $L(u_1, u_2, \ldots, u_s)$ – $L(\mathcal{U})$-თი, $L(v_1, v_2, \ldots, v_s)$ – $L(\mathcal{V})$-თი. დავამტკიცოთ პირველი დებულების აუცილებლობა ინდუქციით s-ის მიმართ. თუ $s = 1$, მაშინ პირობის ძალით $u_1 \in L(\mathcal{V})$, ა)-ს თანახმად ნებისმიერი $a \in K$-სთვის წრფივი კომბინაცია $au_1 \in L(\mathcal{V})$, რაც ამტკიცებს $L(\mathcal{U}) \subseteq L(\mathcal{V})$ ჩართვას. თუ ახლა $s > 1$ და $c = c_1u_1 + \cdots + c_{s-1}u_{s-1} + c_su_s \in L(\mathcal{U})$, მაშინ ინდუქციის დაშვებით $a = c_1u_1 + \cdots + c_{s-1}u_{s-1} \in L(\mathcal{V})$ და $b = c_su_s \in L(\mathcal{V})$, საიდანაც ა)-ს ძალით $c = a + b \in L(\mathcal{V})$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $L(\mathcal{U}) \subseteq L(\mathcal{V})$.

დავამტკიცოთ პირველი დებულების საკმარისობა. ვთქვათ $L(\mathcal{U}) \subseteq L(\mathcal{V})$. ვაჩვენოთ, რომ $\mathcal{U}$ სისტემის ყოველი u_i ვექტორი ეკუთვნის $L(\mathcal{U})$-ს, საიდანაც გამოვა, რომ ის ეკუთვნის $L(\mathcal{V})$-ს, ე.ი. წრფივად გამოისახება $\mathcal{V}$-თი. გვაქვს

$$u_i = 0u_1 + \cdots + 0u_{i-1} + 1u_i + 0u_{i+1} + \cdots + 0u_{u_s} \in L(\mathcal{U}).$$

ბ) პუნქტის პირველი დებულება დამტკიცებულია. ამ პუნქტის დანარჩენი დებულებები პირველის და ა) პუნქტის უშუალო შედეგებია.

გ) $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_sv_s \Rightarrow a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s - (b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_sv_s) = \theta \Rightarrow (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + (a_s - b_s)v_s = \theta \Rightarrow$ (წრფივად დამოუკიდებლობის განსაზღვრებიდან) $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \cdots = a_s - b_s = 0$.

დ) შეთანხმება 2.3.4-ის თანახმად ცარიელი ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

თუ au არის u ვექტორის არატრივიალური წრფივი კომბინაცია, რომელიც θ-ს ტოლია, მაშინ $a \neq 0$ და $u = 1u = (a^{-1})(au) = \theta$. თუ $u = \theta$, მაშინ $1u$ – u ვექტორის არატრივიალური წრფივი კომბინაციაა, რომელიც θ-ს ტოლია. პუნქტის პირველი და მეორე დებულებები დამტკიცებულია.

მესამე დებულების სამართლიანობა გამომდინარეობს იქედან, რომ თუ სისტემის წრფივად დამოკიდებული ნაწილის θ-ს ტოლ არატრივიალურ კომბინაციას შევავსებთ მთელი სისტემის წრფივ კომბინაციამდე ნულოვანი კოეფიციენტებით, მივიღებთ მთელი სისტემის θ-ს ტოლ არატრივიალურ წრფივ კომბინაციას.

ე) ვთქვათ $u_1, u_2, \dots, u_s$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია და $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_su_s$ მათი θ-ს ტოლი არატრივიალური წრფივი კომბინაციაა; r-ით აღვნიშნოთ ამ კომბინაციის უკანასკნელი არანულოვანი კოეფიციენტის ნომერი. მაშინ $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_ru_r = \theta$ და, მაშასადამე, $u_r = (-\frac{a_1}{a_2})u_1 + \dots + (-\frac{a_{r-1}}{a_r})u_{r-1} \in L(u_1, u_2, \dots, u_{r-1})$. პირიქით, თუ $u_r = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_{r-1}u_{r-1} \in L(u_1, \dots, u_{r-1})$, მაშინ $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_{r-1}u_{r-1} + (-1)u_r$ – θ-ს ტოლი $\{u_i \mid i \leq r\}$ სისტემის არატრივიალური წრფივი კომბინაციაა. წინა პუნქტის თანახმად მთელი $\{u_i \mid i \leq s\}$ სისტემაც წრფივად დამოკიდებულია.

ვ) ვთქვათ $u_1, u_2, \dots, u_s$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია და ყოველი $u_i \in L(v_1, v_2, \dots, v_m)$, ე.ი.

$$\begin{aligned} u_1 &= b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + \dots + b_{1m}v_m, \\ u_2 &= b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + \dots + b_{2m}v_m, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_s &= b_{s1}v_1 + b_{s2}v_2 + \dots + b_{sm}v_m. \end{aligned}$$

აქედან ნებისმიერი $a_1, a_2, \dots, a_s \in K$-სთვის ვღებულობთ

$$\begin{aligned} a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_su_s = {} & (a_1b_{11} + a_2b_{21} + \dots + a_sb_{s1})v_1 + \\ & + (a_1b_{12} + a_2b_{22} + \dots + a_sb_{s2})v_2 + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & + (a_1b_{1m} + a_2b_{2m} + \dots + a_sb_{sm})v_m. \end{aligned}$$

განვიხილოთ m ერთგვაროვან s უცნობიანი წრფივ განტოლებათა

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + \dots + b_{s1}x_s = 0, \\ b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{s2}x_s = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{1m}x_1 + b_{2m}x_2 + \dots + b_{sm}x_s = 0 \end{cases}$$

სისტემა. თუ $(a_1, a_2, \dots, a_s)$ ამ სისტემის ნებისმიერი ამონახსნია, მაშინ $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_su_s = \theta$. პირობის ძალით $a_1 = a_2 = \dots + a_3 = 0$. მაშასადამე, $s \leq m$.

მეორე დებულება უშუალოდ გამომდინარეობს პირველიდან. $\square$

2.7.2. სავარჯიშო. დაამტკიცეთ, რომ

$$\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$$

სისტემა ექვივალენტურია შემდეგი ორი სისტემის:

$$\{u_1, \ldots, u_{i-1}, au_i, u_{i+1}, \ldots, u_n\},$$

სადაც $a \in K$, $a \neq 0$;

$$\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + bu_j, u_{i+1}, \ldots, u_n\},$$

სადაც $b \in K$, $b \neq 0$.

შემდგომში ვექტორთა სისტემების ასეთ გარდაქმნებს ვუწოდოთ **ელემენტარული გარდაქმნები**. ამასთან ვამბობთ, რომ პირველი გარდაქმნის შემთხვევაში **აქტიურ როლს** თამაშობს u_i ვექტორი, ხოლო მეორე გარდაქმნის შემთხვევაში – u_j ვექტორი. დანარჩენი ვექტორები თამაშობენ **პასიურ როლს**.

2.7.3. ამოცანები. **1.** დაამტკიცეთ, რომ ელემენტარული გარდაქმნებით ნებისმიერი სისტემა შეიძლება გადავაქციოთ მის ექვივალენტურ $\{v_1, \ldots, v_r, \theta, \ldots, \theta\}$ სისტემად, სადაც $v_1, \ldots, v_r$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.

2. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა ელემენტარული გარდაქმნებით შეიძლება გადავაქციოთ ნებისმიერ წინასწარ მოცემულ მის ექვივალენტურ წრფივად დამოუკიდებელ სისტემად.

2.8. ვთქვათ $\mathcal{U}$ ვექტორული სივრცის სასრული ვექტორთა სისტემაა. $\mathcal{U}$ **სისტემის ბაზისი** ეწოდება მი ისეთ წრფივად დამოუკიდებელ ნაწილს, რომელიც ექვივალენტურია მთელი U-სი. სისტემის ბაზისის ვექტორთა რიცხვს ეწოდება ამ სისტემის **რანგი**.

2.8.1. შენიშვნა. ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელ

$$v_1, v_2, \ldots, v_r \tag{$*$}$$

სისტემას ვუწოდოთ **მაქსიმალური** წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა, თუ მას ნებისმიერი u ვექტორის დამატება გადააქცევს

წრფივად დამოკიდებულ სისტემად. რადგან $v_1, v_2, \ldots, v_r, u$ ვექტორთა ყოველ წრფივ დამოკიდებულებაში u-სთან მდგომი კოეფიციენტი უნდა განსხვავდებოდეს ნულისგან (წინააღმდეგ შემთხვევაში (*) სისტემა იქნებოდა წრფივად დამოკიდებული), ამიტომ u ვექტორი წრფივად გამოისახება (*) ვექტორების საშუალებით, რიც გამოც (*) ვექტორთა სისტემა მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა, როცა (*) ვექტორები არიან წრფივად დამოუკიდებელი, ხოლო ნებისმიერი u ვექტორი მათ წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს.

2.8.2. თეორემა. *ა) შემდეგი დებულებები ექვივალენტურია:*

1) $\mathcal{A}$ – $\mathcal{U}$ ბაზისია,

2) $\mathcal{A}$ – $\mathcal{U}$-ს მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ნაწილია,

3) $\mathcal{A}$ – $\mathcal{U}$-ს მინიმალური ნაწილია, რომლისთვისაც $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{U})$.

ბ) სისტემის ყოველი წრფივად დამოუკიდებელი ნაწილი შედის ამ სისტემის რომელიღაც ბაზისში. ერთი სისტემის ყველა ბაზისი ექვივალენტურია. სისტემის რანგი არ არის დამოკიდებული კონკრეტული ბაზისის არჩევაზე.

დამტკიცება. თეორემა 2.7.1-ის მარტივი გამოყენება. □

შედეგი. *ვექტორთა სისტემის რანგი ინვარიანტულია (უცვლელია) ვექტორთა ელემენტარული გარდაქმნების მიმართ.*

2.9. K ველის მიმართ V **სივრცის ქვესივრცე** ეწოდება V სიმრავლის ნებისმიერ არაცარიელ S ქვესიმრავლეს, რომელიც ჩაკეტილია V ვექტორული სივრცის ოპერაციების მიმართ: ნებისმიერი $u, v \in S$ ვექტორებისთვის და ნებისმიერი $a \in K$ სკალარისთვის ვექტორები $u + v$ და au ეკუთვნიან S-ს (სხვა სიტყვებით, S-ის ვექტორთა ნებისმერი სასრული სისტემის გარსი შედის S-ში) და წერენ $S \leq V$. თუ $S \leq V$ და $S \neq V$, მაშინ წერენ $S < V$.

2.9.1. მაგალითები. 1) ვექტორთა სისტემის წრფივი გარსი ქვესივრცეა.

2) $\{\theta\}$ და V – V სივრცის ქვეცივრცეებია (მათ V სივრცის **არასაკუთრივი ქვესივრცეები** ეწოდება, ხოლო ყველა დანარჩენს – **საკუთრივი**).

3) E^3-ში იმ ვექტორთა სიმრავლე, რომელნიც მოცემული წრფის ან სივრცის პარალელურია, არის E^3-ის ქვესივრცე.

4) რიცხვითი ღერძის მოცემულ X შუალედზე ყველა ფუნქციათა $F(X, \mathbb{R})$ სივრცეში უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე ქვესივრცეა.

5) ვთქვათ $S = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n \mid a_1 = 0\}$. მაშინ S – K^n სივრცის ქვესივრცეა.

6) ვთქვათ $S = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n \mid a_1 = 1\}$. მაშინ S არ არის K^n-ს ქვესივრცე.

7) $K^n < K^\infty < K^\omega$.

აღვნიშნოთ, რომ V სივრცის ნებისმიერი ქვესივრცე თვითონ არის სივრცე V-ში განსაზღვრული ოპერაციების მიმართ.

3. სასრულგანზომილებიანი სივრცეები

3.1. V სივრცეს ეწოდება **სასრულგანზომილებიანი**, თუ V თავისი სასრული ვექტორთა სისტემის წრფივი გარსია. სივრცეს, რომელიც არ არის სასრულგანზომილებიანი, ეწოდება **უსასრულო განზომილებიანი**.

3.1.1. მაგალითები. 1) K^n სასრულგანზომილებიანი სივრცეა. 2) ყველა ფინიტურ მიმდევრობათა K^∞ სივრცე უსასრულო განზომილებიანია.

3.2. V სივრცის **ბაზისი** ეწოდება ისეთ

$$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

ვექტორთა სისტემას V-დან, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

1) $\mathcal{V}$ წრფივად დამოუკიდებელია,

2) $L(\mathcal{V}) = V$.

თუ $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ – V-ს ბაზისია, მაშინ $\dim V = n$ რიცხვს ეწოდება V-ს **განზომილება** (dimension (ლათ.) – განზომილება). თუ $u \in V$ და $u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, სადაც $a_i \in K$, მაშინ $[u] = [u]_{\mathcal{V}} = (a_1, \ldots, a_n)$ სტრიქონს ეწოდება u ვექტორის **საკოორდინატო სტრიქონი** (ან **კოორდინატთა სტრიქონი**) $\mathcal{V}$ ბაზისში.

3.2.1. მაგალითები. 1. ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ ნებისმიერი ორი არაკოლინეარული v_1, v_2 ვექტორი შეადგენს E^2 სივრცის ბაზისს. ანალოგიურად, ნებისმიერი სამი არაკომპლანარული ვექტორი შეადგენს E^3 სივრცის ბაზისს.

2. კომპლექსურ რიცხვთა ველს, როგორც ვექტორულ სივრცეს $\mathbb{R}$-ის მიმართ, აქვს განზომილება 2. ბაზისის სახით შეიძლება ავიღოთ $v_1 = 1, v_2 = i$. $\alpha = a+bi$ კომპლექსური რიცხვის კოორდინატები ამ ბაზისში არიან α-ს ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები: $[\alpha]_{\mathcal{V}} = (a, b)$.

3. სისტემა

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ v_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ v_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

წარმოადგენს K^n-ის ბაზისს (ამ ბაზისს ეწოდება **სტანდარტული ბაზისი** და მას ხშირად $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$-ით აღნიშნავენ). $u \in K^n$ ვექტორის საკოორდინატო სტრიქონი სტანდარტულ ბაზისში u-ს ემთხვევა: $u = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + \cdots + a_ne_n = [u]_e$.

3.2.2. თეორემა. *ვთქვათ V სასრულგანზომილებიანი ვექტორული სივრცეა, $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ვექტორთა სისტემაა V-დან.*

ა) შემდეგი დებულებები ექვივალენტურია:

1) $\mathcal{V}$ – V-ს ბაზისია;

2) $\mathcal{V}$ მაქსიმალურად წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემაა V-დან;

3) $\mathcal{V}$ მინიმალური ვექტორთა სისტემაა V-დან, რომლისთვისაც $L(\mathcal{V}) = V$.

ბ) V-ს გააჩნია ერთ ბაზისი მაინც, უფრო მეტიც, ნებისმიერი წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემა V-დან შედის V-ს რომელიღაც ბაზისში (კერძოდ, V-ს ნებისმიერი ქვესივრცის ბაზისი შედის

V-ს რომელიღაც ბაზისში). ერთი სივრცის ყველა ბაზისი ექვივალენტურია. სივრცის განზომილება არ არის დამოკიდებული კონკრეტული ბაზისის არჩევაზე.

გ) თუ $n = \dim V$, მაშინ V-ს ნებისმიერი $n+1$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია, V სივრცის ნებისმიერი n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი V-ს ბაზისია, V სივრცის ნებისმიერი ქვესივრცის განზომილება არ აღემატება n-ს.

დ) თუ $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ – V-ს ბაზისია, მაშინ ასახვა $u \to [u]$, რომელიც ვექტორს შეუსაბამებს მის საკოორდინატო სტრიქონს $\mathcal{V}$ ბაზისში, წარმოადგენს V^n-ს იზომორფიზმს K^n-ზე, ე.ი. გააჩნია თვისებები:

$$[u+v] = [u] + [v], \quad [au] = a[u] \quad \textit{ნებისმიერი}\ u, v \in V, \ \ a \in K,$$

ან, რაც ექვივალენტურია თვისების

$$[a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_tu_t] = a_1[u_1] + a_2[u_2] + \cdots + a_t[u_t]$$

ნებისმიერი $u_i \in V$, $a_i \in K$. ამასთან $u_1, u_2, \ldots, u_t$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია (V^n-ში) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა წრფივად დამოკიდებულია $[u_1]$, $[u_2], \ldots, [u_t]$ (K^n-ში).

