

תנאים כלכליים
הכלכלה העולמית

המשקל הכלכלי העולמי



ამოცანათა კრებული
მათემატიკაში

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თამაზ ზერეკიძე
რუსუდან მესხია

ამოცანათა კრებული მათემატიკაში

ეკონომიკისა და ბიზნესის ფაკულტეტის სტუდენტებისთვის



უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

კრებული განკუთვნილია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ეკონომიკისა და ბიზნესის ფაკულტეტის სტუდენტებისთვის და შედგენილია მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის – 1 სასწავლო კურსის სილაბუსის მიხედვით.

კრებული წარმოადგენს ძირითად სახელმძღვანელოს მათემატიკის პრაქტიკულ კურსში.

რედაქტორები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი **რევაზ ჭილაძე**
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,
პროფესორი **ნიკოლოზ გუნია**

რეცენზენტები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი **ვახტანგ ცაგარეიშვილი**
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,
პროფესორი **გიორგი ჭელიძე**

გამოცემულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადაწყვეტილებით

© ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2018
ISBN 978-9941-13-716-7 (pdf)

სარჩევი

1. სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები	7
1.1. სიმრავლე. მოქმედებები სიმრავლეებზე	7
2. მატრიცები და დეტერმინანტები	16
2.1. მატრიცი. მოქმედებები მატრიცებზე	16
2.2. დეტერმინანტები	24
2.3. შებრუნებული მატრიცი	30
2.4. მატრიცის რანგი	35
3. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები	38
3.1. სისტემის ამოხსნის მატრიცული ხერხი	38
3.2. კრამერის ფორმულებით სისტემის ამოხსნა	38
3.3. წრფივი სისტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით	41
3.4. კრონეკერ-კაპელის თეორემის გამოყენებით სისტემის გამოკვლევა	45
3.5. მატრიცის საკუთრივი რიცხვები	47
4. ანალიზური გეომეტრია	48
4.1. მანძილი ორ წერტილს შორის	48
4.2. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული შეფარდებით	49
4.3. ვექტორები. მოქმედებები ვექტორებზე	52
4.4. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი. კუთხე ორ ვექტორს შორის	54
4.5. ვექტორული სივრცე. ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებლობა	56
4.6. წრფე სიბრტყეზე. წრფის სხვადასხვა	

სახის განტოლებები	60
4.7. ძირითადი ამოცანები წრფეზე	63
4.8. სხვადასხვა ამოცანები წრფის შესახებ	69
4.9. ორუცნობიანი წრფივი უტოლობა და უტოლობათა სისტემა	74
4.10. მეორე რიგის წირები	76
5. რიცხვითი მიმდევრობები და მწკრივები	82
5.1. რიცხვითი მიმდევრობა სარგებლის მარტივი და რთული განაკვეთი	82
5.2. მიმდევრობის ზღვარი	84
5.3. რიცხვითი მწკრივი	87
6. ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა	91
6.1. ფუნქციის ზღვრის გამოთვლა	91
6.2. ფუნქციის უწყვეტობა	93
6.3. შესანიშნავი ზღვრები	97
6.4. პროცენტების უწყვეტად დარიცხვის ამოცანა	98
ლიტერატურა	100

1. სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები

1.1. სიმრავლე. მოქმედებები სიმრავლეებზე

1.1. მოცემულია $B = \{3; 4; \{3; 4\}\}$ სიმრავლე.

- ა) დაასახელეთ B სიმრავლის ყველა ელემენტი;
- ბ) ამოწერეთ B სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე;
- გ) რომელია სწორი ჩანაწერი: $\{3; 4\} \in B$, თუ $\{3; 4\} \subset B$.

1.2. მოცემულია $A = \{4; 5; \{4; 5; 7\}\}$ სიმრავლე.

- ა) დაასახელეთ A სიმრავლის ყველა ელემენტი;
- ბ) ამოწერეთ A სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე;
- გ) რომელია სწორი ჩანაწერი: $\{4; 5\} \in A$, თუ $\{4; 5\} \subset A$.

• **იპოვეთ შემდეგი სიმრავლეები** (\mathbb{N} აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს, \mathbb{Z} მთელ რიცხვთა სიმრავლეს, \mathbb{R} ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს):

1.3. ა) $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 7 \geq 9x - 21\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} : 2x + 7 \geq 9x - 21\}$;

ბ) $A = \{x \in \mathbb{R} : 2^{3x-7} > 2^{5x-1}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : 2^{3x-7} > 2^{5x-1}\}$,
 $C = \{x \in \mathbb{Z} : 2^{3x-7} > 2^{5x-1}\}$.

1.4. $A = \{x \in \mathbb{R} : (x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0\}$.

1.5. $A = \left\{x \in \mathbb{Z} : x + \frac{3}{x} \leq 5, x > 0\right\}$.

1.6. $A = \left\{x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{9} \leq 3^x \leq 12\right\}$.

1.7. $B = \{x \in \mathbb{N} : \log_2(x+10) < 4\}$.

1.8. $B = \{x \in \mathbb{R} : \sin x + \cos x = 2\}$.

- საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოსახეთ შემდეგი სიმრავლებები (R^2 აღნიშნავს საკოორდინატო სიბრტყეს):

1.9. $B = \{(x; y) \in R^2 : (x^2 - 4)(y + 3) = 0\}$.

1.10. $B = \{(x; y) \in R^2 : 3x - 2y - 7 = 0, 2x + 3y + 4 = 0\}$.

1.11. $A = \{(x; y) \in R^2 : xy > 0\}$.

1.12. ა) $A = \{(x; y) \in R^2 : -4 \leq y \leq -x^2\}$;

ბ) $C = \{(x; y) \in R^2 : -2 \leq x \leq 5\}$;

გ) $D = \{(x; y) \in R^2 : 1 \leq y \leq 4\}$.

1.13. ა) $B = \{(x; y) \in R^2 : |x + y| \leq 2\}$;

ბ) $B = \{(x; y) \in R^2 : |2x + y| \geq 1\}$.

- მოქმედებები სიმრავლებზე

1.14. ა) მოცემულია $A = \{-3; -1; 0; 2; 5; 6\}$, $B = \{-3; 2; 3; 4; 5\}$,
 $C = \{-3; 0; 11\}$. იპოვეთ $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap B) \cup C$,
 $(A \setminus B) \cap C$ სიმრავლებები;

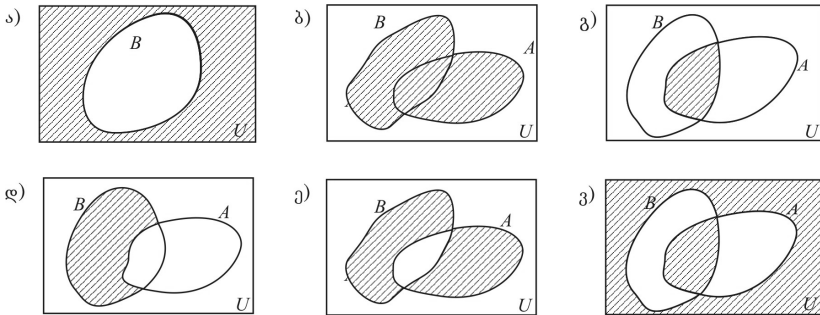
ბ) მოცემულია $A = \{x; z; 2; 3; 4\}$, $B = \{x; y; 1; 3; 4\}$,
 $C = \{x; z; 1; 2; 3; 4\}$. იპოვეთ $(A \cup B) \setminus (C \cap B)$ სიმრავლე;

გ) მოცემულია $C = \{y; 2; b; 3; 5\}$, $B = \{0; 2; y; 7\}$. იპოვეთ
 $C \cup B$, $C \cap B$, $C \setminus B$ სიმრავლებები.

1.15. $A = (-2; 3)$ და $B = [1; +\infty)$ სიმრავლეები გამოსახეთ რიცხვით წრფეზე და იპოვეთ $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ და $B \setminus A$ სიმრავლეები.

1.16. $C = [-2; 3)$ და $D = (-10; +\infty)$ სიმრავლეები გამოსახეთ რიცხვით წრფეზე და იპოვეთ $R \setminus C$, $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ და $D \setminus C$ სიმრავლეები.

1.17. ნახაზ 1.1-ზე დაშტრიხული სიმრავლეები გამოსახეთ U , A და B სიმრავლეებისა და მათზე მოქმედებების გამოყენებით.



ნახაზი 1.1.

1.18. მოცემულია $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 9x \geq -8\}$ და $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + 12 \leq 0\}$ სიმრავლეები. იპოვეთ $A \cup B$ და $A \cap B$ სიმრავლეები.

1.19. $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| \geq 1\}$ და $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 4 < 0\}$ სიმრავლეებისთვის იპოვეთ $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ სიმრავლეები.

1.20. მოცემულია $A = \{(x; y) \in R^2 : -1 \leq x \leq 2\}$ და $B = \{(x; y) \in R^2 : -3 \leq y \leq 2\}$ სიმრავლეები. იპოვეთ $A \cup B$, $A \cap B$ სიმრავლეები და გამოსახეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე.

• იპოვეთ დეკარტული $A \times B$ ნამრავლი, თუ:

1.21. ა) $A = \{2; 3; -1\}$ და $B = \{3; -2\}$;

ბ) $A = \{3; -2\}$ და $B = \{2; 3; -1\}$;

გ) $A = \{a; b; c\}$ და $B = \{0; 1\}$;

დ) $A = \{x; y; 5\}$ და $B = \{a; b\}$.

1.22. ა) $A = [2; 5]$, $B = [1; 3]$;

ბ) $A = [-2; 3]$, $B = [-1; \infty)$;

გ) $A = [0; 1] \cup [2; 5]$, $B = [1; 3]$;

დ) $A = [0; 1] \cup [2; 4]$, $B = [1; 2] \cup [3; 5]$.

1.23. 80 მოსწავლის გამოკითხვის შედეგად დადგინდა, რომ 55 თამაშობს კომპიუტერს, 30 კითხულობს წიგნს, 65 თამაშობს კომპიუტერს ან კითხულობს წიგნს. დაადგინეთ:

ა) რამდენი მოსწავლე კითხულობს წიგნს და თამაშობს კომპიუტერს.

ბ) რამდენი მოსწავლე არ თამაშობს კომპიუტერს და არ კითხულობს წიგნს.

გ) რამდენი მოსწავლე თამაშობს კომპიუტერს და არ კითხულობს წიგნს.

დ) რამდენი მოსწავლე არ კითხულობს წიგნს ან არ თამაშობს კომპიუტერს.

მითითება. შემოიღეთ აღნიშვნები: U – გამოკითხულ მოსწავლეთა სიმრავლე, A – იმ მოსწავლეების სიმრავლე, რომლებიც თამაშობენ კომპიუტერს, ხოლო B – იმ მოსწავლეების სიმრავლე, რომლებიც წიგნს კითხულობენ.

$$n(U) = 80, n(A) = 55, n(B) = 30.$$

ისარგებლეთ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ფორმულით, სადაც $n(A)$ აღნიშნავს A სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობას.

1.24. 500 სტუდენტიდან 100 სწავლობს ფიზიკას, 145 – ბიოლოგიას, 170 – ქიმიას. 20 სწავლობს ქიმიასა და ფიზიკას, 35 – ფიზიკასა და ბიოლოგიას, 15 სწავლობს ქიმიასა და ბიოლოგიას. 150 სტუდენტი არ სწავლობს არც ბიოლოგიას, არც ქიმიას და არც ფიზიკას. დაადგინეთ:

- ა) რამდენი სტუდენტი სწავლობს სამივე საგანს;
- ბ) რამდენი სტუდენტი სწავლობს ქიმიასა და ფიზიკას და არ სწავლობს ბიოლოგიას.

1.25. სოფელში 200 ოჯახიდან ძალღი ჰყავს 120-ს, კატა – 110 ოჯახს, რამდენიმე ოჯახს ჰყავს ცხენი. ძალღი და კატა ჰყავს 85 ოჯახს, 50 ოჯახს არ ჰყავს არც ძალღი, არც კატა და არც ცხენი. რამდენ ოჯახს ჰყავს მხოლოდ ცხენი?

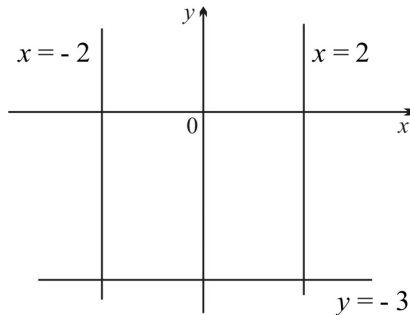
მ ი თ ი თ ე ბ ა . ისარგებლეთ ფორმულით.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

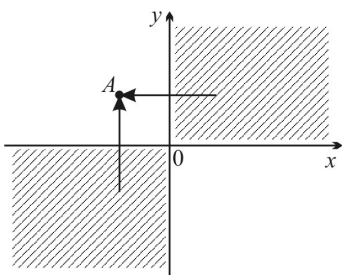
- 1.1.** ა) 3, 4, {3;4};
 ბ) \emptyset , {3}, {4}, {{3;4}}, {3;4}, {3;{3;4}}, {4;{3;4}}, {3;4;{3;4}};
 გ) ორივე ჩანაწერი სწორია.

- 1.2. ა) $4, 5, \{4;5;7\}$;
 ბ) $\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{\{4;5;7\}\}, \{4;5\}, \{4;\{4;5;7\}\}, \{5;\{4;5;7\}\}, \{4;5;\{4;5;7\}\}$;
 გ) სწორია $\{4;5\} \subset A$.
- 1.3. ა) $A = (-\infty; 4], B = \{1; 2; 3; 4\}$;
 ბ) $A = (-\infty; -3), B = \emptyset, C = \{-4; -5; -6; \dots\}$.
- 1.4. $A = \{1; 3\}$.
- 1.5. $A = \{1; 2; 3; 4\}$.
- 1.6. $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
- 1.7. $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
- 1.8. $B = \emptyset$
- 1.9. B არის $x = \pm 2$ და $y = -3$ წრფეების წერტილთა სიმრავლე საკოორდინატო სიბრტყეზე.

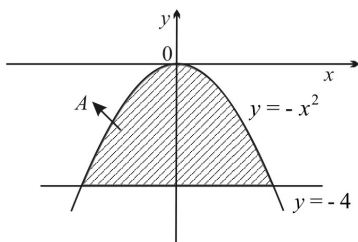


1.10. $A = \{M(1; -2)\}$ არის ერთნერტილიანი სიმრავლე.

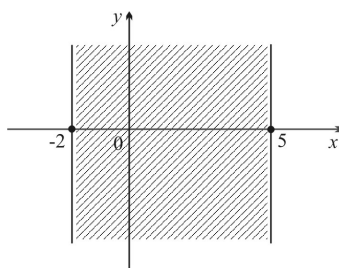
1.11.



