რევაზ გრიგოლია, ვლადიმერ ოდიშარია

ამოცანათა კრებული დისკრეტულ სტრუქტურებში

ამოცანათა კრებული

დისკრეტულ სტრუქტურებში

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

რევაზ გრიგოლია, ვლადიმერ ოდიშარია

ამოცანათა კრებული დისკრეტულ სტრუქტურებში

უნივერსიტეტის გამომცემლობა

ნაშრომი წარმოადგენს ამოცანათა კრებულს დისკრეტულ სტრუქტურებში, რომელიც ეხება სიმრავლეთა თეორიის ელემენტებს, მიმართებებს და ფუნქციებს, ნატურალურ და მთელ რიცხვთა თვისებებს, ალგორითმებს და რეკურსიულ ფუნქციებს, კარდინალურ და ორდინალურ რიცხვებს, კლასიკური ლოგიკის საფუძვლებს, კომბინატორიკის ელემენტებს და გრაფებს. ნაშრომი შედგება 12 პარაგრაფისაგან, განხილულია პრაქტიკული ხასიათის ამოცანები და სავარჯიშოები. განკუთვნილია როგორც დამოუკიდებელი, ასევე სააუდიტორიო სამუშაოებისათვის მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სასწავლო პროგრამების სტუდენტებისათვის.

რედაქტორი რამაზ ლიპარტელიანი, სტუ-ის კიბერნეტიკის ინსტიტუტის მეცნიერ თანამშრომელი

რეცენზენტები: როლანდ ომანაძე, თსუ-ის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის პროფესორი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

არჩილ ყიფიანი, თსუ-ის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ასისტენტ პროფესორი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი

გამოცემულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადაწყვეტილებით.

ISBN 978-9941-13-688-7 (pdf)

სარჩევი

1. სიმრავლეები

ინტუიციურად, „სიმრავლე“ არის ელემენტთა ერთობლიობა, ხოლო „ფუნქცია“ – ნებისმიერი წესი, რომელიც ყოველ ელემენტს ერთი სიმრავლიდან შეუსაბამებს შესატყვის ელემენტს მეორე სიმრავლიდან.

სიმრავლის მაგალითები: სიბრტყეზე ყველა წრფეების სიმრავლე, ყველა რაციონალურ რიცხვთა **Q** სიმრავლე, ყველა კომპლექსურ რიცხვთა **C** სიმრავლე, ყველა მთელ რიცხვთა **Z** სიმრავლე. სასრული რაოდენობის სხვადასხვა ელემენტისაგან შემდგარი სიმრავლეები შესაძლებელია აღიწეროს ყველა მისი ელემენტისაგან შემდგარი სიის საშუალებით, რომელსაც ხშირად ათავსებენ ფიგურულ ფრჩხილებში. მაშასადამე, ყველა ლუწი მთელი რიცხვების სიმრავლე მოთავსებული 0-სა და 8-ს შორის, ამ რცხვების ჩათვლით, შესაძლებელია წარმოვადგინოთ როგორც (0,2,4,6,8}, ასევე 6-ის ყველა დადებითი გამყოფების სიმრავლე წარმოიდგინება შემდეგი სახით {1,2,3,6}. რიგს, რომლის მიხედვითაც დალაგებულია ამ სიმრავლის ელემენტები, არ აქვს მნიშვნელობა: {1,2,3,6} = {1,3, 6,2}.

ფორმალურად, „$x \in S$“ აღნიშნავს, რომ „x არის S სიმრავლის *ელემენტი*“ ან, ეკვივალენტურად, „x არის S სიმრავლის წევრი“ ან „x ეკუთვნის S სიმრავლეს“. აგრეთვე „$x \notin S$“ ნიშნავს, რომ „x არ არის S სიმრავლის *ელემენტი*“. ვინაიდან სიმრავლე სრულად განისაზღვრება მისი ელემენტებით, ორი სიმრავლე S და T *ტოლია* მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათ გააჩნიათ ერთი და იგივე ელემენტები; სიმბოლოებში, S და T სიმრავლეთა ტოლობა შეიძლება ასე ჩიწეროს:

$$S = T \Leftrightarrow \text{ყოველი } x\text{-ის, } x \in S \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა } x \in T. \qquad (1)$$

(აქ ორმხრივი ისარი “$\Leftrightarrow$” ნიშნავს „მაშინ და მხოლოდ მაშინ“). S არის T-ს *ქვესიმრავლე* (ან *ჩართულია* T-ში), ნიშნავს, რომ S-ის ყოველი ელემენტი არის T-ს ელემენტი, ასე რომ, თუ $x \in S$, მაშინ $x \in T$; სიმბოლოებში:

$$S \subset T \Leftrightarrow \text{ნებისმიერი } x\text{-თვის, } x \in S \Rightarrow x \in T.$$

(აქ, მარჯვენა მხარეს, ცალმხრივი “$\Rightarrow$ “ ნიშნავს „გამომდინარეობს“). ამ განსაზღვრების თანახმად, $S \subset T$ და $T \subset U$ -დან გამომდინარეობს $S \subset U$. S და T სიმრავლეების ტოლობა, როგორც ეს ზემოთ არის განსაზღვრული, შეიძლება გადაიწეროს შემდეგნაირად

$$S = T \Leftrightarrow S \subset T \text{ და } T \subset S.$$

სიმრავლე S *ცარიელია*, თუ მას არ გააჩნია ელემენტები. (1) ტოლობის თანახმად, ნებისმიერი ორი ცარიელი სიმრავლე ტოლია. ცარიელი სიმრავლე აღინიშნება $\varnothing$ სიმბოლოთი. მას აგრეთვე უწოდებენ *ნულ* სიმრავლეს; ის არის ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლე. S არის U სიმრავლის *საკუთრივი ქვესიმრავლე,* თუ $S \neq \varnothing$, $S \neq U$ და $S \subset U$.

მოცემული U სიმრავლის ზოგიერთი ქვესიმრავლე ხშირად აღიწერება როგორც სიმრავლე ყველა იმ x ელემენტებისა U-დან, რომელთაც გააჩნიათ რაღაც სპეციფიკური თვისება. ასე რომ, ყველა კომპლექსური z რიცხვების ქვესიმრავლე, ისეთი რომ $z^2=-1$ ჩაიწერება შემდეგნაირად: $\{z| z\in \mathbf{C}$ და $z^2=-1\}$, ასევე ფორმულები

$$E=\{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ და } x=2y \text{ რომელიმე } y\in \mathbf{Z}\},\ \mathbf{N}=\{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ და } x \geq 0\}$$

აღწერენ, შესაბამისად, ყველა ლუწ მთელ რიცხვთა სიმრავლე E-ს და ყველა არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbf{N}$-ს. სხვადასხვა თვისებებით შესაძლებელია აღიწეროს ერთი და იგივე ქვესიმრავლე; ასე, მაგალითად,

$$\{n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ და } 0<n<n\} \text{ და } \{n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ და } n^2=-1\}$$

ორივე აღწერს ცარიელ სიმრავლეს $\varnothing$.

განვიხილოთ თანაკვეთის და გაერთიანების ოპერაციები სიმრავლეებზე. თუ R და S მოცემული სიმრავლეებია, მათი *თანაკვეთა* $R \cap S$ არის R და S სიმრავლეების ყველა საერთო ელემენტთა სიმრავლე:

$$R \cap S=\{x \mid x \in R \text{ და } x \in S\},$$

მაშინ, როცა მათი *გაერთიანება* $R \cup S$ არის ყველა იმ ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც ეკუთვნის ან R ან S (ან ორივეს):

$$R \cup S=\{x \mid x \in R \text{ ან } x \in S\}.$$

ეს განსაზღვრებები შემდეგნაირად შეიძლება გამოითქვას:

$$x \in (R \cap S) \Leftrightarrow x \in R \text{ და } x \in S,$$

$$x \in (R \cup S) \Leftrightarrow x \in R \text{ ან } x \in S.$$

თანაკვეთისა და გაერთიანების ოპერაციების ეს განმარტებები ეთანადება ლოგიკურ კავშირებს „და“ და „ან“-ს. ლოგიკურ კავშირს „არა“ შეესაბამება „დამატების“ ოპერაცია: თუ S-ი U-ს ქვესიმრავლეა, მაშინ S-ის *დამატება,* რომელიც აღინიშნება $-S$ ან S არის ყველა იმ ელემენტების სიმრავლე U-დან, რომლებიც არ ეკუთვნიან S:

$$-S=\{x \mid x \in U \text{ და } x \notin S\}.$$

თანაკვეთის, გაერთიანების და დამატების ოპერაციები აკმაყოფილებენ ტოლობებს, რომლებიც სამართლიანია ნებისმიერი სიმრავლისთვის. გნვიხილოთ ერთ-ერთი მათგანი

$$R \cap (S \cup T)=(R \cap S) \cup (R \cap T), \tag{2}$$

რომელიც სამართლიანია ნებისმიერი $R,$ S და T სიმრავლეებისათვის (ეს ტოლობა ამტკიცებს, რომ „თანაკვეთის“ ოპერაცია დისტრიბუციულია „გაერთიანების“ მიმართ). დავამტკიცოთ ეს დებულება. ზემოთ მოყვანილი $\cap$ და $\cup$ განსაზღვრების თანახმად,

$$x \in [R \cap (S \cup T)] \Leftrightarrow x \in R \text{ და } x \in S \cup T \Leftrightarrow x \in R \text{ და } (x \in S \text{ ან } x \in T).$$

ანალოგიურად,

$$x \in [(R \cap S) \cup (R \cap T)] \Leftrightarrow (x \in R \text{ და } x \in S) \text{ ან } (x \in R \text{ და } x \in T).$$

შემდეგ, „და“-ს და „ან“-ის ცნობილი თვისებების თანახმად, ეს ორი სხვადასხვა მტკიცებულებები x-ის შესახებ, ზემოთ წარმოდენილი მარჯვენა მხარის ჩანაწერები ლოგიკურად ეკვივალენტურებია. მაშასადამე, ორივე წარმოდგენილ სიმრავლეს გააჩნიათ ერთი და იგივე ელემენტები და ამიტომ ტოლებია. ანალოგიურად

$$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T). \tag{3}$$

ორ სიმრავლეს, R და S-ს, ეწოდება *თანაუკვეთი*, თუ $R \cap S = \varnothing$.

თუ გვაქვს ნებისმიერი სიმრავლე U, $P(U)$-თი აღვნიშნავთ U სიმრავლის ყველა S ქვესიმრავლეების სიმრავლეს, რომელსაც ვუწოდებთ U სიმრავლის *ბულეანს;* ე.ი., $P(U) = \{S \mid S \subset U\}$. მაგალითად, თუ U ორელემენტიანია, მაშინ მას გააჩნია ოთხი სხვადასხვა ქვესიმრავლე, რომლებიც არიან $P(U)$-ს ოთხი ელემენტი. უფრო ნათლად, $P(\{1,2\}) = \{\{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \varnothing\}$, სადაც $\varnothing$ არის ცარიელი სიმრავლე.

• • •

1.1 U სიმრავლის R, S და T ქვესიმრავლეებისთვის, დაამტკიცეთ შემდეგი იგივეობები:

(a) $R \cap S = S \cap R$, $R \cap (S \cap T) = (R \cap S) \cap T$.

(b) $R \cup S = S \cup R$, $R \cup (S \cup T) = (R \cup S) \cup T$.

(c) $-(R \cap S) = -S \cup (R$, $-(R \cup S) = -S \cap (R$.

(d) $S \cap (S \cup T) = S$, $S \cup (S \cap T) = S$.

1.2 უჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ერთი ჩამოთვლილი სამი პირობიდან: $S \subset T$, $S \cap T = S$, და $S \cup T = T$, თითოეული გამომდინარეობს დანარჩენი ორიდან.

1.3 თუ $S \subset U$, უჩვენეთ, რომ $S \cap -S = \varnothing$ და $S \cup -S = U$.

1.4 ჩამოთვალეთ $P(P(\{1\}))$ და $P(P(P(\{1\})))$ სიმრავლეთა ელემენტები.

1.5 უჩვენეთ, რომ n-ელემენტიან სიმრავლეს გააჩნია 2^n განსხვავებული ქვესიმრავლეები.

1.6 თუ $m < n$, უჩვენეთ, რომ n-ელემენტიან სიმრავლეს გააჩნია $(n\,!)/(n-m)!(m!)$ სხვადასხვა m-ელემენტიანი ქვესიმრავლე, სადაც $m! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot m$.

1.7 დაამტკიცეთ, რომ: (a) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$; (b) $A - B \subset A$.

1.8 დაამტკიცეთ, რომ: (a) $-(R \cap S) = -S \cup (R$, (b) $-(R \cup S) = -S \cap (R$.

1.9 დაამტკიცეთ, რომ: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

1.10 დაამტკიცეთ, რომ:

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$$

2. ფუნქციები

ნებისმიერი f *ფუნქცია* S სიმრავლიდან T სიმრავლეში ყოველ s ელემენტს S-დან ანიჭებს მნიშვნელობას $f(s) \in T$ (ანუ s ელემენტი გადაჰყავს $f(s)$ ელემენტში, $f(s) \in T$). ამას აღვნიშვნით შემდეგნაირად

$$s \;(\; f(s),\ s \in S,\ f(s) \in T.$$

$f(s)$ ელემენტი შეიძლება აგრეთვე ჩაიწეროს როგორც fs ან f_s, ფრჩხილების გარეშე; ეს არის f-ის *მნიშვნელობა* s *არგუმენტზე*. სიმრავლე S-ს ეწოდება f-ის *დომეინი*, ხოლო T -ს – *კოდომეინი*. ისრიანი აღნიშვნა

$$f : S \to T \text{ ან } S \xrightarrow{f} T$$

მიუთითებს, რომ f არის ფუნქცია S დომეინით და T კოდომეინით. ხშირად ფუნქციას უწოდებენ „ასახვას“ ან „ტრანსფორმაციას“.

რომ აღიწეროს კონკრეტული ფუნქცია, ნაჩვენები უნდა იყოს მისი დომეინი და მისი კოდომეინი, ჩაწერილი უნდა იყოს მისი მოქმედების შედეგი ტიპურ („ცვლად“) ელემენტზე დომეინიდან. ასე რომ, კვადრატში აყვანის ფუნქცია $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლისათვის შეიძლება აღიწეროს შემდეგი ნებისმიერი გზით: $f(x) = x^2$ ყოველი x ნამდვილი რიცხვისათვის, ან როგორც ფუნქცია $(–)^2$, სადაც – გათვალისწინებულია ადგილი არგუმენტისთვის, ან როგორც ფუნქცია, რომელსაც გადაჰყავს ყოველი $x \in \mathbf{R}$ x^2-ში, ან როგორც ფუნქცია, რომელიც მოცემულია ასახვით $x \;(\; x^2$, სადაც $x \in \mathbf{R}$.

შევნიშნოთ, რომ სიმბოლო როგორიცაა f ან g აღნიშნავს ფუნქციას, მაშინ როდესაც გამოსახულება როგორიცაა $f(x)$ ან $g(x)$ აღნიშნავს ამ ფუნქციის მნიშვნელობას x ელემენტზე მისი დომეინიდან. მაგალითად გამოსახულიბა „$\sin x$“ ნიშნავს რომელიღაც რიცხვს, ასე რომ, ჩვენ ვლაპარაკობთ არა „ფუნქცია $\sin x$“ , არამედ ფუნქცია $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

ორი ფუნქცია f და g *ტოლია* (აღნიშნება, $f = g$), როცა მათ გააჩნიათ ერთი და იგივე დომეინი, ერთი და იგივე კოდომეინი, და ერთი და იგივე მნიშვნელობა $f(s) = g(s)$ ყოველ ელემენტ s-ზე მათი საერთო დომეინიდან. მაგალითად, ასახვა $x \;(\; x + 2$ განსაზღვრავს ფუნქციას $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ მთელ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbf{Z}$-ზე; ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbf{R}$-ზე ეს ასახვა აგრეთვე განსაზღვრავს ფუნქციას $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; მაგრამ ეს ფუნქციები *სხვადასხვა* ფუნქციებია, ვინაიდან მათ გააჩნიათ სხვადასხვა დომეინები.

ფუნქციის $f : S \to T$ *სახე* image(f) არის ყველა $f(s)$ მნიშვნელობათა სიმრავლე $f(S)$, სადაც $s \in S$; image(f) ყოველთვის არის f-ის კოდომეინის ქვესიმრავლე.

ნებისმიერი S სიმრავლისათვის, *იგივური ფუნქცია* $1_S : S \to S$ არის ფუნქცია $s \;(\; s$, რომელიც ასახავს ყოველ ელემენტ s S-დან თავის თავში. სხვადასხვა სიმრავლეებს გააჩნიათ სხვადასხვა იგივური ფუნქციები. თუ S არის U-ს ქვესიმრავლე,

მაშინ *ჩადგმა* $i : S \to U$ არის ფუნქცია S-დან U-ში, რომელსაც გადაჰყავს ნებისმიერი ელემენტი S-დან იგივე ელემენტში, რომელიც არის U-დან. შევნიშნოთ, რომ „ჩადგმა“ არის ფუნქცია $S \to U$, ხოლო „ჩართვა“ არის მიმართება $S \subset U$; ყოველი ჩართვის მიმართება წარმოქმნის ჩადგმის ფუნქციას.

ორი ფუნქციის *კომპოზიცია* $f \circ g = fg$ არის ისეთი ფუნქცია, რომელიც მიიღება მათი თანმიმდევრობით მოქმედების შედეგად; პირველად g-სი და შემდეგ f-ის,რომელიც არ არის აზრს მოკლებული, ე. ი., f-ის დომეინი არის g-ს კოდომეინი. უფრო ფორმალურად, მოცემული გვაქვს რა ფუნქციები

$$g : R \to S,\ f : S \to T,$$

მათი *კომპოზიცია* არის ფუნქცია $f \circ g : R \to T$ რაც ნიშნავს, რომ

$$(f \circ g)(r) = f(g(r))\text{, ყოველი } r \in R. \tag{4}$$

ეს განსაზღვრება შეგვიძლია წარმოვადგინოთ „ასახვების დიაგრამის“ საშუალებით:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "f \circ g"] \arrow[dr, "g"'] & & T \\
& S \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

რომ გადავიდეთ R-დან $f \circ g$ კომპოზიციით T-ში ეს იგივეა რაც მივაღწიოთ T-ს ორი ნაბიჯით S-ის გავლით, პირველად g-თი და შემდეგ f-ით. ამ ფაქტის აღსანიშნავად ამბობენ აგრეთვე, რომ ეს სამკუთხა დიაგრამა „კომუტირებს“.

ფუნქციების კომპოზიცია აკმაყოფილებს *ასოციაციურობის კანონს:*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$

როცა მათში შემავალი კომპოზიციები განსაზღვრულია. ეს ინტუიციურად ნათელია; ორივეს $(f \circ g) \circ h$ და $f \circ (g \circ h)$ გააჩნიათ მოქმედების ერთნაირი ეფექტი: ჯერ h, შემდეგ g, და ბოლოს f. ფორმალურად, მოცემული ფუნქციების h: $P \to R$, g: $R \to S$ და $f : S \to T$, ორივე სამეულის კომპოზიციები $(f \circ g) \circ h$ და $f \circ (g \circ h)$ არის ფუნქციები P -დან T -ში, მაშინ როდესაც პირველი კომპოზიცია ყოველ p-ს ($p \in P$) ანიჭებს მნიშვნელობას

$$[(fg)h]\, p \underset{(fg)h}{=} (fg)(hp) \underset{fg}{=} f(g(hp)) \underset{gh}{=} f((gh)p) \underset{f(gh)}{=} [f(gh)]p;$$

ფუნქციებისთვის ტოლობის განსაზღვრის თანახმად მტკიცდება ასოციაციურობის კანონი $(fg)h = f(gh)$: $P \to T$. შევნიშნოთ, რომ აქ (და ხშირად შემდგომ) მოსახერხებელია არ ვწეროთ სიმბოლო "$\circ$" $f \circ g$ -ში.

კომპოზიციის მიმართ ყოველი ფუნქცია აკმაყოფილებს იგივეობის *კანონს:*

$$f \circ 1_S = f = 1_T \circ f : S \to T.$$

პირველი ტოლობა რომ დამტკიცდეს, (4)-ის თანახმად შევნიშნოთ, რომ $(f1_S)s = f(1_S s) = fs$ ყოველი $s \in S$; მაშასადამე, $f1_S = f$ ფუნქციების ტოლობის გასაზღვრის თანახმად. ანალოგიურად მტკიცდება მეორე ტოლობა.

ფუნქციას $r : S \to T$ ეწოდება $f : U \to V$ ფუნქციის *შეზღუდვა,* როცა $S \subset U$, $T \subset V$ და $r(s)=f(s)$ ყოველი $s \in S$ (აგრეთვე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ f არის r ფუნქციის *გაფართოება*). მაგალითად, მოცემული ქვესიმრავლისთვის $S \subset U$, ჩადგმა i: $S \to U$ არის იგივუერი ფუნქციის $1_U : U \to U$ შეზღუდვა.

განვიხილავთ სპეციალური ტიპის ინექციური, სურექციული ბიექციური ფუნქციები.

ფუნქცია $f : S \to T$ არის *ინექციური* ან *ინექცია,* თუ პირობიდან $a \neq b$ S-ში, გამომდინარეობს $f(a) \neq f(b)$ T-ში; ე. ი. როცა f-ს გადაჰყავს განსხვავებული ელემენტები მისი დომეინიდან განსხვავებულ ელემენტებში მისი კოდომეინიდან. მაგალითად, ყოველი ჩადგმა არის ინექცია. ფუნქცია $h : S \to T$ არის *სურექციული* ან *სურექცია*, თუ მისი სახე ემთხვევა მთელ კოდომეინ T-ს; ე. ი. ყოველი t (T არსებობს ერთი მაინც s (S სადაც $t = f(s)$. დაბოლოს, *ბიექცია* ეწოდება $b : S \to T$ ფუნქციას, რომელიც ერთდროულად არის ინექციაც და სურექციაც; ე. ი. b ბიექციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი t ელემენტისთვის T-დან არსებობს მხოლოდ ერთი ელემენტი s-ი S-დან $b(s) = t$ პირობით. აღნიშვნა $\cong$, ან $b : S \cong T$, უჩვენებს, რომ b არის ბიექცია S-დან T-ში.