დამტკიცება. §2-ის თეორემა 2.7.1-ის მარტივი გამოყენება. □

3.2.3. მაგალითი. თუ X – n ელემენტიანი სიმრავლეა, მაშინ X სიმრავლიდან K ველში ყველა ფუნქციათა $F(X, K)$ სივრცის განზომილებაა n. განვიხილოთ ე.წ. δ-ფუნქციები $\delta_a(x)$ $(a \in X)$, რომლებიც განსაზღვრულია ფორმულებით

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1, & \textit{როცა}\ \ x = a, \\ 0, & \textit{როცა}\ \ x \neq a. \end{cases}$$

ცხადია, რომ ნებისმიერი $f \in F(X, K)$ ფუნქცია ერთადერთი სახით წარმოიდგინება δ-ფუნქციების საშუალებით. სახელდობრ,

$$f(x) = \sum_{a \in X} f(a)\delta_a(x).$$

მაშასადამე, δ_a, $a \in X$, ფუნქციები ქმნიან $F(X, K)$ სივრცის ბაზისს, ამასთან ფუნქციის კოორდინატები ამ ბაზისში მისი მნიშვნელობებია.

თუ X სიმრავლე უსასრულოა, მაშინ ნებისმიერი n-სთვის $F(X,K)$ სივრცეში გვაქვს n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი, მაგალითად, $\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \ldots, \delta_{a_n}$, სადაც $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$ და $a_i \neq a_j$, $i \neq j$. მაშასადამე, $F(X,K)$ სივრცე უსასრულოგანზომილებიანია (ე.ი. მას აქ გააჩნია სასრული ბაზისი).

3.2.4. მაგალითი. ფინიტურ მიმდევრობათა K^∞ სივრცეში საბაზისო ვექტორებად შეიძლება ავიღოთ შემდეგი სახის მიმდევრობები

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots,) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

(ერთეული დგას i-ურ ადგილას). ამგვარად, K^∞ სივრცე უსასრულოგანზომილებიანია (ე.ი. მას არ გააჩნია ბაზისი, რომელიც შედგება ვექტორთა სასრული რიცხვისაგან).

3.2.5. მაგალითი. $\mathbb{R}$ ველი, როგორც ვექტორული სივრცე $\mathbb{Q}$-ს მიმართ, უსასრულოგანზომილებიანია. მართლაც, ის რომ სასრულგანზომილებიანი იყოს, მაშინ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი განსაზღვრული იქნებოდა რაციონალურ რიცხვთა სასრული ერთობლიობით – მისი კოორდინატებით ამ სივრცის რომელიღაც ბაზისში. მაგრამ მაშინ ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე იქნებოდა თვლადი, რაც არასწორია.

3.2.6. ამოცანა. იპოვეთ სასრულ q ელემენტიანი ველის მიმართ n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცის ელემენტთა რიცხვი.

3.2.7. ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ რიცხვითი ღერძის ნებისმიერ შუალედზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციების $C(X,\mathbb{R})$ სივრცე უსასრულო განზომილებიანია.

3.3. თეორემა (მატრიცის მთავარი საფეხურიანი სახის ერთადერთობა). *ვთქვათ $A, B, C \in M_{m\times n}(K)$, B და C საფეხურიანი მატრიცებია, რომლებიც მიღებულია არანულოვანი A მატრიცისაგან სტრიქონთა 1), 2) და 3) ტიპის ელემენტარული გარდაქმნებით. მაშინ:*

1) B მატრიცის სტრიქონთა $\{b_1, \ldots, b_m\}$ და C მატრიცის სტრიქონთა $\{c_1, \ldots, c_m\}$ სისტემები ექვივალენტურია K^n-ში:

$$L(a_1, \ldots, a_m) = L(b_1, \ldots, b_m) = L(c_1, \ldots, c_m);$$

2) საფეხურიანი B და C მატრიცების არანულოვან სტრიქონთა რიცხვები r_1 და r_2 ტოლია ($r = r_1 = r_2 = \dim(a_1, \ldots, a_m)$, $r = r(A)$ რიცხვის სხვა ინტერპრეტაციები მოცემული იქნება 7.4 თეორემაში მატრიცის რანგის შესახებ);

3) საფეხურიანი B და C მატრიცების სტრიქონების ლიდერები განლაგებულია ერთი და იგივე სვეტში;

4) თუ B და C არანულოვანი A მატრიცის მთავარი საფეხურიანი სახეებია, მაშინ $B = C$.

დამტკიცება. 1) A მატრიცის სტრიქონთა $\{a_1, \ldots, a_m\}$ სისტემის ელემენტარული გარდაქმნები, რომლებსაც ის მიყავს B საფეხურიან სახეზე, იმის ტოლფასია, რომ სტრიქონთა K^n სივრცეში $L(a_1, \ldots, a_m) = L(b_1, \ldots, b_m)$ (იხ. სავარჯიშო 2.7.2). ანალოგიურად, $L(a_1, \ldots, a_m) = L(c_1, \ldots, c_m)$. ამგვარად,

$$L(a_1, \ldots, a_m) = L(b_1, \ldots, b_m) = L(c_1, \ldots, c_m).$$

2) რადგან საფეხურიანი მატრიცის არანულოვანი სტრიქონები შეადგენენ სტრიქონთა სისტემის ბაზისს (სავარჯიშო 4.1.1), ამიტომ 1)-დან გამომდინარეობს, რომ $r_1 = r_2$, ამასთან

$$r = r_1 = r_2 = \dim(b_1, \ldots, b_m) = \dim(c_1, \ldots, c_m) = \\ = \dim(a_1, \ldots, a_m).$$

3) ვთქვათ საფეხურიანი B მატრიცის r არანულოვანი $b_1, \ldots, b_m$ სტრიქონების ლიდერები განლაგებულია $s_1 < s_2 < \cdots < s_r$ ნომრიან სვეტებში, ხოლო საფეხურიანი C მატრიცის r არანულოვანი $c_1, \ldots, c_m$ სტრიქონების ლიდერები განლაგებულია $t_1 < t_2 < \cdots < t_r$ ნომრიან სვეტებში. ამიტომ II.1.2.9 ლემის თანახმად $s_1 = t_1$ ($s_1 \geq \min\{t_i\} = t_1$; $t_1 \geq \min\{s_i\} = s_1$).

თუ

$$b_2 = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{2j} c_j, \quad c_2 = \sum_{j=1}^{r} \mu_{2j} b_j,$$

მაშინ $\lambda_{21} = 0 = \mu_{21}$. თუ ამ მსჯელობას გამოვიყენებთ $\{b_2, \ldots, b_r\}$ და $\{c_2, \ldots, c_r\}$ სისტემებისათვის, რომლებიც წრფივად გამოისახებიან ერთი მეორის საშუალებით, მივიღებთ, რომ $s_2 = t_2$. ამ პროცესის გაგრძელებით დავრწმუნდებით, რომ $s_3 = t_3, \ldots, s_r = t_r$.

4) პუნქტებში 2) და 3) დამტკიცებულია, რომ არანულოვან სტრიქონთა რიცხვი r და სვეტთა $1 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_r \leq n$ ნომრები, რომლებშიც განლაგებულია მთავარი საფუხურიანი B და C სახეების მთავარი უცნობები, განსაზღვრულია ცალსახად. ამგვარად, მთავარ და თავისუფალ უცნობებად დაყოფა, რომლებიც განსაზღვრულია B და C საფეხურიანი სახეებით, ერთი და იგივეა. რადგან მთავარი უცნობები ცალსახად გამოისახებიან თავისუფალი უცნობების საშუალებით (ექვივალენტურ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემებში მთავარი საფეხურიანი B და C მატრიცებით), ამიტომ ამ გამოსახვით მთავარი საფეხურიანი სახე ცალსახად განისაზღვრება. $\square$

4. ვექტორთა სისტემის მატრიცი. ბაზისიდან ბაზისზე გადასვლის მატრიცი. ქვესივრცეთა თანაკვეთა და ჯამი

4.1. $A \in M_{m\times n}(K)$ მატრიცს

$$A = \begin{pmatrix} [u_1]_{\mathcal{V}} \\ [u_2]_{\mathcal{V}} \\ \vdots \\ [u_m]_{\mathcal{V}} \end{pmatrix},$$

რომელიც შედგება K ველის მიმართ რომელიღაც $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ვექტორების საკოორდინატო სტრიქონებისაგან რომელიღაც $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ბაზისში, ეწოდება $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ **სისტემის მატრიცი $\mathcal{V}$ ბაზისში**, ან $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ **ბაზისიდან** $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ **სისტემაზე გადასვლის მატრიცი.**

4.1.1. სავარჯიშო. აჩვენეთ, რომ $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ სისტემის u_i ვექტორები, რომელთათვისაც ამ სისტემის გაუსის მიხედვით გარდაქმნილ მატრიცში i-ური სტრიქონი განსხვავებულია ნულისაგან, შეადგენენ $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ სისტემის ბაზისს, ხოლო გარდაქმნილი მატრიცის არანულოვანი სტრიქონები არიან $L(u_1, u_2, \ldots, u_m)$-ის რომელიღაც ნაზისის საკოორდინატო სტრიქონები (იმავე $\mathcal{V}$ ბაზისში).

4.2. ვთქვათ V^n სასრულგანზომილებიანი ვექტორული სივრცეა K ველის მიმართ და

$$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \quad \mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

მისი ორი ბაზისია. განვიხილოთ $\mathcal{U}$ ბაზისის, როგორც ვექტორთა სისტემის მატრიცი $\mathcal{V}$ ბაზისში:

$$u_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots a_{in}v_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

$A-(a_{ij})_{n\times n}$ მატრიცს ეწოდება $\mathcal{V}$ **ბაზისიდან $\mathcal{U}$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცი**. მისი სტრიქონები არიან $\mathcal{U}$ ბაზისის საკოორდინატო სტრიქონები $\mathcal{V}$ ბაზისში.

კერძოდ, $\mathcal{V}$-დან $\mathcal{V}$-ზე გადასვლის მატრიცი არის ერთეულოვანი $E = (e_{ij})$ მატრიცი, რომლისთვისაც $e_{ii} = 1$, როცა $i = j$, და $e_{ij} = 0$, როცა $i \neq j$.

შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები

$$\vec{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

თუ $a \in V^n$ და $[a]$ – a ვექტორის საკოორდინატო სტრიქონია $\mathcal{V}$ ბაზისში, მაშინ $a = [a]_{\mathcal{V}}\vec{\mathcal{V}}$, ხოლო

$$u_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n =$$
$$= (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})\vec{\mathcal{V}} \ \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ან $\vec{\mathcal{U}} = A\vec{\mathcal{V}}$.

4.2.1. თეორემა. *ა) ვთქვათ $\mathcal{V}, \mathcal{U}$ – V^n-ის ბაზისებია და A – $\mathcal{V}$-დან $\mathcal{U}$-ზე გადასვლის მატრიცია. მაშინ საკოორდინატო სტრიქონები $[x]_{\mathcal{V}}$ და $[x]_{\mathcal{U}}$ ამ ბაზისებში დაკავშირებულია ტოლობით*

$$[x]_{\mathcal{V}} = [x]_{\mathcal{U}}A.$$

ბ) ვთქვათ $\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{T}$ ვექტორული სივრცის სამი ბაზისია, A – cV-დან $\mathcal{U}$-ზე გადასვლის მატრიცია, B – $\mathcal{U}$-დან $\mathcal{T}$-ზე გადასვლის მატრიცი, C – $\mathcal{V}$-დამ $\mathcal{T}$-ზე გადასვლის მატრიცი. მაშინ $C = BA$.

გ) ბაზისიდან ბაზისზე გადასვლის მატრიცი გადაუგვარებელია და, თუ A – $\mathcal{V}$-დან $\mathcal{U}$-ზე გადასვლის მატრიცია, მაშინ A^{-1} – $\mathcal{U}$-დან $\mathcal{V}$-ზე გადასვლის მატრიცია.

დამტკიცება. ა) $x=[x]_{\mathcal{V}}\vec{\mathcal{V}}=[x]_{\mathcal{U}}\vec{\mathcal{U}}=[x]_{\mathcal{U}}(A\vec{\mathcal{V}})=([x]_{\mathcal{U}}A)\vec{\mathcal{V}} \Rightarrow [x]_{\mathcal{V}}=[x]_{\mathcal{U}}\cdot A$ (ვექტორის ჩაწერის ერთადერთობა ბაზისის საშუალებით).

ბ) პირობის თანახმად $\vec{\mathcal{U}}=A\vec{\mathcal{V}}$, $\vec{\mathcal{T}}=B\vec{\mathcal{U}}$. ვთქვათ $\vec{\mathcal{T}}=C\vec{\mathcal{V}}$. მაშინ $C\vec{\mathcal{V}}=\vec{\mathcal{T}}=B\vec{\mathcal{U}}=B(A\vec{\mathcal{V}})=(BA)\vec{\mathcal{V}} \Rightarrow C=BA$.

გ)-ს დამტკიცებისთვის შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{V}$-დან $\mathcal{U}$-ზე გადასვლის მატრიცი E-ს ტოლია და ვთქვათ ბ)-ში $\mathcal{T}=\mathcal{V}$. მაშინ ბ)-ს თანახმად $E=BA$. საიდანაც $|A|\neq 0$ და $B=A^{-1}$. □

ვხედავთ, რომ n-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში შეიძლება მოინახოს იმდენი განსხვავებული ბაზისი, რამდენი განსხვავებული n-ური რიგის გადაუგვარებელი კვადრატული მატრიციც არსებობს. მართალია, მაშინ ორი ბაზისი, შედგენილი ერთი და იგივე ვექტორებისაგან, ოღონდ სხვა თანმიმდევრობით ჩაწერილი, ითვლება განსხვავებულად.

4.2.2. სავარჯიშოები. ვთქვათ A – $\mathcal{V}$ ბაზისიდან $\mathcal{U}$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცია.

1. ავაგოთ $(n\times 2n)$-მატრიცი $(A\mid E)$. ავაგოთ მისი ექვივალენტური $(E\mid B)$ სახის მატრიცი (ეს შეიძლება გაკეთდეს სტრიქონების ელემენტარული გარდაქმნებით, მაგალითად, გაუსის ალგორითმით). მაშინ B – $\mathcal{U}$-დან $\mathcal{V}$-ზე გადასვლის მატრიცია. დაამტკიცეთ.

2. ვთქვათ $[x]_{\mathcal{V}}$ – x ვექტორის საკოორდინატო სტრიქონია $\mathcal{V}$ ბაზისში. ავაგოთ $((n+1)\times 2n)$-მატრიცი:

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & E \\ \dots & \vdots & \dots \\ [x]_{\mathcal{V}} & \vdots & \theta \end{pmatrix}.$$

ელემენტარული გარდაქმნების საშუალებით, რომლებშიც ბოლო სტრიქონი ყოველთვის თამაშობს პასიურ როლს, ვიპოვოთ მისი ექვივალენტური შემდეგი სახის მატრიცი

$$\begin{pmatrix} E & \vdots & B \\ \dots & \vdots & \dots \\ \theta & \vdots & d \end{pmatrix},$$

სადაც E ექვივალენტურია A-სი, θ – n სიგრძის ნულოვანი სტრიქონია, d – n სიგრძის სტრიქონია (ეს შეიძლება გაკეთდეს, მაგალითად, გაუსის ალგორითმით). მაშინ d – x ვექტორის საკოორდინატო სტრიქონია $\mathcal{U}$ ბაზისში: $d = [x]_{\mathcal{U}}$.

4.3. ვექტორული სივრცის ორი ქვესივრცის $A \cap B$ თანაკვეთა ქვესივრცეა, რომელიც შედის როგორც A-ში, ისე B-ში. A და B **ქვესივრცეების ჯამი** ეწოდება სიმრავლეს $A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$. A და B ქვესივრცეების ჯამი ქვესივრცეა, რომელიც მოიცავს A-საც და B-საც.

4.3.1. სავარჯიშოები. 1. $A+B = A \cup B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ან $B \subseteq A$.