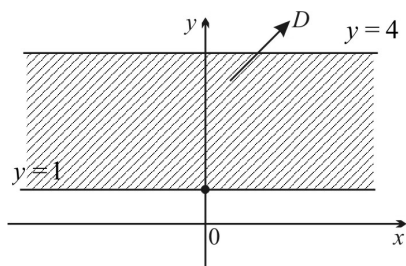
1.12. ა)



ბ)

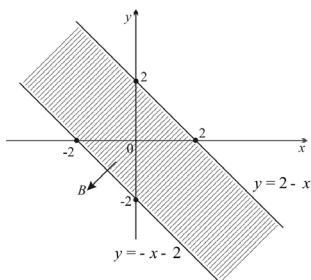


გ)

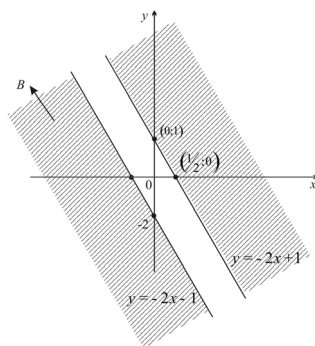


1.13.

а)



б)



1.14. а) $(A \cup B) \cap C = \{0; -3\}$, $(A \cap B) \cup C = \{-3; 0; 2; 5; 11\}$,
 $(A \setminus B) \cap C = \{0\}$;

б) $(A \cup B) \setminus (C \cap B) = \{y; z; 2\}$;

в) $C \cup B = \{0; 2; y; b; 3; 5; 7\}$, $C \cap B = \{2; y\}$, $C \setminus B = \{b; 3; 5\}$.

1.15. $A \cup B = (-2; +\infty)$, $A \cap B = [1; 3)$, $A \setminus B = (-2; 1)$,
 $B \setminus A = [3; +\infty)$.

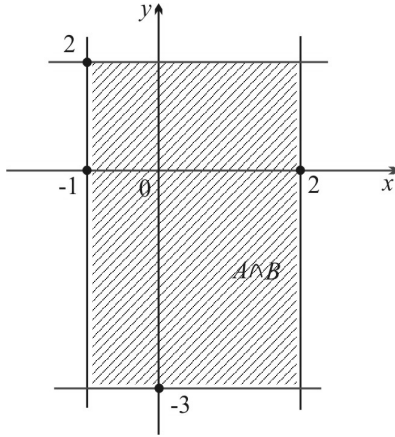
1.16. $R \setminus C = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$, $C \cup D = (-10; +\infty)$,
 $C \cap D = [-2; 3)$, $C \setminus D = \emptyset$, $D \setminus C = (-10; -2) \cup [3; +\infty)$.

1.17. а) $U \setminus B$; б) $A \cup B$; в) $A \cap B$; г) $B \setminus A$;
 ж) $(B \setminus A) \cup (A \setminus B)$; з) $(U \setminus (A \cup B)) \cup (A \cap B)$.

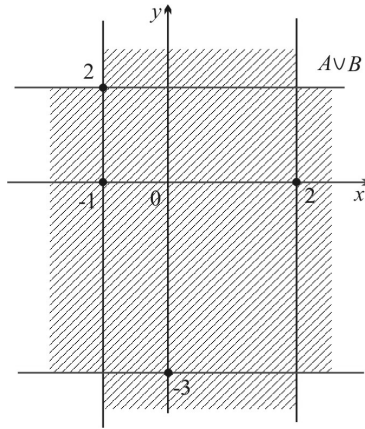
1.18. $A \cup B = A = (-\infty; -8] \cup [-1; +\infty)$, $A \cap B = [3; 4]$.

1.19. $A \cup B = A = (-\infty; -4] \cup [-2; +\infty)$, $A \cap B = B = \emptyset$,
 $A \setminus B = A$, $B \setminus A = \emptyset$.

1.20. $A \cap B = \{(x; y) \in R^2 : -1 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 2\}$.



$$A \cup B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, \text{ и } -3 \leq y \leq 2\}$$



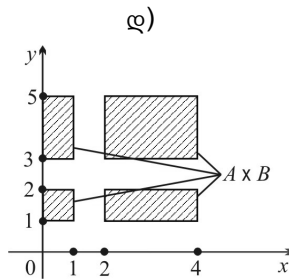
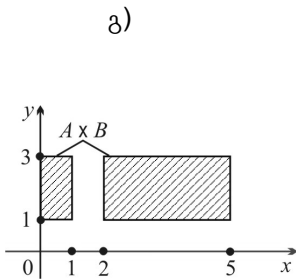
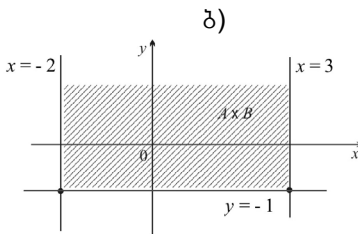
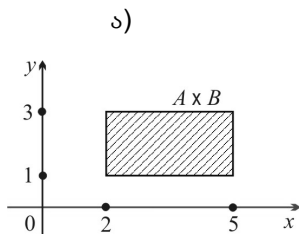
1.21. а) $A \times B = \{(2; 3); (2; -2); (3; 3); (3; -2); (-1; 3); (-1; -2)\};$

б) $A \times B = \{(3; 2); (3; 3); (3; -1); (-2; 2); (-2; 3); (-2; -1)\};$

в) $A \times B = \{(a; 0); (a; 1); (b; 0); (b; 1); (c; 0); (c; 1)\};$

г) $A \times B = \{(x; a), (x; b), (y; a), (y; b), (5; a), (5; b)\}.$

1.21.



1.23. ა) 20; ბ) 15; გ) 35; დ) 60.

1.24. ა) 5; ბ) 15.

1.25. 5.

2. მატრიცები და დეტერმინანტები

2.1. მატრიცი. მოქმედებები მატრიცებზე

2.1. მოცემულია $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -4 & 10 \end{pmatrix}$ და $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -9 \\ 10 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

მატრიცები. დაასახელეთ:

ა) A და B მატრიცების განზომილებები;

ბ) A მატრიცის a_{23} , a_{14} , a_{33} და B მატრიცის b_{12} , b_{32} , b_{31} ელემენტები.

- 2.2.** ქვემოთ დასახელებული მატრიცებიდან რომელია:
 ა) კვადრატული; ბ) ერთეულოვანი; გ) ნულოვანი;
 დ) სტრიქონი მატრიცი; ე) სვეტი მატრიცი; ვ) დიაგონალური.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$S = (1 \ 5 \ 4 \ 8),$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2.3.** გამოთვალეთ მატრიცთა ჯამი:

$$ა) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$ბ) \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 2.4.** გამოთვალეთ მატრიცთა სხვაობა:

$$ა) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$ბ) \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.5. იპოვეთ რიცხვის ნამრავლი მატრიცზე:

$$\text{ა) } 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \text{ ბ) } -4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.6. იპოვეთ მოცემული მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცი:

$$\text{ა) } A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \text{ ბ) } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{გ) } C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \text{ დ) } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.7. მოცემულია მატრიცები: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ და

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \text{ იპოვეთ:}$$

ა) $A+B$; ბ) $A-B$; გ) $3A$; დ) $2B$;

ე) $3A-2B$; ვ) $A-3B$; ზ) $-4B$.

2.8. მოცემულია $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ და $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ მატ-

რიცხები. იპოვეთ B მატრიცი შემდეგი ტოლობიდან:

ა) $2A+3B=C$; ბ) $-3A+B=2C$.

- იპოვეთ მატრიცთა ნამრავლი:

2.9. ა) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

გ) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.10. ა) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

2.11. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.12. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.14. ა) $(1 \ 3 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 3 \ -1)$; გ) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ 4 \ 1)$.

- 2.15. იპოვეთ მატრიცის ნამრავლი მის ტრანსპონირებულზე:

ა) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$; დ) $(4 \ -2 \ 1 \ 3)$.

2.16. მოცემულია მატრიცები: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ და

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. იპოვეთ:

ა) AB ; ბ) BA ; გ) $AB - BA$.

• შესრულებული მოქმედებები:

2.17. იპოვეთ $(3A - B) \cdot E$ მატრიცი, თუ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ და $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.18. იპოვეთ $AB - 2A$ მატრიცი, თუ $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ და $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.19. იპოვეთ $(2A + B) \cdot A$ მატრიცი, თუ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ და

$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2.20. იპოვეთ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^3$.

2.21. იპოვეთ $\left[\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right]^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2.22. იპოვეთ $A \cdot A^T - A^T \cdot A$, თუ $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ და A^T აღნიშნავს A -ს ტრანსპონირებულ მატრიცს.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

2.1. ა) $A(3;4)$ და $B(3;3)$;

ბ) $a_{23} = -2$, $a_{14} = 0$, $a_{33} = -4$, $b_{12} = 2$, $b_{32} = 6$, $b_{31} = 10$.

2.2. ა) კვადრატული მატრიცებია: A , B , X , Y ;

ბ) B და Y ერთეულოვანი მატრიცებია;

გ) Z ნულოვანი მატრიცია;

დ) S ; ე) C ; ვ) A , B , Y .

2.3. ა) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4. ა) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} -10 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

2.5. ა) $\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} -8 & 8 & -12 \\ 0 & -4 & 12 \\ -12 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

2.6. ა) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; ბ) $(1 \ 5 \ 4 \ 0)$;

$$\delta) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad \varrho) \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.7. $\delta) A+B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \delta) \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \delta) \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix};$
 $\varrho) \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}; \quad \varrho) \begin{pmatrix} 7 & -11 & 5 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}; \quad \delta) \begin{pmatrix} 0 & -13 & 4 \\ 5 & -9 & -3 \end{pmatrix};$
 $\delta) \begin{pmatrix} -4 & -16 & 4 \\ 4 & -12 & -8 \end{pmatrix}.$

2.8. $\delta) B = \begin{pmatrix} -2/3 & -1 & -5/3 \\ 10/3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \delta) B = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 11 \\ -8 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$

2.9. $\delta) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}; \quad \delta) \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 13 & -9 \end{pmatrix}; \quad \delta) \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$

2.10. $\delta) \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \end{pmatrix}; \quad \delta) \begin{pmatrix} 8 & 11 & 19 \\ -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$

2.11. $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 5 & 7 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$

2.12. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$

2.13. $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$

$$2.14. \quad \text{a)} (5); \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ -1 & -2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.15. \quad \text{a)} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 15 \\ 6 & 15 & 41 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 9 & -12 & 15 \\ -12 & 16 & -20 \\ 15 & -20 & 25 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} (30).$$

$$2.16. \quad \text{a)} AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 9 & 6 & -5 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} BA = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 9 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 7 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$2.17. \quad \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$2.18. \quad \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$2.19. \quad \begin{pmatrix} 30 & 7 \\ 38 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$2.20. \quad \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$2.21. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.22. \quad \begin{pmatrix} -24 & 6 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

2.2. დეტერმინანტები

- გამოთვალეთ დეტერმინანტები:

$$2.23. \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$2.26. \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}.$$

$$2.24. \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$2.27. \begin{vmatrix} a+b & a^2 \\ a & a^2-ab+b^2 \end{vmatrix}$$

$$2.25. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{vmatrix}.$$

- 2.28. იპოვეთ $(2A-B) \cdot B$ მატრიცის დეტერმინანტი, თუ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ და } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.29. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$2.31. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$2.30. \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$2.32. \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}.$$

- დეტერმინანტის თვისებების გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

$$2.33. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$2.34. \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$2.35. \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

$$2.36. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).$$

2.37. იპოვეთ $2M$ მატრიცის დეტერმინანტი, თუ M მესამე რიგის მატრიცია და მისი დეტერმინანტი $\frac{1}{2}$ -ის ტოლია.

2.38. იპოვეთ $2E$ მატრიცის დეტერმინანტი, თუ E არის n -ური რიგის ერთეულოვანი მატრიცი.

2.39. რას უდრის ერთეულოვანი X მატრიცის რიგი, თუ ცნობილია, რომ $3X$ მატრიცის დეტერმინანტი 81-ის ტოლია.

• ამოხსენით შემდეგი განტოლებები და უტოლობები:

$$2.40. \begin{vmatrix} x & 1 \\ 5 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & x \end{vmatrix}.$$

$$2.41. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ x & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5x & 1 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix}.$$

$$2.42. \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$2.45. \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

$$2.43. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3.$$

$$2.46. \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$2.44. \begin{vmatrix} x-3 & 4 \\ x+2 & 1 \end{vmatrix} < 1.$$

• მინორი და ალგებრული დამატება

$$2.47. \text{ მოცემულია } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} \text{ დეტერმინანტი. იპოვეთ ამ დეტერ-}$$

მინანტის M_{23} მინორი და A_{23} ალგებრული დამატება.

$$2.48. \text{ იპოვეთ } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ დეტერმინანტის } A_{21} \text{ ალგებრული და-}$$

მატება და M_{33} მინორი.

$$2.49. \text{ გამოთვალეთ } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} \text{ დეტერმინანტისთვის გამოსა-}$$

ხულება $2M_{24} + A_{34}$.

- დეტერმინანტის გაშლა სტრიქონებისა და სვეტების მიხედვით

2.50. გაშალეთ მეორე სვეტის მიხედვით და გამოთვალეთ

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ დეტერმინანტი.}$$

2.51. გაშალეთ მეორე სტრიქონის მიხედვით და გამოთვალეთ

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ დეტერმინანტი.}$$

2.52. გაშალეთ მესამე სტრიქონის მიხედვით და გამოთვალეთ

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \text{ დეტერმინანტი.}$$

2.53. გაშალეთ მეოთხე სტრიქონის მიხედვით და გამოთვალეთ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \text{ დეტერმინანტი.}$$

- გამოთვალეთ შემდეგი დეტერმინანტები რომელიმე სტრიქონში ან სვეტში ელემენტთა განულებით

2.54. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

2.55. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

$$2.56. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$2.58. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$2.57. \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$2.59. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

3 5 6 7 8 9 10 :

$$2.23. 11.$$

$$2.40. x = 2, x = \frac{1}{2}.$$

$$2.24. 3.$$

$$2.41. x = 0.$$

$$2.25. \sin(\alpha - \beta).$$

$$2.42. x = -\frac{1}{2}.$$

$$2.26. 1.$$

$$2.43. x = -\frac{1}{3}.$$

$$2.27. b^3.$$

$$2.28. -24.$$

$$2.44. x > -4.$$

$$2.29. -48.$$

$$2.45. -6 < x < -4.$$

$$2.30. 8.$$

$$2.46. x < 7.$$

$$2.31. 0.$$

$$2.47. M_{23} = 1, A_{23} = -1.$$

$$2.32. -2x.$$

$$2.48. A_{21} = 5, M_{33} = -1.$$

$$2.37. 4.$$

$$2.38. 2^n.$$

$$2.49. -12.$$

$$2.39. n = 4.$$

$$2.50. \quad -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$2.51. \quad -3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

$$2.52. \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 18.$$

$$2.53. \quad -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -18.$$

$$2.54. \quad 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 21.$$

$$2.57. \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 17 & -24 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -241.$$

$$2.55. \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 42.$$

$$2.58. \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = 160.$$

$$2.56. \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$2.59. \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 21.$$

2.3. შებრუნებული მატრიცი

- იპოვეთ შებრუნებული მატრიცი

2.60. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2.62. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.61. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2.63. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & -10 \end{pmatrix}$.

2.64. იპოვეთ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ მატრიცის შებრუნებული მატრი-

ცის a_{32} ელემენტი (ე. ი. ის ელემენტი, რომელიც იმყოფება B^{-1} მატრიცის მესამე სტრიქონისა და მეორე სვეტის გადაკვეთაზე).