მაგალითად, $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ ფუნქციებს შორის, ფუნქცია $n \mapsto (-n)$ არის ბიექცია, ფუნქცია $n \mapsto 2n$ არის ინექცია, მაგრამ არა სურექცია, და ფუნქცია $n \mapsto n^2$ არც ინექციაა და არც სურექცია.

თუ $\boldsymbol{R}^+$ არის ყველა არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, კვადრატში აყვანის ფუნქცია $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$, რომელიც მოცემულია $g(x) = x^2$ წესით, არის სურექცია, ვინაიდან ნებისმიერი არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვი არის რომელიღაც ნამდვილი რიცხვის კვადრატი. მაგრამ, კვადრატში აყვანის ფუნქცია $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, რომელიც მოცემულია $f(x) = x^2$ წესით და მისი კოდომეინი არის *ყველა* ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, არ *არის* სურექცია. ეს ორი კვადრატში აყვანის ფუნქცია (მიუხედავად იმისა, რომ მათ გააჩნიათ ერთი და იგივე მნიშვნელობები) ითვლებიან სხვადასხვა ფუნქციებად, ვინაიდან მათ აქვთ სხვადასხვა კოდომეინები: არის თუ არ ფუნქცია სურექცია *დამოკიდებულია მის კოდომეინზე.*

ქვემოთ მოყვანილი გვაქვს ამ ცნებების სხვა პარალელური ტერმინოლოგია

ინიექცია $S \to T$ = „ურთიერთცალსახა“ ასახვა S-დან T-ში ;
სურექცია $S \to T$ = ასახვა S-დან T-ზე ;
ბიექცია $S \to T$ = “ურთიერთ ცალსახა” ასახვა S-დან T-ზე.

ნებისმიერი ფუნქცია *f* შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც კომპოზიცია $f = g \circ h$, სადაც *g* არის ინექცია, ხოლო *h* სურექცია. მართლაც, თუ $f : S \to T$ ფუნქციის სახე არის *U* (*T*, მისი შეზღუდვა $r : S \to U$ არის სურექცია, ხოლო ჩადგმა $i : U \subset T$ არის ინექცია, და თვით ფუნქცია *f* არის კომპოზიცია $f = i \circ r$.

ზოგიერთ ფუნქციებს გააჩნიათ „შექცეული" ფუნქციები. დავუშვათ, რომ მოცემულია $g : T \to S$ და $f : S \to T$ ისე, რომ მათი კომპოზიცია $f \circ g$ განსაზღვრულია. თუ ეს კომპოზიცია არის იგივური ფუნქცია $1_T = f \circ g$, მაშინ *f* -ს ვუწოდებთ *g*-ს *მარცხენა შექცეულს,* ხოლო *g*-ს *f*-ის *მარჯვენა შექცეულს*. როდესაც კომპოზიცია ორივე მიმდევრობით არის იგივური ფუნქცია, $1_T = f \circ g$ და $1_S = g \circ f$, მაშინ *f*-ს ვუწოდებთ *g*-ს *ორმხრივ შექცეულს* (და, მაშასადამე, *g* არის *f*-ის *ორმხრივი შექცეული.*)

ბულის ფუნქციები

ნებისმიერ ფუნქციას $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ვუწოდებთ *n-ადგილიან ბულის ფუნქციას.* ამ შეთანხმების თანახმად განვსაზღვროთ მნიშვნელოვანი ბულის ფუნქციები შემდეგნაირად:

$x \vee y = \max(x,y)$, $x \wedge y = \min(x,y)$, $x \to y = \min(1, 1 - x + y)$, $\neg x = 1 - x$.

ქვემოთ, ცხრილის სახით, მოცემულია ზოგიერთი ბულის ფუნქცია

$x_1 \quad x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \otimes x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$
1 1	1	1	1	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0	0
1 0	1	0	0	1	0	0
0 0	0	0	1	0	0	1

დავუშვათ, რომ მოცემული გვაქვს *n* რაოდენობის *m*-ადგილიანი ოპერაციები $f_1,...,f_n$ განსაზღვრული *X* სიმრავლეზე. აგრეთვე დავუშვათ, რომ *X*-ზე განსაზღვრულია *n*-ადგილიანი ოპერაცია *f*. განვსაზღვროთ *X* -ზე *m*-ადგილიანი ოპერაცია *g* შემდეგნაირად

$$g(x_1,...,x_m) = f(f_1(x_1,...,x_m),...,f_n(x_1,...,x_m))$$

ნებისმიერი $x_1,...,x_m \in X$. ვიტყვით, რომ ოპერაცია *g* მიღებულია $f, f_1,..., f_n$ ოპერაციებისაგან *სუპერპოზიციით (ან ჩასმით).* სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, *g*

გამოისახება $f, f_1, \dots, f_n$ ოპერაციების საშუალებით. $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k})$ *n*+*k*-ცვლადიან ფუნქციაში ცვლადებს $x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$ ეწოდება *ფიქტიური*, თუ *f* ფუნქციის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული $x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$ ცვლადების მნიშვნელობებზე. ამ განსაზღვრიდან გამომდინარე, ნებისმიერი *n*-ადგილიანი ფუნქცია შეგვიძლია ვიგულისხმოთ როგორც *n* + *k*-ადგილიანი ფუნქცია, სადაც *k*>0.

ისმის კითხვა: როგორი ბულის ფუნქციები გამოისახება $\vee, \wedge, \neg$ ფუნქციების საშუალებით? ვიდრე ამ კითხვაზე ვუპასუხებდეთ, შემოვიღოთ განსაზღვრება: დავუშვათ *F* არის რაღაც ფუნქციების სიმრავლე *X*-ზე და $f_1, \dots, f_n$ არის ფუნქციები *F*-დან. ვიტყვით, რომ სისტემა $\{f_1, \dots, f_n\}$ არის *სრული F-ში,* თუ ნებისმიერი ფუნქცია *F* -დან გამოისახება $f_1, \dots, f_n$ ფუნქციების საშუალებით.

თეორემა (*სისრულის თეორემა*). *სისტემა* { $\vee, \wedge, \neg$ } *არის სრული ყველა ბულის ფუნქციების F სიმრავლეში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ნებისმიერი ბულის ფუნქცია გამოისახება* $\vee, \wedge, \neg$ *ფუნქციების საშუალებით.*

• • •

2.1 თუ *S* = {0, 1} არის ორელემენტიანი სიმრავლე, ჩამოთვალეთ ყველა ფუნქციები $S \to S$ და დააჯგუფეთ ისინი სურიექციულ, ინიექციურ, ბიექციურ ან არცერთი მათგანი ფუნქციებად.

2.2 თუ $f \circ g$ განსაზღვრულია და ორივეს *f* და *g*-ს გააჩნია მარცხენა შექცეული, უჩვენეთ, რომ $f \circ g$ ფუნქციასაც გააჩნია მარცხენა შექცეული.

2.3 უჩვენეთ, რომ ორი სურიექციის კომპოზიცია სურიექციაა.

2.4 თუ *f* ბიექციაა და $f \circ g$ განსაზღვრულია, უჩვენეთ, რომ *g* ინიექციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ , როცა $f \circ g$ ინიექციაა, და სურიექციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ , როცა $f \circ g$ სურიექციაა.

2.5 **N** არაუარყოფითი მთელ რიცხვთა სიმრავლისათვის, უჩვენეთ, რომ ფუნქცია f : $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, რომელიც მოცემულია ასახვით $n \mapsto n^2$, არ გააჩნია მარჯვენა შექცეული.

2.6 თუ *f* ინიექციაა, ხოლო $f \circ g$ და $f \circ g'$ განსაზღვრულებია, უჩვენეთ, რომ $f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'$.

2.7 ნებისმიერი $f : S \to T$ ფუნქციისთვის, სადაც $S \neq \varnothing$, ააგეთ ფუნქცია $h : T \to S$ $fhf = f$ პირობით.

2.8 უჩვენეთ, რომ ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია ერთადერთი მარჯვენა შექცეული, აუცილებლად ბიექციაა.

1.9 დაამტკიცეთ, რომ ბულის ფუნქციების სისტემა $\{\wedge, \neg\}$ არის სრული.

1.10 დაამტკიცეთ, რომ ბულის ფუნქციების სისტემა $\{\downarrow\}$ არის სრული.

1.11 დაამტკიცეთ, რომ სისტემა შემდგარი ერთი ბულის ფუნქციისგან $\{|\}$ არის სრული.

1.12 დაამტკიცეთ, რომ ბულის ფუნქციების სისტემა $\{\rightarrow, \neg\}$ არის სრული.

1.13 დაამტკიცეთ, რომ ბულის ფუნქციების სისტემა $\{\vee, \neg\}$ არის სრული.

1.14 დაიყვანეთ სრულყოფილ ნორმალურ დიზიუნქციურ ფორმამდე:

a) $((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow (p \wedge r))$,

b) $(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow (p \wedge q)))$,

c) $(\neg ((p \wedge q) \rightarrow (p) \wedge \neg((p \wedge q) \rightarrow \neg q))$.

3. მიმართებები და ბინარული ოპერაციები

როცა ჩვენ მოგვყავს ორცვლადიანი ფუნქცია ან ორ ცვლადს შორის მიმართება, ჩვენ ვიყენებთ „დალაგებულ წყვილებს“. *დალაგებული წყვილი,* შემდგარი ორი ელემენტისაგან, *s* და *t*, სწორედ ამ მიმდევრობით, ჩაიწერება როგორც (*s,t*). ორი დალაგებული წყვილის ტოლობა განისაზღვრება შემდეგი წესით

$$(s,t)=(s',t') \quad \Leftrightarrow \quad s=s' \text{ და } t=t' \ .$$

S და *T* ორი სიმრავლის *დეკარტული ნამრავლი* $S\times T$ განისაზღვრება როგორც ყველა დალაგებული (*s,t*) წყვილების სიმრავლე, შემდგრი *S* და *T* შესაბამის სიმრავლის ელემენტებისაგან.

$$S\times T=\{(s,t)\,|\,s\in S, t\in T\}.$$

მაშასადამე, თუ ***R*** ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, ***R*** × ***R*** არის ყველა წერტილთა დეკარტული კოორდინატების სიმრავლე სიბრტყეზე (მოცემული კოორდინატთა ღერძების მიმართ).

ყოველი დეკარტული ნამრავლი შეიძლება „პროექცირებულ“ იქნას თავის „ღერძებზე“, *S*-ზე და *T*-ზე:

$$S \xleftarrow{p} S\times T \xrightarrow{q} T\ .$$

ეს პროექციები არიან ფუნქციები *p* და *q*, განსაზღვრულები შემდეგნაირად: $p(s,t)=s$ და $q(s,t)=t$, როგორც ნაჩვენებია დიაგრამაზე

$$\begin{tikzcd} T & S\times T \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "p"] \\ & S \end{tikzcd}$$

ჩვენ ამას ვუწოდებთ *დეკარტული ნამრავლის დიაგრამას.*

შევნიშნოთ, რომ ბიექცია $S\times T\cong T\times S$ მოცემულია ასახვით $(s,t)\mapsto(t,s)$.

დალაგებული სამეულები შესაძლებელია აღიწეროს დალაგებული წყვილების საშუალებით. თუ მოცემულია *r*, *s* და *t*, *დალაგებული სამეული* (r,s,t) იგი განისაზღვრება როგორც $(r,(s,t))$. ვწერთ $R\times S\times T$ ნაცვლად $R\times(S\times T)$ ყველა (r,s,t) სამეულის სიმრავლისა, სადაც $r\in R$, $s\in S$ და $t\in T$, და შევნიშნოთ, რომ ასახვა $(r,(s,t))\mapsto((r,s),t)$ არის ბიექცია $R\times(S\times T)\cong(R\times S)\times T$. დალაგებული „ოთხეულები“ (r,s,t,u) და მსგავსები განისაზღვრებიან ანალოგიურად.

შეგვიძლია განვსაზღვროთ ფუნქციების დეკარტული ნამრავლი.

გვაქვს რა ორი ფუნქცია *u* : S → S' და *v* : T → *T'*, მათი დეკარტული ნამრავლი $u\times v: S\times T \to S'\times T'$ განისაზღვრება შემდეგნაირად $(u\times v)(s,t)=(u(s),v(t))$.

დეკარტული ნამრავლი სასარგებლოა ჩვეულებრივ ორი ან მეტი არგუმენტიანი ფუნქციების აღსაწერად: ფუნქცია *F*, რომელსაც გააჩნია ორი ცვლადი $s\in S$ და $t\in T$ და მისი მნიშვნელობები ეკუთვნის *W*-ს, არის ფუნქცია

$$F: S\times T \to W$$

დეკარტული ნამრავლიდან $S\times T$-დან *W* სიმრავლეში. ასეთი ფუნქცია ასახავს ყოველ დალაგებულ წყვილს $(s,t)\in S\times T$ თავის მნიშვნელობაში $F(s,t)\in W$.

ნებისმიერი ორი *X* და *Y* სიმრავლისათვის, ნებისმიერ ქვესიმრავლეს $R\subset X\times Y$ ეწოდება *ბინარული მიმართება* *X*-დან *Y*-ში (ან, მიმართება *X*-სა და *Y* „შორის"). მაშინ $(x,y)\in R$ ჩაიწერება როგორც *xRy* და იკითხება : „*x* იმყოფება *R* მიმართებაში *y*-თან", როგორც $"x\le y"$ რიცხვებისთვის ან „*x* ყოფს *y*" *x, y* მთელი რიცხვებისთვის. მაგალითად, თუ $X=\{1,3,5\}$ და $Y=\{0,2,4\}$, მაშინ სიმრავლე *R* = {{1,2}, {1,4}, {3,4}} შედგება ყველა იმ (*x*,*y*) წყვილებისგან, სადაც $x<y, x\in X$ და $y\in Y$, ამიტომ ის არის მიმართება „<" *X*-სა და *Y*-ს შორის. აგრეთვე, მაგალითად, სიმრავლური ჩართვა *S* ⊂ *T* არის ბინარული მიმართება *U*-ს *P*(*U*) ბულეანიდან თავის თავში. *ტოლობის მიმართება* $I=I_X$ ნებისმიერი *X* სიმრავლიდან თავის თავში მოცემულია შემდეგნაირად
: *xIy* მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა *x* = *y*.

$R\subset X\times Y$ მიმართების *შებრუნება* არის მიმართება $R^{\cup}\subset Y\times X$, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: $yR^{\cup}x$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა xRy. თუ *R* არის მიმართება *X*-დან *Y*-ში, მაშინ მისი შებრუნებული არის მიმართება *Y*-დან *X*-ში, და $(R^{\cup})^{\cup}=R$. მაგალითად, რიცხვებისთვის, ≥ არის ≤-ს შებრუნება.

R და *S* მიმართებების „კომპოზიცია" $R\circ S$, მოცემული მიმდევრობით, განსაზღვრულია, როდესაც $R\subset X\times Y$ და $S\subset Y\times Z$; ეს არის მიმართება $R\circ S\subset X\times Z$, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$x(R\circ S)z \quad \Leftrightarrow \quad xRy \quad \text{და } ySz, \quad \text{რომელიმე} \quad y\in Y.$$

ანალიზურ გეომეტრიაში ყოველი ფუნქციისათვის ***R*** → ***R*** აიგება მისი „გრაფიკი" როგორც ***R*** × ***R***-ის რომელიღაც ქვესიმრავლე. იგივე კონსტრუქცია მოქმედებს ზოგად შემთხვევაშიც. თუ $f: X\to Y$ არის ფუნქცია, მაშინ მისი *გრაფიკი* არის $X\times Y$-ის ქვესიმრავლე

$$G(f)=\{(x,y)\,|\,x\in X \text{ და } y=f(x)\}.$$

ე. ი. გრაფიკი ფუნქციისა X-დან Y-ში არის მიმართება X-დან Y-ში. მიუხედავად ამისა, ნებისმიერი მიმართება არ წარმოადგენს რომელიმე ფუნქციის გრაფიკს; ფუნქციის გრაფიკი იქნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა „ვერტიკალური წრფე“ გამავალი X სიმრავლის ყოველ წერტილზე თანაკვეთს სიმრავლეს $R \subset X \times Y$ ზუსტად ერთ წერტილში (იხ. ნახატი 1). ეს ფაქტი, როგორც ეს ფორმულირებულია მომდევნო თეორემაში, გვაძლევს განსხვავებულ გზას ფუნქციის განსაზღვრისათვის (ამ შემთხვევაში მიმართების საშუალებით).

• • •

3.1 ჩამოთვლილი სამი თვისებიდან: „რეფლექსურობა“, „სიმეტრიულობა“ და „ტრანზიტულობა“ – რომელი მიესადაგება ყოველ ქვემოთ ჩამოთვლილ მიმართებას განსაზღვრულს **Z** მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე:

„m ყოფს n-ს“ , „$m \le n$“ , „$m < n$“, „$m^2 + m = n^2 + n$“.

3.2 R მიმართებას X სიმრავლიდან თავის თავში ეწოდება „ცირკულარული“ თუ xRy და yRz გამომდინარეობს zRx. უჩვენეთ, რომ მიმართება არის რეფლექსური და ცირკულარული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტულია.

3.3 თუ კომპოზიცია $R \circ S$ განსაზღვრულია, დაამტკიცეთ, რომ $(R \circ S)^{\cup} = S^{\cup} \circ R^{\cup}$.

3.4 უჩვენეთ, რომ სამი მიმართების კომპოზიცია, როცა ის განსაზღვრულია, ასოციაციურია.

3.5 დავუშვათ, რომ R არის ბინარული მიმართება განსაზღვრული X-ზე. აღწერეთ უმცირესი ბინარული მიმართება T განსაზღვრული X-ზე იმ პირობით, რომ $R \subset T$.

3.6 დავუშვათ, რომ R არის ბინარული მიმართება განსაზღვრული X-ზე. უჩვენეთ, რომ:

(a) R რეფლექსურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $R \supset I_X$ (სადაც I_X არის დიაგონალი X-ზე),

(b) R სიმეტრიულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $R^{\cup} \subset R$,

(c) R ტრანზიტულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $R \circ R \subset R$.

3.7 დავუშვათ, რომ ბინარული ოპერაციას X-ზე გააჩნია მარცხენა ერთეული და აკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობს $x \quad (y \quad z) = (x \quad z) \quad y$. დამტკიცეთ, რომ   არის ასოციაციური და კომუტაციური.

3.8. რომელი ქვემოთ ჩამოთვლილი ბინარული ოპერაციებიდან $(m.n) \to m \quad n$, რომლებიც განსაზღვრულია მთელ რიცხვებზე, რომელია ასოციაციური და რომელია კომუტაციური?

$$m \quad n = m - n \;,\; m \quad n = m^2 + n^2,\; m \quad n = 2(m + n),\; m \quad n = - m - n..$$

4. ნატურალური რიცხვები

ინტუიციურად, *ნატურალურ რიცხვთა* სიმრავლე **N** = {0, 1, 2,…} შესაძლებელია აღიწეროს შემდეგნაირად: **N** შეიცავს „საწყის“ რიცხვს 0; არსებობს *„უშუალოდ შემდგომი“* ფუნქცია $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, რომელიც წარმოდგენილია შემდეგი ნახატით

$$0 \overset{\sigma}{\mapsto} 1 \overset{\sigma}{\mapsto} 2 \overset{\sigma}{\mapsto} 3 \overset{\sigma}{\mapsto} 4 \mapsto \ldots ,$$

და **N** „წარმოიქმნება“ 0-სგან σ-ს საშუალებით. ფორმალურად, ჩვენ აღვწერთ **N**-ს აქსიომების საშუალებით, რომლებიც ჩამოყალიბებულია ჯ. პეანოს (1858 – 1932) მიერ.

პეანოს პოსტულატები. *ნატურალურ რიცხვთა სისტემა* **N** *არის სიმრავლე* **N** *და მასზე განსაზღვრული ფუნქციით* (: **N** → **N** *და არჩეული ელემენტით* 0 ∈ **N**), ე. ი. (**N**, σ, 0)), *ისეთები, რომ:*

(*i*) σ *არის ინიექცია;*

(*ii*) *0 არ ეკუთვნის* σ *ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს;*

(*iii*) *ნებისმიერი ქვესიმრავლისათვის* $U \subset \mathbf{N}$, თუ მას *გააჩნია ორი თვისება*

$$(a)\ 0 \in U;\ (b)\ \text{ყოველი}\ n \in \mathbf{N}\ ,\ n \in U \Rightarrow \sigma(n) \in U,$$

მაშინ U ემთხვევა სიმრავლე **N**-*ს.*

ამორჩეული ელემენტი 0 ∈ **N** იგულისხმება როგორც ნულარული ოპერაცია **N**-ზე, ხოლო σ – როგორც უნარული ოპერაცია.

პოსტულატ (*iii*)-ს ეწოდება *მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი.* გამონათქვამ „$n \in U$“-ს ნაცვლად ვიტყვით, რომ „n-ს აქვს თვისება U“. ამ ენით პეანოს პოსტულატები იკითხება შემდეგნაირად: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე **N**-ს გააჩნია ერთი უნარული ოპერაცია (და ერთი ნულარული ოპერაცია, „არჩეული 0“, ისეთები, რომ: (*i*) $\sigma(n) = \sigma(m) \Rightarrow n=m;$ (*ii*) $\sigma(n)$ არასდროს არ უდრის *0;* და (*iii*) თუ ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერი თვისება, რომელიც სრულდება *0*-თვის და სრულდება $\sigma(n)$-თვის, როდესაც ის (თვისება) სრულდება n-თვის, მაშინ ის (თვისება) სრულდება ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისთვის.

ნატურალურ რიცხვთა ყველა თვისება შესაძლებელია გამოყვანილ იქნას მოცემული აქსიომებიდან; კერძოდ, ჯამისა და გამრავლების თვისებები. თუ ჯამი განსაზღვრულია, მაშინ უშუალოდ შემდგომი ფუნქცია (არის შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია : $\sigma(n) = n + 1$ ყოველი n-თვის.