2. ერთი სივრცის ნებისმიერი $\mathcal{U}$ და $\mathcal{V}$ სასრული ვექტორთა სისტემებისათვის

$$L(\mathcal{U}) + L(\mathcal{V}) = L(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}).$$

4.3.2. თეორემა. *ვთქვათ A და B სასრულგანზომილებიანი სივრცის ქვესივრცეებია. მაშინ*

$$\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B).$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\{u_1, \ldots, u_p\}$ – $A \cap B$-ს ბაზისია. შევავსოთ ის $u_{p+1}, \ldots, u_r$ ვექტორებით A-ს ბაზისამდე, ხოლო $v_{p+1}, \ldots, v_n$ ვექტორებით – B ბაზისამდე. მაშინ $p = \dim(A \cap B)$, $r = \dim A$, $n = \dim B$. ვაჩვენოთ. რომ $\{u_1, \ldots, u_r, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ – $A+B$-ს ბაზისია:

$$\begin{aligned} A+B &= L(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_r, u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_n) = \\ &= L(u_1, \ldots, u_r, v_{p+1}, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

მივიღეთ, რომ ყოველი $x \in A+B$ ვექტორი არის $u_1, \ldots, u_r, v_{p+1}, \ldots, v_n$ სისტემის წრფივი კომბინაცია. ვაჩვენოთ ამ სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა. განვიხილოთ წრფივი დამოკიდებულება

$$a_1u_1 + \cdots + a_ru_r + b_{p+1}v_{p+1} + \cdots + b_nv_n = \theta \Leftrightarrow$$
$$a_1u_1 + \cdots + a_ru_r = -b_{p+1}v_{p+1} - \cdots - b_nv_n.$$

ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილი ეკუთვნის A-ს, მარჯვენა – B-ს. ამგვარად, მარჯვენა ნაწილი ეკუთვნის $A \cap B$-ს. ამის გამო

$-b_{p+1}v_{p+1} - \cdots - b_n v_n = c_1 u_1 + \cdots + c_p u_p$. ამ ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ $c_1 = \cdots = c_p = b_{p+1} = \cdots = b_n = 0$. მაშასადამე, $\dim(A+B) = r + n - p = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$. $\square$

4.4. ქვესივრცეთა ჯამი შეიძლება განისაზღვროს შესაკრებთა ნებისმიერი რიცხვისათვის: თუ A_i ვექტორული სივრცის ქვესივრცეებია $(i = 1, 2, \ldots, s)$, მაშინ A_i **ქვესივრცეების ჯამი** ეწოდება

$$\sum_{i=1}^{s} A_i = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_s \mid a_i \in A_i\}$$

ქვესივრცეს.

აღვნიშნოთ, რომ $\sum\limits_{i=1}^{s} A_i$ ემთხვევა A_i ქვესივრცეების $\mathcal{A}_i$ ბაზისების სტრუქტურული გაერთიანების წრფივ გარსს:

$$\sum_{i=1}^{s} A_i = A_1 + \cdots + A_s = L(\mathcal{A}_1) + \cdots + L(\mathcal{A}_s) = L(\mathcal{A}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{A}_s),$$

სადაც $\mathcal{A}_i = \{u_{i1}, \ldots, u_{in_i}\}$ $(i = 1, \ldots, s)$.

5. ქვესივრცეთა პირდაპირი ჯამი

5.1. ქვესივრცეთა ჯამის მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ქვესივრცეთა **პირდაპირი ჯამი**, რომლის ბაზისი არის შესაკრები ქვესივრცეების ბაზისების სტრუქტურული გაერთიანება.

5.1.1. თეორემა-განსაზღვრება. *ქვესივრცეთა $S = \sum\limits_{i=1}^{s} A_i$ ჯამის შემდეგი თვისებები ექვივალენტურია:*

ა) ყოველი v ელემენტი S-დან **ცალსახად** *წარმოიდგინება A_i-ების ელემენტების ჯამის სახით $v = a_1 + a_2 + \cdots + a_s$: თუ*

$$v = a_1 + a_2 + \cdots + a_s = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_s,$$

სადაც $a_i, a'_i \in A_i$, მაშინ $a_i = a'_i$ ყველა i-სთვის.

ბ) θ **ცალსახად** *წარმოიდგინება A_i-ების ელემენტების ჯამის სახით: თუ*

$$\theta = a_1 + a_2 + \cdots + a_s, \quad a_i \in A_i,$$

მაშინ $a_i = \theta$ *ყველა* i*-სთვის.*

გ) ყოველი $j = 1, 2, \ldots, s$*-სთვის*

$$A_j \cap \sum_{i \neq j} A_i = \{\theta\}.$$

დ) თუ ყოველი i*-სთვის* $\mathcal{A}_i$ *არის* A_i*-ს ბაზისი, მაშინ ყველა* $\mathcal{A}_i$*-ების სტრუქტურული გაერთიანება* S*-ის ბაზისია.*

თუ შესრულებულია ა)–დ) თვისებებიდან ერთ-ერთი (და მაშინ შესრულებულია ყველა დანარჩენიც), მაშინ $S = \sum_{i=1}^{s} A_i$ *ჯამს ეწოდება* ***პირდაპირი ჯამი*** *და აღინიშნება* $S = \oplus_{i=1}^{s} A_i$ *ან* $S = A_1 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$ *სიმბოლოთი.*

დამტკიცება. ა)$\Rightarrow$ბ), რადგან ბ) კერძო შემთხვევაა ა)-სი, ხოლო თუ შესრულებულია ბ) და $v = a_1 + a_2 + \cdots + a_s = a'_1 + a'_2 + \cdots a'_s$, სადაც $a_i, a'_i \in A_i$, მაშინ $a_i - a'_i \in A_i$ და $\sum_{i=1}^{s}(a_i - a'_i) = \theta$, საიდანაც $a_i - a'_i = \theta$ და $a_i = a'_i$.

ბ)$\Rightarrow$გ). ვთქვათ $v \in A_j \cap \sum_{i \neq j} A_i$. მაშინ $v = a_j = \sum_{i \neq j} a_i$, სადაც $a_j \in A_j$, $a_i \in A_i$, საიდანაც $\theta = a_1 + \cdots + a_{j-1} + (-a_j) + a_{j+1} + \cdots + a_s$, და, მაშასადამე, პირობის ძალით, ამ ჯამის ყველა შესაკრები θ-ს ტოლია. კერძოდ, $v = a_j = \theta$.

გ)$\Rightarrow$დ). ვთქვათ $\mathcal{A}$ არის $\mathcal{A}_i$ ბაზისების სტრუქტურული გაერთიანება: $\mathcal{A} = \bigvee_{i=1}^{s} \mathcal{A}_i$. რადგან $S = L(\mathcal{A})$, საკმარისია დავამტკიცოთ $\mathcal{A}$ ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა. ვთქვათ w არის θ-ს ტოლი $\mathcal{A}$ ვექტორთა სისტემის წრფივი კომბინაცია. მაშინ $w = \sum_{i=1}^{s} w_i$, სადაც w_i არის θ-ს ტოლი $\mathcal{W}$ წრფივი კომბინაციის შესაკრები, რომელიც არის $\mathcal{A}_i$ ვექტორთა სისტემის ვექტორების წრფივი კომბინაცია კოეფიციენტებით, რომლებიც w წრფივი კომბინაციის შესაბამისი კოეფიციენტების ტოლია. მაშინ ნებისმიერი j-სთვის

$$w_j \in A_j \quad \text{და} \quad -w_j = \sum_{i \neq j} w_i,$$

საიდანაც, პირობის ძალით, $w_j = \theta$. რადგან w_j არის $\mathcal{A}_j$ ბაზისის ელემენტების წრფივი კომბინაცია, ამიტომ w_j ტრივიალური წრფივი კომბინაციაა, ე.ი. S ბაზისია.

დ)⇒ბ). ვთქვათ $\theta = a_1 + \cdots + a_s$, $a_i \in A_i$. გამოვსახოთ ყოველი a_i შესაკრები $\mathcal{A}_i$ ბაზისის საშუალებით და ჩავსვათ ამ ტოლობაში. მივიღებთ შესაბამისი ბაზისების სტრუქტურული გაერთიანების წრფივ კომბინაციას, რომელიც θ-ს ტოლია. პირობის ძალით, ეს წრფივი კომბინაცია ტრივიალურია და, კერძოდ, ყველა a_i ვექტორი ნულოვანი ვექტორის ტოლია. $\square$

5.1.2. მაგალითები. 1. ვთქვათ $V = K^n$. თუ $n = s + t$, სადაც $s, t \in \mathbb{N}$, მაშინ $V = U \oplus W$, სადაც

$$U = \{(a_1, a_2, \ldots, a_s, 0, 0, \ldots, 0) \mid a_i \in K\},$$
$$W = \{(0, 0, \ldots, 0, a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots, a_n) \mid a_j \in K\}.$$

2. ვთქვათ K ველის მიმართ V^n ვექტორული სივრცის ბაზისია $v_1, v_2, \ldots, v_n$ და $A_i = Kv_i = L(v_i) = \{av_i \mid a \in K\}$. მაშინ

$$V^n = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n.$$

5.2. სივრცეთა გარე პირდაპირი ჯამი. ვთქვათ U და V ორი სივრცეა K ველის მიმართ. ვთქვათ $W = \{(u, v) \mid u \in U,\ v \in V\}$ სიმრავლეა ყველა დალაგებული წყვილებისა, რომელთა პირველი კომპონენტები არიან U-ს ვექტორები, ხოლო მეორე კომპონენტები – V-ს ვქტორები. განვსაზღვროთ W-ზე შეკრებისა და K-დან სკალარზე გამრავლების ოპერაციები ფორმულებით:

$$(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v'),$$
$$a(u, v) = (au, av)$$

(შეადარეთ შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების განსაზღვრებას სტრიქონთა სივრცეში).

ადვილი შესამოწმებელია, რომ W ვექტორული სივრცეა. მას ეწოდება U და V **სივრცეების გარე პირდაპირი ჯამი** (აღინიშნება $W = U\overline{\oplus}V$).

თუ $U' = (u, \theta) \mid u \in U\}$, $V' = (\theta, v) \mid v \in V\}$, მაშინ U' და V' ქვესივრცეებია W სივრცეში და $W = U' \oplus V'$.

5.2.1. მაგალითი. ვთქვათ $U = K^n$, $V = K^m$. მაშინ $U\overline{\oplus}V = K^{n+m}$, თუ $((a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_m))$ წყვილს $U\overline{\oplus}V$-დან გავაიგივებთ $n+m$ სიგრძის $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ სტრიქონთან.

5.2.2. გარე პირდაპირი ჯამის განსაზღვრება ადვილად ვრცელდება შესაკრებთა ნებისმიერ სასრულ რაოდენობაზე. მაგალითად, $K^n = K\overline{\oplus}K\overline{\oplus}\cdots\overline{\oplus}K$ (n შესაკრები), სადაც K გაიგივებულია K^1-თან.

6. ფაქტორ-სივრცე

ვთქვათ A არის V ვექტორული სივრცის ქვესივრცე. თუ $v \in V$, მაშინ $v + A = \{v + a \mid a \in A\}$ სიმრავლეს ეწოდება A **ქვესივრცის მოსაზღვრე კლასი** v **წარმომადგენლით**.

შევნიშნოთ, რომ

$$v \in v + A,$$
$$\theta + A = A,$$
$$v + A = u + A \Leftrightarrow v - u \in A, u \in v + A \Leftrightarrow v + A = u + A.$$

V/A სიმრავლეს, რომლის ელემენტებია A-ს მიმართ ყველა განსხვავებული მოსაზღვრე კლასები, ეწოდება V სივრცის A ქვესივრცის მიმართ **ფაქტორ-სიმრავლე**.

6.1. მაგალითი. ვთქვათ $V = K^2$, $A = \{(0, a) \mid a \in K\}$. თუ $v = (1, 1)$, მაშინ $v + A = \{(1, a) \mid a \in K\}$; $V/A = \{(b, 0) + A \mid b \in K\}$.

6.2. თეორემა. *V/A სიმრავლის ელემენტებისთვის განვსაზღვროთ ფორმულებით:*

$$(v + A) + (u + A) = (v + u) + A,$$
$$a(v + A) = (av) + A.$$

მაშინ

ა) V/A ვექტორული სივრცეა K-ს მიმართ, რომლის ნულოვანი ვექტორი ტოლია $\theta + A = A$.

ბ) თუ $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ – A-ს ბაზისი, $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ – V-ს ბაზისია, რომელიც მოიცავს A-ს ბაზისს, მაშინ $\{v_{r+1}+A, \ldots, v_n + A\}$ იქნება V/A-ს ბაზისი. კერძოდ,

$$\dim(V/A) = \dim V - \dim A.$$

დამტკიცება. სავარჯიშო განსაზღვრებების ცოდნის შემოწმებაზე. □

7. მატრიცი რანგი

7.1. ჩვენ უკვე გავეცანით K ველის მიმართ $A = (a_{ij})_{m\times n}$ მატრიცის სტრიქონთა სისტემის რანგს (სავარჯიშო 4.1.1). ამ რანგს ვუწოდოთ მატრიცის **სტრიქონული რანგი**. რადგან A მატრიცის სვეტები შეიძლება ჩავთვალოთ $\widehat{K}^m$ ვექტორული სივრცის ელემენტებად, აზრი აქვს A მატრიცის **სვეტთა სისტემის რანგის** ან **სვეტოვანი რანგის** ცნების შემოტანას. გამოყენებისათვის მნიშვნელოვანი ფაქტია ნებისმიერი მატრიცისათვის სვეტოვანი და სტრიქონული რანგების ტოლობა. ეს რომ დავამტკიცოთ. ამისათვის შემოვიტანოთ მატრიცის მინორული რანგის ცნება.

7.2. განვაზოგადოთ მინორის ცნება მართკუთხოვანი მატრიცებისათვის. ვთქვათ $A \in M_{m\times n}(K)$, $k \leq \min(m,n)$. $A = (a_{ij})_{m\times n}$ მატრიცის **k-ური რიგის მინორი** ეწოდება ნებისმიერ $(k \times k)$-მატრიცის დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება A-დან ნებისმიერი $m-k$ სტრიქონისა და $n-k$ სვეტის ამოშლის შედეგად, სხვა სიტყვებით, იმ მატრიცის დეტერმინანტს, რომელიც დგას A მატრიცის k სტრიქონისა და k სვეტის გადაკვეთაზე.

A **მატრიცის მინორული რანგი** ეწოდება ისეთ r რიცხვს, რომ A-ში არის ერთი მაინც r რიგის არანულოვანი მინორი, მაგრამ არ არიან არანულოვანი მინორები, რომელთა რიგი $> r$. მატრიცის რანგი არის 0, თუ მატრიცი ნულოვანია.

რადგან ჩვენ ვინტერესდებით მატრიცის უდიდესი რიგის არანულოვანი მინორით, ამიტომ მისი მოძებნის დროს სასარგებლოა გავითვალისწინოთ შემდეგი შენიშვნა.

7.3. შენიშვნა. თუ A მატრიცის ყველა k-ური რიგის მინორი ნულის ტოლია, მაშინ ნულის ტოლია ყველა უფრო მაღალი რიგის მინორიც.

მართლაც, თუ ლაპლასის თეორემის საფუძველზე ყოველ $(k+j)$-ური რიგის, $k<k+j\le \min(m,n)$, მინორს დავშლით ნებისმიერი k სტრიქონის მიხედვით, მაშინ ამ მინორს წარმოვადგენთ k-ური რიგის მინორთა რაიმე j-ური რიგის მინორებზე ნამრავლთა ჯამის სახით და ამით დავამტკიცებთ, რომ იგი ნულის ტოლია.