2.65. იპოვეთ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ მატრიცის შებრუნებული მატრი-

ცის b_{23} ელემენტი (ე.ი. ის ელემენტი, რომელიც იმყოფება A^{-1} მატრიცის მეორე სტრიქონისა და მესამე სვეტის გადაკვეთაზე).

2.66. იპოვეთ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ მატრიცის შებრუნებული მატრიცის:

- ა) მეორე სტრიქონის ელემენტები;
- ბ) პირველი სტრიქონის ელემენტები.

2.67. იპოვეთ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ მატრიცის შებრუნებული მატრიცის:

ა) მესამე სვეტის ელემენტები;

ბ) პირველი სვეტის ელემენტები.

2.68. იპოვეთ $A^{-1}B + 2A$ მატრიცი, თუ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, სადაც A^{-1} არის A მატრიცის შებრუნებული.

2.69. იპოვეთ $A^{-1} \cdot B$ მატრიცი, თუ ცნობილია, რომ

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ და $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2.70. იპოვეთ A მატრიცი, თუ ცნობილია, რომ $AB = E$, სადაც

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, ხოლო $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.71. იპოვეთ $A \cdot B^{-1}$, თუ მოცემულია $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ და

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ მატრიცები.

2.72. იპოვეთ მოცემული A მატრიცისა და მისი მიკავშირებული მატრიცის ნამრავლი, თუ

ა) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; ბ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2.73. მოცემულია $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

მატრიცები. იპოვეთ $(A - 3B) \cdot E$ მატრიცის შებრუნებული მატრიცი.

• იპოვეთ X მატრიცი შემდეგი განტოლებიდან

2.74. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

2.75. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.76. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

2.77. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.

2.78. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.79. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 16 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.80. ა) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$;

ბ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

$$2.60. \quad \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.61. \quad -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.62. \quad -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & 6 \\ -2 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

2.63. მატრიცი გადაგვარებულია, შებრუნებული მატრიცი არ აქვს.

$$2.64. \quad a_{32} = \frac{A_{23}}{|B|} = -\frac{4}{21}.$$

$$2.65. \quad b_{23} = \frac{A_{23}}{|A|} = -\frac{4}{21}.$$

$$2.66. \quad \text{ა) } \frac{1}{|B|} \cdot (A_{12} \quad A_{22} \quad A_{32}) = \left(-\frac{6}{42} \quad \frac{4}{42} \quad \frac{6}{42} \right); \text{ ბ) } \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$2.67. \quad \text{ა) } \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}; \text{ ბ) } \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

$$2.68. \begin{pmatrix} 5 & 1.5 \\ 11 & 6.5 \end{pmatrix}.$$

$$2.75. -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.69. \begin{pmatrix} 7/ \\ 6 \\ 5/ \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.76. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.70. A = B^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 10 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 8 & -11 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2.77. \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -8 & -51 \\ -3 & -23 \end{pmatrix}.$$

$$2.71. (-1 \ 1).$$

$$2.72. \text{a) } \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$2.78. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -17 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}.$$

$$2.79. \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -12 & 3 \\ -47 & 34 & -8 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.73. \begin{pmatrix} 1/4 & -5/12 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$$2.80. \text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{10}{9} \end{pmatrix};$$

$$2.74. \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } -\frac{1}{154} \cdot \begin{pmatrix} -80 & 20 \\ -42 & -28 \end{pmatrix}.$$

2.4. მატრიცის რანგი

- იპოვეთ მატრიცის რანგი. პასუხი დაასაბუთეთ

2.81. ა) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

დ) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; ე) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; ვ) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

ზ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; თ) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$;

ი) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; კ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

- მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნებით დაადგინეთ მატრიცის რანგი

2.82. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.83. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$2.84. \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.88. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.85. \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.89. \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.86. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.90. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2.87. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 5 & 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2.91. \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.92. იპოვეთ x , თუ ცნობილია, რომ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ x & 3 & 1 \end{pmatrix}$

მატრიცებს ტოლი რანგები აქვს.

2.93. იპოვეთ x , თუ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ x & 0 & 4 \end{pmatrix}$ და $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ მატ-

რიცებს ტოლი რანგები აქვს.

2.94. იპოვეთ $A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ მატრიცის რანგო.

2.95. იპოვეთ x , თუ ცნობილია, რომ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & x \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ და

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ მატრიცების რანგები ტოლია.

2.96. ცნობილია, რომ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ მატრიცის რანგი მეტია

$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & x \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ მატრიცის რანგზე. იპოვეთ x .

2.97. ცნობილია, რომ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & x \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ მატრიცის რანგი 3-ის

ტოლი არ არის. იპოვეთ x .

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

2.81. ა) 2; ბ) 1; გ) 0; დ) 3; ე) 2; ვ) 5; ზ) 3; თ) 1; ი) 1; კ) 2.

2.82. 3.

2.89. 3.

2.94. $r(A)=1$.

2.83. 2.

2.90. 3.

2.95. $x = \frac{1}{2}$.

2.84. 3.

2.91. 3.

2.85. 2.

2.86. 2.

2.92. $x = \frac{1}{3}$.

2.96. $x = -2$.

2.87. 2.

2.88. 2.

2.93. $x = 6$.

2.97. $x = \frac{7}{3}$.

3. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები

3.1. სისტემის ამოხსნის მატრიცული ხერხი

- ჩანერეთ წრფივ განტოლებათა სისტემა მატრიცული ფორმით და ამოხსენით:

3.1.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 4x_1 - x_2 = 13 \end{cases}$$

3.4.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -7 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

3.2.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$$

3.5.
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 17 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

3.3.
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 9x_3 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

3.2. კრამერის ფორმულებით სისტემის ამოხსნა

3.6.
$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ -x + 3y = 7 \end{cases}$$

3.11.
$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

3.7.
$$\begin{cases} 3x - 5y = -12 \\ y + 2x = 5 \end{cases}$$

3.12.
$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + z = 13 \\ y + 2z = 7 \end{cases}$$

3.8.
$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

3.9.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

3.13.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

3.10.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = -4 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 10 \end{cases}$$

3.14. კრამერის ფორმულებით იპოვეთ y უცნობი შემდეგი სისტემიდან:

$$\text{ა) } \begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ 3x + 2y - z = 7 \\ 2x + 3y - 3z = 5 \end{cases} ; \quad \text{ბ) } \begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 2x + y + z = 5 \\ 3x - 2y - z = 4 \end{cases} .$$

3.15. მატრიცული $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ტოლობა ჩანერეთ

წრფივ განტოლებათა სისტემის სახით და იპოვეთ x_3 უცნობი კრამერის ფორმულებით.

3.16. კრამერის ფორმულებით იპოვეთ x_2 და x_3 უცნობები

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \text{ სისტემიდან.}$$

3.17. კრამერის ფორმულებით იპოვეთ x_2 უცნობი სისტემიდან:

$$\text{ა) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_4 = 1 \end{cases} ; \quad \text{ბ) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 3 \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases} .$$

3.18. მოცემულია მატრიცული $(x_1 \ 2 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ x_1 & x_2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (7 \ 15)$

ტოლობა. ჩანერეთ ეს ტოლობა წრფივ განტოლებათა სისტემის სახით. იპოვეთ x_1 და x_2 უცნობები კრამერის ფორმულებით.

3.19. მოცემული მატრიცული
$$\begin{pmatrix} x_1 & 2 & x_2 \\ 2x_1 & x_2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \end{pmatrix}$$

ტოლობა ჩანერეთ წრფივ განტოლებათა სისტემის სახით და კრამერის ფორმულებით იპოვეთ x_1 და x_2 უცნობები.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

3.1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}, x_1 = 3, x_2 = -1.$$

3.2.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}, x_1 = 3, x_2 = 2.$$

3.3.
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & -9 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1.$$

3.4. $(-2; 0; -1).$

3.5. $(5; -2; 0).$

3.6. $x = -1, y = 2.$

3.7. $x = 1, y = 3.$

3.8. $x_1 = x_2 = 0.$

3.9. $(0; 0; 0).$

3.10. $(2; 2; -1).$

3.11. $(5; -1; -4).$

3.12. $(3; -1; 4)$.

3.13. $(-1; 0; 2; 3)$.

3.14. ა) $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-36}{-12} = 3$; ბ) $y = \frac{10}{10} = 1$.

3.15.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}, x_3 = \frac{-10}{-5} = 2.$$

3.16. $x_2 = \frac{0}{-6} = 0$; $x_3 = \frac{6}{-6} = -1$.

3.17. ა) $x_2 = \frac{30}{15} = 2$; ბ) $x_2 = \frac{-15}{-9} = \frac{5}{3}$.

3.18.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}, x_1 = \frac{9}{3} = 3, x_2 = \frac{3}{3} = 1.$$

3.19.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases}, x_1 = \frac{-2}{-1} = 2, x_2 = \frac{-3}{-1} = 3.$$

3.3. წრფივი სისტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით

• ამოხსენით სისტემები:

3.20. ა)
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 7 \\ 3y - 4z = 17 \\ 2z = -4 \end{cases}; ბ) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_2 + 4x_3 = 14 \\ -3x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\text{ბ) } \left\{ \begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -12 \\ -3x_3 + x_4 = -11 \\ 0.2x_4 = -0.4 \end{array} \right. ; \text{ დ) } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z + t = 24 \\ -y + 2z + 9t = 4 \\ z - 2t = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{ე) } \left\{ \begin{array}{l} -x + y - 2z + 2u = 4 \\ y - 3z + u = -1 \\ z + 2u = 3 \end{array} \right. ; \text{ ვ) } \left\{ \begin{array}{l} x + 4y - z + t - u = 3 \\ y - 3z + t + u = -2 \\ z + 2t - 2u = 4 \end{array} \right. .$$

- გაუსის მეთოდით ამოხსენით განტოლებათა შემდეგი სისტემები:

$$\text{3.21. } \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{array} \right. .$$

$$\text{3.22. } \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{array} \right. .$$

$$\text{3.23. } \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{array} \right. .$$

$$\text{3.24. } \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{array} \right. .$$

$$3.25. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8 \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases} .$$

$$3.26. \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases} .$$

$$3.27. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 16 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 - 3x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = -3 \end{cases} .$$

$$3.28. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 5 \end{cases} .$$

$$3.29. \text{ იპოვეთ } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \text{ სისტემის ზოგადი ამო-}$$

ნახსნი და ზოგადი ამონახსნიდან მიიღეთ კერძო ამონახსნი, რომლისთვისაც $x_4 = 2$.

$$3.30. \text{ გაუსის მეთოდით იპოვეთ } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \text{ სისტე-}$$

მის ზოგადი ამონახსნი და ზოგადი ამონახსნის საშუალებით დაწერეთ ამ სისტემის რომელიმე ორი ამონახსნი.

3.31. იპოვეთ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 9 \end{cases}$ სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

3.32. მოცემულია მატრიცული $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ ტო-

ლობა. ჩანერეთ ეს ტოლობა წრფივ განტოლებათა სისტემის სახით და იპოვეთ ზოგადი ამონახსნი.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

3.20. ა) $(5; 3; -2)$; ბ) $(-1; 2; 3)$; გ) $(1; 3; 3; -2)$;

დ) ზოგადი ამონახსნია: $x = 25 - 33a$, $y = 13a - 2$, $z = 2a + 1$,
 $t = a$, სადაც $a \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი რიცხვია;

ე) ზოგადი ამონახსნია: $x = -t - 2$, $y = -7t + 8$, $z = -2t + 3$,
 $u = t$, სადაც $t \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი რიცხვია;

ვ) ზოგადი ამონახსნია: $x = 25a - 17b - 33$, $y = -7a + 5b + 10$,
 $z = 4 - 2a + 2b$, $u = b$, $t = a$, სადაც $a, b \in \mathbb{R}$
ნებისმიერი რიცხვებია.

3.21. $(-1; 3; 2)$.

3.22. $(1; 3 + t; t)$ ზოგადი ამონახსნია, სადაც $t \in \mathbb{R}$.

3.23. $(2; 1; 0)$.

3.24. $(1; 2; 3; 4)$.

3.25. სისტემა არათავსებადია.

3.26. $(t; 3t - 13; -7; 0)$ ზოგადი ამონახსნია, სადაც $t \in \mathbb{R}$.

3.27. $(1; 2; 3; 4)$.

3.28. სისტემა არათავსებადია.

3.29. $(1 - 2t; 2 + t; t; t)$ ზოგადი ამონახსნია, სადაც $t \in \mathbb{R}$. როცა $x_4 = 2$, მაშინ $x_3 = 2$, $x_2 = 4$, $x_1 = -3$, ე. ი. $(-3; 4; 2; 2)$ კერძო ამონახსნია.

3.30. $\left(\frac{5}{2} - 2t; t - \frac{1}{2}; t - \frac{1}{2}; t\right)$ ზოგადი ამონახსნია, სადაც $t \in \mathbb{R}$.

როცა $t = 0$, მაშინ $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ ერთ-ერთი ამონახსნია.

როცა $t = \frac{1}{2}$, მაშინ $\left(\frac{3}{2}; 0; 0; \frac{1}{2}\right)$ ამონახსნია.

3.31. $(-t - 12; -2t - 9; t)$ ზოგადი ამონახსნია, სადაც $t \in \mathbb{R}$.

3.32. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$, $(5t + 1; 7t - 2; t)$ ზოგადი ამონახსნია, სადაც $t \in \mathbb{R}$.

3.4. კრონეკერ-კაპელის თეორემის გამოყენებით სისტემის გამოკვლევა

• შეისწავლეთ სისტემათა თავსებადობის საკითხი და იპოვეთ ამონახსნი

3.33. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 = 5 \end{cases}$ 3.35. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

3.34. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$

$$3.36. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_3 = 1 \end{cases} .$$

$$3.39. \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

$$3.37. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases} .$$

$$3.40. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases} .$$

$$3.38. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases} .$$

$$3.41. \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} .$$

- შეისწავლეთ სისტემების თავსებადობის საკითხი და დაადგინეთ როგორია ამონახსნთა სიმრავლე (სასრული თუ უსასრულო)

$$3.42. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} .$$

$$3.45. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \end{cases} .$$

$$3.43. \begin{cases} 2x + y + 4z - t = 1 \\ 3x + 6y + 3z + 2t = 2 \\ 4y + 2z - 3t = 0 \end{cases} .$$

$$3.46. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases} .$$

$$3.44. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} .$$

$$3.47. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} .$$

3.5. მატრიცის საკუთრივი რიცხვები

- იპოვეთ მოცემული მატრიცის საკუთრივი რიცხვები

3.48. ა) $\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

3.49. ა) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; ბ) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

3.33. სისტემა არათავსებადია.

3.34. ზოგადი ამონახსნია: $x_1 = \frac{3-t}{2}$, $x_2 = t$, სადაც $t \in \mathbb{R}$.

3.35. სისტემა არათავსებადია.

3.36. ერთადერთი ამონახსნია: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

3.37. ზოგადი ამონახსნია: $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = a - 2b - 1$,
სადაც $a, b \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი რიცხვებია.

3.38. ზოგადი ამონახსნია: $x_1 = -t - \frac{1}{7}$, $x_2 = t + \frac{12}{7}$, $x_3 = t$,
სადაც $t \in \mathbb{R}$.