ბევრი სასარგებლო ფაქტი ნატურალურ რიცხვთა შესახებ შეიძლება დამტკიცებულ იქნას ინდუქციის საშუალებით. პირველად გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქცია მარტივ დამტკიცებაში, რომ თუ $n \neq 0$, მაშინ n უდრის $\sigma(k)$-ს რომელიღაც $k \in \mathbf{N}$. ამისათვის დაუშვათ, რომ $U \subset \mathbf{N}$ არის სიმრავლე

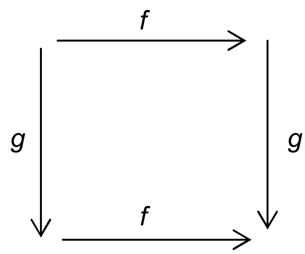
$$U = \{0\} \cup \{m \mid m = \sigma(k)\ \text{რომელიღაც}\ k \in \mathbf{N}\ \}.$$

მაშინ 0 ∈ U. აგრეთვე, თუ $n \in U$, მაშინ $\sigma(n) \in U$, თუ k უდრის n-ს. მაშასადამე, მათემატიკური ინდუქციის პოსტულატიდან, U = **N**. ამით დასრულდა დამტკიცება.

ნატურალური რიცხვები გამოიყენება ნებისმიერი f უნარული ოპერაციის იტერაციის აღსაწერად. ყოველ ასეთ ოპერაციას $f : X \to X$ გააჩნია იტერაციები $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, და ა. შ., სადაც $f^1 = f$ და f^0 არის იგივეობა $1 : X \to X$. თუ $n > 1$, მაშინ n *იტერაცია* არის $f^n = f \circ ... \circ f$, კომპოზიცია შემდგარი f-ბის n ნამრავლისგან. n ნამრავლების ჩვენების ნაცვლად, სადაც ჩვეულებრივ გამოიყენება სამი წერტილი, შეგვიძლია ჩავწეროთ $f^{n+1} = f \circ f^n$. ეს გვაძლევს საშუალებას n იტერაცია აღვწეროთ σ ფუნქციის ტერმინებში:

$$f^0 = 1_X, \quad f^{\sigma(n)} = f \circ f^n : X \to X \text{ ყოველი } n \in \mathbf{N}. \qquad (7)$$

ასეთნაირად წარმოდგენას უწოდებენ „რეკურსიულ“ განსაზღვრებას, ვინაიდან ის გვაძლევს f-ის ყოველ იტერაციას f-ის და წინარე იტერაციების ტერმინებში. ორი უნარული ოპერაცია f და g, განსაზღვრული X-ზე, *კომუტირებენ*, თუ $f \circ g = g \circ f$. ეს შეიძლება წარმოდგენილ იყოს კვადრატული დიაგრამით, როგორც ეს წარმოდგენილია ნახატზე. მას უწოდებენ *კომუტაციურ დიაგრამას*, რადგან კომპოზიცია ორივე მიმართულებით – ზემო მარცხენა კუთხიდან მარცხნივ და ქვევით და ქვევით და მარჯვნივ – ტოლებია.



• • •

4.1 იმ ფაქტის გამოყენებით, რომ ინიექციების კომპოზიცია ინიექციაა, ინდუქციის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია $f : X \to X$ ინიექციურობიდან გამომდინარეობს f^n-ის ინიექციურობა ყოველი n-სთვის **N**-დან.

4.2 დაამტკიცეთ, რომ $f : X \to X$ ფუნქციის სურიექციულობიდან გამომდინარეობს f^n-ის სურიექციულობა ყოველი n-თვის **N**-დან.

4.3 ინდუქციით დაამტკიცეთ, რომ (^{n}(0) = n ყოველი n-სთვის **N**-დან.

4.4 ინდუქციით დაამტკიცეთ, რომ 1 + 2 + … + n = n (n + 1) / 2.

4.5 ანალოგიურად, ინდუქციის გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი ფორმულები:

(a) 1 + 4 + 9 + … + n 2 = n (n + 1) (2n + 1) / 6,

(b) 1 + 8 + 27 + … + n 3 = [n (n + 1) /2] 2,

(c) (1 + 2 5 + … + n 5) + (1 + 2 7 + … + n 7) = 2[n (n + 1) /2] 4.

4.6 ააგეთ სამი სხვადასხვა მარცხენა შექცეული ფუნქციები σ ფუნქციისათვის.

4.7 ინდუქციის საშუალებით დაამტკიცეთ, რომ $n^2 - n$ არის ყოველთვის ლუწი.

4.8 დაამტკიცეთ, რომ $(f^m)^n = f^{mn}$.

4.9 (a) ააგეთ ფუნქცია $\tau : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, განსხვავებული σ-სგან, რომელიც აკმაყოფილებს პეანოს პოსტულატებს.

(b) უჩვენეთ, რომ თუ $\tau : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ აკმაყოფილებს პეანოს პოსტულატებს, მაშინ $\tau\beta = \sigma\beta$ რომელიღაც $\beta : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ბიექციისთვის.

4.10 (a) უშუალოდ შემდგომი ფუნქცია σ-სთვის, იპოვეთ ყველა ისეთი ფუნქციები: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, რომ $\varphi\sigma = \sigma\varphi$.

(b) უჩვენეთ, რომ თუ $\tau : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ აკმაყოფილებს პეანოს პოსტულატებს და $\sigma\tau = \tau\sigma$, მაშინ $\tau = \sigma$.

4.11 განსაზღვრეთ $P_m : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ როგორც $P_m(n) = mn$ და m^n როგორც $(P_m)^n$

(a) უჩვენეთ, რომ m^n შეიძლება აგრეთვე განისაზღვროს რეკურსიით $m^0 = 1$, $m^{\sigma(n)} = m(m^n)$.

(b) დაამტკიცეთ, რომ $k^{m+n} = k^m k^n$, $k^{mn} = (k^m)^n$, და $(k^n)(m^n) = (km)^n$ ნებისმიერი $k,m,n \in \mathbf{N}$.

4.12 დაამტკიცეთ, რომ მიმართება $\leq$**N**-დან **N**-ში არის ტრანზიტული და რეფლექსური.

4.13 გამოიყვანეთ მათემატიკური ინდუქციის (პირველი) პრინციპი იმ ფაქტიდან, რომ **N** სრულად დალაგებულია.

4.14 დაამტკიცეთ, რომ სრულად დალაგებული სიმრავლის ყოველი ქვესიმრავლე სრულად დალაგებულია.

4.15 უჩვენეთ, რომ სრულად დალაგებული სიმრავლე S არ შეიცავს უსასრულო კლებად s მიმდევრობას, ე. ი. არ არსებობს $s : \mathbf{N} \to S$ ისეთი, რომ $s_1 > s_2 > s_3 > \cdots$.

5. მთელი რიცხვები n მოდულით

მარტივი სასრული ალგებრული სისტემა წარმოიქმნება ცნობილი დაკვირვებიდან, რომ შესაძლებელია შევკრიბოთ და გავამრავლოთ „ლუწი“ და „კენტი“ რიცხვები – გვესმის რა ისინი როგორც ლუწი და კენტი რიცხვები – შემდეგი წესის თანახმად :

$$\text{ლუწი} \oplus \text{ლუწი} = \text{ლუწი} = \text{კენტი} \oplus \text{კენტი},\ \text{ლუწი} \oplus \text{კენტი} = \text{კენტი}$$

$$\text{ლუწი} \otimes \text{ლუწი} = \text{ლუწი} = \text{ლუწი} \otimes \text{კენტი},\ \text{კენტი} \otimes \text{კენტი} = \text{კენტი}.$$

ეს კი დაიყვანება სიმრავლეზე განსაზღვრული ჯამისა $\oplus$ და გამრავლების $\otimes$ ბინარულ ოპერაციამდე, რომელიც შედგება მხოლოდ ორი ელემენტისაგან 0 („ლუწი“) და 1 („კენტი“), რაც განისაზღვრება შემდეგი წესით:

$$0 \oplus 0 = 0 = 1 \oplus 1,\ 0 \oplus 1 = 1 = 1 \oplus 0,$$

$$0 \otimes 0 = 0 = 0 \otimes 1 = 1 \otimes 0,\ 1 \otimes 1 = 1.$$

ამ სისტემას ეწოდება *მთელი რიცხვები მოდული 2-ით.*

ჩვეულებრივი გაყოფის პროცესი k მთელი რიცხვისა $n\ (\neq 0)$-ზე გვაძლევს განაყოფ q და *ნაშთს* r იმგვარად, რომ $k/n = q + r/n.$ ეს შედეგი შეიძლება შემდეგნაირად გამოისახოს ნებისმიერი „გაყოფის“ გარეშე.

ფიქსირებული n-ისთვის მოცემული გაყოფის ალგორითმი გამოიყენება, რათა ნებისმიერი მთელი რიცხვი ავსახოთ თავისივე ნაშთში „n მოდულით“. ამ n მოდულით ნაშთთა სიმრავლეში შეგვიძლია ვაწარმოოთ შეკრება და გამრავლება: ვიღებთ ჩვეულებრივ ჯამს ან ნამრავლს; თუ შედეგი აღემატება n-ს, ვცვლით მას n-ზე გაყოფის შედეგად მიღებულ ნაშთზე. ნაშთების $\mathbf{Z}_5$ = {0,1,2,3,4} სიმრავლეზე ჯამი და გამრავლება მოცემულია შემდეგი ცხრილებით:

$\oplus$	0 1 2 3 4		$\otimes$	0 1 2 3 4
0	0 1 2 3 4		0	0 0 0 0 0
1	1 2 3 4 0		1	0 1 2 3 4
2	2 3 4 0 1		2	0 2 4 1 3
3	3 4 0 1 2		3	0 3 1 4 2
4	4 0 1 2 3		4	0 4 3 2 1

$\mathbf{Z}_5$ -ს ეწოდება მთელი რიცხვების ალგებრა „5-ის მოდულით“.

• • •

5.1 ააგეთ ჯამის და გამრავლების ცხრილი $\mathbf{Z}_6$ -სთვის, და უჩვენეთ, რომ $\mathbf{Z}_6$-ში არ სრულდება შეკვეცის კანონი.

5.2 ნებისმიერი n-*ს*თვის, უჩვენეთ, რომ კონგრუენციის მიმართება n მოდულით არის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული.

5.3 თუ m მთელი რიცხვია, უჩვენეთ, რომ $m^2 \equiv 0,\ 1$, ან $4 \pmod 8$.

5.4. მე-3 სავარჯიშოს გამოყენებით, დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს მთელი რიცხვი $k \equiv 7 \pmod 8$, რომელიც გამოისახება სამი რიცხვის კვადრატის ჯამით.

6. ჰომომორფიზმები Zn–ში

„უნივერსალური ალგებრები“ აყალიბებენ ზოგად თეორემებს *ალგებრების შესახებ* ცალსახად, ყველგან განსაზღვრული, სასრული ოპერაციებითურთ.

უნივერსალური ალგებრა ან უბრალოდ ალგებრა ეწოდება წყვილს (*A, F*), სადაც *A* არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო *F* არის f_α *ოპერაციათა* მოცემული სიმრავლე და ყოველი ამ ოპერაციათაგანი ასახავს *A* სიმრავლის ხარისხს $A^{n(\alpha)}$-ს *A*-ში, სადაც $n(\alpha)$ არის რომელიმე შესატყვისი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ოპერაცია f_α უთანადებს ყოველ $n(\alpha)$ ელემენტებისაგან *A*-დან შემდგარ დალაგებულ მიმდევრობას $(x_1,...,x_{n(\alpha)})$ მის მნიშვნელობას $f_\alpha(x_1,...,x_{n(\alpha)})$, რომელიც ეკუთვნის *A*-ს, ე. ი. არის შედეგი f_α ოპერაციის გამოყენებისა $x_1,...,x_{n(\alpha)}$ მიმდევრობაზე. თუ $n(\alpha)=1$, მაშინ f_α -ს ეწოდება *უნარული* ოპერაცია, თუ $n(\alpha)=2$, მაშინ f_α-ს ეწოდება *ბინარული* ოპერაცია, თუ $n(\alpha)=3$, მაშინ f_α-ს ეწოდება *ტერნარული* ოპერაცია და ა. შ. როცა $n(\alpha)=0$, ოპერაცია f_α-ს ეწოდება *ნულარული*; ის აფიქსირებს რომელიღაც ელემენტს *A*-დან. თუ *F* სასრული სიმრავლეა, შემდგარი *k* ელემენტისაგან, მაშინ ალგებრა (*A, F*)-ს წარმოვადგენთ როგორც $(A, f_1,...,f_m)$. ხშირ შემთხვევაში, როცა *A*-ზე განსაზღვრული ოპერაციები *F*-დან ცნობილია, ალგებრა $(A, f_1,...,f_m)$-ს წარმოვადგენთ მარტივად მხოლოდ *A*-ს სახით.

მაგალითი 1. $(\boldsymbol{Z}, +, \times)$, სადაც **Z** მთელი რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო + და × შესაბამისად არიან ბინარული ოპერაციები – ჯამი და გამრავლება.

მაგალითი 2. $(\boldsymbol{Z_n}, \oplus, \otimes)$, სადაც $\boldsymbol{Z_n}$ *n* მოდულით ნაშთთა სიმრავლეა, ხოლო ⊕ და ⊗ შესაბამისად არიან ბინარული ოპერაციები *n* მოდულით ჯამი და გამრავლება.

A ალგებრის ქვესიმრავლე *A'*-ს ეწოდება *A*-ს ქვეალგებრა, თუ *A' დახშულია* *A*-ს ყველა ოპერაციების მიმართ. ე. ი. თუ $f_\alpha \in F$ და $x_1,...,x_{n(\alpha)} \in A'$, მაშინ $f_\alpha(x_1,...,x_{n(\alpha)}) \in A'$. ყოველი *A*-ს ქვეალგებრა *A'* ყოველთვის განხილული იქნება როგორც ალგებრა იგივე ოპერაციების მიმართ, რომლებიც შეზღუდულია *A*-ზე.

ალგებრა *A*-ს ნებისმიერი ქვეალგებრების კლასის თანაკვეთა აგრეთვე არის *A*-ს ქვეალგებრა. მაშასადამე, ნებისმიერი *A*-ს ელემენტთა არაცარიელი A_0 სიმრავლისათვის, არსებობს უმცირესი ქვეალგებრა *A'*, რომელიც შეიცავს A_0-ს (ე. ი. *A'* არის ყველა ქვეალგებრების თანაკვეთა, რომლებიც შეიცავენ A_0). ამ უმცირეს ქვეალგებრა

A' -ს ეწოდება A_0-*ს მიერ წარმოქმნილი ქვეალგებრა,* ხოლო A_0-ს *A'* -*ის წარმომქნე-ლების (ანუ გენერატორების) სიმრავლე.* განსაზღვრის თანახმად, ვიტყვით, რომ სიმრავლე $A_0 \subset A$ *წარმოქმნის* A-ს ან არის A-ს *წარმომქმნელები (ანუ გენერა-ტორები),* თუ თვით ალგებრა A არის ერთადერთი ქვეალგებრა, რომელიც შეიცავს A_0-ს.

ვიტყვით, რომ ალგებრა (A, F) *მსგავსია* ალგებრა (B, F'), თუ $F = F'$ და, ნებისმიერი $f_\alpha \in F$, f_α და f'_α ოპერაციების ცვლადების რაოდენობა ემთხვევა ერთმანეთს. სხვანაირად მსგავს ალგებრებს უწოდებენ *ერთი ტიპის* ალგებრებს.

მაგალითად, A ალგებრის ნებისმიერი A' ქვეალგებრა მსგავსია A ალგებ-რისა. ხშირად მსგავსი ალგებრების ოპერაციებს აღვნიშნავთ ერთი და იგივე სიმბო-ლოებით. ასახვა h-ს ალგებრა (A, F)-დან ალგებრა (B, F)-ში ეწოდება *ჰომომო-რფიზმი,* თუ ის ინახავს ყველა ოპერაციას, ე. ი.

$$h(f_\alpha(x_1,...,x_{n(\alpha)}) = f_\alpha(h(x_1),...,h(x_{n(\alpha)})), \text{ სადაც } x_1,...,x_{n(\alpha)} \in A .$$

ადრე განხილული $\oplus$ ჯამი და $\otimes$ ნამრავლი $\boldsymbol{Z}_n$-ში ისეთნაირადაა განსაზ-ღვრული, რომ პროექცია $\rho : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}_n$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$\rho(k+m) = (\rho k) \oplus (\rho m),\ \rho(km) = \rho(k) \otimes \rho(m).$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ρ-ს „გადააქვს“ ***Z***-ში განსაზღვრული ჯამი და ნამრავლი შესაბამის ოპერაციებში $\boldsymbol{Z}_n$-ში. ადვილი დასანახია, რომ ρ არის ჰომო-მორფიზმი ***Z***-დან $\boldsymbol{Z}_n$-ში.

თუ $(\boldsymbol{P}^*, \times)$ ალგებრაა, სადაც $\boldsymbol{P}^*$ არის ყველა დადებით მთელ რიცხვთა სიმ-რავლე და × არის ბინარული ოპერაცია გამრავლება, და ($\boldsymbol{R}$, +) ალგებრაა, სადაც ***R*** ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა და **+** არის ბინარული ოპერაცია ჯამი, მაშინ (ნებისმიერი ფუძის) ლოგარითმი $\log : (\boldsymbol{P}^*, \times) \to (\boldsymbol{R}, +)$ არის ჰომო-მორფიზმი :

$$\log(xy) = \log x \quad + \quad \log y .$$

ჰომომორფიზმი	$h : (A, F) \to (B, F)$ ეწოდება
მონომორფიზმი	თუ ფუნქცია h ინიექციაა;
ეპიმორფიზმი	თუ ფუნქცია h სურიექციაა;
იზომორფიზმი	თუ ფუნქცია h ბიექციაა.

ჰომომორფიზმი $h : (A, F) \to (A, F)$, (A, F)-სა თავის თავში ეწოდება *ენდო-მორფიზმი*, ან, თუ ის ბიექციაა, *ავტომორფიზმი.*

• • •

6.1 მოძებნეთ **Z** -ის ყველა ადიციური ენდომორფიზმი.

6.2 ყველა ქვემოთ ჩამოთვლილ შემთხვევებში ჩამოთვალეთ ყველა ადიციური ჰომომორფიზმები :

$$\mathbf{Z}_6 \to \mathbf{Z}_3\,,\ \mathbf{Z}_3 \to \mathbf{Z}_9\,,\ \mathbf{Z}_5 \to \mathbf{Z}_6\,,\ \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_4\,.$$

6.3 ჩამოთვალეთ $\mathbf{Z}_6$-ის და $\mathbf{Z}_8$-ს ყველა (ჯამის) ენდომორფიზმები.

6.4 (a) თუ $m : Y \to Z$ მონომორფიზმია, დაამტკიცეთ, რომ $m \circ f = m \circ f\,'$ ტოლობიდან, ნებისმიერი ორი ჰომომორფიზმისთვის $f, f' : X \to Y$, გამომდინარეობს $f = f'$.

(b) თუ $e : T \to X$ ეპიმორფიზმია, დაამტკიცეთ, რომ $f \circ e = f\,' \circ e$ ტოლობიდან გამომდინარეობს $f = f\,'$.

6.5 თუ $f : (X\,,\ t\,) \to (X'\,,\ t\,')$ და $g : (X\,',\ t\,') \to (X''\,,\ t\,'')$ ტერნარული ოპერაციის ჰომომორფიზმებია, ზუსტად უჩვენეთ, რომ $g \circ f$ აგრეთვე ასეთივე ჰომომორფიზმია, ააგეთ დიაგრამა.

6.6 უჩვენეთ, რომ არანულოვან ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე გამრავლების მიმართ არ არის იზომორფული ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლისა ჯამის მიმართ.

6.7 დაამტკიცეთ: ნახევარჯგუფს შეიძლება ჰქონდეს არაუმეტეს ერთი ერთეულისა.

6.8 დაამტკიცეთ, რომ მულტიპლიკაციურ მონოიდში სრულდება ტოლობა

$$a^{m+n} = a^m a^n, \quad a^{mn} = (a^m)^n.$$

7. კარდინალური და ორდინალური რიცხვები

ყოველ A სიმრავლეს შევუსაბამოთ ობიექტი $|A|$, რომელსაც უწოდებენ ამ სიმრავლის *სიმძლავრეს*, ისეთნაირად, რომ $|A| = |B|$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ბიექცია A და B სიმრავლეებს შორის. კერძოდ, ცარიელ სიმრავლეს შევუსაბამოთ სიმძლავრის სახით რიცხვი 0, ხოლო სიმრავლეს $\{a_1, \ldots , a_n\}$, შემდგარს ელემენტიდან ($n = 1,2, \ldots$), – რიცხვი n. სიმრავლის სიმძლავრეს აგრეთვე უწოდებენ *კარდინალურ რიცხვებს* ან *კარდინალებს.* ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრე აღინიშნება $\aleph_0$-ით (ალეფ-ნოლი), ხოლო ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრე აღინიშნება $\aleph_1$-ით (ალეფ-ერთი). სიმძლავრე $\aleph_1$-ს უწოდებენ *კონინუუმის სიმძლავრეს.* $\aleph_0$ -ის სიმძლავრის სიმრავლეებს უწოდებენ *თვლადს.*

დავუშვათ $a = |A|$ და $b = |B|$. დავუშვათ $a \le b$, თუ არსებობს ინექცია სიმრავლე A-დან სიმრავლე B-ში. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს განსაზღვრება არ არის დამოკიდებული A და B სიმრავლეების არჩევანზე და ამიტომ გამოხატავს მიმართებას კარდინალურ რიცხვებს შორის.

წრფივად დალაგებული სიმრავლე A *იზომორფულია* წრფივად დალაგებული სიმრავლე B-სი, თუ არსებობს ბიექცია φ სიმრავლე A-დან სიმრავლე B-ზე, რომელიც ინახავს წრფივ დალაგებას, ე. ი. $x \le y \Rightarrow \varphi(x) \le \varphi(y)$ $(x,y \in A)$. ასეთი თვისების φ ასახვას უწოდებენ *იზომორფიზმს A-დან B-ზე.*

ყოველ წრფივად დალაგებულ სიმრავლე A-ს შევუსაბამოთ ობიექტი $o(A)$, რომელსაც უწოდებენ *ორდინალურ ტიპს,* ისეთნაირად, რომ $o(A) = o(B)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა წრფივად დალაგებული სიმრავლეები A და B იზომორფულებია.

ვინაიდან ორდინალური ტიპების ტოლობა $o(A) = o(B)$ იწვევს სიმრავლეების სიმძლავრის ტოლობას $|A| = |B|$, ამიტომ ყოველ ორდინალურ ტიპს შეესაბამება რომელიღაც სიმძლავრე, რომელსაც ეწოდება ამ ტიპის სიმძლავრე.