7.4. თეორემა მატრიცთა რანგის შესახებ. *ნებისმიერი მატრიცისათვის მისი მინორული, სტრიქონული და სვეტოვანი რანგები ტოლია.*

დამტკიცება. ვთქვათ A მატრიცის მინორული რანგია r. ვაჩვენოთ, რომ სტრიქონული რანგი აგრეთვე r-ის ტოლია. ამისთვის ვიგულისხმოთ, – ეს არ შეზღუდავს დამტკიცების ზოგადობას – რომ r რიგის არანულოვანი M მინორი მოთავსებულია A მატრიცის პირველ r სტრიქონში:

$$A=\left(\begin{array}{cc:ccccccc:cc:cc}
a_{11} & \dots & a_{1j_1} & \dots & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_r} & & \dots & a_{1t} & & \dots & a_{1n}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & M & \dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots & \dots\\
a_{r1} & \dots & a_{rj_1} & \dots & a_{rj_2} & \dots & a_{rj_r} & & \dots & a_{rt} & & \dots & a_{rn}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots & \dots\\
a_{i1} & \dots & a_{ij_1} & \dots & a_{ij_2} & \dots & a_{ij_r} & & \dots & a_{it} & & \dots & a_{in}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots & \dots\\
a_{m1} & \dots & a_{mj_1} & \dots & a_{mj_2} & \dots & a_{mj_r} & & \dots & a_{mt} & & \dots & a_{mn}
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
a_1(\overline{a}_1)\\ \dots\\ a_r(\overline{a}_r)\\ \dots\\ a_i(\overline{a}_i)\\ \dots\\ a_m(\overline{a}_m).
\end{array}$$

აქ $a_i=(a_{i1},\dots,a_{ik},\dots,a_{in})\in K^n$ $(i=1,2,\dots,m)$. a_i ვექტორის r სიგრძის მონაკვეთი ვუწოდოთ $\overline{a}_i=(a_{1j_1},\dots,a_{2j_2},\dots,a_{rj_r})$, $r\le n$, ვექტორს. თუ $a_1,\dots,a_m$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ წრფივად დამოკიდებულია მათი ნებისმიერი ფიქსირებული სიგრძის მონაკვეთებიც. მართლაც, $c_1a_1+\cdots+c_ma_m=\theta$ ტოლობა ნიშნავს, რომ $c_1a_1+\cdots+c_ma_m$ სტრიქონის ყველა კომპონენტი ნულის ტოლია, ხოლო $c_1\overline{a}_1+\cdots+c_m\overline{a}_m=\theta$ ტოლობა ნიშნავს

იგივეს ყველა იმ კომპონენტისათვის, რომლებიც შედიან მონაკვეთებში. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ $a_1, \ldots, a_m$ ვექტორების რომელიღაც $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m$ მონაკვეთები წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ თვითონ $a_1, \ldots, a_m$ ვექტორებიც წრფივად დამოუკიდებელია. რადგან M მინორის სტრიქონთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია ($M \neq 0$), ამიტომ A მატრიცის პირველი r სტრიქონიც აგრეთვე წრფივად დამოუკიდებელია. ვთქვათ $\overline{a}_i$ $(i > r)$ r სიგრძის სტრიქონია, რომელიც შედგენილია A მატრიცის i-ური სტრიქონის იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც განლაგებულია იმავე სვეტებში, რომლებშიც განლაგებულია M მინორი:

$$\overline{a}_i = (a_{ij_1}, \ldots, a_{ij_2}, \ldots, a_{ij_r}).$$

რადგან M მინორის სტრიქონები ქმნიან ბაზისს K^r-ში, ამიტომ $\overline{a}_i$ – M მინორის სტრიქონების წრფივი კომბინაციაა

$$\overline{a}_i = c_1\overline{a}_1 + \cdots + c_r\overline{a}_r,$$

სადაც

$$\begin{aligned}
\overline{a}_1 &= (a_{1j_1}, \ldots, a_{1j_2}, \ldots, a_{1j_r}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\overline{a}_r &= (a_{rj_1}, \ldots, a_{rj_2}, \ldots, a_{rj_r}).
\end{aligned}$$

გამოვაკლოთ A მატრიცის i-ურ სტრიქონს a_i-ს მისი პირველი r სტრიქონის ასეთივე წრფივი კომბინაცია:

$$a_i - c_1a_1 - \cdots - c_ra_r = (*, \overset{j_1}{0}, *, \overset{j_2}{0}, \ldots, \overset{j_r}{0}, *, \overset{t}{a'_{it}}, *).$$

თუ მიიღება სტრიქონი, რომელიც შეიცავს არანულოვან a'_{it} ელემენტს სვეტში t ნომრით, მაშინ განვიხილოთ A მატრიცის ისეთი $r+1$ რიგის მინორი M_1, რომელიც M მინორისაგან შემდეგნაირად მიიღება: M მინორის სტრიქონებს დავუმატოთ A მატრიცის i-ური სტრიქონის შესაბამისი ელემენტები და M მინორის სვეტებს დავუმატოთ A მატრიცის t-ური სვეტის შესაბამისი ელემენტები (ამბობენ, რომ M_1

მინორი მიიღენა M მინორის “მოარშიებით” A მატრიცის i-ური სტრიქონისა და t-ური სვეტის შესაბამისი ელემენტებით):

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \dots & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_r} & \vdots & a_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \vdots \\ a_{rj_1} & \dots & a_{rj_2} & \dots & a_{rj_r} & \vdots & a_{rt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{ij_1} & \dots & a_{ij_2} & \dots & a_{ij_r} & & a_{it} \end{pmatrix}.$$

ჩვენი t-ს არჩევის მიხედვით M_1 მინორი შებრუნებადია, საკმარისია ამ M_1 მირონის უკანასკნელ სტრიქონს გამოვაკლოთ პირველი r სტრიქონის ზემოთ არჩეული წრფივი კომბინაცია, ხოლო შემდეგ დავშალოთ ეს მინორი ბოლო სტრიქონის მიხედვით, რათა დავრწმუნდეთ, რომ M_1 მინორი არანულოვან სკალარზე ნამრავლამდე სიზუსტით M მინორს ემთხვევა:

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \dots & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_r} & \vdots & a_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{rj_1} & \dots & a_{rj_2} & \dots & a_{rj_r} & \vdots & a_{rt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & & a'_{it} \end{pmatrix} = a'_{it} M.$$

r-ის განსაზღვრების მიხედვით ასეთი სიტუაცია შეუძლებელია და ამიტომ გარდაქმნის შედეგად A მატრიცის i-ური სტრიქონი გახდება ნულოვანი:

$$a_i - c_1 a_1 - \dots - c_r a_r = \theta,$$

ე.ი.

$$a_i = c_1 a_1 + \dots + c_r a_r \quad (i = r+1, \dots, m).$$

სხვა სიტყვებით, საწყისი i-ური სტრიქონი არის A მატრიცის პირველი r სტრიქონის წრფივი კომბინაცია. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ A მატრიცის პირველი r სტრიქონი არის ამ მატრიცის სტრიქონთა სისტემის მაზისი, ე.ი. A-ს სტრიქონული რანგი r-ის ტოლია.

რომ დავამტკიცოთ, რომ სვეტოვანი რანგი r-ის ტოლია, საკმარისია ზემოთ მოყვანილ მსჯელობაში “სტრიქონებს” და “სვეტებს” შევუცვალოთ ადგილები. $\square$

ეს თეორემა გვიჩვენებს, რომ არ აქვს აზრი განვასხვაოთ მატრიცის სამი რანგი და მომავალში მატრიცის რანგის ქვეშ ჩვენ გავიგებთ სტრიქონულ რანგს, მაგრამ გვემახსოვრება, რომ ის ტოლია როგორც სვეტოვანი, ასევე მინორული რანგის (აღნიშვნა $r(A)$ – A მატრიცის რანგი).

შევნიშნოთ კიდევ, რომ მატრიცის რანგის შესახებ თეორემის დამტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ მატრიცის რანგი ემთხვევა ნებისმიერი ისეთი შებრუნებადი მინორის რიგს, რომ ყველა მისი მომმარშიებელი მინორი (თუ ისინი არსებობენ) გადაგვარებულია.

შედეგი (დეტერმინანტის ნულთან ტოლობის ზოგადი პირობა). კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის 0-ის ტოლი, როცა მატრიცის სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულია (ან, რაც იგივეა, მატრიცის სტრიქონები არ შეადგენენ ბაზისს სტრიქონთა სივრცეში).

7.5. მაგალითი. ვიპოვოთ

$$A = \left(\begin{array}{rr|rrr} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

მატრიცის რანგი.

ამ მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში მდებარე მეორე რიგის მინორი ნულის ტოლია. მაგრამ მატრიცი შეიცავს ნულისაგან განსხვავებულ მეორე რიგიც მინორსაც, მაგალითად,

$$M = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

მესამე რიგის მინორი

$$M_1 = \left|\begin{array}{c|cc} 2 & -4 & 3 \\ & \multicolumn{2}{c}{M} \\ 1 & -2 & 1 \\ \cline{2-3} 0 & 1 & -1 \end{array}\right|,$$

რომელიც მოაარშიებს M მინორს, განსხვავებულია ნულისაგან, $M_1 = 1$, მაგრამ M_1 მინორის მომმარშიებელი ორივე მეოთხე რიგის მინორი ნულის ტოლია:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ \hline 4 & -7 & 4 & -4 \end{array}\right| = 0, \qquad \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 4 & -7 & 4 & 5 \end{array}\right| = 0.$$

ამრიგად, A მატრიცის რანგი $r(A)$ ტოლია სამის: $r(A) = 3$.

7.6. მაგალითი. ვიპოვოთ

$$u_1 = (2, -2, -4), \quad u_2 = (1, 9, 3),$$
$$u_3 = (-2, -4, 1), \quad u_4 = (3, 7, -1)$$

ვექტორთა სისტემის რანგი (ე.ი. მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ქვესისტემა).

შევადგინოთ მატრიცი

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c|} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ \cline{1-2} -4 & 3 & 1 & -1 \\ \hline \hline \end{array}\right) \end{array}$$

რომლისთვისაც მოცემული ვექტორები წარმოადგენენ სვეტებს. ამ მატრიცის რანგი 2-ის ტოლია. მარცხენა ზედა კუთხეში მოთავსებული მეორე რიგის მინორი არ არის ნულის ტოლი, მაგრამ მისი მომმარშიებელი ორივე მესამე რიგის მინორი ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემულ სისტემაში u_1 და u_2 ვექტორები

შეადგენენ ერთ-ერთ მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ ქვესისტემას.

7.7. ლემა. *თუ A' საფეხურიანი მატრიცია, მაშინ მისი რანგი $r(A')$ არანულოვანი სტრიქონების r რიცხვის ტოლია.*

დამტკიცება. r რიგის მინორი, რომელიც მოავსებულია r არანულოვანი სტრიქონისა და საფეხურების კუთხეებზე გამავალი სვეტების გადაკვეთაზე, წარმოადგენს მკაცრად სამკუთხა მატრიცის დეტერმინანტს და ამიტომ განსხვავებულია ნულისაგან. ყველა მინორი, რომელთა რიგი $> r$, ნულოვანია, რადგან აქვთ ნულოვანი სტრიქონი. □

7.8. ლემა. *საფეხურიანი A' მატრიცის სვეტთა სისტემის რანგი არანულოვანი სტრიქონების r რიცხვის ტოლია (სახელდობრ, სვეტები, რომლებიც გადიან საფეხურების კუთხეებზე, ქმნიან სვეტთა მაქსიმალურ წრფივად დამოუკიდებელ ქვესისტემას).*

დამტკიცება. მითითებული სვეტები წრფივად დამოუკიდებელია, რადგან გადიან არანულოვანი დეტერმინანტის მქონე $(r\times r)$-მატრიცზე. საფეხურიანი მატრიცის ყოველი სვეტი ამ სვეტების წრფივი კომბინაციაა. □

შედეგი (მატრიცის სვეტთა სისტემაში მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ნაწილის პოვნის ალგორითმი). გადავიდეთ A მატრიციდან სტრიქონთა ელემენტარული გარდაქმნებით A' საფეხურიან მატრიცზე, დავიმახსოვროთ სვეტების $j_1 \dots, j_r$ ნომრები, რომლებიც გადიან A'-ის საფეხურების კუთხეებზე, ავიღოთ A მატრიცში იგივე ნომრებით $\widehat{a}_{j_1}, \dots, \widehat{a}_{j_r}$ სვეტები.

7.9. მაგალითი. ვიპოვოთ რომელიმე წრფივად დამოუკიდებელი ნაწილი სტრიქონთა სისტემაში $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$,

$$a_1 = (-1, 4, -3, -2), \qquad a_2 = (3, -7, 5, 3),$$
$$a_3 = (3, -2, 1, 0), \qquad a_4 = (-4, 1, 0, 1),$$

ხოლო დანარჩენი სტრიქონები გამოვსახოთ როგორც ამ ნაწილის წრფივი კომბინაციები.

ამოხსნა. ჩავწეროთ a_1, a_2, a_3, a_4 სტრიქონები როგორც სვეტები და მიღებული მატრიცი სტრიქონთა ელემენტარული გარდაქმნებით

მივიყვანოთ მთავარ საფეხურიან სახეზე:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \\ 0 & -4 & -8 & 12 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ჩავიწეროთ მთავარი საფეხურიანი სახის იმ სვეტების ნომრები, რომლებიც გადიან საფეხურების კუთხეებზე: $1, 2$. ამიტომ $\{a_1, a_2\}$ მაქსიმალურად წრფივად დამოუკიდებელი ნაწილია, $a_3 = 3a_1 + 2a_2$, $a_4 = -5a_1 - 3a_2$; სტრიქონთა a_1, a_2, a_3, a_4 სისტემის რანგია 2.

7.10. თეორემა. *ვთქვათ* $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$, $B = (b_{jk}) \in M_{n\times p}(K)$. *მაშინ* $r(AB) \leq r(A)$, $r(AB) \leq r(B)$.

დამტკიცება. ვთქვათ $C = (c_{ik})_{m\times p} = AB$, მაშინ

$$\begin{aligned} c_{ik} &= a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nk}, \\ c_i &= a_{i1}b_1 + \cdots + a_{in}b_n, \\ \widehat{c}_k &= \widehat{a}_1 b_{1k} + \cdots + \widehat{a}_n b_{nk}, \end{aligned}$$

ე.ი. C მატრიცის სტრიქონები წქრფივად გამოისახება B მატრიცის სტრიქონების საშუალებით, C მატრიცის სვეტები წრფივად გამოისახება A მატრიცის სვეტების საშუალებით. ამიტომ $r(C) \leq r(B)$ და $r(C) \leq r(A)$. □

შედეგი. კვადრატულ B მატრიცზე გამრავლების შედეგად, როცა $|B| \neq 0$, რანგი არ იცვლება.

დამტკიცება. ვთქვათ $C = AB$, $|B| \neq 0$, მაშინ $A = CB^{-1}$. გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} C = AB &\Rightarrow r(C) \leq r(A), \\ A = CB^{-1} &\Rightarrow r(A) \leq r(C) \end{aligned}\right\} \Rightarrow r(C) = r(A). \qquad \square$$

7.10.1. ამოცანები. 1) $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$.

მითითება. $A+B$ მატრიცის სტრიქონთა სისტემა წრფივად გამოისახება A და B მატრიცების სტრიქონთა სისტემების სტრუქტურული გაერთიანების საშუალებით.

2) თუ $A, B \in M_n(K)$ და $AB = 0 = BA$, $A^2 = A$, მაშინ

$$r(A+B) = r(A)+r(B).$$

3) თუ $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times p}(K)$, მაშინ

$$r(A)+r(B)-n \leq r(AB).$$

4) თუ $A, B, C \in M_n(K)$ და $ABC = 0$, მაშინ

$$r(A)+r(B)+r(C) \leq 2n.$$

5) ვთქვათ $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times m}(K)$ და $m > n$. დაამტკიცეთ, რომ $|AB| = 0$.

6) თუ $A^2 = A \in M_n(K)$, მაშინ $r(A)+r(E-A) = n$.

7) თუ $A, B \in M_n(K)$, $AB = BA$, $r(A^2) = r(A)$ და $r(B^2) = r(B)$, მაშინ $r((AB)^2) = r(AB)$.

8) თუ $A_1, \ldots, A_k \in M_n(K)$, $k \geq 2$, მაშინ

$$r(A_1; \ldots; A_k) \geq r(A_1)+\cdots+r(A_k)-n(k-1).$$

8. წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობის კრიტერიუმი

8.1. განვიხილოთ K ველის მიმართ წრფივ განტოლებათა სისტემა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობების მიმართ

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

როგორც უკვე ვიცით, (1) სისტემის ჩაწერის მატრიცული ფორმა ეწოდება გამოსახულებას

$$Ax^t = \widehat{b}, \tag{2}$$

სადაც $A = (a_{ij})_{m\times n}$ – (1) სისტემის მატრიცია, x^t – ტრანსპონირებული $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სტრიქონი – n სიმაღლის სვეტი, შედგენილი უცნობებისაგან, ხოლო $\widehat{b}$ – თავისუფალი წევრების სვეტი.