3.39. ზოგადი ამონახსნია: $x_1 = 5t$, $x_2 = 14t$, $x_3 = 3t$, სადაც $t \in \mathbb{R}$.

3.40. ზოგადი ამონახსნია: $x_1 = \frac{3-4t}{14}$, $x_2 = \frac{7-2t}{2}$,
 $x_3 = \frac{27-8t}{14}$, $x_4 = t$, სადაც $t \in \mathbb{R}$.

- 3.41.** ერთადერთი ამონახსნია: $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{4}{3}$.
- 3.42.** $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, სისტემა თავსებადია, აქვს უსასრულო სიმრავლე ამონახსნებისა, თავისუფალი ცვლადების რაოდენობა არის ერთი.
- 3.43.** $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, სისტემა თავსებადია, აქვს უსასრულო სიმრავლე ამონახსნებისა ერთი თავისუფალი ცვლადით.
- 3.44.** $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, სისტემა თავსებადია, აქვს უსასრულო სიმრავლე ამონახსნებისა ერთი თავისუფალი ცვლადით.
- 3.45.** $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, აქვს ერთადერთი ამონახსნი.
- 3.46.** $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, სისტემას აქვს უსასრულო სიმრავლე ამონახსნებისა, თავისუფალი ცვლადების რაოდენობა არის ორი.
- 3.47.** $r(A) = 2$, $r(\bar{A}) = 3$, $r(A) \neq r(\bar{A})$, სისტემა არათავსებადია.
- 3.48.** ა) $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 20$; ბ) $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$; გ) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$.
- 3.49.** ა) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$; ბ) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 6$;
გ) $\lambda = -1$.

4. ანალიზური გეომეტრია

4.1. მანძილი ორ წერტილს შორის

4.1. იპოვეთ AB მანძილი მოცემულ წერტილებს შორის:

ა) $A(2; 1; 2)$, $B(0; -2; -4)$;

ბ) $A(6; 7; 3)$, $B(3; 1; 9)$.

- 4.2.** აჩვენეთ, რომ $\triangle ABC$ ტოლფერდაა, თუ:
- ა) $A(-3;1)$, $B(-1;0)$, $C(-2;-3)$;
- ბ) $A(0;-2;-4)$, $B(2;1;2)$, $C(-3;4;-6)$.
- 4.3.** აჩვენეთ, რომ სამკუთხედი, რომლის წევრობია: $A(-2;2)$, $B(1;1)$, $C(1;3)$, მართკუთხაა.
- 4.4.** ორდინატა ღერძზე იპოვეთ ყველა ისეთი წერტილი, რომელთაგანაც მანძილი $M(4;-6)$ წერტილამდე ხუთი ერთეულია.
- 4.5.** დაასაბუთეთ, რომ ოთხკუთხედი, რომლის წევრობია: $A(7;-2)$, $B(10;2)$, $C(1;5)$ და $D(-2;1)$ წერტილები, არის პარალელოგრამი.
- 4.6.** საკოორდინატო ღერძებზე იპოვეთ ყველა ისეთი წერტილი, რომელთაგან მანძილები $A(1;1)$ და $B(3;7)$ წერტილებამდე ტოლია.
- 4.7.** აჩვენეთ, რომ $A(8;3)$, $B(5;-2)$ და $C(-1;-12)$ წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს.
- 4.8.** $A(4;1)$, $B(7;5)$ და $C(-4;7)$ სამკუთხედის წევრობია. რა სიგრძის მონაკვეთებად ჰყოფს BC გვერდს A კუთხის AM ბისექტრისა.
- 4.2. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული შეფარდებით**
- 4.9.** იპოვეთ $A(x;4)$ და $B(-6;y)$ წერტილების უცნობი კოორდინატები, თუ $C(-1;1)$ წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია.

- 4.10.** $A(3;0)$ და $B(5;-4)$ წერტილებს შორის მონაკვეთი დაყოფილია ოთხ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ დაყოფის წერტილების კოორდინატები.
- 4.11.** მონაკვეთი $A(8;-2)$ და $B(2;4)$ ბოლოებით დაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ დაყოფის წერტილების კოორდინატები.
- 4.12.** $B(6;-4)$, $C(-6;2)$ და $D(2;6)$ სამკუთხედის წვეროებია. ამ სამკუთხედის BM მედიანაზე აღებულია K წერტილი ისე, რომ $BK : KM = 3 : 1$. იპოვეთ K წერტილის კოორდინატები და DK მონაკვეთის სიგრძე.
- 4.13.** O წერტილი AB მონაკვეთის შუა წერტილია და ის CD მონაკვეთს ჰყოფს $2 : 3$ შეფარდებით C წერტილის მხრიდან. ცნობილია, რომ $C(1;0)$, $D(6;5)$ და $A(7;4)$. იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები.
- 4.14.** $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ და $C(x_3; y_3)$ სამკუთხედის წვეროებია. იპოვეთ მედიანების გადაკვეთის O წერტილის კოორდინატები.
- 4.15.** $A(2;4)$, $B(-4;6)$ და $K(0;-2)$ სამკუთხედის წვეროებია. იპოვეთ AM მედიანის სიგრძე და მედიანების გადაკვეთის O წერტილი.
- 4.16.** $A(3;4)$, $B(8;2)$ და $C(4;12)$ სამკუთხედის წვეროებია. იპოვეთ მანძილი ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან $D(1;3)$ წერტილამდე.

- 4.17. მოცემულია სამკუთხედის ორი წვერო: $A(1;8)$, $B(5;1)$ და მედიანების გადაკვეთის $M(1;3)$ წერტილი. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე წვეროს კოორდინატები.
- 4.18. $A(2;-1)$, $B(4;-2)$ და $C(10;3)$ წერტილები სამკუთხედის წვეროებია. იპოვეთ A კუთხის ბისექტრისის BC გვერდთან გადაკვეთის L წერტილის კოორდინატები.
- 4.19. $A(-1;1)$, $B(1;2)$ და $C(3;-1)$ სამკუთხედის წვეროებია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის AD ბისექტრისის სიგრძე.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

- 4.1. ა) 7; ბ) 9.
- 4.4. $(0;-3)$ და $(0;-9)$.
- 4.6. $(14;0)$ და $\left(0;\frac{14}{3}\right)$.
- 4.8. $BM = \frac{5\sqrt{5}}{3}$, $MC = \frac{10\sqrt{5}}{3}$.
- 4.9. $x = 4$, $y = -2$.
- 4.10. $(3.5;-1)$, $(4;-2)$, $(4.5;-3)$.
- 4.11. $(6;0)$, $(4;2)$.
- 4.12. $K(0;2)$, $DK = \sqrt{20}$.
- 4.13. $B(-1;0)$.

4.14. $O\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

4.15. $AM = \sqrt{20}$, $O\left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

4.16. 5.

4.17. $(-3; 0)$.

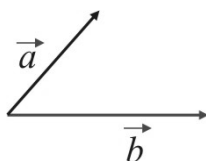
4.18. $L(5.2; -1)$.

4.19. $\frac{8}{3}$.

4.3. ვექტორები. მოქმედებები ვექტორებზე

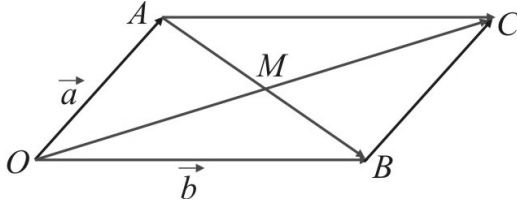
4.20. მოცემულია \vec{a} და \vec{b} ვექტორები (იხ. ნახაზი 4.1). ააგეთ ვექტორები:

ა) $2\vec{a} + \vec{b}$; ბ) $-2\vec{a} + \vec{b}$; გ) $\frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{a}$; დ) $\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$.



ნახაზი 4.1.

4.21. $OACB$ პარალელოგრამში $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ (იხ. ნახაზი 4.2). გამოსახეთ \vec{a} და \vec{b} ვექტორების საშუალებით \vec{MO} , \vec{MA} , \vec{MB} და \vec{MC} ვექტორები, სადაც M პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია.



ნახაზი 4.2.

- 4.22.** იპოვეთ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები და სიგრძე, თუ მოცემულია A და B წერტილების კოორდინატები:
- ა) $A(2; 4; -3)$, $B(-4; 4; -5)$;
- ბ) $A(2; 3; -5)$, $B(-1; 3; -1)$.
- 4.23.** წარმოადგინეთ საკოორდინატო ღერძის \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} მგეზავი ვექტორების საშუალებით მოცემული $\vec{a} = (2; -3; 4)$, $\vec{b} = (-5; 2; 1)$, $\vec{c} = (0; 3; -4)$ ვექტორები.
- 4.24.** იპოვეთ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ და $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ ვექტორების ჯამი და სხვაობა, სადაც \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} საკოორდინატო ღერძების მგეზავებია.
- 4.25.** მოცემულია $\vec{a} = (2; 1; 3)$ და $\vec{b} = (1; 2; 4)$ ვექტორები. იპოვეთ $2\vec{a} - \vec{b}$ ვექტორის სიგრძე.
- 4.26.** მოცემულია M , N და K წერტილები. იპოვეთ $\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MK}$ ვექტორის კოორდინატები და სიგრძე, თუ:
- ა) $M(1; 0)$, $N(-2; 3)$, $K(2; 1)$;
- ბ) $M(1; 0; 3)$, $N(-1; 3; 1)$, $K(0; 1; 3)$.

- 4.27.** M წერტილი ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია. იპოვეთ \overline{AM} ვექტორის კოორდინატები, თუ $\overline{AB} = (4; 2; 1)$ და $\overline{AC} = (6; 0; 3)$.
- 4.28.** M წერტილი $ABCD$ პარალელოგრამის AC დიაგონალზე მდებარე ისეთი წერტილია, რომ $\overline{AM} = 5\overline{MC}$. იპოვეთ \overline{AM} ვექტორის კოორდინატები, თუ $\overline{AB} = (7; 4; 0)$ და $\overline{AD} = (5; 2; 6)$.
- 4.4.** **ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი. კუთხე ორ ვექტორს შორის**
- 4.29.** იპოვეთ \vec{a} და \vec{b} ვექტორების სკალარული ნამრავლი და კუთხე მათ შორის, თუ:
- ა) $\vec{a} = (4; -1; -2)$, $\vec{b} = (2; 1; 2)$;
- ბ) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.
- 4.30.** მოცემულია $A(1; 2)$, $B(2; 4)$ და $C(3; 5)$ წერტილები. იპოვეთ \overline{AB} და \overline{AC} ვექტორების კოორდინატები და მათი საშუალებით გამოთვალეთ BAC კუთხის კოსინუსი.
- 4.31.** განსაზღვრეთ ABC სამკუთხედის კუთხეები, თუ მისი წვეროების კოორდინატებია: $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ და $C(0; 0; 5)$.
- 4.32.** მოცემულია $\vec{a} = (2; 1; 3)$, $\vec{b} = (1; 2; 4)$ და $\vec{c} = (3; 0; 2)$ ვექტორები. იპოვეთ $(\vec{a} + 2\vec{b})\vec{c}$ სკალარული ნამრავლი.

- 4.33.** იპოვეთ $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$ და $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ ცნობილია, რომ \vec{m} და \vec{n} ერთეულოვანი სიგრძის მქონე ურთიერთმართობული ვექტორებია.
- 4.34.** O წერტილი კოორდინატთა სისტემის სათავეა, ხოლო $A(3;1)$ მოცემული წერტილია. იპოვეთ $B(x;5)$ წერტილის უცნობი კოორდინატი, თუ \vec{OA} და \vec{AB} ვექტორების სკალარული ნამრავლი -2 -ის ტოლია.
- 4.35.** იპოვეთ $\vec{a} = (1; x; 2)$ ვექტორის უცნობი კოორდინატი და სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ \vec{a} ვექტორისა და $\vec{b} = (3; -2; 4)$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი 3 -ის ტოლია.
- 4.36.** მოცემულია $A(0;1)$, $B(3;-2)$ და $C(1;2)$ წერტილები. იპოვეთ $\vec{AB}(2\vec{BC} + \vec{AC})$ სკალარული ნამრავლი.
- 4.37.** იპოვეთ $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$ და $\vec{b} = 2\vec{m}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი, თუ ცნობილია, რომ $\vec{m} = (1;2)$ და $\vec{n} = (3;1)$.
- 4.38.** იპოვეთ კუთხე იმ პარალელოგრამის დიაგონალებს შორის, რომელიც აგებულია $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ და $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$ ვექტორებზე.
- 4.39.** იპოვეთ $\vec{a} = (2; x; 1)$ ვექტორის უცნობი კოორდინატი და სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ \vec{a} ვექტორი $\vec{b} = (3; -2; 4)$ ვექტორის მართობულია.
- 4.40.** იპოვეთ x -ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\vec{a} = (3; 0; 4)$ და $\vec{b} = (2; x; 1)$ ვექტორებს შორის კუთხის სიდიდე 60° -ია.

4.41. $\vec{a} = (x; \sqrt{y}; 1)$ და $\vec{b} = (1; 0; -2)$ ურთიერთმართობული ვექტორებია. \vec{a} ვექტორის სიგრძე 3-ის ტოლია. იპოვეთ x და y .

4.42. \vec{i} და \vec{j} ურთიერთმართობული ერთეულოვანი ვექტორებია. λ -ს რა მნიშვნელობისთვის იქნება $\vec{a} = \lambda\vec{i} + \vec{j}$ და $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ ვექტორებს შორის კუთხე 60° -ის ტოლი.

4.43. ცნობილია, რომ \vec{m} და \vec{n} ერთეულოვანი ვექტორებია, რომელთა შორის კუთხე 60° -ია. იპოვეთ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ სკალარული ნამრავლი, თუ

ა) $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 4\vec{n}$;

ბ) $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$.

4.44. \vec{p} და \vec{q} ერთეულოვანი ვექტორებია, რომელთა შორის კუთხე 120° -ია. იპოვეთ $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ ვექტორის სიგრძე.

4.45. იპოვეთ $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$ ვექტორის სიგრძე, თუ \vec{m} ვექტორის სიგრძეა $\sqrt{2}$, \vec{n} ვექტორის კი - 4, ხოლო კუთხე \vec{m} და \vec{n} ვექტორებს შორის 45° -ია.

4.5. ვექტორული სივრცე. ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებლობა

4.46. მოცემულია $\vec{a} = (2; -3; 4; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; -3; 1; 0; 5)$, $\vec{c} = (-1; 0; 2; 3; 4)$ ვექტორები. იპოვეთ:

ა) $\vec{a} + \vec{b}$; ბ) $2\vec{a} + \vec{b}$; გ) $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$; დ) $\vec{b} - 2\vec{c}$; ე) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

ვ) $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{c}$;

ზ) შეადგინეთ წრფივი კომბინაცია: $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$, თუ

1) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$; 2) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -2$.

- გაარკვეით წრფივად დამოუკიდებელია, თუ წრფივად დამოკიდებული ვექტორთა შემდეგი სისტემები:

4.47. $\vec{a} = (-3; 1; 5), \vec{b} = (6; -3; 15)$.

4.48. $\vec{a} = (-2; 3; 0; 5), \vec{b} = (-4; 6; 0; 10)$.

4.49. $\vec{a}_1 = (2; 0; 0; 0), \vec{a}_2 = (0; 1; 0; 0), \vec{a}_3 = (0; 0; 4; 0)$.