ყოველი n-ელემენტიანი სიმრავლისთვის $\{a_1, \ldots , a_n\}$ ($n = 1,2, \ldots$) არსებობს $n!$ გადანაცვლება და ამიტომ წრფივად შეიძლება დალაგდეს $n!$ სხვადასხვა რაოდენობით. მაგრამ ყველა ამ შემთხვევაში მიღებული წრფივად დალაგებულ სიმრავლეებს გააჩნიათ ერთიდაიგივე ორდინალური ტიპი, რომელიც აღინიშნება n-ით. ცარიელ სიმრავლეს მიაკუთვნებენ ტიპ 0-ს. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს $N = \{0,1,2, \ldots\}$, რომელიც დალაგებულია ზრდის მიხედვით, მიაკუთვნებენ ტიპ $(\aleph_0$-ს. ხოლო სიმრავლეს $(N, \le^{-1})$, ორადული წრფივი დალაგებით $\ldots \ge 3 \ge 2 \ge 1 \ge 0$, მიაკუთვნებენ ტიპ ω^*-ს.

სრულად დალაგებულ A სიმრავლის ეწოდება *ორდინალური ან ტრანსფინიტური რიცხვი,* ან უბრალოდ *ორდინალი.*

აქედან გამომდინარეობს, რომ n და ω ორდინალური რიცხვებია, ხოლო ორდინალური ტიპი ω^* არ არის ორდინალური რიცხვი.

• • •

7.1 არის თუ არა სიმრავლე თვლადი, რომლის ყოველი საკუთრივი ქვესიმრავლე თვლადია,?

7.2 დაამტკიცეთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა წრფის ყველა ინტერვალების სიმრავლე, რომლის ბოლოები რაციონალური რიცხვებია, თვლადია.

7.3 დაამტკიცეთ, რომ

(a) ნებისმიერი A_1, B_1, A_2, B_2 სიმრავლეებისთვის, $|A_1| = |B_1|$ და $|A_2| = |B_2|$ პირობიდან გამომდინარეობს $|A_1 \times A_2| = |B_1 \times B_2|$,

(b) ნებისმიერი A, B სიმრავლეებისთვის, თუ $|A| = |B|$, მაშინ $2^A = 2^B$.

7.4 დავუშვათ a და b ნებისმიერი კარდინალური რიცხვებია და $a = |A|$, $b = |B|$, $A \cap B = \varnothing$. ჯამი, ნამრავლი და ახარისხება განვსაზღროთ შემდეგნაირად:

$$a + b = |A \cup B|,\ a\,b = |A \times B|,\ a^{b} = |A^{B}|,$$

სადაც A^B არის ყველა ასახვების სიმრავლე B-დან A-ში. დაამტკიცეთ შემდეგი იგივეობები:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,\ a\,(b\,c) = (a\,b)\,c,$$

$$a + b = b + a,\ a\,b = b\,a,$$

$$a^{b+c} = a^{b}a^{c},\ (ab)^{c} = a^{c}b^{c},\ (a^{b})^{c} = a^{bc}.$$

7.5 სიმრავლე A-ს ეწოდება B სიმრავლის *ეკვივალენტური* (აღინიშნება როგორც $A \sim B$), თუ A-ს და B-ს შორის არსებობს ბიექცია. დაამტკიცეთ, რომ

(a) $A \sim A$;

(b) თუ $A \sim B$, მაშინ $B \sim A$;

(c) თუ $A \sim B$ და $B \sim C$, მაშინ $A \sim C$.

7.6 დაამტკიცეთ, რომ

(a) სასრული სიმრავლის ყოველი ქვესიმრავლე სასრულია;

(b) სასრული სიმრავლეების სასრული გაერთიანება სასრულია;

(c) სასრული სიმრავლეების სასრული დეკარტული ნამრავლი სასრულია.

7.7 (a) დაამტკიცეთ, რომ სასრული სიმრავლე არ არის ექვივალენტური არცრთი თავისი საკუთრივი ქვესიმრავლისა;

(b) დაამტკიცეთ, რომ ორი სასრული სიმრავლე ეკვივალენტურია, როცა ისინი შეიცავენ ერთი და იგივე რაოდენობის ელემენტებს;

(c) დაამტკიცეთ, რომ კარდინალურ რიცხვთა რაოდენობა უსასრულოა.

7.8 დავუშვათ, რომ A და B წრფივად დალაგებული სიმრავლეებია. სიმრავლე A-ს ეწოდება B სიმრავლის *მსგავსი* (აღინიშნება როგორც $A \approx B$), თუ A და B იზომორფულებია როგორც დალაგებული სიმრავლეები. დაამტკიცეთ:

(a) თუ წრფივად დალაგებული სიმრავლეები მსგავსებია, მაშინ ისინი ეკვივალენტურებია.

(b) ნებისმიერი A სიმრავლე, რომელიც ეკვივალენტურია წრფივად დალაგებულ სიმრავლე B-ს, შეიძლება წრფივად დალაგდეს ისეთნაირად, რომ A და B გახდნენ მსგავსები.

7.9 დავუშვათ, რომ A, B და C წრფივად დალაგებული სიმრავლეებია. დაამტკიცეთ, რომ:

(a) $A \approx A$;

(b) თუ $A \approx B$, მაშინ $B \approx A$;

(c) თუ $A \approx B$ და $B \approx C$, მაშინ $A \approx C$.

7.10 დავუშვათ, რომ A და B წრფივად დალაგებული სიმრავლეებია. დაამტკიცეთ, რომ

თუ A და B მსგავსებია, მაშინ $|A| = |B|$, მაგრამ პირიქით არასწორია.

7.11 დაამტკიცეთ, რომ n-ელემენტიანი სიმრავლე შეიძლება დალაგდეს $n!$ საშუალებით.

7.12 დაამტკიცეთ, რომ ყველა ერთი და იგივე სიმძლავრის მქონე სასრული წრფივად დალაგებული სიმრავლეები მსგავსებია.

8. ალგორითმები და რეკურსიული ფუნქციები

მათემატიკის განვითარების ადრეულ საფეხურებზე (ძველი ეგვიპტე, ბაბილონი, ძველი საბერძნეთი) თავი იჩინა მექანიკური ხასიათის მრავალმა გამოთვლითმა პროცესმა; მათი საშუალებით თანამიმდევრულად გამოითვლებოდა დასმული ამოცანის საძიებელი სიდიდეები მოცემული საწყისი სიდიდეებიდან, განსაზღვრული წესების და ინსტრუქციების მიხედვით. დროთა განმავლობაში ყველა ასეთ პროცესს მათემატიკაში მიეცა ალგორითმის სახელწოდება. გასული საუკუნის 30-იანი წლების მიჯნამდე ალგორითმის ეს ცნება ძირითადად არ იცვლებოდა, თუმცა ხდებოდა უფრო და უფრო მკაფიო. მიუხედავად ამისა, ის მაინც რჩებოდა ინტუიციურ ცნებად, რომელსაც ჰქონდა უფრო მეთოდოლოგიური, ვიდრე მათემატიკური მნიშვნელობა. მისი არსი ადვილად ირკვევა შემდეგი მაგალითებით.

გამოთვლის ათობით სისტემაში ნატურალური რიცხვები გამოისახება 0, 1, ... , 9 ციფრების სასრული მიმდევრობებით. ისმის კითხვა, როგორ უნდა ვიპოვოთ რიცხვის ათობითი ჩანაწერი, რომელიც უდრის ორი რიცხვის ჯამს, სხვაობას, ნამრავლს, განაყოფს, რომლებიც მოცემულია თავიანთ ათობით ჩანაწერში? როგორც ცნობილია პროცესები, რომლის საშუალებითაც ამოიხსნება ეს ამოცანები, წარმოადგენს სწორედ ჯამის, სხვაობის, ნამრავლის და განაყოფის ალგორითმებს ათობით სისტემაში.

ალგორითმის ნათელ მაგალითს წარმოადგენს აგრეთვე ორი a_1, a_2 დადებითი ნატურალური რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის ძებნის პროცესი. ეს პროცესი შემდეგია:

1) ვყოფთ a_1 -ს a_2 -ზე, ვპოულობთ ნაშთს a_3 და ვამოწმებთ, უდრის თუ არა ის 0-ს. თუ უდრის მაშინ პროცესი წყდება და a_2 არის საძებნი უდიდესი საერთო გამყოფი. თუ $a_3 > 0$, მაშინ
2) ვყოფთ a_2 -ს a_3 -ზე, ვპოულობთ ნაშთს a_4. თუ $a_4 = 0$, მაშინ პროცესი წყდება და a_3 არის საძებნი უდიდესი საერთო გამყოფი. თუ $a_4 > 0$, მაშინ
3) ვყოფთ a_3 -ს a_4 -ზე და ა. შ.

ვინაიდან $a_2 > a_3 > a_4 > \ldots \geq 0$, აღნიშნული პროცესი შეწყდება ყველაზე მეტი a_2 ნაბიჯის შემდეგ და პროცესის შეწყვეტისას ჩვენ ვიპოვით a_1 და a_2 რიცხვების უდიდეს საერთო გამყოფს.

ახლა აღვნიშნოთ ალგორითმების საერთო თვისება.

a) ალგორითმი – ეს არის სიდიდეების თანმიმდევრული აგების პროცესი, რომელიც მიმდინარეობს დისკრეტულ დროში ისეთნაირად, რომ საწყის მომენტში მოცემულია სიდიდეების საწყისი სასრული სისტემა, ხოლო ყოველ შემდგომ მომენტში სიდიდეების სისტემა მიიღება გარკვეული კანონით (პროგრამით) სიდიდეების სისტემიდან, რომლებიც მოცემული იყო წინამდებარე მომენტში (*ალგორითმის დისკრეტულობა*).

b) სიდიდეების სისტემა, რომელიც მიიღება რომელიღაც (არასაწყის) დროის მომენტში, ცალსახად განისაზღვრება სიდიდეების სისტემით, რომელიც

მიღებული იყო დროის წინამდებარე მომენტში (*ალგორითმის დეტერმინირებულობა*).

c) წინა სიდიდეების სისტემიდან მომდევნო სიდიდეების სისტემის მიღების კანონი უნდა იყოს მარტივი და ლოკალური (*ალგორითმის ნაბიჯების ელემენტარულობა*).

d) თუ შემდგომი სიდიდის მიღების წესი, რომელიღაც მოცემული სიდიდიდან არ იძლევა შედეგს, მაშინ უნდა იყოს მითითებული, რა უნდა ითვლებოდეს ალგორითმის შედეგად (*ალგორითმის მიმართულობა*).

e) საწყისი სიდიდეების სისტემა შეიძლება ამორჩეულ იქნას პოტენციალურად უსასრულო სიმრავლიდან (*ალგორითმის მასობრიობა*).

ალგორითმის ცნება, რომელიც მოცემულია a) – e) მოთხოვნით, რასაკვირველია, არამკაცრია : ამ მოთხოვნების ფორმულირებაში გვხვდება სიტყვები „წესი“, „სიდიდე“, „მარტივი“, „ლოკალური“, რომლის ზუსტი აზრი არ არის დადგენილი. შემდგომში ალგორითმის ამ არამკაცრ ცნებას ჩვენ ვუწოდებთ ალგორითმის უშუალო ან ინტუიციურ ცნებას.

ალგორითმის ინტუიციური ცნება მართალია არამკაცრია, მაგრამ იმდენად მკაფიოა, რომ პრაქტიკულად არ ყოფილა სერიოზული შემთხვევები, რომ მათემატიკოსების აზრი გაყოფილიყო ამასთან დაკავშირებით, არის თუ არა ალგორითმი ესა თუ ის კონკრეტულად მოცემული პროცესი. ამით ადვილად აიხსნება თავისებური მდგომარეობა, რომელიც დამკვიდრდა მათემატიკაში ალგორითმულ პრობლემებთან დაკავშირებით XX საუკუნის დასაწყისში. ამ პრობლემებში საჭიროა მოიძებნოს ალგორითმი რომელიმე ერთგვაროვანი ამოცანების ერთობლობის ამოსახსნელად, რომლის პირობებში შედის სასრული პარამეტრების სისტემა, რომლებიც ღებულობენ ჩვეულებრივ მთელი რიცხვების მნიშვნელობებს. მაგალითად, მოითხოვება მოიძებნოს ალგორითმი, რომელიც იძლევა საშუალებას ყოველი მთელი რიცხვების *a, b, c, d* ოთხეულისთვის გავიგოთ, არსებობს თუ არა მთელი რიცხვები *x, y,* რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d\,.$$

მოძებნილ იქნა პროცესი, რომლის საშუალებით, მოცემული რიცხვების გათვალისწინებით, სასრული რაოდენობის „ნაბიჯების“ შემდეგ შესაძლებელი ხდება მოცემულ კითხვაზე პასუხი – „ჰო“ ან „არა“. მრავალი სხვა ალგორითმული პრობლემები აგრეთვე ამოხსნილი იყო კონკრეტული ამომხსნელი პროცესების მითითების გზით. მდგომარეობა არსებითად შეიცვალა XX საუკუნეში, რომელმაც წინა პლანზე წამოწია ისეთი ალგორითმული პრობლემები, რომლის დადებითი ამოხსნის არსებობა ეჭვს იწვევდა. მართლაც, ერთია – დაამტკიცო ალგორითმის არსებობა, მეორე კი – დაამტკიცო მისი არარსებობა. პირველი შესაძლებელია გაკეთდეს პროცესის ფაქტიური აღწერით, რომელიც ხსნის ამოცანას; ამ შემთხვევაში საკმარისია ალგორითმის ინტუიციური აღწერაც, რათა დავრწმუნდეთ იმაში, რომ აღწერილი პროცესი არის ალგორითმი. ამ გზით ალგორითმის არარსებობის დამტკიცება შეუძლებელია. ამისათვის საჭიროა ზუსტად ვიცოდეთ, რა არის ალგორითმი. გასული

საუკუნის ოციან წლებში ალგორითმის ცნების ზუსტი განსაზღვრის ამოცანა გახდა ერთ-ერთი ცენტრალური მათემატიკური პრობლემა. მისი ამოხსნა მიღებულ იქნა გასული საუკუნის ოცდაათიან წლეებში გილბერტის, გოედელის, ჩერჩის, კლინის, პოსტის და ტიურინგის შრომებში ორი ხერხით. პირველი ამოხსნა დაფუძნებული იყო რეკურსიული ფუნქციის ცნებაზე, მეორე – ზუსტად მოხაზული პროცესების კლასის აღწერაზე.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ალგორითმული პრობლემებისათვის ტიპურია მდგომარეობა, როდესაც საჭიროა მოიძებნოს ალგორითმი ამოცანების ამოსახსნელად, რომლის პირობებში მოცემულია რომელიმე სასრული სისტემის პარამეტრები x_1, ..., x_n , რომლებიც ღებულობენ მთელი რიცხვების მნიშვნელობას, ხოლო საძებნი შედეგი აგრეთვე მთელი რიცხვი y-ია. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, საქმე ეხება ალგორითმის არსებობას რიცხვითი ფუნქციის y -ის გამოსათვლელად, რომელიც დამოკიდებულია x_1, ..., x_n არგუმენტებზე, რომლებიც ღებულობენ მთელ მნიშვნელობას. რიცხვით ფუნქციებს, რომელთა მნიშნელობები შესაძლებელია გამოითვალოს რომელიმე (მოცემული ფუნქციისთვის) ალგორითმის საშუალებით, ეწოდება *გამოთვლითი ფუნქციები*. ვინაიდან ამ განსაზღვრებაში ალგორითმის ცნება აღებულია ინტუიციური აზრით, გამოთვლითი ფუნქციის ცნებაც ინტუიციურია. მიუხედავად ამისა, ალგორითმებიდან გამოთვლით ფუნქციებზე გადასვლისას ჩნდება ერთი ძალიან არსებითი გარემოება. პროცესების ერთობლიობა, რომლებიც აკმაყოფილებს a) – e) პირობებს და, მაშასადამე, ექვემდებარება ალგორითმის ინტუიციურ ცნებას, ძალიან ფართოა და განსახილველად ნაკლებად მისაწვდომია. პირიქით, გამოთვლითი ფუნქციების ერთობლიობა მრავალი პროცესების გასაგებად, რომლებიც აკმაყოფილებს a) – e) პირობებს, აღმოჩნდა ერთი და იგივე და, ამასთანავე, ადვილად აღწერადი ჩვეულებრივ მათემატიკურ ტერმინებში. ამ ზუსტად აღწერილ გამოთვლითი ფუნქციების ერთობლიობას, რომელიც ემთხვევა ყველა გამოთვლითი ფუნქციების ერთობლიობას, დამყარებულს აქამდე ფართოდ ცნობილი ალგორითმის გაგებაზე, უწოდებენ *რეკურსიული ფუნქციების* ერთობლიობას.

გამომდინარე ჰილბერტის იდეებიდან, გ ო ე დ ე ლ მ ა პირველად აღწერა ყველა რეკურსიული ფუნქციების კლასი როგორც ყველა გამოთვლითი ფუნქციების კლასი, განსაზღვრული რომელიღაც ფორმალურ სისტემაში. გამომდინარე სულ სხვა წინამძღვრებიდან, 1936 წელს ჩერჩმა მიაკვლია იგივე გამოთვლითი ფუნქციების კლასს, რასაც გოედელმა. იდეების ანალიზმა, რომლის საშუალებითაც მიკვლეულ იქნა აღნიშნული ფუნქციების კლასი, საშუალება მიცა ჩერჩს პირველად გამოექვეყნებინა ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ რეკურსიული ფუნქციების კლასი ემთხვევა ყველგან განსაზღვრულ გამოთვლითი ფუნქციების კლასს. ეს ჰიპოთეზა დღემდე ცნობილია *ჩერჩის თეზისის* სახელით. ვინაიდან გამოთვლითი ფუნქციის ცნება ზუსტად არ განისაზღვრება, ამიტომ ჩერჩის თეზისის დამტკიცება შეუძლებელია.

ზემოთ უკვე იყო აღნიშნული, რომ რომელიღაც x_1, ..., x_n საწყისი მონაცემების გადამუშავებისას მოცემული ალგორითმის შესაბამისად, შესაძლოა შეგვხვდეს სიტუაცია, როდესაც გადამუშავების პროცესი არ თავდება. ამ შემთხვევაში ამბო-

ბენ, რომ მოცემული ალგორითმი გადაამუშავებს x_1, ..., x_n რიცხვებს „განუსაზღვრელობაში“. იმისათვის, რომ ეს უსასრულოდ მიმდინარე გადამუშავების პროცესების მნიშვნელოვანი შემთხვევაც აგრეთვე არ გამოვტოვოთ, კ ლ ი ნ ი მ შემოიყვანა ნაწილობრივ რეკურსიული ფუნქციების ცნება და გამოთქვა ჰიპოთეზა, რომ ყველა ნაწილობრივ განსაზღვრული (ე. ი. არ არის აუცილებელი, რომ ფუნქცია განსაზღვრული იყოს ყველა თავისი არგუმენტების მნიშვნელობებზე) ფუნქციები, გამოთვლადი ალგორითმების საშუალებით, ნაწილობრივ რეკურსიულია. ცხადია, რომ კლინის უფრო ზოგადი ჰიპოთეზაც არ მტკიცდება, ისევე როგორც ჩერჩის ჰიპოთეზა. მიუხედავად ამისა კვლევებმა, რომლებსაც მრავალი მათემატიკოსი აწარმოებდა წლების განმავლობაში, გამოავლინა სრული მიზანშეწონილობა, ჩაითვალოს ნაწილობრივ რეკურსიული ფუნქციის ცნება, მეცნიერულ ეკვივალენტად ნაწილობრივ განსაზღვრული გამოთვლითი ფუნქციების ინტუიციური ცნებისა.

შემდგომში ჩვენ არ განვასხვავებთ ჩერჩის და კლინის თეზისებს და ჩერჩის თეზისად ჩვენ მოვიაზრებთ ჩერჩის თეზისს იმ გაფართოებული სახით, რომელიც მიანიჭა მას კლინმა.

ჩერჩის თეზისი აღმოჩნდა საკმარისი, რომ მივანიჭოთ აუცილებელი სიზუსტე ალგორითმული პრობლემების ფორმულირებას და ზოგ შემთხვევაში შესაძლებელი გახდეს მათი არაამოხსნადობის დამტკიცება. ამის მიზეზი ისაა, რომ ჩვეულებრივ მათემატიკის ალგორითმულ პრობლემებში საუბარია არა ალგორითმებზე, არამედ ზოგიერთი სპეციალურად აგებული ფუნქციების გამოთვლებზე. ჩერჩის თეზისის საფუძველზე ფუნქციის გამოთვლის საკითხი ეკვივალენტურია მისი რეკურსიულობის საკითხისა. რეკურსიული ფუნქციის ცნება მკაცრია. ამიტომ ჩვეულებრივი მათემატიკური ტექნიკა ზოგჯერ საშუალებას იძლევა უშუალოდ დამტკიცდეს, რომ ფუნქცია რომელიც ხსნის ამოცანას შეიძლება არ იყოს რეკურსიული. სახელდობრ, ამ გზით ჩ ე რ ჩ მ ა პირველმა დაამტკიცა პრედიკატთა ლოგიკის ძირითადი ალგორითმული პრობლემის არაამოხსნადობა – ზოგადმართებულობის პრობლემა პირველი რიგის თეორიის ფორმულებისათვის.

ნაწილობრივი რეკურსიული ფუნქციების კლასის ზუსტი აღწერა, ჩერჩის თეზისთან ერთად, გვაძლევს ალგორითმის ცნების დაზუსტების ამოცანის ერთ-ერთ შესაძლო ამოხსნას. მაგრამ ეს ამოხსნა არ არის სრულად პირდაპირი, ვინაიდან გამოთვლითი ფუნქციის ცნება არის მეორადი ალგორითმის ცნების მიმართ. ისმის კითხვა, შეიძლება თუ არა უშუალოდ დაზუსტდეს თვით ალგორითმის ცნება და უკვე შემდეგ მისი საშუალებით ზუსტად განისაზღვროს აგრეთვე გამოთვლითი ფუნქციების კლასი? ეს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გააკეთეს პ ო ს ტ მ ა და ტ ი უ რ ი ნ გ მ ა თითქმის ერთდროულად ჩერჩის და კლინის შრომების გამოქვეყნებასთან ერთად. პოსტის და ტიურინგის ძირითადი აზრი მდგომარეობდა იმაში, რომ ალგორითმული პროცესები – ეს არის პროცესები, რომლებსაც შეიძლება ჰქმნიდეს შესაფერისად მოწყობილი „მანქანა“. ამ აზრის შესაბამისად, მათ ზუსტ მათემატიკურ ტერმინებში აღწერეს მანქანების საკმარისად ვიწრო კლასი, მაგრამ ამ მანქანების საშუალებით შესაძლო გახდა განხორციელებულიყო ან იმიტირებუ-

ლიყო ყველა ალგორითმული პროცესი, რომლებიც ფაქტობრივად ოდესღაც აღწერილი იყო მათემატიკოსების მიერ. შემოგვთავაზეს აღნიშნულ მანქანებზე განხორციელებული ალგორითმები განხილულიყო, როგორც მათემატიკური „წარმომადგენლები" საერთოდ ყველა ალგორითმისა. უბრალო მოსაზრებებმა უჩვენეს, რომ ფუნქციათა კლასი, რომლებიც გამოთვლადია ამ მანქანებზე, ზუსტად ემთხვევა ყველა ნაწილობრივ რეკურსიული ფუნქციების კლასს. ამგვარად მიღებული იყო ჩერჩის თეზისის კიდევ ერთი ფუნდამენტური დადასტურება.