(1) სისტემისათვის დავუშვათ

$$\widehat{a}_j = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad \widehat{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

მაშინ

$$\widehat{a}_1 x_1 + \widehat{a}_2 x_2 + \cdots + \widehat{a}_n x_n = \widehat{b} \tag{3}$$

გამოსახულებას ეწოდება (1) სისტემის ჩაწერის **ვექტორული ფორმა**.

აღვნიშნოთ, რომ $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის (1) სისტემის ამონახსნი, როცა $\widehat{b}$ – $\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \ldots, \widehat{a}_n$ სვეტების წრფივი კომბინაციაა $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ კოეფიციენტებით.

8.2. თავსებადობის კრიტერიუმი.

8.2.1. თეორემა (კრონეკერ–კაპელი). *(1) სისტემა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის თავსებადი, როდესაც მისი A მატრიცის რანგი გაფართოებული $\overline{A} = (A \mid \widehat{b})$ მატრიცის რანგის ტოლია.*

დამტკიცება. როგორც წინა პუნქტში აღვნიშნეთ, (1) სისტემა მაშინ და მხოლოდ მაშინაა თავსებადი, როცა თავისუფალ წევრთა b სვეტი წრფივად გამოისახება A მატრიცის სვეტების საშუალებით, ე.ი. როცა A მატრიცის სვეტთა სისტემა ეკვივალენტურია $\overline{A}$ მატრიცის სვეტთა სისტემის ($L(a_1, \ldots, a_n) = L(a_1, \ldots, a_n, b)$), ე.ი. როცა $\overline{A}$ მატრიცის სვეტთა სისტემის რანგი ტოლია A მატრიცის სვეტთა სისტემის რანგის, ე.ი. თანახმად თეორემისა რანგის შესახებ, როცა $r(A) = r(\overline{A})$. □

8.2.2. ზოგადი ამონახსნი. სტრიქონს

$$Y = (y_1(t_1, \ldots, t_p), \ldots, y_n(t_1, \ldots, t_p)),$$

რომელიც შედგენილია $y_i(t_1, \ldots, t_p)$ – n ფუნქციისაგან $t_1, \ldots, t_p$ ცვლადების მიმართ, ეწოდება (1) სისტემის ზოგადი ამონახსნი, თუ ნებისმიერი $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$-სთვის K-დან სტრიქონი

$$(y_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_p), \ldots, y_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)),$$

რომელიც შედგენილია y_i ფუნქციების მნიშვნელობებისაგან $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ წერტილში, წარმოადგენს (1) სისტემის ამონახსნს და, პირიქით, (1) სისტემის ნებისმიერი $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ამონახსნისათვის მოიძებნება $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in K$, რომელთათვისაც ყველა $i = 1, 2, \ldots, n$-სთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$x_i^0 = y_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_p).$$

ამგვარად ზოგადი ამონახსნი ფორმულაა, რომელიც აღწერს (1) სისტემის ყველა ამონახსნთა სიმრავლეს.

8.2.3. თეორემა. *n უცნობიან (1) თავსებად სისტემას, რომლის მატრიცის რანგი r-ის ტოლია, გააჩნია ზოგადი ამონახსნი, რომელიც დამოკიდებულია $n-r$ ცვლადზე.*

დამტკიცება. სისტემის გარდაქმნები, რომლებიც აღწერილია გაუსის მეთოდში, არ ცვლიან (1) სისტემის მატრიცის (სტრიქონულ) რანგს, ამიტომ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ (1)-ს გააჩნია გაუსისეული სახე

$$\begin{cases} x_{i_1} + f_1(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-r}}) = c_{i_1}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{i_r} + f_r(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-r}}) = c_{i_r}. \end{cases} \tag{4}$$

ამ ჩანაწერში მონაწილე რიცხვი r წარმოადგენს (4) სისტემის მატრიცის რანგს, რადგან ამ სისტემის მატრიცის r რანგის მინორი, რომელიც განლაგებულია $i_1, \ldots, i_r$ ნომრიან სვეტებში – ერთეულოვანი მატრიცის დეტერმინანტია, ხოლო უფრო მაღალი რიგის მინორები არ გააჩნია:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} i_1 & & i_2 & & i_r & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & \ldots & 0 & * \\ \vdots & & 1 & \ldots & 0 & * \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ \vdots & O & & & 1 & * \\ \vdots & & & & & \vdots \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} j_1 & & & & & j_{n-r} \end{array} \end{array}$$

ახლა, ცხადია, რომ სტრიქონი

$$Y = (y_1(t_1, \ldots, t_{n-r}), \ldots, y_n(t_1, \ldots, t_{n-r})),$$

სადაც

$$\begin{aligned} &y_{j_s}(t_1, \ldots, t_{n-r}) = \alpha_s, \quad \text{როცა } s = 1, \ldots, n-r, \\ &y_{i_u}(t_1, \ldots, t_{n-r}) = c_{i_u} - f_u(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}), \text{ როცა } u = 1, \ldots, r, \end{aligned} \tag{5}$$

არის (1) სისტემის ზოგადი ამონახსნი. □

8.3. ერთგვაროვანი სისტემა. (1) სისტემას ეწოდება **ერთგვაროვანი**, თუ მისი თავისუფალი წევრების სვეტი $\widehat{b}$ ნულოვანია. ერთგვაროვანი სისტემა ყოველთვის თავსებადია, რადგან სათანადო სიგრძის ნულოვანი სტრიქონი მისი ამონახსნია (ამ ამონახსნს ეწოდება **ტრივიალური ამონახსნი**).

8.3.1. თეორემა. *ა) K ველის მიმართ n უცნობიანი r რანგის მქონე ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე არის K^n სივრცის $(n-r)$-განზომილებიანი ქვესივრცე (ამ ქვესივრცეს ეწოდება* ***სისტემის ამონახსნთა სივრცე****, ხოლო ამონახსნთა სივრცის ბაზისს ეწოდება სისტემის* ***ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა****).*

ბ) თუ $x^1, x^2, \ldots, x^{n-r}$ – A მატრიცის მქონე ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა, მაშინ სტრიქონი

$$Y_0 = t_1 x^1 + \cdots t_{n-r} x^{n-r}$$

არის ამ სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

გ) თუ (1) ნებისმიერი (არაერთგვაროვანი) სისტემაა იგივე A მატრიცით და x^0 მისი ერთ-ერთი ამონახსნია, მაშინ სტრიქონი $Y = x^0 + Y_0$ (1) სისტემის ზოგადი ამონახსნია.

დამტკიცება. ა) უშუალოდ მოწმდება ქვესივრცის თვისებები: $A(x^0)^t = \theta$ და $A(y^0)^t = \theta$, მაშინ $A(x^0+y^0)^t = A((x^o)^t + (y^0)^t) = A(x^0)^t + A(y^0)^t = \theta + \theta = \theta$ და $A(cx^0)^t = A(c(x^0)^t) = c(A(x^0)^t) = c\theta = \theta$. შემდეგ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ სისტემას

აქვს გაუხსნელი სახე

$$\begin{cases} x_{i_1} + f_1(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-r}}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{i_r} + f_r(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-r}}) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

და მისი ზოგადი ამონახსნი –სტრიქონია

$$\left(y_1(t_1, \dots, t_{n-r}), \dots, y_n(t_1, \dots, t_{n-r})\right), \tag{7}$$

სადაც

$$y_{j_s}(t_1, \dots, t_{n-r}) = \alpha_s, \quad \text{როცა } s = 1, \dots, n-r,$$
$$y_{i_u}(t_1, \dots, t_{n-r}) = -f_u(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}), \text{ როცა } u{=}1, \dots, r.$$

დავაფიქსიროთ s და α_s-ს მივანიჭოთ მნიშვნელობა 1, ხოლო დანარჩენ α_k-ებს – მნიშვნელობა 0. შედეგად მივიღებთ x^s ამონახსნს. შევადგინოთ $(n-r) \times n$ ზომის X მატრიცი, რომლის სტრიქონები არიან x^s ამონახსნები, $s = 1, 2, \dots, n-r$. ამ მატრიცს აქვს სახე

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccc} & i_1 & & i_2 & & i_3 & & i_r & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} * & 1 & * & 0 & * & 0 & \dots & 0 & * \\ * & 0 & * & 1 & * & 0 & \dots & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 & * & 1 & \dots & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & 0 & * & 0 & * & 0 & \dots & 1 & * \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^{n-r} \end{array}, \\ \begin{array}{ccccccccc} & j_1 & & j_2 & & j_3 & & j_{n-r} & \end{array} & \end{array}$$

სადაც სიმბოლო $*$ ჩაწერილია $i_1, i_2, \dots, i_r$ ნომრიან სვეტებში, რომელთა ელემენტები ამ მომენტში ჩვენ არ გვაინტერესებს (ნებისმიერი მსურველი შეძლებს მათ ამოწერას (7) ფორმულების გამოყენებით). ცხადია, რომ ამ მატრიცის მინორული რანგი $(n-r)$-ის ტოლია, საიდანაც, თანახმად თეორემისა რანგის შესახებ, გამომდინარეობს, რომ ამონახსნთა $x = \{x^1, x^2, \dots, x^{n-r}\}$ ერთობლიობა წრფივად დამოუკიდებელია. ვაჩვენოთ, რომ (6) სისტემის ნებისმიერი z ამონახსნი არის x სისტემის წრფივი კომბინაცია. ვთქვათ

$$z = (*, \alpha_1, *\alpha_2, *, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-r}, *),$$

სადაც სიმბოლო $*$ დგას იმავე ადგილებზე, რომელზედაც X მატრიცში (გაგახსენებთ, რომ მისი სტრიქონები შეადგენენ x სისტემას). მაშინ (6) სისტემის ამონახსნთა წრფივ კომბინაციას

$$v = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{n-r} x^{n-r} - z$$

ჯერ ერთი, აქვს სახე $(*, 0, *, 0, *, 0, \ldots, 0, *)$, ე.ი. v სტრიქონის კომპონენტები ნომრებით $j_1, \ldots, j_{n-r}$ ნულის ტოლია, მეორეც, v (6) სისტემის ამონახსნია. თუ ამ ამონახსნის კომპონენტებს ჩავსვამთ (6) სისტემაში უცნობების ადგილას და გავიხსენებთ, რომ $f_u(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-r}})$ – თავისუფალი $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-r}}$ უცნობების წრფივი კომბინაციაა, რის გამოც $f_u(0, 0, \ldots, 0) = 0$, ჩვენ გამოვავლენთ, რომ v სტროიქონის სხვა დანარჩენი კომპონენტებიც 0-ის ტოლია. ეს ნიშნავს იმას, რომ v ნულოვანი სტრიქონია, ე.ი. $z = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{n-r} x^{n-r}$ x სისტემის წრფივი კომბინაციაა. თეორემის ა) პუნქტი დამტკიცებულია.

ბ) პუნქტი მაშინვე გამომდინარეობს ზოგადი ამონახსნისა და ფუნდამენტური სისტემის განსაზღვრებებიდან.

გ)-ს დასამტკიცებლად საკმარისია შევამჩნიოთ, რომ ერთი და იგივე სისტემის ორი ამონახსნის სხვაობა წარმოადგენს შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნს და შემდეგ გამოვიყენოთ ბ) პუნქტი:

$$z - x^0 = y \in Y_0 \Rightarrow z = x^0 + y \in x^0 + Y_0 \equiv \{x_0 + y \mid y \in Y_0\}. \quad \Box$$

8.3.2. შენიშვნა. თუ ერთეულოვანი E_{n-r} მატრიცის სტრიქონების ნაცვლად თავისუფალი უცნობებისათვის ავიღებთ ყველა შესაძლო C მატრიცების სტრიქონებს ($C \in M_{n-r}(K)$, $|C| \neq 0$), მაშინ ეს ალგორითმი იძლევა ამონახსნთა სივრცის ყველა საბაზისო სისტემის პოვნის საშუალებას.

9. $V = K^n$ სივრცის ნებისმიერი ქვესივრცის მოცემა წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სივრცის სახით

9.1. ვთქვათ K ველია, $u_1, \ldots, u_m \in V = K^n$, $U = L(u_1, \ldots, u_m)$ – K^n-ის ქვესივრცეა. ჩვენ მოვძებნით ისეთ $A \in M_{s\times n}(K)$ მატრიცს,

რომ

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

წრფივ ერთგაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სივრცე U-ს ემთხვევა.

თუ U ნულოვანი ქვესივრცეა, მაშინ A-ს სახით შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი $(n \times n)$-მატრიცი არანულოვანი დეტერმინანტით. თუ $U = K^n$, მაშინ A-ს სახით ავიღოთ ნულოვანი მატრიცი $M_{s\times n}(K)$-დან, $s \geq 1$. თუ კი $1 \leq \dim U = r(u_1, \dots, u_m) < n$, მაშინ, ვთქვათ, $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{in})$, $1 \leq i \leq m$, $u_{ij} \in K$.

განვიხილოთ მატრიცი $B \in M_{m\times n}(K)$, $B = (b_{ij})$, $b_{ij} = u_{ij}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, და წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა

$$B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\left.\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\} m. \tag{1}$$

გასაგებია, რომ $r = r(B) = r(u_1, \dots, u_m) = \dim U$, ამიტომ $1 \leq r < n$. ამ სისტემის ამონახსნთა Y_0 სივრცის განზომილება $\dim Y_0 = s = n - r$ და, რადგან $1 \leq r < n$, მაშინ $1 \leq s < n$.

ვთქვათ $v_1, \dots, v_s \in K^n$ სტრიქონები ქმნიან (1) სისტემის ერთ-ერთ ამონახსნთა საბაზისო სისტემას, $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$, $1 \leq i \leq s$, $v_{ij} \in K$. ვთქვათ $A \in M_{s\times n}(K)$, $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = v_{ij}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq n$. ვაჩვენოთ, რომ A საძიებელი მატრიცია.

მართლაც, A მატრიცის აგების მიხედვით U-ს ნებისმიერი სტრიქონი (როგორც $u_1, \dots, u_m$ სტრიქონების წრფივი კომბინაცია) წარმოადგენს

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \tag{2}$$

ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნს, ე.ი. $U \subseteq Y_0$. მეორეს მხრივ, $\dim Y_0 = n - r(A) = n - s = n - (n - r) = r = \dim U$. ამგვარად, $U = Y_0$. $\square$

9.2. შენიშვნა. მატრიცი A არ არის ცალსახად განსაზღვრული. მაგალითად, სხვა A' მატრიცი შეიძლება მივიღოთ (1) სისტემის ნებისმიერი სხვა საბაზისო სისტემის საშუალებით.

ქვესივრცეების ამ სახით მოცემა სასარგებლოა ზოგიერთი პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნისათვის.

9.3. ამოცანა. ვთქვათ $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ წრფივად დამოუკიდებელი სტრიქონებია. ვიპოვოთ ისეთი $u_{m+1}, \ldots, u_n$ სტრიქონები, რომ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ სისტემა გახდეს $\mathbb{R}^n$-ის ბაზისი.

ამოხსნა. როგორც ზემოთ, ვთქვათ $v_1, \ldots, v_s$ (1) სისტემის ამონახსნთა რაიმე საბაზისო სისტემაა (ამ შემთხვევაში $r(B) = m$, $s = n - m$). ვთქვათ $u_{m+1} = v_1, \ldots, u_n = v_{n-m}$. ვაჩვენოთ, რომ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ბაზისია $\mathbb{R}^n$-ში. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $u_1, \ldots, u_n$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ვთქვათ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ და $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \theta \in \mathbb{R}^n$. მაშინ

$$z = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = -\lambda_{m+1} u_{m+1} - \cdots - \lambda_n u_n = \\ = -\lambda_{m+1} v_1 - \cdots - \lambda_n v_{n-m}$$

სტრიქონისათვის გვაქვს $z \in U \cap V$, სადაც $V = L(u_{m+1}, \ldots, u_n)$. თუ $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, მაშინ U და V ქვესივრცეების აგების მიხედვით (იხ. (2), (3)) გვაქვს

$$(z_1, \ldots, z_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0,$$

$z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0$, ე.ი. $z_1 = \cdots = z_n = 0$, და $z = \theta$.

მაშასადამე,

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = \theta = \lambda_{m+1} u_{m+1} + \cdots + \lambda_n u_n.$$

რადგან $u_1, \ldots, u_m$ წრფივად დამოუკიდებელი სტრიქონებია, ამიტომ $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. სტრიქონები $u_{m+1}, \ldots, u_n$ აგრეთვე წრფივად დამოუკიდებელია, მაშასადამე, $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. ამგვარად, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ და $u_1, \ldots, u_n$ სტრიქონები წრფივად დამოუკიდებელია.