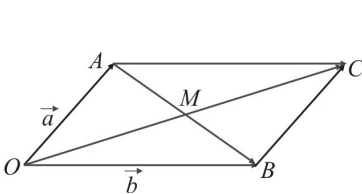
4.50. $\vec{a}_1 = (1; 1; 1; 1; 1), \vec{a}_2 = (0; 1; 1; 0; 0), \vec{a}_3 = (0; 0; 2; 2; 0),$
 $\vec{a}_4 = (0; 0; 0; 3; 3)$.

4.51. ა) $\vec{a} = (2; -3; 0), \vec{b} = (1; -1; 2), \vec{c} = (4; -5; 4)$;

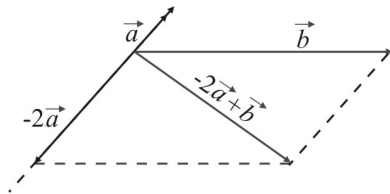
ბ) $\vec{a} = (1; -2; 3), \vec{b} = (0; 1; 3), \vec{c} = (2; -4; 2)$.

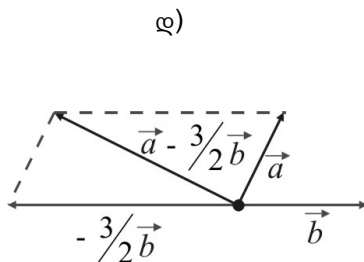
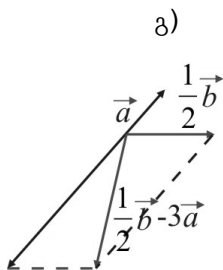
პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

4.20. ა)



ბ)





4.21. $\overline{MO} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overline{MA} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$, $\overline{MB} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$,
 $\overline{MC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

4.22. а) $\overline{AB} = (-6; 0; -2)$, $|\overline{AB}| = \sqrt{40}$; б) $\overline{AB} = (-3; 0; 4)$,
 $|\overline{AB}| = 5$.

4.23. а) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

4.24. $\vec{a} + \vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{a} - \vec{b} = -\vec{i} + 7\vec{j} - 10\vec{k}$.

4.25. $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{13}$.

4.26. а) $\overline{MN} + 2\overline{MK} = (-1; 5)$, $|\overline{MN} + 2\overline{MK}| = \sqrt{26}$;

б) $\overline{MN} + 2\overline{MK} = (-4; 5; -2)$, $|\overline{MN} + 2\overline{MK}| = \sqrt{45}$.

4.27. $\overline{AM} = \left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

4.28. $\overline{AM} = (10; 5; 5)$.

4.29. а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{21}}$;

$$\text{в) } \vec{a} \cdot \vec{b} = -1, \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{84}}.$$

$$4.30. \quad \overline{AB} = (1; 2), \overline{AC} = (2; 3), \cos \angle BAC = \frac{8}{\sqrt{65}}.$$

$$4.31. \quad \angle BAC = 90^\circ, \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ.$$

$$4.32. \quad 34.$$

$$4.33. \quad -4.$$

$$4.34. \quad x = 1.$$

$$4.35. \quad x = 4, |\vec{a}| = \sqrt{21}.$$

$$4.36. \quad -36.$$

$$4.37. \quad \frac{\sqrt{20}}{5}.$$

$$4.38. \quad \alpha = 90^\circ.$$

$$4.39. \quad x = 5, |\vec{a}| = \sqrt{30}.$$

$$4.40. \quad x = \pm\sqrt{11}.$$

$$4.41. \quad x = 2, y = 4.$$

$$4.42. \quad \lambda = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$4.43. \quad \text{а) } -\frac{11}{2}; \text{ в) } -\frac{9}{2}.$$

4.44. მ ი თ ი თ ე ბ ა . $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, $|\vec{a}| = \sqrt{19}$.

4.45. $|\vec{a}| = \sqrt{10}$.

4.46. ა) $(4; -6; 5; -2; 6)$; ბ) $(6; -9; 9; -4; 7)$; გ) $(-2; 0; 7; 4; 4)$;

დ) $(4; -3; -3; -6; -3)$; ე) 22 ; ვ) 44 ;

ზ) 1) $(-1; -3; 13; 5; 9)$, 2) $(4; -3; 0; -8; -7)$.

4.47. წრფივად დამოუკიდებელი.

4.48. წრფივად დამოკიდებული.

4.49. წრფივად დამოუკიდებელი.

4.50. წრფივად დამოუკიდებელი.

4.51. ა) წრფივად დამოკიდებული;

ბ) წრფივად დამოუკიდებული.

4.6. წრფე სიბრტყეზე. წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებები

4.52. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის საკოორდინატო სისტემის სათავეზე და აბსცისთა ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს კუთხეს, რომლის სიდიდეა:

ა) 45° ; ბ) 135° ; გ) 30° ; დ) 0° .

4.53. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $A(0; -4)$ ნერტილზე და აბსცისთა ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს კუთხეს, რომელიც ტოლია:

ა) $\frac{\pi}{3}$; ბ) $\frac{2\pi}{3}$; გ) $-\frac{\pi}{4}$; დ) 0 .

- 4.54.** იპოვეთ წრფის საკუთხო კოეფიციენტი და ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის ნერტილის ორდინატი, თუ წრფის განტოლებაა:
- ა) $2x - y - 3 = 0$; ბ) $2x + 3y - 5 = 0$; გ) $2y + 5 = 0$;
 დ) $3x - 7 = 0$; ე) $x + y = 0$.
- 4.55.** იპოვეთ კუთხე, რომელსაც ადგენს აბსცისთა ღერძის დადებით მიმართულებასთან მოცემული წრფე:
- ა) $x + y - 3 = 0$; ბ) $2x + y - 4 = 0$; გ) $x - y - 2 = 0$;
 დ) $x = 5y$; ე) $2x - 5 = 0$.
- 4.56.** წრფის განტოლება ჩანერეთ საკუთხო კოეფიციენტის სახით, თუ მისი ზოგადი სახის განტოლებაა:
- ა) $4x + 2y - 3 = 0$; ბ) $-2x + y = 0$;
 გ) $y + 5 = 0$; დ) $2x + 3 = 0$.
- 4.57.** შეადგინეთ P ნერტილზე გავლებული ნებისმიერი წრფის განტოლება, გარდა OY ღერძის პარალელური წრფისა, თუ ცნობილია, რომ
- ა) $P(5;3)$; ბ) $P(0;-2)$; გ) $P(-2;0)$; დ) $P(0;0)$.
- 4.58.** შეადგინეთ წრფეთა კონის განტოლება, თუ კონის ცენტრია:
- ა) $M(-3;1)$; ბ) $M(-2;-3)$.
- 4.59.** დანერეთ $M(-4;2)$ ნერტილზე გავლებული ყველა წრფის განტოლება, გარდა OY ღერძის პარალელური წრფისა.
- 4.60.** M_1 და M_2 მოცემულ ნერტილებზე გავლებული წრფის განტოლება ჩანერეთ ზოგადი სახით, თუ ცნობილია, რომ
- ა) $M_1(-2;3)$ და $M_2(7;6)$;

- ბ) $M_1(3;0)$ და $M_2(2;-3)$;
 გ) $M_1(4;5)$ და $M_2(4;-2)$;
 დ) $M_1(3;-2)$ და $M_2(-1;-2)$.

4.61. ჩანერეთ ლერძთა მონაკვეთებში წრფეთა შემდეგი განტოლებები:

- ა) $2x + 3y + 36 = 0$; ბ) $7x - 8y = 0$;
 გ) $5x + 3 = 0$; დ) $x + y + 3 = 0$;
 ე) $y + 5 = 0$; ვ) $x - 5y - 11 = 0$.

4.62. დანერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც საკოორდინატო ლერძებს ჰკვეთს წერტილებში:

- ა) $M(-5;0)$ და $N(0;2)$;
 ბ) $M(7;0)$ და $N(0;-3)$.

4.63. ჩანერეთ წრფის განტოლება $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ სახით, თუ ცნობილია, რომ $p = q$ დადებითი რიცხვებია, ხოლო საკოორდინატო ლერძებითა და მოცემული წრფით შედგენილი სამკუთხედის ფართობი 72 კვ. ერთეულია.

4.64. დანერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც აბსცისთა ლერძზე ჩამოჭრის ორჯერ მეტი სიგრძის მონაკვეთს, ვიდრე ორდინატთა ლერძზე და გადის $A(4;3)$ წერტილზე.

4.65. l წრფე საკოორდინატო ლერძებს ჰკვეთს სათავიდან ტოლი მანძილებით დაშორებულ წერტილებში, რომელთა შემაერთებელი მონაკვეთის სიგრძე $7\sqrt{2}$ -ის ტოლია. შეადგინეთ l წრფის განტოლება.

4.66. ჩანერეთ ნორმალური სახით წრფეთა განტოლებები:

- ა) $5x - 12y - 26 = 0$; ბ) $x \sin 20^\circ + y \cos 20^\circ + 3 = 0$;
 გ) $3x + 1 = 0$; დ) $2y - 1 = 0$; ე) $2x - y - 1 = 0$;
 ვ) $3x + 4y - 5 = 0$; ზ) $6x + 8y + 5 = 0$;
 თ) $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$; ი) $3x + y = 0$.

4.67. მოცემულია წრფის განტოლება $\frac{x+1}{3} - \frac{y-1}{4} = 0$ სახით.

დანერეთ ამავე წრფის განტოლება:

- ა) საკუთხო კოეფიციენტით; ბ) ღერძთა მონაკვეთებში;
 გ) ზოგადი სახით; დ) ნორმალური სახით.

4.7. ძირითადი ამოცანები წრფეზე

4.68. იპოვეთ ორი მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილი:

- ა) $2x - 3y + 5 = 0$ და $x + 2y - 1 = 0$;
 ბ) $x - 3y + 4 = 0$ და $2x + 6y - 1 = 0$;
 გ) $2x - 4y + 1 = 0$ და $3x - 6y - 7 = 0$;
 დ) $2x - 3 = 0$ და $3y + 2 = 0$;
 ე) $x - 1.5y + 1 = 0$ და $2x - 3y + 2 = 0$.

4.69. სამკუთხედის გვერდების განტოლებებია: $5x - y - 11 = 0$,
 $x + 5y + 3 = 0$ და $2x - 3y + 6 = 0$. იპოვეთ სამკუთხედის
 წვეროების კოორდინატები.

4.70. იპოვეთ კუთხე ორ მოცემულ წრფეს შორის:

- ა) $y = -2x + 3$ და $y = \frac{1}{3}x + 4$;
 ბ) $3x - 2y + 1 = 0$ და $2x + y - 4 = 0$;

$$გ) \frac{4x-1}{2} = \frac{3-2y}{3} \text{ და } \frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1;$$

$$დ) y = 4 \text{ და } y = 2x + 1.$$

4.71. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(-3; 2)$ წერტილზე და $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ წრფესთან 60° -ის ტოლ კუთხეს ქმნის.

4.72. მოცემულია $A(2; -4)$ და $B(6; 4)$ წერტილები. შეადგინეთ A წერტილზე გავლებული ყველა იმ წრფის განტოლება, რომელიც AB წრფესთან 45° -იან კუთხეს ქმნის.

4.73. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის

ა) $M(2; -1)$ წერტილზე $3x - 2y + 5 = 0$ წრფის პარალელურად;

ბ) $M(0; 4)$ წერტილზე $\frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{6}$ წრფის პარალელურად;

გ) $M(3; -2)$ წერტილზე $y = 3$ წრფის პარალელურად;

დ) $M(3; -2)$ წერტილზე $x = -1$ წრფის პარალელურად.

4.74. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(2; -3)$ წერტილზე $M_1(1; 2)$ და $M_2(-1; -5)$ წერტილებზე გავლებული წრფის პარალელურად.

4.75. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გავლებულია $x - 3 = 0$ და $2x + 3y - 12 = 0$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე $5x - 4y - 17 = 0$ წრფის პარალელურად.

4.76. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $A(-4; 5)$ წერტილზე და მართობულია წრფისა:

ა) $3x + 2y + 1 = 0$; ბ) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1$; გ) $x = 3$; დ) $y = -3$.

4.77. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის

ა) $A(1; 2)$ წერტილზე და მართობულია $M_1(4; 3)$ და $M_2(-2; 1)$ წერტილებზე გავლებული წრფისა;

ბ) $A(-4; 3)$ წერტილზე და $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{5}$ წრფის მართობულად;

გ) $A(3; -1)$ წერტილზე და $x = -2$ წრფის მართობულად;

დ) $A(2; 1)$ წერტილზე და $y = 3$ წრფის მართობულად.

4.78. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გავლებულია $3x - y = 0$ და $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{2}$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე პირველი წრფის მართობულად.

4.79. იპოვეთ მანძილი $P(-2; 4)$ წერტილიდან:

ა) $3x - 4y + 16 = 0$ წრფემდე;

ბ) $y = 2x + 5$ წრფემდე;

გ) $x = 5$ წრფემდე;

დ) $y = -6$ წრფემდე.

4.80. იპოვეთ მანძილი პარალელურ წრფეებს შორის:

ა) $x - 2y + 5 = 0$ და $2x - 4y + 1 = 0$;

ბ) $3x - 4y + 7 = 0$ და $3x - 4y - 18 = 0$;

გ) $3x + 4y - 6 = 0$ და $6x + 8y - 7 = 0$;

დ) $2x + y + 3 = 0$ და $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-4}$;

ე) $-6x + 3y = 2$ და $\frac{y-1}{2} = x$.

- 4.81.** იპოვეთ კვადრატის გვერდის სიგრძე, თუ მისი მოპირდაპირე გვერდების განტოლებებია: $y = 2x + 3$ და $-4x + 2y + 1 = 0$.
- 4.82.** შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M(-1; 2)$ წერტილზე და მანძილი $N(3; -1)$ წერტილიდან საძიებელ წრფემდე ორი ერთეულია.
- 4.83.** იპოვეთ წრფის განტოლება, რომელიც $4x - 3y - 3 = 0$ წრფის პარალელურია და მანძილი $N(1; -2)$ წერტილიდან საძიებელ წრფემდე სამი ერთეულია.
- 4.84.** იპოვეთ წრფის განტოლება, რომელიც მართობულია $5x + 12y - 1 = 0$ წრფის და მანძილი $M(3; 1)$ წერტილიდან საძიებელ წრფემდე ორი ერთეულია.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

4.52. ა) $y = x$; ბ) $y = -x$; გ) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; დ) $y = 0$.

4.53. ა) $y = \sqrt{3}x - 4$; ბ) $y = -\sqrt{3}x - 4$;
გ) $y = -x - 4$; დ) $y = -4$.

4.54. ა) $k = 2$, $b = -3$; ბ) $k = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{5}{3}$; გ) $k = 0$, $b = -\frac{5}{2}$;
დ) წრფე პარალელურია OY ღერძის; ე) $k = -1$, $b = 0$.

4.55. ა) $\alpha = \frac{3}{4}\pi$; ბ) $\alpha = -\arctg 2$; გ) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; დ) $\alpha = \arctg \frac{1}{5}$;

ე) $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

4.56. ა) $y = -2x + \frac{3}{2}$; ბ) $y = 2x$; გ) $y = -5$;

დ) არ ჩაინერება საკუთხო კოეფიციენტის ფორმით.