ოპერაციებს რიცხვით ფუნქციებზე მომავალში ვუწოდებთ ოპერატორებს. ამ პარაგრაფში განისაზღვრება მრავალი ოპერატორი, რომლებსაც გააჩნიათ ის თვისებები, რომ მათი გამოყენებით ფუნქციებზე, რომლებიც ინტუიციურად გამოთვლადია (იხ. შესავალი), მიიღება აგრეთვე ინტუიციურად გამოთვლადი ფუნქციები. ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქციებს, რომლებიც მიიღება მარტივი ფუნქციებიდან $s(x) = x + 1$, $o(x) = 0$, $I_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m$ ამ ოპერატორების გამოყენებით, ეწოდება ნაწილობრივ რეკურსიული. ჩერჩის ძირითადი თეზისი მდგომარეობს იმაში, რომ რეკურსიული ფუნქციების კლასი ემთხვევა ფუნქციების კლასს, რომლებიც იძლევა მანქანური ან ალგორითმული გამოთვლის საშუალებას.

დავუშვათ, მოცემულია რომელიღაც n ნაწილობრივ განსაზღვრული ერთი და იგივე m რიცხვის არგუმენტიანი ფუნქციები $f_1, \ldots, f_n$, A დომეინით და B მნიშვნელობათა არით, და დავუშვათ, რომ B-ზე განსაზღვრულია n-არგუმენტიანი ფუნქცია f, რომლის მნიშვნელობები ეკუთვნის რომელიმე მესამე სიმრავლე C-ს. ეხლა შემოვიღოთ ნაწილობრივ განსაზღვრული m-არგუმენტიანი ფუნქცია g, განსაზღვრული დომეინ A-ზე და კოდომეინ C-თი, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$g(x_1, \ldots, x_m) = f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$$

ნებისმიერი $x_1, \ldots, x_m$ A-დან. ვიტყვით, რომ ფუნქცია g მიღებულია *სუპერპოზიციის* ან *ჩანაცვლების* ოპერაციით $f, f_1, \ldots, f_n$ ფუნქციებისგან. ჩანაცვლების ოპერაცია შემდგომში აღინიშნება $\boldsymbol{S}^{n+1}$ სიმბოლოთი. ზედა ინდექსი მიუთითებს ფუნქციების რაოდენობაზე. შემდგომში A, B, C სიმრავლეების ნაცვლად გამოვიყენებთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbf{N}$-ს. $\mathfrak{F}^n$-ით აღვნიშნოთ ყველა n-არგუმენტიანი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციების სიმრავლე. ოპერატორი $\boldsymbol{S}^{n+1}$ ყველგან განსაზღვრული ფუნქციაა $\mathfrak{F}^n \times \mathfrak{F}^m \times \ldots \times \mathfrak{F}^m$-დან $\mathfrak{F}^n$-ში. თუ ჩვენ განვიხილავთ ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციების სიმრავლე $\mathfrak{F}$-ს ნებისმიერი რიცხვის არგუმენტებით, მაშინ ოპერატორი $\boldsymbol{S}^{n+1}$ შეიძლება განხილულ იქნას როგორც n + 1 არგუმენტიანი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქცია, რომლის დომეინი და კოდომეინი არის $\mathfrak{F}$. ამ შემთხვევაში ტერმს $\boldsymbol{S}^{n+1}(f, f_1, \ldots, f_n)$ გააჩნია გარკვეული მნიშვნელობა (რომელიც ემთხვევა m-არგუმენტიან ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქციას) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ცვლად f-ის მნიშვნელობა n-არგუმენტიანი ფუნქციაა, ხოლო $f_1, \ldots, f_n$ სიმბოლოების მნიშვნელობებია ერთი და იგივე არგუმენტიანი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციები. მაგალითად, ამ აზრით $\boldsymbol{S}^3(I_1^2, I_1^3, I_2^2)$ ტერმი არ არის განსაზღვრული, ტერმ $\boldsymbol{S}^3(I_1^2, I_1^3, I_2^3)$ -ის მნიშვნელობა უდრის I_1^3, სადაც I_1^2, I_1^3, I_2^3 – მარტივი ფუნქციების სიმბოლოებია.

სისტემა $\wp=(\Im, \boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{S}^3, \ldots)$, შემდგარი ფუნქციების ერთობლიობისაგან და მათზე განსაზღვრულ ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციებისგან $\boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{S}^3, \ldots$, არის ნაწილობრივი ალგებრა. დავუშვათ $f_1^{n}1, \ldots, f_s^{n}s$ არის ნებისმიერი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციები, შესაბამისად $n_1, \ldots, n_s$ არგუმენტებით ($n_1, \ldots, n_s$ ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია). ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქციებს, რომლებიც მიიღება სუპერპოზიციით $f_1^{n}1, \ldots, f_s^{n}s$ -გან და I_m^{n} (m, n =1,2, ...) ფუნქციებისგან, ეწოდება *ელემენტარული* $f_1^{n}1, \ldots, f_s^{n}s$ მიმართ. მათი ერთობლიობა წარმოადგენს ქვეალგებრას $\wp$ ალგებრაში, წარმოქმნილს $f_1^{n}1, \ldots, f_s^{n}s, I_m^{n}$ ელემენტებით.

დავუშვათ მოცემულია ჩვეულებრივი ფუნქციები + და ×. ფუნქცია, რომლის არგუმენტებია x_1 , x_2 , x_3 , ხოლო მისი ტერმალური წარმოდგენაა $x_1 \cdot x_2 + x_3$, არის ოპერატორული ტერმის

$$\boldsymbol{S}^3(+, \boldsymbol{S}^3((, I_1^3, I_2^3), I_3^3)$$

მნიშვნელობა.

დავუშვათ მოცემულია რომელიღაც რიცხვითი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციები: n-ადგილიანი g და $(n + 2)$-ადგილიანი ფუნქცია h. ვიტყვით, რომ $(n + 1)$-ადგილიანი ფუნქცია f წარმოიქმნება g და h ფუნქციებიდან *პრიმიტიული რეკურსიით*, თუ ნებისმიერი $x_1, \ldots, x_n$, y ნატურალური მნიშვნელობებისათვის

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)\,, \tag{1}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)). \tag{2}$$

ამ განსაზღვრებას აგრეთვე გამოვიყენებთ როცა $n = 1$, ვიტყვით, რომ ერთადგილიანი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქცია f წარმოიქმნება პრიმიტიული რეკურსიით კონსტანტური ერთადგილიანი ფუნქციიდან, რომელიც უდრის a, და ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქცია h-დან, თუ

$$f(0) = a\,, \tag{3}$$

$$f(x + 1) = h(x, y, f(x)). \tag{4}$$

ისმის კითხვა, ყოველი n და n+2-არგუმენტიანი g და h ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციისთვის არსებობს თუ არა n +1-არგუმენტიანი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქცია f, რომელიც აკმაყოფილებს (1), (2) ან, შესაბამისად, (3), (4) პირობებს და იქნება თუ არა ასეთი ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქცია ერთადერთი? ვინაიდან ფუნქციების განსაზღვრის არე არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, მაშინ პასუხი ამ ორ კითხვაზე, ცხადია, დადებითია. თუ ფუნქცია f არსებობს, მაშინ (1) და (2)-დან თანმიმდევრულად ვღებულობთ

$$\begin{aligned}
&f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)\,,\\
&f(x_1, \ldots, x_n, 1) = h(x_1, \ldots, x_n, 0, g(x_1, \ldots, x_n)), \qquad (5)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f(x_1, \ldots, x_n, m + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, m, f(x_1, \ldots, x_n, m))
\end{aligned}$$

და ამიტომ f განსაზღვრულია ცალსახად. (5)-დან, კერძოდ, ჩანს, რომ თუ რომელიღაც $x_1, \ldots, x_n, t$ მნიშვნელობებისათვის $f(x_1, \ldots, x_n, t)$ არ არის განსაზღვრული, მაშინ არ იქნება განსაზღვრული მნიშვნელობები $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ ყველა $y \geq t$.

იმისათვის, რომ მოცემული ნაწილობრივ განსაზღვრული g, h ფუნქციებიდან ვიპოვოთ f, წარმოქმნილი პრიმიტიული რეკურსიით, საკმარისია ტოლობები (5) მივიღოთ როგორც ტოლობები, რომლებიც განსაზღვრავენ ფუნქცია f-ს. მაშასადამე, ნებისმიერი ნაწილობრივ განსაზღვრული n-ადგილიანი და $(n + 2)$-ადგილიანი h $(n = 0,1,2, \ldots)$ ფუნქციებისთვის არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი ნაწილობრივ განსაზღვრული $(n+1)$-ადგილიანი ფუნქცია f, რომელიც წარმოიქმნება g და h-დან პრიმიტიული რეკურსიით. სიმბოლურად ჩაიწერება

$$f = \boldsymbol{R}\,(g, h)$$

და $\boldsymbol{R}$-ს განიხილავენ, როგორც ორადგილიან ნაწილობრივ განსაზღვრულ ოპერაციის სიმბოლოს, რომელიც განსაზღვრულია ყველა ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქციათა სიმრავლე $\mathfrak{I}$-ში. (5)-დან გამომდინარეობს, რომ თუ g და h ყველგან განსაზღვრულებია, მაშინ ფუნქცია f ყველგან განსაზღვრულია.

(5)-დან ჩანს აგრეთვე ჩვენთვის ფუნდამენტური გარემოება: თუ ჩვენ რაღაცნაირად „შეგვიძლია" g და h ფუნქციების მნიშვნელობების პოვნა, მაშინ f ფუნქციის მნიშვნელობები შესაძლებელია გამოითვალოს სრულიად „მექანიკური" ხასიათის პროცედურის საშუალებით. სახელდობრ, $f(a_1, \ldots, a_n, m+1)$ მნიშვნელობების საპოვნელად საკმარისია თანმიმდევრულად ვიპოვოთ რიცხვები

$$b_0 = g(a_1, \ldots, a_n)\,,$$

$$b_1 = h(a_1, \ldots, a_n, 0, b_0\,),$$

$$b_2 = h(a_1, \ldots, a_n, 1, b_1\,),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$

$$b_{m+1} = h(a_1, \ldots, a_n, m, b_m\,).$$

$(m+1)$ ნაბიჯზე მიღებული b_{m+1} რიცხვი სწორედ იქნება ფუნქციის საძებნი მნიშვნელობა $(a_1,\ldots,a_n, m+1)$ წერტილზე. $f(a_1, \ldots, a_n, m+1)$ ფუნქციის გამოთვლის პროცესი გაგრძელდება უსასრულოდ მხოლოდ მაშინ, როცა ერთ-ერთი გამოსახულების

$$g(a_1, \ldots, a_n),\ h(a_1, \ldots, a_n, 0, b_0),\ \ldots,\ h(a_1, \ldots, a_n, m, b_m),$$

გამოთვლის პროცესი გაგრძელდება უსასრულოდ, ე. ი. როცა ერთი მაინც ამ გამოსახულებებიდან მიიღებს განუსაზღვრელ მნიშვნელობას. მაგრამ მაშინ f ფუნქციის განსაზღვრის შესაბამისად $f(a_1, \ldots, a_n, m+1)$ იქნება განუსაზღვრელი.

ეხლა შემოვიღოთ რეკურსიული ფუნქციების ერთ-ერთი მთავარი ცნება. დავუშვათ მოცემულია ნაწილობრივ განსაზღვრული ფუნქციების რაღაც Σ სისტემა. ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქცია f-ს ეწოდება *პრიმიტიულად რეკურსიული* Σ *მიმართ,* თუ f შეიძლება მიღებულ იქნას ფუნქციების Σ სისტემიდან და მარტივი ფუნქციებიდან s, o, I_m^n სასრული რაოდენობით სუპერპოზიციის და პრიმიტიული რეკურსიის ოპერაციებით.

ფუნქცია f-ს ეწოდება *პრიმიტიულად რეკურსიული,* თუ f შეიძლება მიღებულ იქნას მხოლოდ მარტივი ფუნქიებიდან s, o, I_m^n სასრული რაოდენობით სუპერპოზიციის და პრიმიტიული რეკურსიის ოპერაციებით.

სუპერპოზიციის და პრიმიტიული რეკურსიის ოპერაციები, რომლებიც გამოყენებულია ყველგან განსაზღვრულ ფუნქციებზე, შედეგად აგრეთვე გვაძლევს ყველგან განსაზღვრულ ფუნქციებს. ამიტომ, თუ მოცემულია ყველგან განსაზღვრული ფუნქციების სისტემა Σ, მაშინ პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციები Σ-ას მიმართ აგრეთვე ყველგან განსაზღვრულია. კერძოდ, *ყველა პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციები ყველგან განსაზღვრულია.*

ცხადია, რომ ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქცია f, რომელიც პრიმიტიულად რეკურსიულია რომელიღაც ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქციათა Σ სიტემის მიმართ, პრიმიტიულად რეკურსიულია უფრო ფართო სისტემის მიმართ. პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციები შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციები ცარიელი სისტემის მიმართ. ამიტომ პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციები – ეს არის ფუნქციები, რომლებიც პრიმიტიულად რეკურსიულია ფუნციათა ნებისმიერი სისტემის მიმართ.

დაბოლოს, განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ *სუპერპოზიციის და პრიმიტიული რეკუსიის ოპერაციები, რომლებიც გამოიყენება ნაწილობრივ განსაზღვრულ ფუნქციებზე, რომლებიც პრიმიტიულად რეკუსიულია რომელიღაც* Σ *სისტემის მიმართ, შედეგად გვაძლევს აგრეთვე პრიმიტიულად რეკურსიულ ფუნქციებს* Σ *მიმართ.*

განვიხილოთ რომელიღაც n-ადგილიანი ($n \geq 1$) ნაწილობრივ განსაზღვრული რიცხვითი ფუნქცია f. დავუშვათ, რომ არსებობს რაიმე „მექანიზმი“ f ფუნქციის მნიშვნელობების გამოსათვლელად, ამასთანავე, ფუნქცია f არ არის განსაზღვრული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს მექანიზმი მუშაობს უსასრულოდ, რომელიც არ იძლევა არავითარ განსაზღვრულ შედეგს. დავაფიქსიროთ $x_1, \dots, x_{n-1}$ ფუნქცია f-ის პირველი $n - 1$ არგუმენტების რომელიღაც მნიშვნელობები და განვიხილოთ განტოლება

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n . \qquad (1)$$

რომ ვიპოვოთ ამ განტოლების (ნატურალური) ამოხსნა y, ზემოთ აღნიშნული მექანიზმის საშუალებით თანმიმდევრულად გამოვთვალოთ მნიშვნელობები $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ როცა $y = 0,1,2, \dots$. უმცირესი მნიშვნელობა a, რომლისთვის ვღებულობთ

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, a) = x_n,$$

აღვნიშნოთ შემდეგნაირად

$$\mu_y (f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n) \qquad (2)$$

(2)-ის მნიშვნელობის ძებნის აღწერილი პროცესი გაგრძელდება უსასრულოდ შემდეგ ჩამოთვლილ შემთხვევებში :

ა) $x_1, \dots, x_{n-1}, 0$) მნიშვნელობა არ არის განსაზღვრული ;

ბ) $(x_1, \ldots , x_{n-1}, y)$ მნიშვნელობები განსაზღვრულია როცა y = 0,1, … , a –1, მაგრამ განსხვავებულია x_n -სგან, ხოლო $f(x_1, \ldots , x_{n-1}, a)$ მნიშვნელობა არ არის განსაზღვრული;

გ) $f(x_1, \ldots , x_{n-1}, y)$ მნიშვნელობები განსაზღვრულია ყველა y = 0,1, … , a –1, მაგრამ განსხვავებულია x_n -სგან.

ყველა ამ შემთხვევაში გამოსახულება (2)-ის მნიშვნელობა ითვლება განუსაზღვრელად. დანარჩენ შემთხვევებში აღწერილი პროცესი წყდება და გვაძლევს უმცირეს ამოხსნას $y = a$. ეს ამოხსნა, როგორც აღვნიშნეთ, იქნება გამოსახულება (2)-ის მნიშვნელობა.

• • •

8.1 დაამტკიცეთ, რომ ჯამი $x + y$ პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციაა.

8.2 დაამტკიცეთ, რომ ნამრავლი xy პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციაა.

8.3 დაამტკიცეთ, რომ x^y პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციაა.

8.4 დაამტკიცეთ, რომ შეზღუდული სხვაობა $\dot{-}$ პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციაა.

8.5 დაამტკიცეთ, რომ კონსტანტა პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციაა.

8.6 დაამტკიცეთ, რომ sg x და ¬sg x პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციებია.

8.7 დაამტკიცეთ, რომ | x – y | პრიმიტიულად რეკურსიული ფუნქციაა.

9. გამონათქვამთა აღრიცხვა

გამონათქვამი არის მსჯელობა, რომელზედაც შეიძლება ითქვას: ის ჭეშმარიტია თუ მცდარი. გამონათქვამებისგან მათი სხვადასხვა შეკავშირების გზით შეიძლება შევადგინოთ ახალი, უფრო რთული გამონათქვამი.

უარყოფა, აღინიშნება $\neg$ ნიშნით, იწერება გამონათქვამის წინ. თუ p გამონათქვამია, მაშინ $\neg p$ იკითხება „არა p". $\neg p$ ჭეშმარიტია, როდესაც p მცდარია; $\neg p$ მცდარია, როდესაც p ჭეშმარიტია.

მეორე კავშირი არის *კონიუნქცია:* „და". p და q გამონათქვამების კონიუნქცია აღინიშნება როგორც $p \wedge q$. გამონათქვამი $p \wedge q$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე გამონათქვამი p და q ჭეშმარიტია.

დიზიუნქცია: „ან". $p \wedge q$ გამონათქვამების დიზიუნქცია აღინიშნება როგორც $p \vee q$. გამონათქვამი $p \vee q$ მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე გამონათქვამი p და q მცდარია.

შემდეგი მნიშვნელოვანი კავშირი არის *იმპლიკაცია:* „თუ p, მაშინ q", აღნიშვნაში $p \rightarrow q$. გამონათქვამი $p \rightarrow q$ მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p ჭეშმარიტია და q მცდარია.

ეკვივალენტობა: „p მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა q", აღნიშვნაში $p \leftrightarrow q$. გამონათქვამი $p \leftrightarrow q$ ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ან ორივე p და q ჭეშმარიტია, ან ორივე p და q მცდარია.

სიმბოლოებს $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ვუწოდებთ *პროპოზიციულ კავშირებს.*

მარტივი გამონათქვამებისაგან (პროპოზიციებისაგან) პროპოზიციული კავშირების საშუალებით აიგება უფრო რთული გამონათქვამები, რომლებსაც ვუწოდებთ პროპოზიციულ ფორმულებს. უფრო ზუსტად:

(1) პროპოზიციული ასოები $p_1, p_2, p_3, \ldots$ – პროპოზიციული ფორმულებია;

(2) თუ α და β პროპოზიციული ფორმულებია, $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ და $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ – პროპოზიციული ფორმულებია;

(3) სხვა პროპოზიციული ფორმულები არ არის.

ყველა პროპოზიციული ფორმულების სიმრავლე აღვნიშნოთ Φ-ით.

განვიხილოთ ფუნქცია $\nu : \Phi \rightarrow F$ ყველა პროპოზიციული ფორმულების Φ სიმრავლიდან ბულის ფუნქციათა F სიმრავლეში, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$\nu(p_i) = x_i,$$

$$\nu(\neg) = \neg,$$

$$\nu(\wedge) = \wedge,$$

$$\nu(\vee) = \vee,$$

$$\nu(\rightarrow) = \rightarrow,$$

$$\nu(\leftrightarrow) = \leftrightarrow,$$

სადაც ν ფუნქციის არგუმენტებში არის პროპოზიციული კავშირები, ხოლო ტოლობის მარჯვენა მხარეს ბულის ფუნქციები. კიდევ ნებისმიერი α და β პროპოზიციული ფორმულებისათვის

$$\nu(\neg\alpha) = \neg\nu(\alpha),\ \nu(\alpha \wedge \beta) = \nu(\alpha) \wedge \nu(\beta),\ \nu(\alpha \vee \beta) = \nu(\alpha) \vee \nu(\beta),\ \nu(\alpha \to \beta) =$$

$$= \nu(\alpha) \to \nu(\beta),\ \nu(\alpha \leftrightarrow \beta) = \nu(\alpha) \leftrightarrow \nu(\beta).$$

ადვილი დასანახია, რომ ν ფუნქციას გადაჰყავს პროპოზიციული ფორმულა შესაბამის ბულის ფუნქციაში.

α პროპოზიციულ ფორმულას ეწოდება *ტავტოლოგია*, თუ მისი შესაბამისი ბულის ფუნქცია $\nu(\alpha)$ იგივურად ტოლია 1, ე. ი. $\nu(\alpha)$ ღებულობს მნიშვნელობას 1, მიუხედავად იმისა თუ რა მნიშვნელობებს ღებულობენ მისი არგუმენტები. თუ α ტავტოლოგიაა, მაშინ $\nu(\alpha)$-ს ცხრილით წარმოდგენილ ფუნქციის მნიშვნელობათა სვეტში გვხდება მხოლოდ 1.