9.4. ჩვენ განვიხილეთ $V = K^n$-ში ქვესივრცეების მოცემის ორი გზა:

1) როგორც წრფივი ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა Y_0 სიმრავლე;

2) როგორც $u_1, \ldots, u_m \in K^n$ სტრიქონების წრფივი გარსი.

ამასთან ჩვენ ვისწავლეთ 1)-დან 2)-ზე გადასვლა (ამონახსნთა საბაზისო სისტემა) და 2)-დან 1)-ზე გადასვლა. პირველი გზა მოხერხებულია ქვესივრცეთა $U \cap W$ თანაკვეთის მოცემისათვის (საჭიროა პირველ ერთგვაროვან სისტემას მივუწეროთ მეორე). მეორე გზა მოხერხებულია ქვესივრცეთა ჯამის პოვნისათვის:

$$L(u_1, \ldots, u_m) + L(w_1, \ldots, w_t) = L(u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_t).$$

მომდევნო მაგალითში ჩვენ ვნახავთ ამ ორი გზის კომბინაციას.

9.5. მაგალითი. ვთქვათ $U = L(u_1, u_2, u_3) < \mathbb{R}^4$, $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (0,1,1,0)$, $u_3 = (0,0,1,1)$, $V = L(v_1, v_2, v_3) < \mathbb{R}^4$, $v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (0,2,1,1), v_3 = (1,2,1,2)$. ვიპოვოთ $U+V$ და $U \cap V$ ქვესივრცეების ბაზისები, ამასთან სტრიქონები $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ გამოვსახოთ $U + V$ ქვესივრცის ბაზისის საშუალებით.

ამოხსნა. სტრიქონები $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ ჩავწეროთ სვეტებად და მიღებული მატრიცი სტრიქონების ელემენტარული გარდაქმნებით მივიყვანოთ საფეხურიან სახეზე:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1' & u_2' & u_3' & v_1' & v_2' & v_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

რადგან $U+V = L(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$ და მატრიცის სტრიქონების ელემენტარული გარდაქმნები არ ცვლიან წრფივ თანაფარდობებს მის

სვეტებს შორის, ამიტომ $\{u_1, u_2, u_3, v_1\}$ ბაზისია $U+V$-ში (რადგან $\dim(U+V)=4$, მაშინ $U+V=\mathbb{R}^4$). საფეხურიანი სახიდან v_2' და v_3' გამოვთვალოთ u_1', u_2', u_3', v_1' ვექტორების საშუალებით:

$$v_2' + v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1' + u_2' + u_3'.$$

ამის გამო $v_2' = u_1' + u_2' + u_3' - v_1'$ და, მაშასადამე, $v_2 = u_1 + u_2 + u_3 - v_1$. ჩვენ ვხედავთ v_3'-სთვის, რომ $v_3' + v_1' = (2,0,2,0)^t = 2u_1 + 2u_3$, ამიტომ $v_3 = 2u_1 + 2u_3 - v_1$. ჩატარებული გამოთვლები მოცემული მატრიცის მთავარ საფეხურიან სახეზე მიყვანის დასრულების ტოლფასია:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ახლა განვიხილოთ $U \cap V$. ამისათვის ვიპოვოთ ის წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემები, რომელთა ამონახსნთა სიმრავლეები შესაბამისად ემთხვევა U-სა და V-ს.

U-სთვის:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

სისტემას უკვე აქვს საფეხურიანი სახე, x_1, x_2, x_3 მთავარი უცნობებია, x_4 – თავისუფალი. ამონახსნთა საბაზისო სისტემა შედგება

ერთი $(-1,1,-1,1)$ სტრიქონისაგან. ამგვარად, U ქვესივრცე ემთხვევა

$$(-1,1,-1,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა სივრცეს.

V-სთვის:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&1&1\\1&2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&1&1\\0&2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

და ჩვენ მივედით საფეხურიან სახემდე, ამასთან x_1, x_2, x_3 მთავარი უცნობებია, ხოლო x_4 – თავისუფალი. ამონახსნთა საბაზისო სისტემა შედგება ერთი $(-1,-1,1,1)$ სტრიქონისაგან. ამგვარად წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა

$$(-1,-1,1,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

სისტემა იძლევა V ქვესივრცეს.

გასაგებია, რომ სისტემა

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

იძლევა $U \cap V$ ქვეცივრცეს. ამოვხსნათ ეს სისტემა:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

x_1, x_2 მთავარი უცნობებია, x_3, x_4 თავისუფალი უცნობებია.

ამონახსნთა საბაზისო სისტება შედგება ორი სტრიქონისაგან

$$u = (0, 1, 1, 0),$$
$$v = (1, 0, 0, 1).$$

მაშასადამე, $\{u, v\}$ – $U \cap V$ ქვესივრცის ბაზისია.

10. ვექტორული სივრცეების წრფივი ასახვები

10.1. ვთქვათ V და U ორი ვექტორული სივრცეა K ველის მიმართ. $\varphi : V \to U$ ასახვას, რომელიც V სივრცის ყოველ v ვექტორს უთანადებს რომელიღაც $u = v\varphi$ ვექტორს U-დან, ეწოდება V ვექტორული სივრცის U ვექტორულ სივრცეში **წრფივი ასახვა** (ან

ოპერატორი), თუ ნებისმიერი $a, b \in V$ და $\alpha \in K$-სთვის სამართლიანია ტოლობები

$$(a+b)\varphi = a\varphi + b\varphi \quad \text{და} \quad (\alpha a)\varphi = \alpha(a\varphi).$$

10.2. მაგალითები. 1. ასახვა $[\ ] : V^n \to K^n$, რომელიც ყოველ a ვექტორს უთანადებს მის საკოორდინატო $[a]_\mathcal{V}$ სტრიქონს $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ბაზისში, V^n-ის წრფივი ასახვაა K^n-ზე.

2. ასახვა $'$, რომელიც ნებისმიერ პოლინომს უთანადებს მის წარმოებულს, არის ყველა ნამდვილ კოეფიციენტებიან პოლინომთა V ვექტორული სივრცის წრფივი ასახვა V-ში.

3. ნულოვანი ასახვა ω V-დან U-ში, რომელიც უთანადებს ყოველ v-ს V-დან $\theta \in U$ ვექტორს, წრფივია.

4. ვთქვათ $V = U_1 \overline{\oplus} U_2$, მაშინ $\pi_1 : (u_1, u_2) \to u_1$ არის V-ს წრფივი ასახვა U_1-ზე, ხოლო $\pi_2 : (u_1, u_2) \to u_2$ არის V-ს წრფივი ასახვა U_2-ზე. ყოველ ამ ასახვას ეწოდება პირდაპირი ჯამის პროექცია შესაბამის შესაკრებზე.

5. ვთქვათ A და B – U სივრცის ქვესივრცეებია, $V = A \overline{\oplus} B$ – მათი გარე პირდაპირი ჯამი. მაშინ $\varphi(a, b) \mapsto a + b$ არის V-ს U-ში წრფივი ასახვა.

6. თუ A – V სივრცის ქვესივრცეა, მაშინ $\varphi : v \to v + A$ არის V-ს წრფივი ასახვა V/A ფაქტორ-სივრცეზე.

10.3. თეორემა. *ვთქვათ $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ – V^n-ის ბაზისია და $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ნებისმიერი ვექტორთა სისტემაა U-დან. მაშინ არსებობს, და ამასთან ერთადერთი, φ წრფივი ასახვა V^n-დან U-ში, რომლისთვისაც $v_i\varphi = w_i$ ყველა i-სთვის.*

დამტკიცება. ნებისმიერი $V^n \ni a = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ განვიხილოთ თანადობა $a \mapsto \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \in U$. ეს თანადობა ასახვაა. ვაჩვენოთ, რომ $\varphi : V^n \to U$ წრფივია. თუ $b \mapsto \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_n w_n$, მაშინ

$$(a+b)\varphi = (\alpha_1 + \beta_1)w_1 + (\alpha_2 + \beta_2)w_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)w_n =$$
$$= (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) + (\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_n w_n) =$$
$$= a\varphi + b\varphi;$$
$$(\alpha a)\varphi = (\alpha\alpha_1)w_1 + (\alpha\alpha_2)w_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n)w_n =$$

$$\alpha(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n) = \alpha(a\varphi).$$

კერძოდ, $v_i\varphi = w_i$ ყველა i-სთვის. □

10.4. სავარჯიშოები. 1. თუ φ წრფივი ასახვაა, მაშინ $\theta\varphi = \theta$ და $(-a)\varphi = -(a\varphi)$ ნებისმიერი a ვექტორისათვის.

2. ვთქვათ φ – V სივრცის წრფივი ასახვაა. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_s\}$ ვექტორთა სისტემისათვის V-დან $\mathcal{V}\varphi = \{v_1\varphi, \dots, v_s\varphi$ სისტემის რანგი არ აღემატება $\mathcal{V}$-ს რანგს.

3. ვთქვათ $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემაა V-დან, ხოლო $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ ვექტორთა სისტემაა U-დან. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს φ წრფივი ასახვა V სივრცისა U სივრცეში, რომლისთვისაც $v_i\varphi = u_i$ ყველა i-სთვის.

4. ვთქვათ φ – K^m სივრცის წრფივი ასახვაა K^s სივრცეში. ვთქვათ A მატრიცია, რომლის a_i სტრიქონები K^n სივრცის რომელიღაც ელემენტებია. $A\varphi$-ით აღვნიშნოთ მატრიცი, შედგენილი $a_i\varphi$ სტრიქონებისაგან (იმავე რიგით). შევადგინოთ $(A \mid A\varphi)$ მატრიცი (მისი პირველი n სვეტი შეადგენს A მატრიცს, ხოლო უკანასკნელი s სვეტი – $A\varphi$ მატრიცს). დაამტკიცეთ შემდეგი დებულება: თუ სტრიქონების ელემენტარული გარდაქმნებით ეს მატრიცი მიყვანილია $(B \mid C)$ სახეზე (ვერტიკალური ხაზი იგივე ადგილზეა), მაშინ $C = B\varphi$-ს.

10.5. ვთქვათ $\mathcal{L}(V, U)$ – V ვექტორული სივრცის U ვექტორულ სივრცეში ყველა წრფივი ასახვის სიმრავლეა. ვთქვათ $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V, U)$, $\alpha \in K$. განვსაზღვროთ ასახვები $\varphi + \psi$ (**წრფივ ასახვათა ჯამი**) და $\alpha\varphi$ (**წრფივი ასახვის ნამრავლი სკალარზე**):

ნებისმიერი $v \in V$, $v(\varphi + \psi) = (v\varphi) + (v\psi)$, $v(\alpha\varphi) = \alpha(v\varphi)$.

10.6. თეორემა. *$\mathcal{L}(V, U)$ ვექტორული სივრცეა.*

დამტკიცება. ვექტორული სივრცის აქსიომების შემოწმება. □

10.7. ვთქვათ W, V, U, T ვექტორული სივრცეებია K ველის მიმართ, $\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}(W, V)$, $\sigma, \sigma' \in \mathcal{L}(V, U)$, $\tau \in \mathcal{L}(U, T)$, $\alpha \in K$.

განვსაზღვროთ $\varphi\sigma$ ნამრავლი: ნებისმიერი $w \in W$-სთვის $w(\varphi\sigma) = (w\varphi)\sigma$.

10.7.1. თეორემა. ა) $\varphi\sigma \in \mathcal{L}(W, U)$.
ბ) $(\varphi\sigma)\tau = \varphi(\sigma\tau)$.
გ) $(\varphi + \varphi')\sigma = \varphi\sigma + \varphi'\sigma$.
დ) $\varphi(\sigma + \sigma') = \varphi\sigma + \varphi\sigma'$.
ე) $\alpha(\varphi\sigma) = (\alpha\varphi)\sigma = \varphi(\alpha\sigma)$.
დამტკიცება. უშუალო შემოწმება. □

10.8. ვთქვათ V^n ვექტორული სივრცეა K ველის მიმართ $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ბაზისით, ხოლო U^s – ვექტორული სივრცე K ველის მიმართ $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ ბაზისით. $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ წრფივი ასახვის მატრიცი $(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ წყვილის მიმართ ეწოდება

$$[\varphi]_{\mathcal{V}\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} [v_1\varphi]_{\mathcal{U}} \\ [v_2\varphi]_{\mathcal{U}} \\ \cdots \\ [v_n\varphi]_{\mathcal{U}} \end{pmatrix}$$

$(n \times s)$-მატრიცს, რომლის სტრიქონები არიან $v_i\varphi$ ვექტორების საკოორდინატო სტრიქონები $\mathcal{U}$ ბაზისში. ასეთნაირად განსაზღვრული $[\varphi]_{\mathcal{V}\mathcal{U}}$ მატრიცი წარმოადგენს $(n \times s)$-მატრიცს K ველის მიმართ, რომლის ელემენტი ij ნომრით ტოლია კოეფიციენტის, რომელიც დგას u_j-სთან $v_i\varphi$ ვექტორის $\mathcal{U}$ ბაზისით გამოსახვის დროს.

10.8.1. თეორემა. *ვთქვათ V^n ვექტორული სივრცეა K ველის მიმართ $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ბაზისით, ხოლო U^s – ვექტორული სივრცე K ველის მიმართ $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ ბაზისით. $\varphi \to [\varphi]$ თანადობა φ წრფივი ასახვის მის მატრიცთან $(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ წყვილის მიმართ იძლევა $\mathcal{L}(V, U)$ სიმრავლის ურთიერთცალსახა ასახვას $M_{n\times s}(K)$ სიმრავლეზე.*

დამტკიცება. $[v_i\varphi]_{\mathcal{U}}$ სტრიქონი ცალსახად განისაზღვრება φ ასახვით და $(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ წყვილით. ამიტომ ყოველ წრფივ ასახვას შეესაბამება ერთადერთი მატრიცი. თუ ორი ასახვის მატრიცები ტოლია, მაშინ ეს ორი ასახვა ერთნაირად მოქმედებს $\mathcal{V}$ ბაზისის ელემენტებზე და, მაშასადამე, ერთნაირად მოქმედებს V^n-ის ნებისმიერ

ვექტორზე, ე.ი. ემთხვევა. თუ A არის $M_{n\times s}(K)$-ს ნებისმიერი მატრიცი, მაშინ ვთქვათ w_i ვექტორია U^s-დან, რომლის საკოორდინატო სტრიქონი $\mathcal{U}$ ბაზისში ემთხვევა A მატრიცის i-ურ სტრიქონს. განვსაზღვროთ φ ასახვა V^n-დან U^s-ში შემდეგნაირად: თუ $a = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, სადაც $\alpha_i \in K$, მაშინ $a\varphi = \alpha_1 w_1 + \cdots \alpha_n w_n$. ამის გამო $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ და $[\varphi] = A$. ამგვარად ყოველი მატრიცი რომელიღაც წრფივი ასახვის მატრიცია. □

10.8.2. ვექტორის ანასახის კოორდინატები. ვთქვათ $\mathcal{V}$ – V^n-ის ბაზისია, $\mathcal{U}$ – U^s-ის ბაზისი, $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$. ვთქვათ $[\varphi] = (a_{ij})_{n\times s}$ არის φ წრვისი ასახვის მატრიცი ამ ბაზისების მიმართ და ვთქვათ

$$\vec{\mathcal{V}} = \underset{(n\times 1)}{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}, \quad \vec{\mathcal{V}}\varphi = \underset{(n\times 1)}{\begin{pmatrix} v_1\varphi \\ v_2\varphi \\ \vdots \\ v_n\varphi \end{pmatrix}}, \quad \vec{\mathcal{U}} = \underset{(s\times 1)}{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}.$$

$v_i\varphi = w_i = \sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij}u_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ტოლობებიდან გამომდინარეობს შემდეგი მატრიცული ტოლობა, რომელიც მთლიანად აღწერს იმ კავშირებს, რომელიც არსებობს φ წრფივი ასახვისათვის, $(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ ბაზისთა წყვილისათვის და იმ $[\varphi]$ მატრიცისათვის, რომელიც იძლევა ამ წრფივ ასახვას მოცემულ ბაზისთა წყვილის მიმართ:

$$\vec{\mathcal{V}}\varphi = [\varphi]_{\mathcal{V}\mathcal{U}}\vec{\mathcal{U}},$$

სადაც მარჯვნივ დგას $[\varphi]_{\mathcal{V}\mathcal{U}}$ და $\vec{\mathcal{U}}$ მატრიცების ნამრავლი.