4.57. ა) $y - 3 = k(x - 5)$; ბ) $y + 2 = kx$;

გ) $y = k(x + 2)$; დ) $y = kx$.

4.58. ა) $y - 1 = k(x + 3)$, $x = -3$; ბ) $y + 3 = k(x + 2)$, $x = -2$.

4.59. $y - 2 = k(x + 4)$.

4.60. ა) $x - 3y + 11 = 0$; ბ) $3x - y - 9 = 0$;

გ) $x - 4 = 0$; დ) $y + 2 = 0$.

4.61. ა) $\frac{x}{-18} + \frac{y}{-12} = 1$;

ბ), გ), ე) განტოლება არ ჩაინერება ღერძთა მონაკვეთებში;

დ) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-3} = 1$; ვ) $\frac{x}{11} + \frac{y}{-11/5} = 1$.

4.62. ა) $\frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = 1$; ბ) $\frac{x}{7} + \frac{y}{-3} = 1$.

4.63. $\frac{x}{12} + \frac{y}{12} = 1$.

4.64. $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$, $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$.

$$4.65. \quad \frac{x}{-7} + \frac{y}{-7} = 1, \quad \frac{x}{-7} + \frac{y}{7} = 1, \quad \frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1, \quad \frac{x}{7} + \frac{y}{-7} = 1.$$

$$4.66. \quad \text{ა) } \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - 2 = 0; \quad \text{ბ) } \cos 250^\circ x + \sin 250^\circ y - 3 = 0;$$

$$\text{გ) } -x - \frac{1}{3} = 0; \quad \text{დ) } y - \frac{1}{2} = 0; \quad \text{ე) } \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0;$$

$$\text{ვ) } \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0; \quad \text{ზ) } -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\text{თ) } \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 = 0; \quad \text{ი) } \frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y = 0.$$

$$4.67. \quad \text{ა) } y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}; \quad \text{ბ) } \frac{x}{-7/4} + \frac{y}{7/3} = 1;$$

$$\text{გ) } 4x - 3y + 7 = 0; \quad \text{დ) } -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{7}{5} = 0.$$

$$4.68. \quad \text{ა) } (-1; 1); \quad \text{ბ) } \left(-\frac{7}{4}; \frac{3}{4}\right); \quad \text{გ) } \text{წრფეები პარალელურია, არ იკვეთებიან};$$

$$\text{დ) } \left(\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right); \quad \text{ე) } \text{ეს წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა.}$$

$$4.69. \quad A(2; -1), \quad B(3; 4), \quad C(-3; 0).$$

$$4.70. \quad \text{ა) } \operatorname{arctg} 7; \quad \text{ბ) } \operatorname{arctg} \frac{7}{4}; \quad \text{გ) } \operatorname{arctg} \frac{11}{13}; \quad \text{დ) } \operatorname{arctg} 2.$$

$$4.71. \quad \sqrt{3}x + y + 3\sqrt{3} - 2 = 0, \quad y = 2.$$

$$4.72. \quad x - 3y - 14 = 0, \quad y = -3x + 2$$

$$4.73. \quad \text{ა) } 3x - 2y - 8 = 0; \quad \text{ბ) } 2x - y + 4 = 0; \quad \text{გ) } y = -2; \quad \text{დ) } x = 3.$$

4.74. $7x - 2y - 20 = 0$.

4.75. $5x - 4y - 7 = 0$.

4.76. ა) $2x - 3y + 23 = 0$; ბ) $x + 2y - 6 = 0$;
გ) $y = 5$; დ) $x = -4$.

4.77. ა) $3x + y - 5 = 0$; ბ) $3x + 5y - 3 = 0$; გ) $y = -1$; დ) $x = 2$.

4.78. ა) $x + 3y - 15 = 0$.

4.79. ა) $d = \frac{6}{5}$; ბ) $d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$; გ) $d = 7$; დ) $d = 10$.

4.80. ა) $0.9\sqrt{5}$; ბ) 5 ; გ) 0.5 ; დ) $d = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; ე) $\frac{\sqrt{5}}{15}$;

4.81. $0.7\sqrt{5}$.

4.82. $y - 2 = \frac{-6 \pm \sqrt{21}}{6}(x + 1)$.

4.83. $4x - 3y + 5 = 0$, $4x - 3y - 25 = 0$.

4.84. $12x - 5y - 5 = 0$, $12x - 5y - 57 = 0$.

4.8. სხვადასხვა ამოცანები წრფის შესახებ

4.85. შეადგინეთ $A(-1; 3)$ და $B(5; -2)$ წერტილების შემაერთებული მონაკვეთის შუა წერტილზე გავლებული AB -ს მართობული წრფის განტოლება.

4.86. დაწერეთ წრფის განტოლება, თუ $A(1; 3)$ წერტილი სათავედან ამ წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძეა.

- 4.87.** დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $A(4;3)$ წერტილზე და საკოორდინატო სისტემის სათავიდან დაშორებულია ოთხი ერთეულით.
- 4.88.** N წერტილი ABC სამკუთხედის AC გვერდია შუა წერტილია. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის C წერტილზე და AB წრფის პარალელურია, თუ ცნობილია, რომ $A(4;2)$, $B(5;8)$ და $N(3;4)$.
- 4.89.** M წერტილი AB მონაკვეთის შუა წერტილია. ცნობილია, რომ $A=(2;8)$ და $M=(4;5)$. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის B წერტილზე და AB წრფის მართობულია.
- 4.90.** $ABCD$ კვადრატში AC დიაგონალია. ცნობილია, რომ $A=(2;3)$ და $C=(4;7)$. შეადგინეთ BD წრფის განტოლება.
- 4.91.** $A(4;2)$ და $C(2;6)$ წერტილები $ABCD$ რომბის მოპირდაპირე წვეროებია. შეადგინეთ BD წრფის განტოლება.
- 4.92.** $A(2;-4)$, $B(-4;4)$ და $C(6;2)$ სამკუთხედის წვეროებია. შეადგინეთ ამ სამკუთხედის BK სიმაღლის შემცველი წრფის განტოლება.
- 4.93.** ABC სამკუთხედის AB , BC და AC გვერდების განტოლებებია $2x - y = 0$, $3x + y = 5$ და $4x + 3y - 2 = 0$, შესაბამისად. იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები და გამოთვალეთ BK სიმაღლის სიგრძე.
- 4.94.** მოცემულია $C(-4;1)$ და $D(6;-4)$ წერტილები. CD მონაკვეთზე აღებულია E წერტილი ისე, რომ $CE = 4ED$.

შეადგინეთ E წერტილზე და კოორდინატთა სისტემის სათავზე გავლებული წრფის განტოლება.

4.95. $A(-4;1)$, $B(6;1)$ და $C(-1;5)$ სამკუთხედის წვეროებია.

შეადგინეთ ამ სამკუთხედის AN ბისექტრისის შემცველი წრფის განტოლება.

4.96. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილზე გადის და AB გვერდის პარალელურია, თუ $A(3;-4)$, $B(5;-6)$ და $C(-1;2)$ სამკუთხედის წვეროებია.

4.97. აბსცისთა ღერძზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც კოორდინატთა სისტემის სათავიდან და $15x - 8y + 34 = 0$ წრფიდან თანაბარი მანძილითაა დაშორებული.

4.98. მოცემულია წრფე, რომლის განტოლებაა: $8x + 15y + 68 = 0$. შეადგინეთ მისი პარალელური და მისგან სამი ერთეულით დაშორებული წრფის განტოლება.

4.99. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც $5x + 12y - 1 = 0$ წრფის მართობულია და $M(3;1)$ წერტილიდან ორი ერთეულითაა დაშორებული.

4.100. იპოვეთ $A(2;-2)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $x + 3y - 6 = 0$ წრფის მიმართ.

4.101. კვადრატის ერთი გვერდის ბოლო წერტილებია: $A(2;3)$ და $B(-2;0)$. შეადგინეთ კვადრატის გვერდების განტოლებები.

4.102. $A(2;5)$ წერტილი რომბის ერთ-ერთი წვეროა, $x + 2y - 7 = 0$ კი არის ამავე რომბის ერთ-ერთი დიაგონა-

ლის განტოლება. იპოვეთ რომბის A წვეროს მოპირდაპირე წვეროს კოორდინატები.

4.103. იპოვეთ რომბის წვეროების კოორდინატები, თუ მისი ორი გვერდის განტოლებებია: $3x + y - 1 = 0$ და $3x + y + 7 = 0$, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალის $x - y + 5 = 0$.

4.104. მოცემულია ABC სამკუთხედის წვეროები:

ა) $A(-2; 8)$, $B(10; 3)$, $C(16; 11)$;

ბ) $A(-1; 5)$, $B(11; 0)$, $C(17; 8)$;

გ) $A(6; 7)$, $B(-6; 2)$, $C(-10; 5)$.

იპოვეთ:

- 1) სამკუთხედის გვერდების განტოლებები;
- 2) A წვეროდან გავლებული მედიანის განტოლება;
- 3) მედიანების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები;
- 4) B კუთხის ბისექტრისის AC გვერდთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები;
- 5) B კუთხის ბისექტრისის განტოლება;
- 6) A წერტილიდან BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლის განტოლება და სიგრძე;
- 7) ABC სამკუთხედის ფართობი;
- 8) კუთხე C .

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

4.85. $12x - 10y - 19 = 0$.

4.89. $2x - 3y - 7 = 0$.

4.86. $x + 3y - 10 = 0$.

4.90. $x + 2y - 13 = 0$.

4.87. $7x + 24y - 100 = 0$.

4.91. $x - 2y + 5 = 0$.

4.88. $6x - y - 6 = 0$.

4.92. $2x + 3y - 4 = 0$.

4.93. $B(1;2), BK = 1.6.$

4.98. $8x+15y+17=0,$

4.94. $y = -\frac{3}{4}x.$

$8x+15y+119=0.$

4.95. $x-2y+6=0.$

4.99. $12x-5y-5=0,$

$12x-5y-57=0.$

4.96. $3x+3y+1=0.$

4.100. $(4;4).$

4.97. $(17;0), \left(-\frac{17}{16};0\right).$

4.101. $3x-4y+6=0, 4x+3y-17=0, 4x+3y+8=0,$

მეოთხე გვერდის განტოლება: $3x-4y+31=0$ ან $3x-4y-19=0.$

4.102. $(0;1).$

4.103. $(0;1), (-3;2), (-4;5)$ და $(-1;4).$

4.104.

		ა)	ბ)	გ)
1.	AB გვერდის განტოლება	$5x+12y-86=0$	$5x+12y-55=0$	$5x+12y+54=0$
	BC გვერდის განტოლება	$4x-3y-31=0$	$4x-3y-44=0$	$3x+4y+10=0$
	AC გვერდის განტოლება	$x-6y+50=0$	$x-6y+31=0$	$x-8y+50=0$
2.	AD მედიანის განტოლება	$x+15y-118=0$	$x+15y-74=0$	$x-4y+22=0$
3.	მედიანების გადაკვეთის წერტილი	$\left(8; \frac{22}{3}\right)$	$\left(9; \frac{13}{3}\right)$	$\left(-\frac{10}{3}; \frac{14}{3}\right)$
4.	L წერტილის კოორდინატები	$\left(\frac{188}{23}; \frac{223}{23}\right)$	$\left(\frac{211}{23}; \frac{154}{23}\right)$	$\left(-\frac{50}{9}; \frac{50}{9}\right)$

5.	BE ბისექტრისის განტოლება	$11x+3y-10=0$	$11x+3y-121=0$	$8x-y+50=0$
6.	h_A სიმაღლის განტოლება	$3x+4y-32=0$	$3x+4y-17=0$	$4x-3y-3=0$
	h_A სიმაღლის სიგრძე	12.6	12.6	11.2
7.	სამკუთ- ხედის ფართობი	63	63	28
8.	კუთხე C	$\arctg \frac{21}{22}$	$\arctg \frac{21}{22}$	$\pi - \arctg \frac{28}{29}$

**4.9. ორუცნობიანი ნრფივი უტოლობა და უტოლობათა სისტე-
მა**

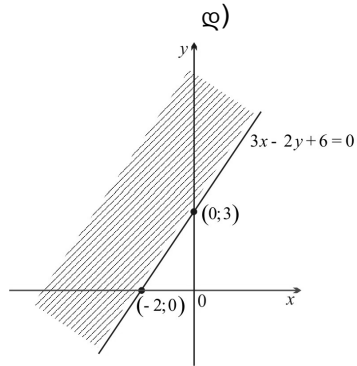
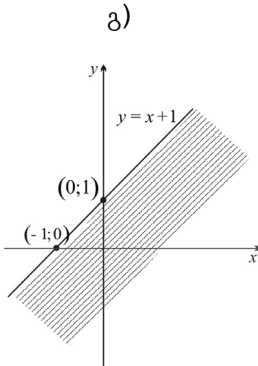
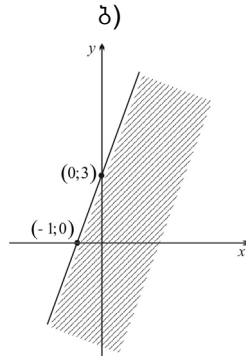
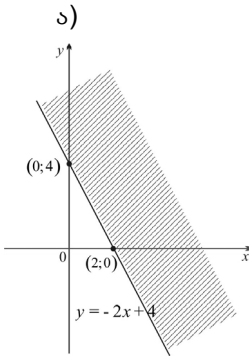
- გამოსახეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე შემდეგი უტო-
ლობების და უტოლობათა სისტემების ამონახსნთა სიმ-
რავლეები:

4.105. ა) $y \geq -2x+4$; ბ) $y \leq 3x+3$;
გ) $2x+y \leq 4x-y+2$; დ) $3x-2y+6 \leq 0$.

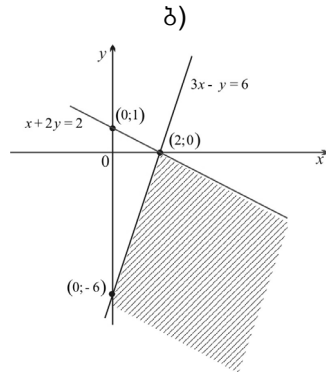
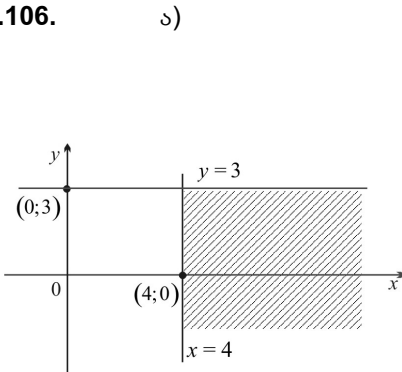
4.106. ა) $\begin{cases} 2x-8 \geq 0 \\ 3y-9 \leq 0 \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} x+2y \leq 2 \\ 3x-y \geq 6 \end{cases}$;
გ) $\begin{cases} x-y \geq -3 \\ 3x+4y \geq 5 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$; დ) $\begin{cases} 3x-y \geq 0 \\ 4x+3y \leq 13 \\ x-2y \leq 5 \end{cases}$.