ჭეშმარიტობის ცხრილები გვაძლევს საშუალებას ვუპასუხოთ მრავალ მნიშვნელოვან კითხვაზე, რომლებიც ეხება ჭეშმარიტულ – ფუნქციონალურ საკითხებს, მათ შორის ისეთებს, როგორიცაა საკითხი იმის შესახებ, არის თუ არა მოცემული პროპოზიციული ფორმულა ტავტოლოგია, წინააღმდეგობა ან არც პირველი და არც მეორე, გამომდინარეობს თუ არა მოცემული პროპოზიციული ფორმულიდან მეორე ან არიან თუ არა მოცემული პროპოზიციული ფორმულები ლოგიკურად ეკვივალენტურები.

ლოგიკის უფრო რთული საკითხები უკვე შეუძლებელია ამოხსნილ იქნას ჭეშმარიტობის ცხრილის საშუალებით ან რომელიმე სხვა ეფექტური პროცედურების საშუალებით. ამიტომ ჩვენ მიერ განხილულ იქნება სხვა მეთოდი – ფორმალური თეორიების მეთოდი.

ფორმალური (*აქსიომატიკური*) *თეორია* S ითვლება განსაზღვრულად თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები :

(1) მოცემულია რომელიმე სიმბოლოების თვლადი სიმრავლე – S თეორიის სიმბოლოები. S თეორიის სიმბოლოთა სასრულ მიმდევრობებს უწოდებენ S თეორიის *გამოსახულებებს*.

(2) მოცემულია S თეორიის გამოსახულებათა სიმრავლის ქვესიმრავლე, რომლის ელემენტებს უწოდებენ S თეორიის *ფორმულებს*.

(3) გამოყოფილია ფორმულების რომელიღაც სიმრავლე, რომელთაც უწოდებენ S თეორიის აქსიომებს.

(4) მოცემულია ფორმულათა შორის მიმართებების $R_1, \ldots, R_n$ სასრული სიმრავლე, რომლებსაც უწოდებენ *გამოყვანის წესებს*. ყოველი R_i-სთვის არსებობს დადებითი მთელი რიცხვი j ისეთი, რომ ნებისმიერი სიმრავლისთვის, შემდგარი j -1 რაოდენობის ფორმულებისგან, და ყოველი α ფორმულისთვის ეფექტურად ამოხსნადია საკითხი იმის შესახებ, რომ იმყოფება თუ არა მოცემული j -1 ფორმულები R_i მიმართებაში ფორმულა α-სთან, და თუ ასეა, მაშინ ვიტყვით, რომ α *უშუალოდ გამომდინარეობს* მოცემული j -1 ფორმულებიდან R_i წესის საშუალებით.

გამოყვანას S -ში უწოდებენ ფორმულათა ნებისმიერ სასრულ მიმდევრობას $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ ისეთს, რომ ყოველი i-თვის ფორმულა α_i არის ან S თეორიის აქსიომა, ან უშუალოდ გამომდინარეობს წინამდებარე ფორმულებიდან ერთ-ერთი გამოყვანის წესის საშუალებით.

S თეორიის ფორმულა α-ს ეწოდება S თეორიის *თეორემა,* თუ არსებობს გამოყვანა S -ში, რომელშიც ბოლო ფორმულა არის α; ასეთ გამოყვანას უწოდებენ *ფორმულა α-ს გამოყვანას.*

ვიტყვით, რომ ფორმულა α გამომდინარეობს Γ ფორმულათა სიმრავლიდან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს α_1, α_2, ... , α_n ისეთი მიმდევრობა, რომ α_n არის α, და ყოველი i-თვის α_i არის ან აქსიომა, ან ეკუთვნის Γ-ს, ან უშუალოდ გამომდინარეობს წინამდებარე ფორმულებიდან ერთ-ერთი გამოყვანის წესის საშუალებით. ასეთ მიმდევრობას უწოდებენ α-ს *გამოყვანას* Γ-*დან*. Γ-ს წევრებს უწოდებენ *გამოყვანის ჰიპოთეზებს*. გამონათქვამის „α გამომდინარეობს Γ-დან“ შესამოკლებლად გამოვიყენებთ ჩანაწერს $\Gamma \vdash \alpha$. თუ გვინდა აღვნიშნოთ რომელ თეორიაში გამოიყვანება α Γ-დან გამოვიყენებთ ჩანაწერს $\Gamma \vdash_S \alpha$, რომელიც მიუთითებს იმაზე, რომელ თეორიაზე მიმდინარეობს საუბარი. თუ სიმრავლე Γ სასრულია: $\Gamma = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, მაშინ ნაცვლად $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \vdash \alpha$ ჩვენ ჩავწერთ $\beta_1, \ldots, \beta_n \vdash \alpha$. თუ Γ ცარიელი სიმრავლეა , მაშინ $\Gamma \vdash \alpha$ აქვს ადგილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α თეორემაა. ჩანაწერ $\varnothing \vdash \alpha$ ნაცვლად მიღებულია ჩანაწერი $\vdash \alpha$. მაშასადამე $\vdash \alpha$ არის შემოკლება გამონათქვამისა „|α თეორემაა“.

მოვიყვანოთ რამოდენიმე მარტივი თვისება გამომდინარეობის ცნებიდან.

(1) თუ $\Gamma \subseteq \Delta$ და $\Gamma \vdash \alpha$, მაშინ $\Delta \vdash \alpha$.

(2) $\Gamma \vdash \alpha$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Γ-ში არსებობს სასრული ქვესიმრავლე Δ, რომლისთვის $\Delta \vdash \alpha$.

(3) თუ $\Delta \vdash \alpha$ და $\Gamma \vdash \beta$ ნებისმიერი β-თვისΔ სიმრავლიდან, მაშინ $\Gamma \vdash \alpha$.

ეხლა ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ ფორმალურ აქსიომატიკურ თეორიას L გამონათქვამთა აღრიცხვისთვის.

(1) L-ის სიმბოლოებია $\neg$, $\rightarrow$, (,) და ასოები p_i დადებითი მთელი რიცხვების ინდექსებით: p_1, p_2, p_3, ... სიმბოლოებს $\neg$ და $\rightarrow$ ეწოდება *პრიმიტიული კავშირები* , ხოლო p_i -ს – *პროპოზიციული ასოები*.
   (a) ყოველი პროპოზიციული ასო ფორმულაა.
   (b) თუ α და β ფორმულებია, მაშინ $(\neg\alpha)$ და $(\alpha \rightarrow \beta)$ – აგრეთვე ფორმულებია. მაშასადამე, L თეორიის ყოველი ფორმულა უბრალოდ წარმოადგენს პროპოზიციულ ფორმას, აგებულს პროპოზიციული ასოებისგან კავშირების $\neg$ და $\rightarrow$ საშუალებით.

(2) L თეორიის ნებისმიერი α, β და γ ფორმულებისთვის, შემდეგი ფორმულები წარმოადგენენ L თეორიის აქსიომებს :

(A1) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$;

(A2) $((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$;

(A3) $((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta))$.

(3) ერთადერთი გამოყვანის წესია წესი modus ponens:

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta,}.$$

α და $\alpha \rightarrow \beta$ ფორმულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს ფორმულა β. ამ წესს შემოკლებით აღვნიშნავთ MP-თი.

შევნიშნოთ, რომ L თეორიის აქსიომათა უსასრულო სიმრავლე მოყვანილია მხოლოდ სამი *აქსიომათა სქემების* (A1), (A2), (A3) საშუალებით, ყოველი მათგანი წარმქმნის აქსიომათა უსასრულო სიმრავლეს. ნებისმიერი ფორმულისათვის ადვილი შესამოწმებელია არის თუ არა ის აქსიომა, და, მაშასადამე, L არის ეფექტურად აქსიომატიზირებადი თეორია. ჩვენ მიზნად ვისახავთ ისეთნაირად ავაგოთ სისტემა L, რომ ყველა თეორემების კლასი ემთხვეოდეს ყველა ტავტოლოგიის კლასს.

განვსაზღვროთ შემდეგი კავშირები :

(D1) $(\alpha \wedge \beta)$ ნიშნავს $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$;

(D2) $(\alpha \vee \beta)$ ნიშნავს $(\neg\alpha) \rightarrow \beta$;

(D3) $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ ნიშნავს $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

• • •

9.1 განსაზღვრეთ, არის თუ არა შემდეგი პროპოზიციული ფორმულები ტავტოლოგიები:

(a) $(((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset \beta)$;

(b) $((\alpha \equiv \beta) \equiv (\alpha \equiv (\beta \equiv \alpha)))$.

9.2 თუ $(\alpha \supset \beta)$ ტავტოლოგიაა, მაშინ ვიტყვით, რომ რომ β *ლოგიკურად გამომდინარეობს* α-დან (გამონათქვამთა აღრიცხვაში). თუ $(\alpha \equiv \beta)$ ტავტოლოგიაა, მაშინ ვიტყვით, რომ α და β *ლოგიკურად ეკვივალენტურებია* (გამონათქვამთა აღრიცხვაში).

დაამტკიცეთ ან უარყავით :

(a) $(\alpha \supset \beta)$ ლოგიკურად გამომდინარეობს $(\alpha \equiv \beta)$-დან;

(b) $((\neg\alpha) \vee (\beta)$ ლოგიკურად ეკვივალენტურია $(\neg\beta) \vee (\alpha)$;

9.3 უჩვენეთ, რომ α და β ლოგიკურად ეკვივალენტურებია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტობის ცხრილებში α და β-ს შესაბამისი სვეტები ერთმანეთს ემთხვევა.

9.4 განსაზღვრეთ, არის თუ არა ყოველი შემდეგი პროპოზიციული ფორმულა ტავტოლოგია, წინაამღდეგობა (ე. ი. ტავტოლოგიის უარყოფა) ან არც ერთი და არც მეორე :

(1) $(\alpha \equiv (\alpha(\alpha))$;

(2) $(\alpha \supset \beta) \supset ((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma))$;

(3) $((\alpha \supset \beta)\ \&\ \beta) \supset \alpha$;

(4) $(\neg\, \alpha) \supset (\alpha\ \&\ \beta)$;

(5) $\alpha\ \&\ (\neg(\alpha \vee \beta))$;

(6) $(\alpha \supset \beta) \equiv ((\neg\alpha) \vee \beta)$;

(7) $(\alpha \supset \beta) \equiv \neg\, (\alpha\ \&\ (\neg\beta))$.

9.5 დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ქვემოთ ჩამოთვლილი წყვილი შეადგენს ლოგიკურად ეკვივალენტურ პროპოზიციულ ფორმულებს :

(a) $\neg\, (\alpha \vee \beta)$ და $(\neg\, \alpha)\ \&\ (\neg\, \beta)$;

(a) $\neg\, (\alpha\ \&\ \beta)$ და $(\neg\, \alpha) \vee (\neg\, \beta)$;

(a) $\alpha\ \&\ (\beta \vee \gamma)$ და $(\alpha\ \&\ \beta) \vee (\alpha\ \&\ \gamma)$;

(a) $\alpha \vee (\beta\ \&\ \gamma)$ და $(\alpha \vee \beta)\ \&\ (\alpha \vee \gamma)$;

(a) $\alpha \vee (\alpha\ \&\ \beta)$ და α;

(a) $\alpha \supset \beta$ და $\neg\, \beta \supset \neg\, \alpha$;

(a) $(\alpha\ \&\ \beta) \vee (\neg\, \beta)$ და $\alpha \vee (\neg\, \beta)$;

(a) $\alpha\ \&\ (\alpha \vee \beta)$ და α;

(a) $\alpha\ \&\ \beta$ და $\beta\ \&\ \alpha$;

(a) $\alpha \vee \beta$ და $\beta \vee \alpha$;

(a) $(\alpha\ \&\ \beta)\ \&\ \gamma$ და $\alpha\ \&\ (\beta\ \&\ \gamma)$;

(a) $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ და $\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$;

(a) $\alpha \equiv \beta$ და $\beta \equiv \alpha$;

(a) $(\alpha \equiv \beta) \equiv \gamma$ და $\alpha \equiv (\beta \equiv \gamma)$.

9.6 (ო რ ა დ ო ბ ი ს პ რ ი ნ ც ი პ ი .)

(a) დაუშვათ, რომ α არის პროპოზიციული ფორმულა, რომელიც შეიცავს მხოლოდ $\neg$, & და $\vee$ კავშირებს, ხოლო α' მიიღება α-სგან მასში ყველგან &-ის შეცვლით $\vee$-ით და $\vee$-ის &-ით; დაამტკიცეთ, რომ α არის ტავტოლოგია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\neg\alpha'$ არის ტავტოლოგია. აქედან: თუ $\alpha \supset \beta$ არის ტავტოლოგია, მაშინ $\beta' \supset \alpha'$ არის ტავტოლოგია, და თუ $\alpha \equiv \beta$ არის ტავტოლოგია, მაშინ $\alpha' \equiv \beta'$ არის ტავტოლოგია.

(b) დავუშვათ, რომ α არის პროპოზიციული ფორმულა, რომელიც შეიცავს მხოლოდ $\neg$, & და $\vee$ კავშირებს, ხოლო α^* მიიღება α-სგან ყველგან &-ის შეცვლით $\vee$-ით და $\vee$-ის &-ით და ყოველი პროპოზიციული ასოს უარყოფით; უჩვენეთ, რომ პროპოზიციული ფორმულა α^* ლოგიკურად ეკვივალენტურია პროპოზიციული ფორმულისა $\neg\alpha'$. პროპოზიციულ ფორმულას α^* ეწოდება α პროპოზიციული ფორმულის *ორადული*. მოძებნეთ პროპოზიციული ფორმულა, რომელიც ორადულია შემდეგი პროპოზიციული ფორმულისა

$$(\alpha \vee \neg\beta)\ \&\ \alpha\ \&\ (\neg\gamma \vee (\alpha\ \&\ \gamma)).$$

9.7 დაამტკიცეთ (გამოყვანის აგებით) :

1. $\vdash_L (\neg\alpha \supset \alpha) \supset \alpha$.
2. $\alpha \supset \beta,\ \beta \supset \gamma \vdash_L \alpha \supset \gamma$.
3. $\alpha \supset (\beta \supset \gamma) \vdash_L \beta \supset (\alpha \supset \gamma)$.
4. $\vdash_L (\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)$.

9.8 უჩვენეთ, რომ შემდეგი ფორმულები წარმოადგენს L თეორიის თეორემებს:

(a) $((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \alpha$;

(a) $\alpha \supset (\beta \supset (\alpha \,\&\, \beta))$.

9.9 შეამოწმეთ, რომ ნებისმიერი α, β და γ პროპოზიციული ფორმულებისთვის შემდეგი პროპოზიციული ფორმულები ტავტოლოგიებია და, მაშასადამე, L თეორიის თეორემებია:

(a) $((\alpha \vee \beta) \,\&\, (\alpha \supset \gamma) \,\&\, (\beta \supset \gamma)) \supset \gamma$;

(a) $\alpha \supset (\beta \supset \gamma) \equiv (\alpha \,\&\, \beta) \supset \gamma$.

9.10 1) დაუშვათ, რომ (და (იმყოფება R მიმართებაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash_L \alpha \equiv \beta$. დაამტკიცეთ, რომ R არის ეკვივალენტობის მიმართება.

2) ნებისმიერი [α] და [β] ეკვივალენტობის კლასებისთვის დავუშვათ, რომ $[\alpha] \cup [\beta] = [\alpha \vee \beta]$, $[\alpha] \cap [\beta] = [\alpha \,\&\, \beta]$, $-[\alpha] = [\neg\alpha]$. დაამტკიცეთ, რომ R მიმართების მიერ წარმოქმნილი ეკვივალენტობის კლასები ჰქმნიან ბულის ალგებრას $\cup$, $\cap$, $-$ ოპერაციების მიმართ. ამ ალგებრას უწოდებენ *ლინდებაუმის ალგებრას*, რომელიც წარმოქმნილია L თეორიის მიერ და აღინიშნება L^*. L^* ალგებრის ნულოვანი ელემენტი 0 არის ყველა წინააღმდეგობათა (ე. ი. ტავტოლოგიათა უარყოფა) კლასი. L^* ალგებრის ერთეული 1 არის ეკვივალენტობის კლასი, რომელიც შედგება ყველა ტავტოლოგიებისაგან. შევნიშნოთ, რომ $\vdash_L \alpha \supset \beta$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $[\alpha] \le [\beta]$ L^*-ში, და $\vdash_L \alpha \equiv \beta$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ , როცა $[\alpha] = [\beta]$. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ბულის ფუნქცია f, (აგებული ცვლადებისგან $\cup$, $\cap$, $-$, 0 და 1 საშუალებით) იგივურად ტოლია 1-ის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vdash_L f\#$, სადაც $f\#$ მიიღება f-გან $\cup$, $\cap$, $-$, 0 და 1 ოპერაციების შენაცვლებით $\vee$, &, $\neg$, $p_1 \,\&\, \neg p_1$ და $p_1 \vee \neg p_1$ კავშირებით შესაბამისად.

9.11 ჩაწერეთ ფორმულა $(\neg p \to \neg q) \vee r$ სრულყოფილ ნორმალურ დიზიუნქციურ ფორმაში.

9.12 ჩაწერეთ ფორმულა $(p \to \neg q) \vee r$ სრულყოფილ ნორმალურ დიზიუნქციურ ფორმაში.

9.13 დაამტკიცეთ შემდეგი ეკვივალენტობები:

(a) $(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \equiv Q \wedge (P \vee R)$

(a) $\neg(\neg(P \wedge Q) \vee P) \equiv \mathrm{F}$

(a) $\neg P \to \neg Q$

9.14. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

(a) $(P_3 \wedge \mathrm{T}) \wedge (P_2 \wedge \mathrm{T})$

(a) $(P_3 \wedge (P_2 \wedge (P_1 \wedge P_3)))$

(a) $(P_3 \wedge \mathrm{T}) \wedge (P_2 \wedge \neg P_3)$

9.15 გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

(a) $(Q \wedge R \wedge S) \vee (Q \wedge \neg R \wedge S)$

(a) $(P \vee R) \wedge (P \vee R \vee S)$

(a) $(P \vee (Q \wedge S)) \vee (\neg Q \wedge S)$

9.16 შეიტანეთ ყველა უარყოფა გამოსახულებების შიგნით შესაძლებლობისამებრ:

(a) $\neg(P_1 \wedge \neg(P_2 \vee \neg P_3))$

(a) $P \vee \neg(P \vee (Q \vee R))$

9.17 გამოიყენეთ გამონათქვამთა ალგებრას დებულებები შემდეგი გამოსახულებების გამარტივებისათვის:

(a) $P \vee \neg Q \wedge (P \wedge Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge \neg P \wedge Q$

(a) $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg(P \vee \neg R) \wedge Q)$

(a) $\neg((P \vee \neg Q) \wedge R) \vee Q$

9.18. მოძებნეთ კონიუნქციური ნორმალური ფორმა შემდეგი გამოსახულებებისათვის, გამონათქვამთა ალგებრას დებულებების გამოყენებით:

(a) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \rightarrow R \vee Q)$

(a) $(P \vee Q) \wedge (P \vee (R \wedge S)) \vee (P \wedge Q \wedge S)$

(a) $\neg((P \vee \neg Q) \wedge R) \vee Q$.

10. პირველი რიგის თეორია

მსგავსად იმისა, როგორ იყო გამოყენებული პროპოზიციული ფორმულები ლოგიკური სტრუქტურის გამოსავლენად, რომელიც დამოკიდებული იყო პროპოზიციულ კავშირებზე, შესაძლებელია აგრეთვე წარმოვადგინოთ აბსტრაქტულ ფორმებში მსჯელობები (ისეთი, როგორც (1) – (3)), რომლებიც შეიცავენ კვანტორებს , ისეთნაირად როგორც ეს გაკეთებული იყო (1') – (3') სახით. ამ მიზნით ჩვენ გამოვიყენებთ მძიმეებს, ფრჩხილებს, გამონათქვამთა აღრიცხვის სიმბოლოებს $\neg$ და $\supset$, *საგნობრივ (ინდივიდურ) ცვლადებს* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *საგნობრივ (ინდივიდურ) კონსტანტებს* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, *პრედიკატულ ასოებს* $P_1^1, P_1^2, \ldots, P_k^j, \ldots$ და *ფუნქციონალურ სიმბოლოებს* $f_1^1, f_1^2, \ldots, f_k^j, \ldots$. პრედიკატული ან ფუნქციონალური ასოს ზედა ინდექსი მიუთითებს არგუმენტების რაოდენობას, ხოლო ქვედა ინდექსი განასხვავებს ერთსა და იმავე არგუმენტიან ასოებს. ფუნქციონალური ასოები, გამოყენებული საგნობრივ ცვლადებზე და კონსტანტებზე, წარმოქმნიან *ტერმებს*. უფრო ზუსტად:

(a) ყოველი საგნობრივი ცვლადი და კონსტანტა ტერმია;

(b) თუ f_i^n ფუნქციონალური ასოა და $t_1, \ldots, t_n$ ტერმებია, მაშინ $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ არის ტერმი;

(c) გამოსახულება არის ტერმი მხოლოდ მაშინ, როცა ის მიიღება (a) და (b) წესით.

პრედიკატული ასოები, გამოყენებული ტერმებზე, წარმოქმნიან *ელემენტარულ ფორმულებს*. უფრო ზუსტად: თუ P_i^n პრედიკატული ასოა, ხოლო $t_1, \ldots , t_n$ – ტერმებია, მაშინ $P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ ელემენტარული ფორმულაა.

პრედიკატთა აღრიცხვის *ფორმულები* განისაზღვრება შემდეგნაირად:

(a) ყოველი ელემენტარული ფორმულა ფორმულაა;

(b) თუ α და β ფორმულებია და y საგნობრივი ცვლადია, მაშინ $(\neg\alpha)$, $(\alpha \supset \beta)$ და $(\forall y\alpha)$ ფორმულებია;

(c) გამოსახულება არის ფორმულა მხოლოდ მაშინ, როცა ის მიიღება (a) და (b) წესით.

$(\forall y\alpha)$ გამოსახულებაში "α"-ს ეწოდება $\forall y$ *კვანტორის მოქმედების არე.* შევნიშნოთ, რომ α შესაძლებელია არ შეიცავს ცვლად y; ამ შემთხვევაში ვთვლით, რომ შინაარსობრივი აზრი α და $(\forall y\alpha)$ ერთი და იგივეა. ისევე როგორც გამონათქვამთა აღრიცხვაში განისაზღვრება გამოსახულებები $\alpha \,\&\, \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \equiv \beta$. არ არის აუცილებლობა მთავარ სიმბოლოთა რიცხვში ჩაირთოს $\exists$ ნიშანი არსებობის კვანტორისათვის, ვინაიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\exists x\alpha$ როგორც შემოკლებული ჩანაწერი $\neg(\forall x(\neg\alpha))$ გამოსახულებისა.