თუ $a \in V^n$, მაშინ, როგორც წინათ, $[a]_{\mathcal{V}}$-თი აღვნიშნოთ a ვექტორის საკოორდინატო სტრიქონი $\mathcal{V}$ ბაზისში. გავიხსენოთ, რომ $a = [a]_{\mathcal{V}}\vec{\mathcal{V}}$.

10.8.3. თეორემა. თუ $a \in V^n$, $\varphi \in \mathcal{L}(V^n, U^s)$, მაშინ

$$[a\varphi]_{\mathcal{U}} = [a]_{\mathcal{V}}[\varphi]_{\mathcal{V}\mathcal{U}}\,.$$

დამტკიცება. ადგილი აქვს ტოლობათა ჯაჭვს

$$[a\varphi]_{\mathcal{U}}\vec{\mathcal{U}} = a\varphi = ([a]_{\mathcal{V}}\vec{\mathcal{V}})\varphi = [a]_{\mathcal{V}}(\vec{\mathcal{V}}\varphi) =$$

$$= [a]_{\mathcal{V}}([\varphi]_{\mathcal{V}\mathcal{U}}\vec{\mathcal{U}}) = ([a]_{\mathcal{V}}[\varphi]_{\mathcal{V}\mathcal{U}})\vec{\mathcal{U}}\,.$$

ამის გამო

$$[a\varphi]_{\mathcal{U}} = [a]_{\mathcal{V}}[\varphi]_{\mathcal{V}\mathcal{U}}\,. \qquad \square$$

თუ $\varphi \in \mathcal{L}(K^n, K^s)$, მაშინ (e, f) სტანდარტული ბაზისების მიმართ ნებისმიერი $a \in K^n$ სტრიქონისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $a\varphi = a[\varphi]$.

10.8.4. მაგალითები-სავარჯიშოები. 1. ნულოვანი $\omega : V^n \to U^s$ ასახვის მატრიცი, სადაც $\forall v \in V^n$ $v\omega = \theta_{\mathcal{U}}$ ბაზისთა ნებისმიერი წყვილისათვის – ნულოვანი $(n \times s)$-მატრიცია.

2. ვთქვათ $V^{m+n} = U_1^m \overline{\oplus} U_2^n$, ხოლო $\pi_1 : (u_1, u_2) \to u_1$ და $\pi_2 : (u_1, u_2) \to u_2$ – პროექციები შესავბამის პირდაპირ შესაკრებებზე. ვთქვათ $\{a_1, \ldots, a_m\}$ არის U_1^m-ის ბაზისი, $\{a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}\}$ – U_2^n-ის ბაზისი და $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+n}\}$ – V^{m+n}-ის ბაზისი, სადაც $v_i = (a_i, \theta)$, როცა $i \le m$, $v_i = (\theta, a_i)$, როცა $i > m$. მაშინ

$[\pi_1] = \begin{pmatrix} E_m \\ O_{n\times m} \end{pmatrix}$, სადაც E_m არის $(m \times m)$-ზომის ერთეულოვანი მატრიცი, ხოლო $O_{n\times m}$ – $(n \times m)$-ზომის ნულოვანი მატრიცი,

$[\pi_2] = \begin{pmatrix} O_{n\times m} \\ E_n \end{pmatrix}_{(m+n)\times n}$, სადაც E_n ერთეულოვანი $(n \times n)$ ზომის მატრიცია, ხოლო $O_{m\times n}$ – ნულოვანი $(m \times n)$-ზომის მატრიცი.

3. ვთქვათ A და B ქვესივრცეებია $U = K^s$ სივრცეში $\{a_1, \ldots, a_m\}$ და $\{b_1, \ldots, b_n\}$ ბაზისებით შესაბამისად, $V = A \overline{\oplus} B$ – მათი პირდაპირი ჯამი ბაზისით $\mathcal{V} = \{(a_1, \theta), \ldots, (a_m, \theta), (\theta, b_1), \ldots, (\theta, b_n)\}$.

ვთქვათ e არის U-ს სტანდარტული ბაზისი, მაშინ $\varphi : (a, b) \to a + b$ ასახვის მატრიცი (v, e) წყვილის მიმართ ტოლია

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{(m+n)\times s}.$$

4. ვთქვათ $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ არის V სივრცის ბაზისი, $U = K^s$, e – $\mathcal{U}$-ს სტანდარტული ბაზისი, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ – ნებისმიერი ვექტორთა სისტემა U-დან, მაშინ $\varphi : V \to U$ წრფივი ასახვის მატრიცი, რომლისთვისაც $v_i\varphi = w_i$ ყველა i-სთვის, შედგება $w_1, \ldots, w_n$ სტრიქონებისაგან (იგივე მიდევრობით).

5. ვთქვათ A – V სივრცის ქვესივრცეა, $\varphi : v \to v + A$ წრფივი ასახვაა V-ს V/A ფაქტორ-სივრცეზე. თუ $\{v_1, \ldots, v_r\}$ – A-ს ბაზისია, $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ – V-ს ბაზისი, რომელიც ამ A-ს ბაზისს მოიცავს, $\mathcal{U} = \{v_{r+1} + A, \ldots, v_n + A\}$ – V/A-ს შესაბამისი ბაზისი, მაშინ φ-ს მატრიცი $(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ ბაზისთა წყვილის მიმართ ტოლია

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} O_{r\times(n-r)} \\ E_{n-r} \end{pmatrix}_{n\times(n-r)},$$

სადაც $O_{r\times(n-r)}$ არის $r \times (n-r)$-ზომის ნულოვანი მატრიცი, ხოლო E_{n-r} – $(n-r) \times (n-r)$-ზომის ერთეულოვანი მატრიცი.

11. წრფივი ასახვის ანასახი და ბირთვი, რანგი და დეფექტი

ვთქვათ $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$. φ **ასახვის ანასახი** ეწოდება სიმრავლეს $\operatorname{Im} \varphi = V\varphi = \{v\varphi \mid v \in V\}$ (image (ინგლ., ფრ.) – ანასახი). φ-ს **ბირთვი** ეწოდება სიმრავლეს $\ker \varphi = \{v \in V \mid v\varphi = \theta\}$ (kernel (ლათ.) – ბირთვი, გული).

11.1. თეორემა. *ა) $V\varphi$ – U სივრცის ქვესივრცეა (მის განზომილებას ეწოდება φ-ს* ***რანგი****: $\dim V\varphi \equiv r(\varphi)$).*

ბ) $\ker\varphi$ – V სივრცის ქვესივრცეა (მის განზომილებას ეწოდება φ ***დეფექტი****: $\dim(\ker\varphi) \equiv d(\varphi)$).*

გ) φ-ს რანგისა და დეფექტის ჯამი V-ს განზომილების ტოლია.

დ) φ-ს რანგი ემთხვევა φ-ს მატრიცის სტრიქონების ვექტორთა სისტემის რანგს (ნებისმიერ ბაზისთა წყვილის მიმართ).

დამტკიცება. ა) და ბ) უშუალოდ მოწმდება ქვესივრცის განსაზღვრების მიხედვით.

გ) ვთქვათ $\{u_1 = v_1\varphi, u_2 = v_2\varphi, \ldots, u_r = v_r\varphi\}$ არის $V\varphi$-ს ბაზისი, $\{w_1, w_1, \ldots, w_d\}$ – $\ker\varphi$-ის ბაზისი. ვაჩვენოთ, რომ $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, w_1, w_2, \ldots, w_d\}$ არის V-ს ბაზისი.

თუ $a \in V$, მაშინ

$$V\varphi \ni a\varphi = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(v_i\varphi) \Leftrightarrow \left(a - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i\right)\varphi = \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \in \ker\varphi \Leftrightarrow a - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{d} \beta_j w_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{d} \beta_j w_j.$$

თუ $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum\limits_{j=1}^{d} \beta_j w_j = \theta$, მაშინ $\Big(\sum\limits_{j=1}^{d} \beta_j w_j\Big)\varphi = \theta$, საიდანაც

$$\theta = \theta\varphi = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i\right)\varphi + \left(\sum_{j=1}^{d} \beta_j w_j\right)\varphi =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(v_i\varphi) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i$$

და, მაშასადამე, ყველა α_i ტოლია 0-ის, რის შედეგადაც $\sum\limits_{j=1}^{d} \beta_j w_j = \theta$, ე.ი. ყველა β_j-იც 0-ის ტოლია.

დ) ვთქვათ $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – V^n-ის ბაზისია, $\mathcal{U}$ – U-ს ბაზისი. რადგან $V\varphi$ ემთხვევა $v_1\varphi, v_2\varphi, \dots, v_n\varphi$ ვექტორების წრფივ გარსს, $V\varphi = L(v_1\varphi, v_2\varphi, \dots, v_n\varphi)$, φ-ს რანგი ემთხვევა $\{v_1\varphi, v_2\varphi, \dots, v_n\varphi\}$ ვექტორთა სისტემის რანგს, რომელიც, თავის მხრივ, ემთხვევა $\mathcal{U}$ ბაზისში $v_1, v_2, \dots, v_n$ ვექტორების საკოორდინატო სტრიქონების $\{[v_1\varphi]_u, [v_2\varphi]_u, \dots, [v_n\varphi]_n\}$ ვექტორთა სისტემის რანგს, ე.ი. $[\varphi]$-ს სტრიქონთა სისტემის რანგს. □

11.2. ამოცანები. 1. ვთქვათ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – V^n სივრცის ბაზისია, φ – V^n-ის წრფივი ასახვაა და ვთქვათ v_i-ების ნუმერაცია ისეა არჩეული, რომ $\mathcal{A} = \{v_1\varphi, v_2\varphi, \dots, v_r\varphi\}$ არის $\{v_1\varphi, v_2\varphi, \dots, v_n\varphi\}$ სისტემის ბაზისი.

დაამტკიცეთ, რომ

ა) $\mathcal{A}$ – $V^n\varphi$-ის ბაზისია;

ბ) $\ker\varphi$-ის ბაზისი შეიძლება მივიღოთ შემდეგნაირად: ყოველი ვექტორი $v_i\varphi$ გამოვსახოთ $\mathcal{A}$-ს საშუალებით:

$$v_i\varphi = \alpha_{i1}(v_1\varphi) + \alpha_{i2}(v_2\varphi) + \cdots + \alpha_{ir}(v_{ir}\varphi), \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

მაშინ ვექტორები

$$w_i = v_i - \alpha_{i1}v_1 - \alpha_{i2}v_2 - \cdots - \alpha_{ir}v_r$$

$(i = r+1, r+2, \dots, n)$ შეადგენენ $\ker\varphi$-ის ბაზისს.

2. გამოიყვანეთ 1-ლი პუნქტიდან ანასახის და ბირთვის ბაზისების პოვნის შემდეგი ხერხი:

ვთქვათ A არის φ წრფივი ასახვის მატრიცი $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ ბაზისთა წყვილის მიმართ ($A = \underset{(n\times s)}{[\varphi]}{}_{\mathcal{V}\mathcal{U}}$, $\vec{\mathcal{V}}\varphi = [\varphi]_{\mathcal{V}\mathcal{U}}\vec{\mathcal{U}}$). შევადგინოთ $\underset{n\times(n+s)}{(\ E_n|A\ )}$ მატრიცი, სადაც E_n ერთეულოვანი მატრიცაა A-ს ტოლი სტრიქონების რაოდენობით.

გრძელი სტრიქონების (შემოკლებით ფენების) ელემენტარული გარდაქმნებით ის მივიყვანოთ

$$(\underset{(n\times n)}{B}|\underset{(n\times s)}{C}) = \begin{pmatrix} * & \vdots & I \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{K} & \vdots & O \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

სახეზე, სადაც C საფეხურიანი მატრიცაა მარჯვნიდან. მაშინ C მატრიცის $u_1, \dots, u_r$ არანულოვანი სტრიქონები ქმნიან $\operatorname{Im}\varphi = V^n\varphi$-ს ბაზისს, ხოლო B მატრიცის $w_1, \dots, w_d$ სტრიქონები $(r + d = n)$, რომელთაც C მატრიცში ნულოვანი გაგრძელება აქვთ, ქმნიან $\ker\varphi$-ის ბაზისს.

$(*)$ მატრიცში $\underset{(r\times s)}{I}$ მატრიცის $u_1, \dots, u_r$ სტრიქონები წრფივად დამოუკიდებელია, $\underset{(d\times s)}{O}$ ნულოვანი მატრიცაა, ვერტიკალური ხაზი იმავე ადგილზეა. მაშინ I შედგება $\operatorname{Im}\varphi$-ს რომელითაც ბაზისის საკოორდინატო სტრიქონებისაგან ($\mathcal{U}$ ბაზისში), ხოლო $\underset{|d\times n}{\mathcal{K}}$ – $\ker\varphi$-ის რომელიღაც ბაზისის საკოორდინატო სტრიქონებისაგან ($\mathcal{V}$ ბაზისში).

მაგალითი.

$$\varphi : K^4 \to K^4,$$

$$x \mapsto xA,$$

$$x \in K^4,$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(E|A) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{r} \\ \\ \\ \mathcal{K}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} \qquad B \qquad\qquad & \qquad\qquad C \qquad \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} I \\ \\ \quad O \\ \\ \end{array}$$

I – ანასახის ბაზისი: $\begin{cases} u_1 = (2, 1, -1, 1) \\ u_2 = (-1, -2, 3, 0). \end{cases}$

$\mathcal{K}$ – ბირთვის ბაზისი: $\begin{cases} w_1 = (3, -2, 1, 0), \\ w_2 = (-1, -1, 0, 1) \end{cases}$

3. ვთქვათ A – V სივრცის ქვესივრცეა: $A \leq V$. დაამტკიცეთ, რომ $\dim(A\varphi) = \dim A - \dim(A \cap \ker \varphi)$.

მითითება: $\varphi : V \to U$ წრფივი ასახვის $\varphi|A$ შეზღუდვა A ქვესივრცეზე – ქვესივრცის წრფივი ასახვაა: $\varphi|A : A \to U$.

4. ვთქვათ A და B ქვესივრცეებია U სივრცეში, $\varphi : (a, b) \to a+b$ წრფივი ასახვაა A და B ქვესივრცეების $V = A \overline{\oplus} B$ გარე პირდაპირი ჯამის U-ში, π_1 – V-ს პროექცია პირველ შესაკრებზე $\pi_1 : (a, b) \to a$. დაამტკიცეთ, რომ $A \cap B = (\ker \varphi)\pi_1$.

5. 2, 4 ამოცანებიდან და 10.9 პუნქტის 2, 3, 4 მაგალითებიდან გამოიყვანეთ $A \cap B$-ს ბაზისის პოვნის შემდეგი პრაქტიკული ხერხი:

ვთქვათ $U = K^s$ სივრცეში A და B ქვესივრცეებია $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ და $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ ბაზისებით შესაბამისად. შევადგინოთ $((m+n) \times 2s)$-მატრიცი

$$\begin{pmatrix} \overset{(m\times s)}{O} & \overset{(m\times s)}{X} \\ \underset{(n\times s)}{Y} & \underset{(n\times s)}{Y} \end{pmatrix},$$

სადაც O ნულოვანი $(m \times s)$ ზომის მატრიცაა, X-ის სტრიქონებია $a_1, a_2, \ldots, a_m$, Y-ის სტრიქონებია $b_1, b_2, \ldots, b_n$. სტრიქონების ელემენტარული გარდაქმნებით ის მივიყვანოთ საფეხურიან სახეზე

$$\begin{pmatrix} * & Z \\ P & O \end{pmatrix},$$

სადაც სვეტთა რიცხვი ყოველ $*, P, Z$ მატრიცში s-ის ტოლია და Z-ის სტრიქონები წრფივად დამოუკიდებელია. მაშინ Z-ის სტრიქონები შეადგენენ $A+B$-ს ბაზისს, ხოლო P-ს სტრიქონები შეადგენენ $A \cap B$-ს ბაზისს.

11.3. ვთქვათ W ვექტორული სივრცეა K ველის მიმართ ბაზისით $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, V სივრცეა K-ს მიმართ ბაზისით $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, U სივრცეა K-ს მიმართ ბაზისით $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(W, V)$, $\tau \in \mathcal{L}(V, U)$, $\alpha \in K$. ვთქვათ $[\varphi] = (f_{ij})_{m \times n}$, $[\psi] = (g_{ij})_{m \times n}$, $[\tau] = (t_{ij})_{n \times s}$ ამ ასახვების მატრიცებია შესაბამის ბაზისთა წყვილებში.