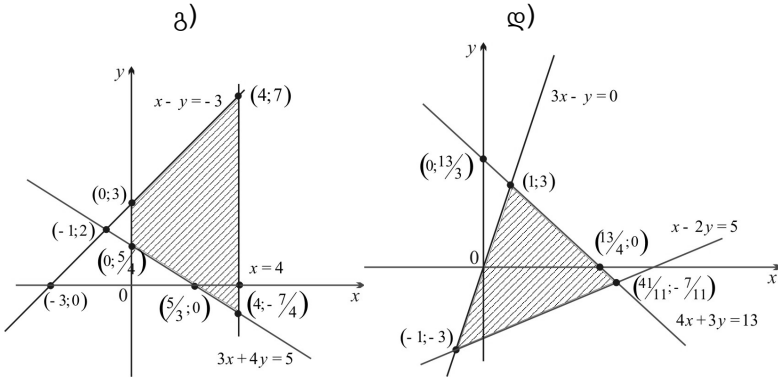
პ ა ს უ ბ ე ბ ი :

4.105.



4.106.





4.10. მეორე რიგის წირები

- **წრენირი**

4.107. დაწერეთ წრენირის განტოლება, რომელიც $A(2;2)$ წერტილზე გადის, ხოლო ცენტრი აქვს $C(0;3)$ წერტილში.

4.108. დაიყვანეთ კანონიკურ სახეზე წრენირის განტოლებები:

- ა) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$;
- ბ) $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 20 = 0$;
- გ) $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$;
- დ) $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

4.109. შეადგინეთ $(0;1)$, $(3;0)$ და $(-1;2)$ წერტილებზე გამავალი წრენირის განტოლება.

4.110. შეადგინეთ $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25$ წრენირის იმ დიამეტრის განტოლება, რომელიც მართობულია $5x+10y-12=0$ წრფის.

4.111. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ მისი ერთ-ერთი დიამეტრის ბოლოებია $A(4;5)$ და $B(-2;1)$ წერტილები.

• ელიფსი

4.112. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ:

ა) ფოკუსებს შორის მანძილი 6-ის ტოლია, ხოლო დიდი ნახევარღერძია 5;

ბ) დიდი ნახევარღერძია 10, ხოლო ექსცენტრისიტი 0.8-ის ტოლია.

4.113. შეადგინეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება, რომლის

ა) მცირე ნახევარღერძია 3, ხოლო ექსცენტრისიტი $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -ის ტოლია;

ბ) ნახევარღერძების ჯამია 10, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი $4\sqrt{5}$ -ის ტოლია.

4.114. იპოვეთ ელიფსების ღერძთა სიგრძეები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტი:

ა) $9x^2 + 25y^2 = 225$;

ბ) $16x^2 + y^2 = 16$;

გ) $25x^2 + 169y^2 = 4225$;

დ) $9x^2 + y^2 = 36$.

4.115. შეადგინეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება, თუ მანძილები მისი ერთ-ერთი ფოკუსიდან დიდი ღერძის ბოლოებამდე არის 7 და 1.

4.116. ელიფსზე, რომლის კანონიკური განტოლებაა $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$

აღებულია წერტილი, რომელიც 5 ერთეულითაა დაშორე-

ბული მისი მცირე ღერძიდან. იპოვეთ ამ წერტილის კოორდინატები.

4.117. ელიფსზე, რომლის კანონიკური განტოლებაა $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$,

აღებულია წერტილი, რომელიც 3-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული მარჯვენა ფოკუსიდან, ვიდრე მარცხენა ფოკუსიდან. იპოვეთ ამ წერტილის კოორდინატები.

4.118. შეადგინეთ ელიფსის კანონიკური განტოლება, თუ ის სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავეს მიმართ, ფოკუსები მდებარეობს აბსცისთა ღერძზე, დირექტრისებს შორის მანძილია 5, ხოლო ფოკუსებს შორის კი 4-ია.

• **ჰიპერბოლა**

4.119. შეადგინეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, თუ:

ა) ფოკუსებს შორის მანძილია 10 და წარმოსახვითი ნახევარღერძი 4-ის ტოლია;

ბ) ნამდვილი ნახევარღერძია $2\sqrt{5}$ და ექსცენტრისიტეტია $\sqrt{1.2}$.

4.120. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ:

ა) ფოკუსებს შორის მანძილია 16 და ექსცენტრისიტეტი $\frac{4}{3}$ -ის ტოლია.

ბ) წარმოსახვითი ნახევარღერძია 5 და ექსცენტრისიტეტი $\frac{3}{2}$ -ის ტოლია.

4.121. იპოვეთ ჰიპერბოლის ღერძები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი, თუ მისი განტოლებაა:

ა) $4x^2 - 9y^2 = 25$;

ბ) $9y^2 - 16x^2 = 144$.

4.122. ა) იპოვეთ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ჰიპერბოლის ნახევარღერძები,

ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი;

ბ) შეადგინეთ იმ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, რომლის ფუძეები მოთავსებულია ორდინატთა ღერძზე სათავის სიმეტრიულად, ხოლო ნახევარღერძებია 6 და 12.

4.123. შეადგინეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, თუ ის $M(-5; 3)$ წერტილზე გადის და მისი ექსცენტრისიტეტი $\sqrt{2}$ -ის ტოლია.

• **პარაბოლა**

4.124. პარაბოლის კანონიკური განტოლებაა $y^2 = 24x$. იპოვეთ მისი ფოკუსის კოორდინატები და დირექტრისის განტოლება.

4.125. შეადგინეთ პარაბოლის კანონიკური განტოლება, რომლის ფოკუსი $F(-7; 0)$ წერტილშია, ხოლო დირექტრისის განტოლებაა $x - 7 = 0$.

4.126. შეადგინეთ პარაბოლის კანონიკური განტოლება, რომელიც

ა) სიმეტრიულია აბსცისთა ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სათავეზე და $H(1; 4)$ წერტილზე;

ბ) სიმეტრიულია OY ღერძის მიმართ, ფოკუსი $F(0; 2)$ წერტილშია, ხოლო წვერო ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს.

4.127. შეადგინეთ პარაბოლის კანონიკური განტოლება, რომელიც

- ა) სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სათავეზე და $M(6; 2)$ წერტილზე;
- ბ) სიმეტრიულია აბსცისთა ღერძის მიმართ, ფოკუსი $F(3; 0)$ წერტილშია, ხოლო წვერო ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

4.107. $x^2 - (y-3)^2 = 5.$

4.108. ა) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$; ბ) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$;

გ) $x^2 + (y-3)^2 = 4$; დ) $x^2 + (y-2)^2 = 4.$

4.109. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25.$

4.110. $2x - y + 11 = 0.$

4.111. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 13.$

4.112. ა) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; ბ) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$

4.113. ა) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$; ბ) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$

4.114. ა) $2a = 10, 2b = 6, F_1(-4; 0), F_2(4; 0), c = 4/\sqrt{5}$;

ბ) $2a = 2, 2b = 8, F_1(0; \sqrt{15}), F_2(0; -\sqrt{15}), e = \sqrt{15}/4$;

გ) $2a = 26, 2b = 10, F_1(-12; 0), F_2(12; 0), e = 12/\sqrt{13}$;

დ) $2a = 4, 2b = 12, F_1(0; 4\sqrt{2}), F_2(0; -4\sqrt{2}), e = 2\sqrt{2}/3$

4.115. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1.$

4.116. $(\pm 5; \pm 2).$

4.117. $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}\right).$

4.118. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1.$

4.119. а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1;$ б) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1.$

4.120. а) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1;$ б) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{25} = 1.$

4.121. а) $2a = 5, 2b = \frac{10}{3}, F_1\left(-\frac{5}{6}\sqrt{13}; 0\right), F_2\left(\frac{5}{6}\sqrt{13}; 0\right),$
 $e = \frac{\sqrt{13}}{3};$

б) $2a = 6, 2b = 8, F_1(0; 5), F_2(0; -5), e = \frac{5}{4}.$

4.122. а) $a = 3, b = 4, F_1(-5; 0), F_2(5; 0), e = \frac{5}{3};$

б) $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{36} = 1, 2a = 6, 2b = 8, F_1(0; 5), F_2(0; -5),$
 $e = \frac{5}{4}.$

4.123. $x^2 - y^2 = 16.$

4.124. $F(6; 0), x = -6.$

4.125. $y^2 = -28x$.

4.126. ა) $y^2 = 16x$; ბ) $x^2 = 8y$.

4.127. ა) $x^2 = -18y$; ბ) $y^2 = 12x$.

5. რიცხვითი მიმდევრობები და მწკრივები

5.1. რიცხვითი მიმდევრობა. სარგებლის მარტივი და რთული განაკვეთი

5.1. იპოვეთ $(a_n)_{n \geq 1}$ მიმდევრობის პირველი ხუთი წევრი, თუ

ა) $a_n = 1 + (-1)^n$; ბ) $a_n = (-1)^n n$;

გ) $a_n = \frac{n}{n+1}$; დ) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

5.2. შეადგინეთ მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა, თუ ცნობილია მისი პირველი რამდენიმე წევრი:

ა) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \dots$; ბ) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{9}, \frac{7}{17}, \dots$; გ) $0, 1, 0, 1, \dots$;

დ) $-1, 1, -1, 1, \dots$; ე) $0, 2, 0, 4, 0, 6, \dots$.

5.3. შეისწავლეთ შემდეგი მიმდევრობების შემოსაზღვრულობის (ზემოდან, ქვემოდან) საკითხი:

ა) $a_n = \frac{2n}{3}$; ბ) $a_n = 7 - n$; გ) $a_n = (-1)^n n$;

დ) $a_n = \frac{n+5}{n}$; ე) $a_n = \frac{n^2-9}{n}$.

5.4. შეისწავლეთ შემდეგი მიმდევრობების მონოტონურობის საკითხი:

ა) $a_n = 3n + 2$; ბ) $a_n = -5n - 3$; გ) $a_n = (-1)^n$;

დ) $a_n = 2$; ე) $a_n = n^2 - 4n + 3$; ვ) $a_n = -n^2 + 2n - 5$.

- 5.5.** 4%-იანი წლიური მარტივი საპროცენტო განაკვეთით ბანკის მიერ გასესხებულია 10000 ლარი. რა თანხა დაუბრუნდება ბანკს
- ა) 2 წლის შემდეგ; ბ) 5 წლის შემდეგ;
გ) 15 თვის შემდეგ; დ) t წლის შემდეგ.
- 5.6.** რა თანხა უნდა გაასესხოს ბანკმა 5%-იანი მარტივი საპროცენტო განაკვეთით, რათა 5 წლის შემდეგ დაიბრუნოს:
- ა) 350000 ლარი; ბ) 450000 ლარი.
- 5.7.** ბანკმა წლიური მარტივი სარგებლით გაასესხა 20000 ლარი. იპოვეთ საპროცენტო განაკვეთის სიდიდე, თუ სამი წლის შემდეგ სესხის ოდენობამ შეადგინა:
- ა) 23000 ლარი; ბ) 22400 ლარი.
- 5.8.** ცხრა თვეში ბანკმა მარტივი საპროცენტო განაკვეთით 16000 ლარს დაარიცხა 360 ლარი. იპოვეთ სარგებლის საპროცენტო განაკვეთის სიდიდე.
- 5.9.** 5%-იანი რთული საპროცენტო სარგებლით თქვენ დააბანდეთ 2000 ლარი. რა თანხას მიიღებთ:
- ა) 2 წლის შემდეგ; ბ) 4 წლის შემდეგ; დ) t წლის შემდეგ.
- 5.10.** 5%-იანი რთული საპროცენტო განაკვეთით მენაბრემ დააბანდა 4000 ლარი. რა თანხას მიიღებს 3 წლის შემდეგ.
- 5.11.** რა თანხა უნდა დააბანდოს მენაბრემ, რათა 10%-იანი წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით 5 წლის შემდეგ დაიბრუნოს 48315.3 ლარი.

5.12. რამდენი წლით იყო გასესხებული 7%-იანი რთული წლიური საპროცენტო გადასახადით 40000 ლარი, თუ დაბრუნებული სესხის ოდენობაა 52432 ლარი.

5.2. მიმდევრობის ზღვარი

5.13. ზღვრის განსაზღვრების საფუძველზე აჩვენეთ, რომ

ა) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$; ბ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$;

გ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{3n} = \frac{1}{3}$; დ) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 2, & |a| < 1, \\ \infty, & |a| > 1. \end{cases}$

5.14. შემდეგი მიმდევრობებიდან რომელია უსასრულოდ მცირე:

ა) $a_n = \frac{n+100}{3n+100}$; ბ) $a_n = \frac{n+100}{n^2+1}$; გ) $a_n = \frac{n^2}{100n+1}$;

დ) $a_n = 2^{-1000}$; ე) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$.

5.15. შემდეგი მიმდევრობებიდან რომელია უსასრულოდ დიდი:

ა) $a_n = \frac{n^2+12}{5n^3}$; ბ) $a_n = \frac{n^2}{3n+20}$; გ) $a_n = 100^{1000}$;

დ) $a_n = \frac{5n^2+2n+4}{n^2}$; ე) $a_n = (-1)^{3n}$.

• **გამოთვალეთ**

5.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n+7}{2n^3-4}$.

5.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4+1}{4n^5+1}$.

5.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-3n-5}{11-n-n^2}$.