ცვლად x-ის შემავლობას მოცემულ ფორმულაში ეწოდება *ბმული* , თუ x არის ამ ფორმულაში შემავალი კვანტორის $\forall x$ ცვლადი ან იმყოფება ამ ფორმულაში შემავალი კვანტორის $\forall x$ მოქმედების არეში; წინააღმდეგ შემთხვევაში, ცვლად x-ის შემავლობას მოცემულ ფორმულაში ეწოდება *თავისუფალი.*

ტერმ t-ს ეწოდება *თავისუფალი* x_i ცვლადისთვის ფორმულა α-ში, თუ x_i-ის არცერთი თავისუფალი შემავლობა α-ში არ იმყოფება კვანტორ $(x_j$ მოქმედების არეში, სადაც x_j *არის ცვლადი, რომელსაც შეიცავს* t.

მაგალითები.

(a) ტერმი x_j თავისუფალია x_i -თვის $P_1^1(x_i)$-ში, მაგრამ არ არის თავისუფალი $\forall x_j P_1^1(x_i)$-ში. ტერმი $f_1^2(x_1, x_3)$ თავისუფალია x_i-თვის $\forall x_2 P_1^2(x_1, x_2) \supset P_1^1(x_1)$-ში, მაგრამ არ არის თავისუფალი $\exists x_3 \forall x_2 P_1^2(x_1, x_2) \supset P_1^1(x_1)$-ში.

(b) ყოველი ტერმი, რომელიც არ შეიცავს ცვლადებს, თავისუფალია ნებისმიერი ცვლადისთვის ნებისმიერ ფორმულაში.

(c) ტერმი t თავისუფალია ნებისმიერი ცვლადისთვის ფორმულა α-ში, თუ ტერმ t-ს არცერთი ცვლადიარ არის ბმული ცვლადი α-ში.

(d) x_i თავისუფალია x_i ცვლადისთვის ნებისმიერ ფორმულაში.

(e) ყოველი ტერმი თავისუფალია x_i-თვის α-ში, თუ α არ შეიცავს x_i-ის თვისუფალ შემავლობას.

ინტერპრეტაციის ქვეშ ჩვენ გვესმის ფუნქცია $\varphi: L \to D$,

რომელიც ასახავს ენას ალგებრულ სისტემაში

$$(D, \{g_i^j\}, \{R_i^j\}),$$

სადაც $\varphi(a_i) \in D$, $\varphi(f_i^j) = g_i^j$, $\varphi(P_i^j) = R_i^j$, და $g_i^j: D^j \to D$ da $R_i^j \subseteq D^j$ არის შესაბამისად j-ადგილიანი ოპერაცია და მიმართება D-ში. D-ს ეწოდება φ ინტერპრეტაციის არე. მოცემულ ინტერპრეტაციაში ცვლადები მოისაზრება როგორც ცვლადები D-ზე, ხოლო კავშირებს $\neg$, $\supset$ და კვანტორებს ენიჭება მათი ჩვეულებრივი აზრი.

მოცემული ინტერპრეტაციისათვის ნებისმიერი ფორმულა თავისუფალი ცვლადების გარეშე (ან, სხვანაირად, *ჩაკეტილი ფორმულა*) წარმოადგენს გამონათქვამს, რომელიც ჭეშმარიტია ან მცდარია, ხოლო ნებისმიერი ფორმულა თავისუფალი ცვლადებით გამოხატავს რომელიღაც მიმართებას ინტერპრეტაციის არეში; ეს მიმართება შეიძლება იყოს შესრულებადი (ჭეშმარიტი) ცვლადების რომელიღაც მნიშვნელობებისათვის ინტერპრეტაციის არედან და არ იყოს შესრულებადი (მცდარი) სხვა მნიშვნელობებისათვის.

მაგალითები:

(i) $P_1^2(x_1, x_2)$;

(ii) $\forall x_1\, P_1^2(x_1, x_2)$;

(iii) $\exists x_2 \forall x_1 P_1^2(x_2, x_1)$.

თუ ჩვენ ვიღებთ ინტერპრეტაციის არედ დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლეს და $P_1^2(y, z)$ ინტერპრეტაცია არის $y \leq z$, მაშინ (i) წარმოადგენს მიმართებას $y \leq z$, რომელიც შესრულებადია ყველა ისეთ დადებით მთელ რიცხვთა (a,b) დალაგებულ წყვილებისთვის, რომ $a \leq b$; (ii) წარმოადგენს თვისებას (ე. ი. უნარულ (ერთადგილიან) მიმართებას) „ყოველი დადებითი მთელი y რიცხვისთვის, $y \leq z$“, რომელიც სრულდება მხოლოდ 1 რიცხვისთვის; დაბოლოს, (iii) არის ჭეშმარიტი გამონათქვამი, რომელიც ამტკიცებს უმცირესი დადებითი მთელი რიცხვის არსებობას. ჩვენ რომ ინტერპრეტაციის არედ აგველო ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლე, მაშინ (iii) აღმოჩნდებოდა მცდარი.

შესრულებადობის და ჭეშმარიტობის ცნება ინტუიციურად გასაგებია, მაგრამ სკეპტიკოსებისთვის შესაძლებელია მოვიყვანოთ უფრო ზუსტი ფორმულირება. დაუშვათ გვაქვს რომელიმე ინტერპრეტაცია φ თავისი ინტერპრეტაციის არეთი D, და Σ იყოს ყველა თვლადი მიმდევრობათა სიმრავლე, რომლის ელემენტები არის D-დან. ჩვენ ახლა განვსაზღვრავთ, რას ნიშნავს, რომ ფორმულა α შესრულებადია $s = (b_1, b_2, \ldots)$ მიმდევრობაზე Σ-დან მოცემული ინტერპრეტაციისათვის.

წინასწარ განვსაზღვრავთ ერთადგილიან ფუნქციას s^*, რომლის დომეინია ყველა ტერმთა სიმრავლე, ხოლო კოდომეინი არის D.

(1) თუ ტერმი t არის საგნობრივი ცვლადი x_i, მაშინ $s^*(t) = b_i$.

(2) თუ ტერმი t არის საგნობრივი კონსტანტა a_i, მაშინ $s^*(t)$ ემთხვევა მის ინტერპრეტაციას $\varphi(a_i) \in D$.

(3) თუ f_i^n ფუნქციონალური ასოა, რომლის ინტერპრეტაცია $\varphi(f_i^n) = g_i^n$ არის n - ადგილიანი ოპერაცია D-ზე, და $t_1, \ldots , t_n$ ტერმებია, მაშინ

$$s^* (f_i^n(t_1, \ldots , t_n)) = g_i^n(s^*(t_1), \ldots , s^*(t_n)) .$$

ახლა შევუდგეთ ძირითად განსაზღვრებას, რომელსაც განვმარტავთ ფორმულის ინდუქციურ განსაზღვრაზე დაყრდნობით.

(i) თუ α არის ელემენტარული ფორმულა $P_j^n(t_1, \ldots , t_n)$ და R_j არის მისი შესაბამისი მიმართება $\varphi(P_j^n)$ მოცემულ ინტერპრეტაციაში, მაშინ ფორმულა (შესრულებადია Σ მიმდევრობაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $R_j^n(s^*(t_1),\ldots, s^*(t_n))$, ე. ი. n-ელემენტიანი მიმდევრობა $(s^*(t_1),\ldots,s^*(t_n))$ ეკუთვნის მიმართება R_j^n.

(ii) ფორმულა ¬α შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა α არ არის შესრულებადი s-ზე.

(iii) ფორმულა $\alpha \supset \beta$ შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა α არ არის შესრულებადი მიმდევრობა s-ზე ან როცა ფორმულა β შესრულებადია s-ზე.

(iv) ფორმულა $\forall x_i\alpha$ შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა α შესრულებადია ნებისმიერ მიმდევრობაზე Σ -დან, რომელიც განსხვავებულია s-სგან არაუმეტეს თავისი i-ური კომპონენტით.

სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ფორმულა α შესრულებადია $s = (b_1, b_2, \ldots)$ მიმდევრობაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჩანაცვლება ყოველი i-სთვის სიმბოლოსი, რომელიც წარმოადგენს b_i, ადგილებზე სადაც x_i წარმოადგენს თავისუფალ ცვლადს α-ში გვაძლევს ჭეშმარიტ წინადადებას მოცემულ ინტერპრეტაციაში.

ფორმულა α-ს ეწოდება *ჭეშმარიტი* (მოცემულ ინტერპრეტაციაში) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შესრულებადია ნებისმიერ მიმდევრობაზე Σ-დან.

ფორმულა α-ს ეწოდება *მცდარი* (მოცემულ ინტერპრეტაციაში), თუ ის არ არის შესრულებადი არცერთ მიმდევრობაზე Σ-დან.

მოცემულ ინტერპრეტაციას ეწოდება *მოდელი* მოცემული Γ სიმრავლისათვის, თუ ყოველი ფორმულა Γ-დან ჭეშმარიტია მოცემულ ინტერპრეტაციაში.

ნებისმიერი პირველი რიგის K თეორიის სიმბოლოები არსებითად წარმოადგენენ იგივე სიმბოლოებს, რომლებიც ჩვენ შემოვიღეთ ადრე ამ თავში: პროპოზიციული კავშირები $\neg$, $\supset$; პუნქტუაციის ნიშნები (,) (მკაცრად რომ ვთქვათ, მძიმე არ არის აუცილებელი, მაგრამ მოსახერხებელია ფორმულების წაკითხვისათვის); საგნობრივი ცვლადების x_1, x_2, … თვლადი სიმრავლე; არაცარიელი, სასრული ან თვლადი, პრედიკატული ასოების სიმრავლე P_j^n ($n, j \geq 1$); სასრული (შესაძლებელია ცარიელიც) ან თვლადი სიმრავლე ფუნქციონალური ასოებისა f_j^n ($n, j \geq 1$); დაბოლოს, სასრული (აგრეთვე, შესაძლებელია, ცარიელი) ან თვლადი სიმრავლე საგნობრივი კონსტანტებისა a_i ($i \geq 1$). ამგვარად, K თეორიას შესაძლებელია არ გააჩნდეს რომელიმე ან ყველა ფუნქციონალური ასოებიც კი და საგნობრივი კონსტანტები, აგრეთვე რომელიმე – მაგრამ არა ყველა! – პრედიკატული ასოები. სხვადასხვა თეორიები შეიძლება განსხვავდებოდნენ ერთმანეთისგან სიმბოლოების შემადგენლობით. წინა ლექციაში განსაზღვრული ტერმები, ფორმულები და პროპოზიციული კავშირები &, $\vee$, $\equiv$რჩება ძალაში ნებისმიერი პირელი რიგის თეორიისათვის. რა თქმა უნდა, ყოველი პირველი რიგის (თეორიისთვის ტერმების და ფორმულების აგებაში მონაწილეობენ მხოლოდ ის სიმბოლოები, რომლებიც ეკუთვნიან (თეორიას.

K თეორიის აქსიომები იყოფა ორ კლასად: ლოგიკურ და საკუთრივ (არალოგიკურ) აქსიომებად.

ლოგიკური აქსიომები: K თეორიის α, β და γ ნებისმიერი ფორმულებისთვის, შემდეგი ფორმულები წარმოადგენენ K თეორიის აქსომებს :

(1) $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$;

(2) $((\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma)))$;

(3) $((\neg\beta \supset \neg\alpha) \supset ((\neg\beta \supset \alpha) \supset \beta))$;

(4) $\forall x_i\, \alpha(x_i) \supset \alpha(t)$, სადაც $\alpha(x_i)$ არის K თეორიის ფორმულა, რომელიც თავისუფალია x_i-სთვის $\alpha(x_i)$-ში. შევნიშნოთ, რომ t შეიძლება ემთხვეოდეს x_i-ს, და M-ს მაშინ ჩვენ ვღებულობთ აქსომას $\forall x_i \alpha(x_i) \supset \alpha(x_i)$.

(5) $\forall x_i (\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \forall x_i \beta)$, თუ ფორმულა (არ შეიცავს ცვლად x_i თავისუფალ შემავლობას.

• • •

დაამტკიცეთ შემდეგი დებულებები, რომლებიც გამომდინარეობენ განსაზღვრებიდან:

(I) α მცდარია მოცემულ ინტერპრეტაციაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\neg\alpha$ ჭეშმარიტია იგივე ინტერპრეტაციაში, და α ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\neg\alpha$ მცდარია.

(II) არცერთი ფორმულა არ შეიძლება იყოს ერთდროულად ჭეშმარიტი და მცდარი ერთსა დ იმავე ინტერპრეტაციაში.

(III) თუ მოცემულ ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია α და $\alpha \supset \beta$, მაშინ ჭეშმარიტია β.

(IV) $\alpha \supset \beta$ მცდარია მოცემულ ინტერპრეტაციაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ჭეშმარიტია ამ ინტერპრეტაციაში, ხოლო β მცდარია.

(V) (i) α & β შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა α შესრულებადია s-ზე და β შესრულებადია s-ზე. $\alpha \vee \beta$ შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა α შესრულებადია s-ზე ან β შესრულებადია s-ზე. $\alpha \equiv \beta$ შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ან ფორმულა α შესრულებადია s-ზე და β შესრულებადია s-ზე, ან α არ არის შესრულებადი s -ზე და β არ არის შესრულებადია s-ზე.

(ii) $\exists x_i\alpha$ შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α შესრულებადია ერთზე მაინც s' მიმდევრობაზე, რომელიც განსხვავდება s-სგან არაუმეტეს მხოლოდ i -ური კომპონენტით.

(VI) α ჭეშმარიტია მოცემულ ინტერპრეტაციაში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამავე ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია $\forall x_i\alpha$. მოცემული α ფორმულის *ჩაკეტვა* ეწოდება ფორმულას, რომელიც მიიღება ზოგადობის კვანტორების მინაწერით α-ს წინ, რომლებიც შეიცავენ ინდექსების კლებადობის მიხედვით α-ს ყველა თავისუფალ ცვლადებს. α ფორმულის ჩაკეტვას, რომელიც არ შეიცავს თავისუფალ ცვლადებს, ვუწოდებთ თვით ამ ფორმულა α-ს. (მაგალითად, თუ α არის $P_1^2(x_2, x_5) \supset \neg\exists x_2 P_1^3(x_1, x_2, x_3)$, მაშინ α-ს ჩაკეტვა იქნება $\forall x_5 \forall x_3 \forall x_2 \alpha$).

(VII) ტავტოლოგიის ყოველი კერძო შემთხვევა ჭეშმარიტია ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში (მოცემული პროპოზიციული ფორმის კერძო შემთხვევას ვუწოდებთ ნებისმიერ ფორმულას, რომელიც მიიღება ამ ფორმულაში პროპოზიციული ფორმულების ნაცვლად (პრედიკატთა აღრიცხვის) ფორმულების ჩანაცვლებით იმ პირობით, რომ ერთი და იმავე პროპოზიციული ასოების შემავლობის ადგილას ერთი და იგივე ფორმულა ჩაინაცვლება).

(VIII) დაუშვათ, რომ ფორმულა α-ს ყველა თავისუფალი ცვლადები იმყოფება $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ ცვლადებს შორის. მაშინ თუ s და s' მიმდევრობების კომპონენტები

$i_1, \ldots, i_n$ ნომრით ემთხვევა ერთმანეთს, მაშინ ფორმულა α შესრულებადია s-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შესრულებადია s'-ზე. (მ ი თ ი თ ე ბ ა. ინდუქცია კავშირების და კვანტორების რაოდენობის მიხედვით ფორმულა α-ში. ჯერ დამტკიცდეს, რომ ტერმ t-ს ცვლადები იმყოფება $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ შორის, ხოლო s და s' მიმდევრობების წევრები $i_1, \ldots, i_n$ ნომრით ემთხვევა ერთმანეთს, მაშინ $s^*(t) = (s')^*(t)$. კერძოდ, თუ t არ შეიცავს ცვლადებს, მაშინ $s_1{}^*(t) = s_2{}^*(t)$ ნებისმიერი s_1 და s_2 მიმდევრობებისათვის.

ყველა ისეთ n-ელემენტიან $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})$ მიმდევრობებათა სიმრავლეს, რომელთა ელემენტები ეკუთვნიან ინტერპრეტაციის D არეს, და ფორმულა α შესრულებადია ყოველ მიმდევრობა s-ზე, რომლის $i_1, \ldots, i_n$ კომპონენტები ემთხვევა შესაბამისად $b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}$, ეწოდება ინტერპრეტაციის მიმართება (ან თვისება), რომელიც შეესაბამება ფორმულა α-ს. დავუშვათ, მაგალითად, რომ D არის ყველა ადამიანთა სიმრავლე, $P_1^2(x,y)$ და $P_2^2(x,y)$ ინტერპრეტაციები შესაბამისად არიან „x არის y-ის ძმა“ და „x არის y-ის მშობელი“; მაშინ ბინარული მიმართება D-ში, რომელიც შეესაბამება ფორმულას $\exists x_3(P_1^2(x_1,x_3)$ & $P_2^2(x_3,x_2))$, წარმოადგენს მიმართებას – ნათესაურ კავშირს, რომელიც აკავშირებს ძმისშვილს და ბიძას. თუ ინტერპრეტაციის არედ ავიღებთ მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლეს, ხოლო P_1^2, f_1^2 და a_1 ინტერპრეტირებულია შესაბამისად როგორც = , გამრავლება და 1, მაშინ ფორმულას

$$\neg P_1^2(x_1, a_1) \,\&\, \forall x_2(\exists x_3\, P_1^2(x_1,f_1^2(x_2, x_3)) \supset P_1^2(x_2, x_1) \vee P_1^2(x_2, a_1))$$

შეესაბამება მოცემული აზრით რიცხვის თვისება, იყოს მარტივი.

(IX) თუ ფორმულა α ჩაკეტილია, მაშინ ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში ჭეშმარიტია ან α, ან $\neg\alpha$ (ე. ი. α მცდარია .

(არაჩაკეტილია ფორმულა, რომელიც არ შეიცავს თავისუფალ ცვლადებს, ფორმულა α შეიძლება ზოგიერთ ინტერპრეტაციაში იყოს არც ჭეშმარიტი და არც მცდარი. დავუშვათ, მაგალითად, α არის $P_1^2(x_1,x_2)$. განვიხილოთ ინტერპრეტაცია, რომლის არე არის მთელ რიცხვთა სიმრავლე და სადაც $P_1^2(x_1,x_2)$ ინტერპრეტაცია არის $x < y$. ამ ინტერპრეტაციაში α შესრულებადია მხოლოდ მიმდევრობა $s = (b_1, b_2, \ldots)$-ზე, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $b_1 < b_2$. მაშასადამე, ამ ინტერპრეტაციაში განხილული ფორმულა α არც ჭეშმარიტია და არც მცდარი).

(X) დაუშვათ, რომ t და v ტერმებია, s მიმდევრობა Σ-დან, t′ მიიღება t-დან ყველა x_i შემავლობების ჩანაცვლებით v ტერმით და s′ მიიღება s-დან მასში i-ური კომპონენტის შეცვლით $s^*(v)$-თი; მაშინ $s^*(t') = (s')^*(t)$.

დავუშვათ, რომ $((x_i)$ ფორმულაა, t ტერმია, რომელიც თავისუფალია x_i-სთვის $\alpha(x_i)$-ში, და $\alpha(t)$ ფორმულაა, რომელიც მიღებულია $\alpha(x_i)$-ის ყველა თა-

ვისუფალი x_i ცვლადის შენაცვლებით t-თი. მაშინ ფორმულა $\alpha(t)$ შესრულება-დია მიმდევრობა $s = (b_1, b_2, \dots)$-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შესრუ-ლებადია s', რომელიც მიღებულია s-დან ელემენტ b_i -ის შეცვლით $s^*(t)$-თი.

(XI) თუ ფორმულა α არ შეიცავს x_i როგორც თავისუფალ ცვლადს, მაშინ ფორმულა

$$(x_i(\alpha \supset \beta)) \supset (\alpha \supset (x_i\beta))$$

ჭეშმარიტია ნებისმიერ ინტერპრეტაციაში.

11. კომბინატორიკის ელემენტები

კომბინატორიკა წარმოადგენს დისკრეტული მათემატიკის ერთ-ერთ ნაწილს, რომელმაც მოიპოვა განსაკუთრებული მნიშვნელობა ალბათობის თეორიაში, მათემატიკურ ლოგიკაში, რიცხვთა თეორიაში, გამოთვლით ტექნოლოგიებსა თუ მათემატიკურ კიბერნეტიკაში.

კომბინატორიკის ძირითადი პრინციპი.

თუ რომელიმე A არჩევანი შეიძლება განხორციელდეს m სხვადასხვა საშუალებით, და ყოველივე ამ განხორციელებული საშუალების შემდეგ შეიძლება განხორციელდეს სხვა B არჩევანი n რაოდენობის საშუალებით, მაშინ A და არჩევანი (მოცემული მიმდევრობით) შეიძლება განხორციელდეს $m \cdot n$ რაოდენობის საშუალებით.

• • •

11.1. რამდენი საშუალებით შეიძლება დალაგდეს {1,2, ..., n} სიმრავლე ისეთნაირად, რომ ყოველ 2-ის და 3-ის ჯერად რიცხვს გააჩნდეს, შესაბამისად, 2-ის და 3-ის ჯერადი ნომრები.

11.2. რამდენი ხერხით შეიძლება დავსვათ მერხზე ერთმანეთის გვერდით სამი ბავშვი?

11.3. რამდენი ხერხით შეიძლება შევადგინოთ სია 4 მოსწავლისაგან?

11.4. პირველი კლასის მოსწავლეები ორშაბათობით სწავლობენ სამ საგანს. ცხრილის შედგენის რამდენი ვარიანტი არსებობს ორშაბათისთვის?

11.5. აზარტული თამაშების მრგვალ მაგიდასთან 8 ადგილია. რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება დავსვათ რვა მოთამაშისგან შემდგარი ჯგუფი ამ მაგიდასთან?

11.6. მრგვალი მაგიდის გარშემო 10 ადგილია. რამდენი ხერხით შეიძლება დავსვათ ამ ადგილებზე 3 ბავშვი?