11.3.1. თეორემა. *თუ $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(W, V)$, $\tau \in \mathcal{L}(V, U)$, $\alpha \in K$, მაშინ $\varphi + \psi \in \mathcal{L}(W, V)$, $\varphi\tau \in \mathcal{L}(W, U)$, $\alpha\varphi \in \mathcal{L}(W, V)$ და ადგილი აქვს ტოლობებს:*

$$\begin{gathered} [\varphi + \psi] = [\varphi] + [\psi], \\ [\varphi\tau] = [\varphi][\tau], \\ [\alpha\varphi] = \alpha[\varphi], \end{gathered}$$

სადაც $[\varphi + \psi] = (a_{ij})_{m \times n}$, $a_{ij} = f_{ij} + g_{ij}$ ყველა i და j-სთვის, $[\varphi\tau] = (b_{ij})_{m \times s}$, სადაც $b_{ij} = f_{i1}t_{1j} + f_{i2}t_{2j} + \cdots + f_{in}t_{nj} = \sum$(ყველა i და j-სთვის)$= \sum\limits_{k=1}^{n} f_{ik}t_{kj}$, $\alpha[\varphi] = (c_{ij})$, სადაც $c_{ij} = \alpha t_{ij}$ ყველა i და j-სთვის.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ $[\varphi\tau] = [\varphi][\tau]$

$$\varphi \in \mathcal{L}(W, V), \;\; \tau \in \mathcal{L}(V, U), \;\; \varphi\tau \in \mathcal{L}(W, U), \;\; \vec{\mathcal{W}}(\varphi\tau) = [\varphi\tau]\vec{\mathcal{U}},$$

$$w_i(\varphi\tau) = (w_i\varphi)\tau = \left(\sum_{k=1}^{n} f_{ik}v_k\right)\tau = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(v_k\tau) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f_{ik}\left(\sum_{j=1}^{s} t_{kj}u_j\right) = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{n} f_{ik}t_{kj}\right)u_j = \sum_{j=1}^{s} b_{ij}u_j,$$

სადაც $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} f_{ik}t_{kj}$. ამგვარად, $[\varphi\tau] = (b_{ij})_{m\times s} = [\varphi]_{m\times n}\cdot[\tau]_{n\times s}$.

□

12. წრფივ განტოილებათა სისტემები წრფივი ასახვების თვალსაზრისით

ვთქვათ მოცემულია წრფივ განტოლებათ სისტემა

$$Ax^t = \widehat{b} \quad (\text{ან, ტრანსპონირებული ფორმით, } xA^t = b^t), \qquad (1)$$

სადაც A $(m \times n)$-მატრიცაა K-ს მიმართ.

ვთქვათ A არის K^n-სივრცის K^m-ში φ წრფივი ასახვის მატრიცი სტანდარტულ ბაზისთა (e, f) წყვილის მიმართ. მაშინ ნებისმიერი $v \in K^n$ სტრიქონისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $v\varphi = vA$, სადაც $A = [\varphi]_{ef}$.

$xA^t = \widehat{b}^t$ სისტემასთან დაკავშირებით განვიხილოთ $V = K^n$ სივრცის წრფივი ასახვა $\varphi : x \to xA^t$ $U = K^m$ სივრცეში. როგორც წინა აბზაცში აღვნიშნეთ, φ ასახვის მატრიცი V-ს და U-ს სტანდარტულ ბაზისთა (e, f) წყვილის მიმართ A^t-ს ტოლია:

$$[\varphi]_{ef} = A^t.$$

ერთგვაროვანი $xA^t = \theta$ სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე – ეს φ ასახვის $\mathcal{K} = \ker\varphi$ ბირთვია. ჩვენ ვიცით, რომ $\mathcal{K}$ ქვესივრცეა V-ში, რომლის განზომილება $n - r(A^t) = n - r(A)$-ს ტოლია. ეს იძლევა ადრე დადგენილი ფაქტის მეორე დამტკიცებას (თეორემა 8.3.1).

თუ x^0 არის (1) სისტემის კერძო ამონახსნი, მაშინ $x^0\varphi = b^t$, ხოლო (1) სისტემის ამონახსნთა მთელი ერთობლიობა ემთხვევა $x^0 + \mathcal{K}$ მოსაზღვრე კლასს. აქედან გამომდინარეობს ადრე დამტკიცებული თეორემა სისტემის ზოგადი ამონახსნის შესახებ (თეორემა 8.3.1).

12.1. ამოცანა. ვთქვათ მოცემულია (1) სისტემა. ავაგოთ $(m+n)\times(n+1)$ ზომის მატრიცი

$$\begin{pmatrix} \underset{(m\times n)}{A} & \underset{(m\times 1)}{\widehat{b}} \\ \dots & \dots \\ E_n & \underset{(n\times 1)}{\theta} \end{pmatrix},$$

სადაც E_n ერთეულოვანი $(n\times n)$-მატრიცია, θ – ნულოვანი n სიმაღლის სვეტი. სვეტების ელემენტარული გარდაქმნებით, რომლის დროს ბოლო სვეტი ყოველთვის პასიურ როლს თამაშობს, მივიყვანოთ ის სახეზე

$$\begin{pmatrix} X & O & \theta \\ \dots & \dots & \dots \\ Y & F & z \end{pmatrix},$$

სადაც ჰორიზონტალური პუნქტირხაზი ძველ ადგილად გადის, X მატრიცის სვეტები წრფივად დამოუკიდებელია, O ნულოვანი მატრიცია, θ ნულოვანი სვეტებია, რომელიც b-ს ადგილას ჩნდება (თუ $\widehat{b}$ სვეტი არ ნულდება, მაშინ (1) სისტემა არათავსებადია). მაშინ z სვეტი (უფრო სწორად, z^t სტრიქონი) – (1) სისტემის ერთ-ერთი ამონახსნია, ხოლო F მატრიცის სვეტები (უფრო სწორად, F^t მატრიცის სტრიქონები) შეადგენენ $Ax^t=\theta$ ერთგვაროვანი სისტემის ფუნდამენტულ ამონახსნთა ერთობლიობას. დაამტკიცეთ.

12.2. ამოცანა (ფრედჰოლმის თეორემები). ვთქვათ მოცემულია წრფივ განტოლებათს სისტემა

$$Ax^t=\widehat{b}. \tag{2}$$

განვიხილოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემა

$$Ax^t=\theta \tag{3}$$

და ტრანსპონირებული ერთგვაროვანი სისტემა

$$A^t y^t=\theta. \tag{4}$$

სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

1) სისტემა (2) თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (4) სისტემის ნებისმიერი y^0 ამონახსნისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $y^0\widehat{b} = 0$ (ტრანსპონირებული ერთგვაროვანი სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი თავისუფალი წევრების სვეტის ორთოგონალურია).

2) თუ (2) თავსებადია, მაშინ მას იმ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში აქვს ერთადერთი ამონახსნი, როცა (3)-ს აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

3) თუ A კვადრატული მატრიცაა, მაშინ (3) და (4) აქვთ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა ტოლი რაოდენობა.

ამოხსნა (პუნქტი 1.) **აუცილებლობა.** ვთქვათ (2) თავსებადია, ე.ი. არსებობს n სიგრძის x^0 სტრიქონი, რომლისთვისაც $A(x^0)^t = b$. მაშინ ნებისმიერი m სიგრძის y სტრიქონისათვის შესრულებულია $yA(x^0)^t = y\widehat{b}$. თუ y^0 (4)-ს რაიმე ამონახსნია, მაშინ $y^0\widehat{b} = (y^0A)(x^0)^t = \theta(x^0)^t = 0$.

საკმარისობა. ვთქვათ (2) სისტემა არათავსებადია. მაშინ, II.1.2.15 თეორემის შედეგის თანახმად, $(0, \ldots, 0 \mid 1)$ სტრიქონი შედის $\overline{A} = (A \mid \widehat{b})$ გაფართოებული მატრიცის საფეხურიან სახეში და, მაშასადამე, არის მისი სტრიქონების წრფივი კომბინაცია. ამ წრფივი კომბინაციის კოეფიციენტები აღვნიშნოთ $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$-ით და მათგან შევადგინოთ $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ სტრიქონი. ამ სტრიქონისათვის

$$y^0(A \mid \widehat{b}) = (0, \ldots, 0 \mid 1).$$

მატრიცთა გამრავლების წესის თანახმად $y^0A = \theta = (0, \ldots, 0)$ და $y^0\widehat{b} = 1$. ამგვარად, ჩვენ შევძელით (4) სისტემის ამონახსნის პოვნა, რომელიც $y^0\widehat{b} = 0$ პირობას არ აკმაყოფილებს. □

13. ალგებრები

მიუხედავად თავისი მარტივი აგებულებისა, ვექტორული სივრცეები ქმნიან აუცილებელ ფონს ბევრი ალგებრული (და არა მარტო ალგებრული) თეორიებისათვის. თუ მოვახდენთ ვექტორული სივრცისა და რგოლის ცნებების კომბინირებას, ჩვენ მივალთ ალგებრის მნიშვნელოვან ცნებამდე.

13.1. A სიმრავლეს შეკრების, გამრავლების და K ველის ელემენტებზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ ეწოდება **ალგებრა** K ველის მიმართ, თუ მას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1) შეკრებისა და K ველის ელემენტებზე გამრავლების მიმართ A ვექტორული სივრცეა;

2) შეკრებისა და გამრავლების მიმართ A რგოლია;

3) $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab) \ \ \forall \lambda \in K, \ \ a, b \in A.$

13.2. შენიშვნა. ტერმინ "ალგებრა"-ს, რომელსაც ჩვენ აქამდე ვიყენებდით მათემატიკის ერთ-ერთი დარგის დასახელებისათვის, ამ განსაზღვრებაში აქვს სხვა აზრი.

13.3. მაგალითი. ყოველი ველი L, რომელიც ქვეველის სახით შეიცავს K-ს შეიძლება განვიხილოთ როგორც ალგებრა K ველის მიმართ. კერძოდ, $\mathbb{C}$ ველი არის ალგებრა $\mathbb{R}$-ის მიმართ.

13.4. მაგალითი. E^3 სივრცე არის ალგებრა ვექტორული გამრავლების მიმართ.

13.5. მაგალითი. სიმრავლე $D(X, K) = \{f : X \to K\}$ არის ალგებრა K ველის მიმართ ფუნქციების შეკრების, გამრავლებისა და ფუნქციის სკალარზე გამრავლების მიმართ. ეს ალგებრა კომუტაციურია, ასოციაციურია და გააჩნია ერთეული.

13.6. ამოცანა. ვთქვათ X რაიმე სიმრავლეა და 2^X – ყველა მისი ქვესიმრავლეთა სიმრავლე. ვაჩვენოთ, რომ 2^X არის რგოლი სიმეტრიული სხვაობის

$$M \triangle N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$$

და $M \cap N$ თანაკვეთის ოპერაციების, შესაბამისად, როგორც შეკრების და გამრავლების მიმართ.

2^X გადაიქცევა ალგებრად $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ ველის მიმართ, თუ განვმარტავთ ამ ველის ელემენტებზე გამრავლებას შემდეგნაირად

$$0M = \varnothing, \quad 1M = M \quad \forall M \in 2^X.$$

ვთქვათ A ალგებრას გააჩნია ბაზისი $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ როგორც ვექტორულ სივრცეს K ველის მიმართ და ვთქვათ

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \quad b = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$$

ამ ალგებრის ნებისმიერი ორი ელემენტია. მაშინ გამრავლების დისტრიბუციულობიდან შეკრების მიმართ და 3) თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$ab = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} a_i (e_i b) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} b_j (e_i e_j)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j (e_i e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j (e_i e_j).$$

ეს იმას გვიჩვენებს, რომ გამრავლება A ალგებრაში სრულად განისაზღვრება საბაზისო ვექტორების გამრავლებით.

თუ საბაზისო ვექტორების გამრავლება კომუტაციურია, ე.ი.

$$e_i e_j = e_j e_i \quad \forall i, j,$$

მაშინ გამრავლება A ალგებრაში მთლიანობაში კომუტაციურია. მართლაც,

$$ab = \sum_{i,j} a_i b_j (e_i e_j) = \sum_{i,j} b_j a_i (e_j e_i) = ba.$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ საბაზისო ვექტორების გამრავლება ასოციაციურია, ე.ი.

$$(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k) \quad \forall i, j, k,$$

მაშინ A-ში გამრავლება მთლიანობაში ასოციაციურია.

მეორე მხრივ, თუ V^n რაიმე ვექტორული სივრცეა $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ბაზისით და e_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ ამ სივრცის ვექტორებია, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია V^n-ში გავმარტოთ გამრავლების ოპერაცია წესით

$$ab = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j e_{ij} = \sum_{i,j} a_i b_j e_{ij}$$

და ამგვარად გადავაქციოთ V ალგებრად.

13.7. მაგალითი. $M_n(K)$ ასოციაციური ალგებრაა ერთეულით. $M_n(K)$-ს გააჩნია ნულის გამყოფები.

13.8. ალგებრის ქვესიმრავლეს ეწოდება **ქვეალგებრა**, თუ ის ერთდროულად არის ქვესივრცე და ქვერგოლი. ალგებრების ასახვას ეწოდება **იზომორფიზმი**, თუ ის ერთდროულად წარმოადგენს ვექტორული სივრცეებისა და რგოლების იზომორფიზმს.

13.9. მაგალითი. $\mathbb{C}$ ველი, როგორც ალგებრა $\mathbb{R}$-ზე, მოიცემა საბაზისო ვექტორების გამრავლების შემდეგი ტაბულით

$\times$	1	i
1	1	i
i	i	-1

კომუტაციურობისა და ასოციაციურობის შემოწმება დაიყვანება 1 და i ელემენტების გამრავლების კომუტაციურობის და ასოციაციურობის ტრივიალურ შემოწმებაზე.

13.10. მაგალითი. E^3 შეკრებისა და ვექტორული გამრავლების ოპერაციებით. E^3 არაკომუტაციური და არაასოციაციური რგოლია. მაგრამ მასში სრულდება შემდეგი იგივეობები, რომლებიც რაღაც აზრით ცვლიან კომუტაციურობას და აცოციაციურობას:

$$a \times b + b \times a = 0 \ \text{(ანტიკომუტაციურობა)}$$

$$(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0 \ \text{(იაკობის იგივეობა)}.$$

ანტიკომუტაციურობა ცხადია. იაკობის იგივეობის შემოწმებისათვის განვიხილოთ E^3-ის ორთონორმირებული $\{i, j, k\}$ ბაზისი შემდეგი ვექტორული გამრავლების ტაბულით:

$\times$	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	$-k$	0	i
k	j	$-i$	0

ეს გამრავლება ანტიკომუტაციურია და აკმაყოფილებს იაკობის იგივეობას.

13.11. მაგალითი. ქვათერნიონთა ალგებრა. $\mathbb{H}$ მოიცემა $\{1, i, j, k\}$ ბაზისში შემდეგი გამრავლების ტაბულით:

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

ეს ალგებრა ასოციაციურია (შეამოწმეთ!), მაგრამ არ არის კომუტაციური. ის ქვეალგებრის სახით შეიცავს კომპლექსურ რიცხვთა ალგებრას.

13.12. ამოცანა. E_{ij} მატრიცს, რომლის (i, j) ადგილზე დგას 1, ხოლო დანარჩენ ადგილებზე – ნულები, ეწოდება **მატრიცული ერთეული** (არ აურიოთ ერთეულოვან მატრიცთან!). E_{ij} $(i = 1, \dots, n,$ $j = 1, \dots, n)$ მატრიცული ერთეულები ქმნიან $M_n(K)$ ვექტორული სივრცის ბაზისს. ჩავწეროთ $M_n(K)$ ალგებრის გამრავლების ტაბულა ამ ბაზისში.

13.13. ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ $M_2(\mathbb{R})$ ალგებრაში

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

სახის მატრიცები ქმნიან ქვეალგებრას, რომელიც $\mathbb{C}$ ალგებრის იზომორფულია.

13.14. ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ $M_2(\mathbb{C})$ ალგებრაში, რომელიც განხილულია როგორც ალგებრა $\mathbb{R}$-ზე,

$$\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$$

სახის მატრიცები ქმნიან ქვეალგებრას, რომელიც ქვათერნიონთა ალგებრის იზომორფულია.

შინაარსი