11.7. ბანკს შეუძლია 2 ერთმანეთისაგან განსხვავებული კრედიტის გაცემა. მსურველთა რიცხვია 8. Kრედიტის გაცემის რამდენი ვარიანტი არსებობს?

11.8. რამდენი ხერხით შეიძლება 4 კაცის არჩევა 4 სხვადასხვა თანამდებობაზე, თუ ამ თანამდებობების კანდიდატთა რიცხვია 9?

11.9. სტუდენტმა უნდა ჩააბაროს სამი გამოცდა ექვს დღეში. რამდენი ხერხით შეიძლება შევადგინოთ გამოცდების ცხრილი? (ერთ დღეს ინიშნება მხოლოდ ერთი გამოცდა)

11.10. სტუდენტმა ექვს დღეში უნდა ჩააბაროს სამი გამოცდა: ქართულში, ინგლისურსა და მათემატიკაში. რამდენი ხერხით შეიძლება შევადგინოთ გამოცდების ცხრილი, თუ მათემატიკის გამოცდა უნდა დაინიშნოს ბოლო დღეს?

11.11. სტუდენტმა უნდა ჩააბაროს ოთხი გამოცდა რვა დღეში. რამდენი ხერხით შეიძლება შევადგინოთ გამოცდების ცხრილი, თუ ერთ-ერთი გამოცდა უნდა დაინიშნოს მერვე დღეს?

11.12. მოჭადრაკეთა გუნდისათვის ოთხი კანდიდატიდან უნდა შეირჩეს სამი. რამდენი ხერხით შეიძლება შევადგინოთ გუნდი?

11.13. შვიდი კანდიდატიდან უნდა შევადგინოთ 3-კაციანი კომისია. რამდენი ხერხით შეიძლება ამის გაკეთება?

11.14. ოთახში 6 ნათურაა. რამდენი ხერხით შეიძლება ოთახის განათება ისე, რომ ანთებული იყოს ზუსტად ორი ნათურა.

11.15. რამდენი ხერხით შეიძლება 15 სტუდენტისაგან შედგენილი ჯგუფის ორ ჯგუფად გაყოფა ისე, რომ ერთ-ერთში ოთხი სტუდენტი იყოს?

11.16. წრეწირზე მოცემულია 9 წერტილი. რამდენი ისეთი სამკუთხედი არსებობს, რომელთა წვეროები ამ წერტილებს ემთხვევა?

11.17. წრეწირზე მოცემულია A, B, C, D, E, F წერტილები. რამდენია ისეთი სამკუთხედი, რომელთა ერთ-ერთი წვერო A წერტილშია?

11.18. ქვედანაყოფში 10 ჯარისკაცი და 5 ოფიცერია. რამდენი ხერხით შეიძლება სამი ჯარისკაცისა და ერთი ოფიცრისაგან შედგენილი რაზმის გამოყოფა?

11.19. იპოვეთ იმ ორნიშნა რიცხვების რაოდენობა, რომელთა ორივე ციფრი ლუწია.

11.20. ჩემპიონატში მონაწილეობს 16 გუნდი, რამდენი ხერხით შეიძლება განაწილდეს პირველი და მეორე ადგილები?

11.21. რამდენი სამნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ ციფრებისაგან 1,2,3,4,5?

11.22. იპოვეთ იმ ხუთნიშნა რიცხვების რაოდენობა, რომელშიც ყველა ციფრი კენტია.

11.23. რამდენი სხვადასხვა ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ 0,1,2,3 ციფრების საშუალებით? (ციფრები შეიძლება განმეორდეს).

11.24. იპოვეთ ყველა იმ ოთხნიშნა რიცხვის ციფრების ჯამი, რომელიც შედგენილია ციფრებისაგან 1,2,3,4. თითოეული ციფრი გვხვდება მხოლოდ ერთჯერ.

11.25. რამდენი ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ 0,1,2,3,4,5 ციფრებისაგან, თუ: 1) თითოეული ციფრი გვხვდება მხოლოდ ერთხელ; 2) ციფრები შეიძლება განმეორდეს: 3) მიღებული რიცხვი იყოს კენტი (ციფრები შეიძლება განმეორდეს).

11.26. ჯგუფში 10 ადამიანია: 4 კაცი, 4 ქალი და 2 ბავშვი. რამდენი 3 ადამიანისაგან შედგენილი ჯგუფის შედგენა შეიძლება ამ პიროვნებებისგან ისე, რომ თითოეულ ჯგუფში იყოს ერთი კაცი, ერთი ქალი და ერთი ბავშვი?

11.27. რამდენი ხერხით შეიძლება დავალაგოთ კედლის გასწვრივ ხუთი სკამი, რომელთაგან სამი ერთნაირია, ხოლო დანარჩენი ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული?

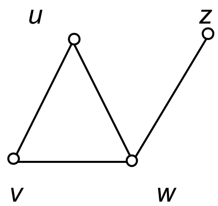
11.28. გვაქვს ოთხი თეთრი და სამი შავი ბურთი. რამდენი ხერხით შეიძლება დავალაგოთ ერთ რიგში ეს ბურთები?

11.29. ჩოგბურთელთა გუნდი შედგება 3 ბიჭისა და 2 გოგოსაგან. რამდენი ხერხით შეიძლება ასეთი გუნდის შედგენა 10 ბიჭისა და 6 გოგოსაგან?

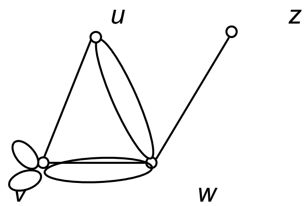
11.30. ნიკას დაავიწყდა ნაცნობის ტელეფონის ექვსციფრიანი ნომერი, მაგრამ მას ახსოვდა რომ ეს ნომერი შედგება ხუთივე კენტი ციფრისაგან და ციფრი 6-სგან, რომელიც მოსდევს 3-ს. რამდენი განსხვავებული ნომერი უნდა აკრიფოს მან, რომ აუცილებლად შეძლოს ნაცნობთან დაკავშირება?

12. გრაფები

პირველად განვსაზღვროთ მარტივი გრაფი *G*. წყვილს (*V*(*G*), *E*(*G*)) ეწოდება *მარტივი გრაფი,* თუ *V*(*G*) ელემენტების არაცარიელი სასრული სიმრავლეა, რომლებსაც უწოდებენ *წვეროებს* (ან *კვანძებს,* ან *წერტილებს*), ხოლო *E*(*G*) არის დაულაგებელი ელემენტების *V*(*G*)-დან წყვილების სასრული სიმრავლე, რომლებსაც უწოდებენ *წვეროებს* (ან *ხაზებს*). ზოგჯერ *V*(*G*)-ს უწოდებენ *G* გრაფის *წვეროების სიმრავლეს*, ხოლო *E*(*G*)-ს – *G* გრაფის *წიბოების სიმრავლეს.* მაგალითად, 12.1 ნახატზე წარმოდგენილია მარტივი გრაფი *G*, რომლის წვეროების სიმრავლე *V*(*G*) არის {*u.v,w,z*}, ხოლო წიბოების სიმრავლე *E*(*G*) შედგება {*u.v*}, {*v,w*}, {*u,w*} და {*w,z*} წყვილებისგან. ვიტყვით, რომ წიბო {*v,w*} *აერთებს v* და *w* წვეროებს.



ნახ. 12.1



ნახ. 12.2

ბევრი შედეგი, რომელიც მიღებულია მარტივი გრაფებისთვის, ადვილად გადაიტანება უფრო ზოგად ობიექტებზე, სადაც ორი წვერო შესაძლოა შეერთებული იყოს ერთზე მეტი რაოდენობის წიბოების საშუალებით. გარდა ამისა, ხშირად მოსახერხებელია მოვხსნათ შეზღუდვა, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ წიბო უნდა აერთიანებდეს ორ *სხვადასხვა* წვეროს, და დავუშვათ *მარყუჟების* არსებობა, ე. ი. წიბოების, რომლებიც აერთიანებენ წვეროს თავის თავთან. ასეთნაირად მიღებულ ობიექტებს, სადაც დასაშვებია მარყუჟები და ჯერადი წიბოები, ეწოდება *ზოგადი გრაფი.*

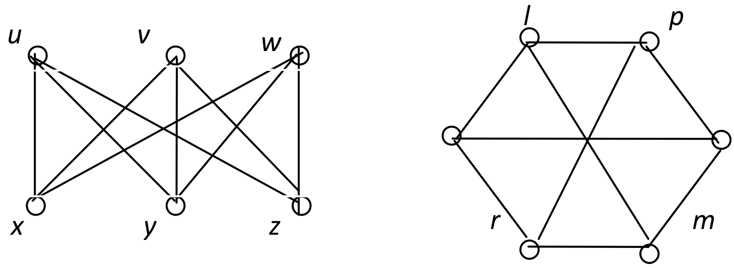
ორიენტირებული გრაფი (ანუ ***ორგრაფი***) *D* არის წყვილი (*V*(*D*), *A*(*D*)), სადაც *V*(*D*) არის ელემენტების არაცარიელი სიმრავლე, რომლებსაც ვუწოდებთ *წვეროებს*, ხოლო *A*(*D*) არის ელემენტებისგან *V*(*D*)-დან დალაგებული წყვილების არაცარიელი სასრული კლასი, რომლებსაც უწოდებენ ***რკალებს***. შევნიშნოთ, რომ რკალები (*v,w*) და (*w,v*) სხვადასხვაა. 12.2 ნახატზე მოცემულია ორგრაფი, რომლის რკალებია (*u,v*), (*v,v*), (*v,w*), (*v,w*), (*v,w*), (*w,u*), (*w,z*).

G გრაფის ორ წვეროს *v*-ს და *w*-ს ეწოდება ***მოსაზღვრე***, თუ არსებობს მათი გამაერთიანებელი წიბო (ე. ი. {*v,w*} სახის წიბო); ამასთან ერთად, წვეროებს *v*-ს და *w*-ს ეწოდება ამ წიბოს ***ინციდენტური*** წვეროები (ხოლო წიბოს – ამ წვეროების ***ინციდენტური***). ანალოგიურად, *G* გრაფის ორ განსხვავებულ წიბოს ეწოდება ***მოსაზღვრე***, თუ მათ გააჩნიათ ერთი საერთო წვერო. *G* გრაფის *v* წვეროს ***ხარისხი*** (ან ***ვალენტობა***) არის წიბოების რაოდენობა, რომლებიც *v* წვეროს ინციდენტურია;

v წვეროს ხარისხი აღინიშნება $\rho(v)$-თი. v წვეროს ხარისხის გამოთვლისას მარყუჟს ვითვლით ორჯერ. წვეროს, რომლის ხარისხი უდრის 0-ს, უწოდებენ ***იზოლირებულ წვეროს***, წვეროს, რომლის ხარისხი უდრის 1-ს, უწოდებენ ***დაკიდულ წვეროს.***

ადვილი დასანახია, თუ შევაჯამებთ ყველა წვეროების ხარისხს, მაშინ მივიღებთ ლუწ რიცხვს – რომელიც ტოლია წიბოების გაორმაგებულ რაოდენობის, ვინაიდან ყოველი წიბო მონაწილეობს ამ ჯამში ზისტად ორჯერ. ამ შედეგს უწოდებენ ***ხელის ჩამორთმევის ლემას.***

ორ გრაფს G_1-ს და G_2-ს უწოდებენ ***იზომორფულებს***, თუ არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა წვეროების სიმრავლეებს შორის, რომელთაც გააჩნიათ თვისება, რომ წიბოების რაოდენობა, რომლებიც აერთიანებენ ორ წვეროს G_1-ში, უდრის წიბოების რაოდენობას, რომლებიც აერთიანებენ შესაბამის წვეროებს G_2-ში.



ნახ. 12.3

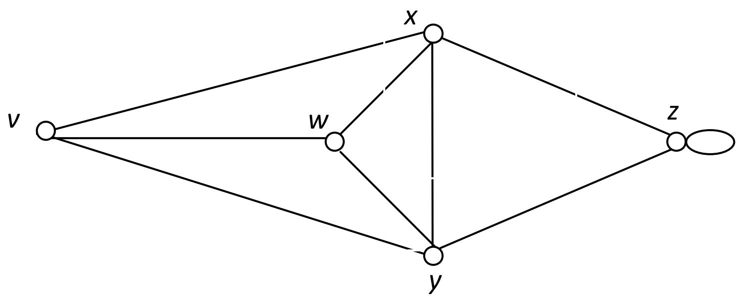
ორი გრაფი, რომელიც მოცემულია ნახ. 12.3-ზე, იზომორფულია შემდეგი შესაბამისობით: $u \leftrightarrow l$, $v \leftrightarrow m$, $w \leftrightarrow n$, $x \leftrightarrow p$, $y \leftrightarrow q$, $z \leftrightarrow r$. G გრაფის ***ქვეგრაფი*** არის გრაფი, რომლის ყველა წვერო ეკუთვნის $V(G)$-ს, ხოლო ყველა წიბოები ეკუთვნის $E(G)$-ს.

დაბოლოს, ***შეუღლების მატრიცა*** G გრაფისა წვეროების $\{v_1, \ldots, v_n\}$ სიმრავლით ეწოდება $n \times n$ განზომილების $A = (a_{ij})$ მატრიცას, სადაც ელემენტი a_{ij} უდრის G-ში წიბოების რაოდენობის რიცხვს, რომლებიც აერთიანებენ v_i-ს და v_j-ს. შედეგად ჩვენ მივიღებთ სიმეტრიულ მატრიცას შემდგარს არაუარყოფითი მთელი რიცხვებისგან, რომელსაც გააჩნია თვისება, რომ ჯამი ნებისმიერ სტრიქონში ან სვეტში უდრის შესაბამისი წვეროს ხარისხს (აქ ყოველი მარყუჟი წვეროს ხარისხში ითვლება ერთხელ). პირიქით, ნებისმიერი მოცემული სიმეტრიული მატრიცის მიხედვით შემდარს არაუარყოფითი მთელი რიცხვებისგან ადვილად აიგება გრაფი (რომელიც ერთადერთია იზომორფულობის სიზუსტით), რომლის შეუღლებული მატრიცა სწორედ მოცემული მატრიცაა. აქედან გამომდინარეობს, რომ გრაფების თეორია შეიძლება დაყვანილ იქნას სპეციალური ტიპის მატრიცების შესწავლაზე.

მარშრუტი მოცემულ G გრაფში არის შემდეგი სახის წიბოების სასრული მიმდევრობა

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}$$

(რომელსაც აგრეთვე აღნიშნავენ $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m$). ცხადია მარშრუტის შემდეგი თვისება: ნებისმიერი ორი მიმდევარი წიბო არის ან მოსაზღვრე, ან ერთი და იგივე. ყოველ მარშრუტს შეესაბამება წვეროების მიმდევრობა v_0 , v_1 , v_2, …, v_m; v_0-ს ეწოდება **საწყისი წვერო**, ხოლო v_m-ს **მარშრუტის ბოლო წვერო.** მაშასადამე, ჩვენ ვსაუბრობთ მარშრუტზე v_0-დან v_m-მდე. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი v_0 წვეროსთვის ტრივიალური მარშრუტი, რომელიც საერთოდ არ შეიცავს წიბოებს, არის მარშრუტი v_0-დან v_0-მდე. **მარშრუტის სიგრძე** ეწოდება მასში შემავალ წიბოების რიცხვს; მაგალითად, 12.4 ნახატზე მარშრუტს $v \to w \to x \to y \to z \to y \to w$ v-დან w-მდე გააჩნია სიგრძე, რომელიც უდრის შვიდს.



ნახ. 12.4

მარშრუტს ეწოდება **ჯაჭვი,** თუ ყველა მისი წიბო განსხვავებულია, და **მარტივი ჯაჭვი,** თუ ყველა მისი წვერო v_0, v_1, v_2, …, v_m განსხვავებულია (გარდა, შესაძლებელია, $v_0 = v_m$). ჯაჭვი ან მარტივი ჯაჭვი **ჩაკეტილია**, თუ $v_0 = v_m$. ჩაკეტილი მარტივი ჯაჭვი, რომელიც შეიცავს ერთ წიბოს მაინც, ეწოდება **ციკლი**; კერძოდ, ნებისმიერი მარყუჟი ან ნებისმიერი წყვილი ჯერადი წიბო ჰქმნის ციკლს.

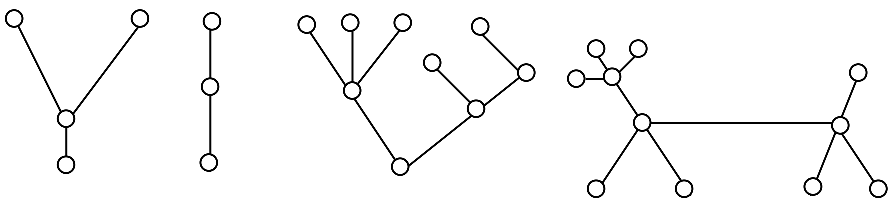
ახლა მივცეთ განსხვავებული, შესაძლოა, უფრო მოხერხებული განსაზღვრება ბმული გრაფებისა. გრაფ G-ს ვუწოდებთ **ბმულს**, თუ ნებისმიერი მისი ორი v და w წვეროსთვის არსებობს მარტივი ჯაჭვი v-დან w-მდე. ნებისმიერი გრაფი შეიძლება დაიყოს თანაუკვეთ ქვეგრაფებად, რომლებსაც ვუწოდებთ (**ბმულობის**) **კომპონენტებს,** განვსაზღვრავთ რა ამით ეკვივალენტობის მიმართებას წვეროების სიმრავლეზე: ორი წვერო **ეკვივალენტურია,** თუ არსებობს მარტივი ჯაჭვი ერთიდან მეორეში. ცხადია, რომ ბმული გრაფი შედგება ერთ კომპონენტისგან. გრაფს ეწოდება **არაბმული**, თუ მისი კომპონენტების რაოდენობა აღემატება ერთს.

ბმულ გრაფ G-ს უწოდებენ **ეილერის გრაფს**, თუ არსებობს ჩაკეტილი ჯაჭვი, რომელიც გადის ყველა მის წიბოზე; ასეთ ჯაჭვს უწოდებენ **ეილერის ჯაჭვს**. შევნიშნოთ, რომ ამ განსაზღვრებაში მოითხოვება, რომ ყოველი წიბო გვხდებოდეს მხოლოდ ერთხელ. თუ ჩვენ მოვხსნით მოთხოვნას ჯაჭვის ჩაკეტილობაზე, მაშინ გრაფს ეწოდება ნახევრად ეილერის.

ჩვენ განვიხილეთ ჩაკეტილი ჯაჭვის არსებობის პრობლემა, რომელიც გადის მოცემული G ბმული გრაფის ყოველ წიბოზე. შესაძლებელია განხილულ იქნას ანა-

ლოგიური პრობლემა ჩაკეტილი ჯაჭვის არსებობისა, რომელიც გადის მხოლოდ ერთხელ მოცემული G ბმული გრაფის ყოველ წვეროს. გასაგებია, რომ ასეთი ჯაჭვი უნდა იყოს ციკლი (გამორიცხულია ტრივიალური შემთხვევა, როცა G არის გრაფი N_1); თუ ასეთი ციკლი არსებობს, მაშინ მას უწოდებენ **ჰამილტონის ციკლს,** ხოლო G-ს **ჰამილტონის გრაფს**. გრაფს, რომელიც შეიცავს მარტივ ჯაჭვს, რომელიც გადის ყოველ წვეროს, ეწოდება **ნახევრადჰამილტონის გრაფი.**

ტყე ეწოდება გრაფს, რომელიც არ შეიცავს ციკლებს; ბმულ ტყეს ეწოდება **ხე**. მაგალითად, ნახატზე გამოსახულია ტყე, რომელიც შედგება ოთხი კომპონენტის-გან, სადაც ყოველი მათგანი ხეა. შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრის თანახმად ხეები და ტყეები წარმოადგენენ მარტივ გრაფებს.



• • •

12.1 დახატეთ არაუმეტეს 8 წვეროს მქონე ყველა კუბური გრაფი.

12.2 მოცემული გვაქვს მარტივი გრაფები G, H და K; დაამტკიცეთ ან უარყავით შემდეგი ტოლობები:

(i) $G \cup (H + K) = (G \cup H) + (G \cup K)$;

(ii) $G + (H \cup K) = (G + H) \cup (G + K)$.

12.3 დაამტკიცეთ, რომ უსასრულო გრაფი შეიძლება დალაგდეს სამგანზომილები-ან ევკლიდეს სივრცეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ბიექცია, როგორც მისი ყველა წვეროების სიმრავლესა, ასევე როგორც მისი ყველა წი-ბოების სიმრავლისა, ნამდვილ რიცხვთა რომელიღაც ქვესიმრავლეს შორის.

12.4 მარტივი G გრაფის *წიბოსებურ გრაფს* $L(G)$ უწოდებენ გრაფს, რომლის წვე-როების სიმრავლე ურთიერთცალსახა დამოკიდებულებაშია წიბოების სიმრავ-ლესთან, იმის გათვალისწინებით, რომ $L(G)$ გრაფის ორი წვერო მოსაზღვრეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესაბამისი G გრაფის წვეროები მოსაზღვრეა.

დაამტკიცეთ, რომ თუ G მარტივი გრაფია, მაშინ (i) G და G არ შეიძლება იყოს ერთდროულად არაბმული; (ii) იქიდან, რომ G ბმულია, გამომდინარეობს, რომ წიბოსებური გრაფი $L(G)$ აგრეთვე ბმულია.

12.5 რომელი m და n რიცხვებისთვისაა შემდეგი გრაფები ეილერის გრაფები?:

(i) $K_{m,n}$, (ii) K_n, (iii) W_n?

12.6 დაამტკიცეთ, რომ მარტივი ეილერის გრაფის წიბოსებური გრაფი არის ეილერის გრაფი.

12.7 რომელი m და n რიცხვებისთვისაა შემდეგი გრაფები ჰამილტონის გრაფები?: (i) $K_{m,n}$, (ii) K_n, (iii) W_n?

12.8 დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ზუსტად ექვსი არაიზომორფული ხე ექვსი წვეროთი, და თერთმეტი – შვიდი წვეროთი.

გამომცემლობის რედაქტორი მაია ეჯიბია
გარეკანის დიზაინი ნინო ებრალიძე
კომპ. უზრუნველყოფა ლალი კურდღელაშვილი
გამოცემის მენეჯერი მარიკა ერქომაიშვილი

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14
14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel: 995(32) 2251432
www.press.tsu.edu.ge