5.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^2}{3n^2-n+5}$.

$$5.20. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^3 - 7n^2}{(n+2)(n+3)}.$$

$$5.21. \quad \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^5}{3n^5}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+5)^5}{(n+3)^2 (n+1)^3}.$$

$$5.22. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^5 (2n+1)^3}{1-3n-2n^2}.$$

$$5.23. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n + \sqrt{n}}.$$

$$5.25. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27n^3 - 9n + 5}}{n}.$$

$$5.24. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n + \sqrt[3]{n}}.$$

$$5.26. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{9n^2 - n + 2}}.$$

$$5.27. \quad \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 - 5n + 1}}{n}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 - 2n + 1}}{2n + 3}.$$

$$5.28. \quad \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{n+1}{3n+1}}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{n+1}{3n^2+1}}; \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{n^2+1}{3n+1}}; \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1-n^2}{3n+1}};$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{3n+1}}; \quad \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{3n^2+1}}; \quad \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2+1}{2n+1}};$$

$$\text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-n^2}{3n+1}}.$$

$$5.29. \quad \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n + 2}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{-n}}{3^{-n} + 2}.$$

$$5.30. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+2} - 2^{n+5}}{5^n + 3^n}.$$

$$5.31. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^{n+1} - 2^{n+2}}.$$

$$5.32. \quad \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} + 10^n}{3^n + 5}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{-n} + 5^{-n}}{5^{-n} + 2}.$$

$$5.33. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3^n + 2^n)^5}{3^{5n}}.$$

$$5.37. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 9 + \dots + 3^n}{2 + 4 + \dots + 2^n}.$$

$$5.34. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{3n^2 + 1}.$$

$$5.38. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n^2 + 3n - 1} \right).$$

$$5.35. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 6 + \dots + 3n}{\sqrt{2n^4 + 5n^2 + 2}}.$$

$$5.39. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3n - \sqrt{9n^2 + n} \right).$$

$$5.36. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4 + \dots + 2^n}{2^n + 1}.$$

$$5.40. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+7} - \sqrt{n-7} \right).$$

$$5.41. \quad \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{5n+1} - \sqrt{5n-1} \right); \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{5n+1} + \sqrt{5n-1} \right)$$

$$5.42. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n - \sqrt{4n^2 + 3n}}.$$

$$5.43. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n-1} \right).$$

$$5.44. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 2n - 3} - \sqrt{n^2 - 5n + 2} \right).$$

$$5.45. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1} \right).$$

$$5.46. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!(n+2)}.$$

$$5.48. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)! + n \cdot n!}{(n+1)!},$$

$$5.47. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-1)! + (n+1)!}.$$

$$5.49. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n-1)!}{(n+2)!}.$$

$$5.50. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+2)!}{(n+3)! - (n+2)!} ; \quad 5.51. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!}{2(n+1)! + n!} .$$

$$5.52. \text{ ა) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{3n-5} \right)^{2n-4} ; \quad \text{ ბ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{3n-5} \right)^{4-2n} ;$$

$$\text{ გ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+2}{3n-1} \right)^{n+5} ; \quad \text{ დ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1} \right)^{2-n} ;$$

$$\text{ ე) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n+2} \right)^{\frac{n-1}{3n}} .$$

$$5.53. \text{ ა) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{3n} ; \quad \text{ ბ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n} \right)^{8n} ;$$

$$\text{ გ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-2} \right)^{2n-1} ; \quad \text{ დ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{3n+2} \right)^{\frac{n+1}{3}} .$$

$$5.54. \text{ ა) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+7}{n+1} \right)^{\frac{4n-5}{3}} ; \quad \text{ ბ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+7}{5n+1} \right)^{\frac{2n-3}{2}} ;$$

$$\text{ გ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2-n} \right)^n ; \quad \text{ დ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1} \right)^{\frac{n^2-1}{n}} .$$

5.3. რიცხვითი მწკრივი

- მწკრივის კრებადობის განსაზღვრების საფუძველზე შეისწავლეთ მწკრივის კრებადობის საკითხი და იპოვეთ ჯამი:

$$5.55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} .$$

$$5.56. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

$$5.57. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

- გამოიყენეთ მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა და აჩვენეთ, რომ შემდეგი მწკრივები განშლადია:

$$5.58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}}. \quad 5.59. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}. \quad 5.60. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.$$

- გამოთვალეთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი

$$5.61. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}. \quad 5.62. \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}. \quad 5.63. \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$5.64. 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots.$$

$$5.65. 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots.$$

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

$$5.1. \text{ ა) } 0, 2, 0, 2, 0; \text{ ბ) } -1, 2, -3, 4, -5;$$

$$\text{ გ) } \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}; \text{ დ) } \frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 11}.$$

$$5.2. \text{ ა) } a_n = \frac{1}{5n}; \quad \text{ ბ) } a_n = \frac{2n-1}{2^n+1}; \quad \text{ გ) } a_n = \frac{1+(-1)^n}{2};$$

დ) $a_n = (-1)^n$; ე) $a_n = \frac{n}{2}(1 + (-1)^n)$.

- 5.3.** ა) შემოსაზღვრულია ქვემოდან;
 ბ) შემოსაზღვრულია ზემოდან;
 გ) არ არის შემოსაზღვრული არც ზემოდან და არც ქვემო-
 დან;
 დ) შემოსაზღვრულია;
 ე) შემოსაზღვრულია ქვემოდან.

- 5.4.** ა) ზრდადია;
 ბ) კლებადია;
 გ) არ არის მონოტონური;
 დ) მუდმივია;
 ე) არ არის მონოტონური;
 ვ) კლებადია.

5.5. ა) 10800; ბ) 12000; გ) 10500; დ) $10000(1 + 0.04t)$.

5.6. ა) 280000; ბ) 360000.

5.7. ა) $r = 5\%$; ბ) $r = 4\%$.

5.8. $r = 3\%$.

5.9. ა) 2205; ბ) 2315.25; გ) $2000 \cdot (1.05)^t$.

5.10. 4630.5.

5.16. $\frac{1}{2}$.

5.11. 30000.

5.17. -4.

5.12. 4.

5.14. $a_n = \frac{n+100}{n^2+1}$.

5.18. 0.

5.15. $a_n = \frac{n^2}{3n+20}$.

5.19. $\frac{4}{3}$.

5.20. ∞ .

- 5.21. а) 81; б) 32.
- 5.22. 12.
- 5.23. $\frac{1}{3}$.
- 5.24. $\frac{1}{2}$.
- 5.25. 3.
- 5.26. $\frac{1}{3}$.
- 5.27. а) 2; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 5.28. а) $\sqrt[3]{2}$; б) 1;
 в) ∞ ; г) 0;
 д) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; е) 1;
 ж) 0; з) ∞ .
- 5.29. а) 1; б) 0.
- 5.30. 25.
- 5.31. $\frac{1}{5}$.
- 5.32. а) ∞ ; б) 0.
- 5.33. 1.
- 5.34. $\frac{1}{6}$.
- 5.35. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.
- 5.36. 2.
- 5.37. ∞ .
- 5.38. $-\frac{3}{2}$.
- 5.39. $-\frac{1}{6}$.
- 5.40. 0.
- 5.41. а) 0; б) ∞ .
- 5.42. $-\frac{4}{3}$.
- 5.43. ∞ .
- 5.44. $\frac{3}{2}$.
- 5.45. 0.
- 5.46. 1.
- 5.47. 0.
- 5.48. 3.
- 5.49. 0.
- 5.50. 1.
- 5.51. $\frac{1}{2}$.

5.52. ა) 0 ; ბ) ∞ ; გ) ∞ ; დ) 0 ; ე) $\sqrt[3]{2}$.

5.53. ა) e^6 ; ბ) e^{40} ; გ) e^6 ; დ) $e^{\frac{2}{3}}$.

5.54. ა) e^8 ; ბ) $e^{\frac{6}{5}}$; გ) e ; დ) 1 .

5.55. $s = 1$.

5.56. $s = \frac{1}{2}$.

5.57. $s = \frac{1}{4}$, მ ი თ ი თ ე ბ ა :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right] .$$

5.61. 3 .

5.63. $\frac{2}{3}$.

5.65. $2\frac{1}{2}$.

5.62. $\frac{8}{3}$.

5.64. 5 .

6. ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

6.1. ფუნქციის ზღვრის გამოთვლა

გამოთვალეთ

6.1. ა) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$; ბ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; გ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$;

დ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$; ე) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$;

ვ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2-5x+6)^3}{(x^2+x-12)^3}$; ზ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9x}{x^2+x-12}$.

$$6.2. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x+1}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}.$$

$$6.3. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{81+x^2}-9}{\sqrt{25+x^2}-5}.$$

$$6.4. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-3x+2}.$$

$$6.5. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+\sqrt[3]{x-6}}{x+2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 64} \frac{4-\sqrt[3]{x}}{8-\sqrt{x}}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt[3]{8+x}}{3-\sqrt{9+x}};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt[3]{7+x}}{3-\sqrt{8+x}}; \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x^2-3x+2}.$$

$$6.6. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5}{3x^2+2x+1}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2x+3}{5x^3+1};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2x^2+1}{3x^2+4x+1}; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4+2x^3+3}{2x^6+x^2+1}.$$

$$6.7. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+2)(2x^3+4x+3)}{(x+3)^5}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+3x+2)^4}{(x^4+3)^2}.$$

$$6.8. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2+5x+1}}{3x-1}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2+5x+1}}{3x-1}.$$

$$6.9. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+5x^3+2}}{4x+2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+5x^3+2}}{4x+2};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{1-2x}.$$

$$6.10. \quad \text{ა) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 3^x}{2^{x+1} + 3^2}; \quad \text{ბ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^{x+2}}{3^x + 5^{x+1}}; \quad \text{გ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 3^x}{2^{x+1} + 3^2};$$

$$\text{დ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2}{3^{x+2} + 4}; \quad \text{ე) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x}{3^x + 1}.$$

$$6.11. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right).$$

$$6.12. \quad \text{ა) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x^2 + 3x + 2} \right);$$

$$\text{ბ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x^2 + 3x + 2} \right).$$

$$6.13. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

$$6.14. \quad \text{ა) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \right); \quad \text{ბ) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt[3]{x} \right).$$

$$6.15. \quad \lim_{x \rightarrow +} \left(\ln(x+1) - \ln x \right).$$

$$6.16. \quad \text{ა) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2^x - 3^x \right); \quad \text{ბ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2^x - 3^x \right).$$

6.2. ფუნქციის უწყვეტობა

- დახაზეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები და შეისწავლეთ მათი უწყვეტობის საკითხი

$$6.17. \quad \text{ა) } f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ x+1, & x > 0; \end{cases} \quad \text{ბ) } f(x) = \begin{cases} 2x+2, & x < 1, \\ x^2+3, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$6.18. \quad \text{ა) } f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2+1, & x > -1; \end{cases} \quad \text{ბ) } f(x) = \begin{cases} -x^2+4, & x < 0, \\ x+2, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \frac{2}{x}, & x > 0; \end{cases} \quad 4) f(x) = \begin{cases} -x+3, & x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ x^3, & x > 1; \end{cases}$$

$$5) f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}.$$

- k -ს რა მნიშვნელობისთვის იქნება უწყვეტი $(-\infty; +\infty)$ შუალედში შემდეგი ფუნქციები

$$6.19. \quad 1) f(x) = \begin{cases} 2x+k, & x > 2, \\ 3x-4, & x \leq 2; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} 2^x+k, & x \leq 0, \\ 2x+3, & x > 0; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 3x+k, & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1; \end{cases} \quad 4) f(x) = \begin{cases} kx^2, & x < -1, \\ -2x+2, & x \geq -1; \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} 2x^2-x+3, & x \leq 2, \\ kx+5, & x > 2. \end{cases}$$

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

$$6.1. \quad 1) \frac{1}{2}; 2) \frac{2}{3}; 3) 3; 4) \frac{1}{2}; 5) \frac{3}{4}; 6) \frac{1}{343}; 7) \frac{18}{7}.$$

$$6.2. \quad 1) 4; 2) -\frac{1}{2}; 3) \frac{3}{2}.$$

$$6.3. \quad 1) \frac{4}{3}; 2) \frac{5}{9}.$$

$$6.4. \quad 1) \frac{1}{3}; 2) \frac{1}{3}; 3) -\frac{1}{3}.$$

6.5. ა) $\frac{1}{12}$; ბ) $\frac{1}{3}$; გ) $\frac{1}{2}$; დ) $\frac{1}{2}$; ე) $\frac{\sqrt[3]{2}}{6}$.

6.6. ა) $\frac{2}{3}$; ბ) $\frac{1}{5}$; გ) ∞ ; დ) 0.

6.7. ა) 2; ბ) 1.

6.8. ა) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; ბ) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

6.9. ა) $\frac{1}{4}$; ბ) $-\frac{1}{4}$; გ) $-\frac{1}{2}$.

6.10. ა) ∞ ; ბ) 5; გ) 0; დ) $\frac{1}{9}$; ე) 0.

6.11. $\frac{1}{6}$.

6.14. ა) 0; ბ) ∞ .

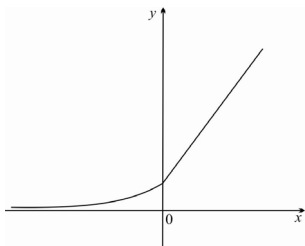
6.15. 0.

6.12. ა) 1; ბ) -1.

6.16. ა) $-\infty$; ბ) 0.

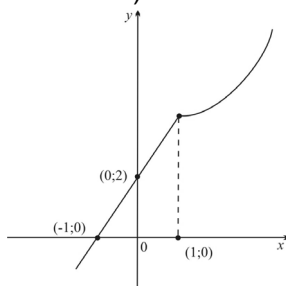
6.13. -2.

6.17. ა)



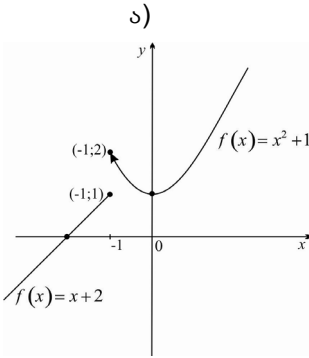
უნწყვეტია $(-\infty; +\infty)$ შუალედში

ბ)

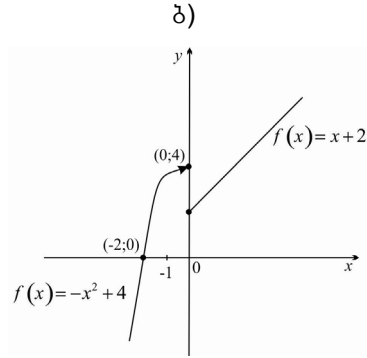


უნწყვეტია $(-\infty; +\infty)$ შუალედში

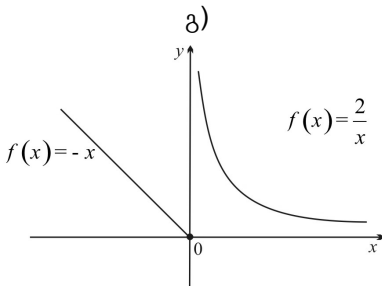
6.18.



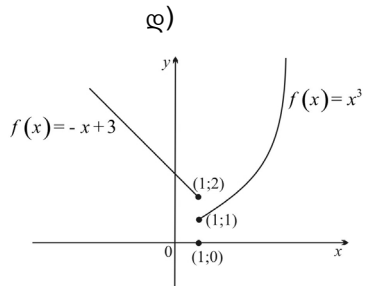
$x = -1$ წვევების წერტილია, მაგრამ უწყვეტია მარცხნიდან ამ წერტილში



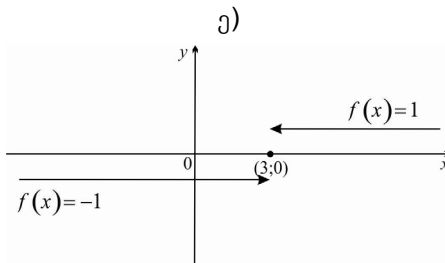
$x = 0$ წვევების წერტილია, უწყვეტია ამ წერტილში მარჯვნიდან



$x = 0$ წვევების წერტილია, უწყვეტია მარცხნიდან ამ წერტილში



$x = 1$ წვევების წერტილია



$x = 3$ წვევების წერტილია

6.19. ა) $k = -2$; ბ) $k = 2$; გ) $k = -3$; დ) $k = 4$; ე) $k = 2$.

6.3. შესანიშნავი ზღვრები

- გამოთვალეთ

6.20. ა) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{5x}$; ბ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 10x}$;

გ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x}$; დ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$;

ე) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)}{x^2}$; ვ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2 - \sqrt{x+4}}$;

ზ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$.

6.21. ა) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{1 - \sqrt{\sin x + 1}}$; ბ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$;

გ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2}$; დ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2}$;

ე) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 2x}$; ვ) $\lim_{z \rightarrow 2} (2-z) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} z$;

ზ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}/2 - \cos x}$.

6.22. ა) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{x}$; ბ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(x+3) - \log_2 3}{x}$;

გ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} 3x)}{x}$; დ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+\operatorname{tg} 5x)}$;

$$\text{ვ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 + \sin 5x) - \ln 2}{x}.$$

6.23. ა) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 4x)}$; ბ) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$; გ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$;

დ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{\operatorname{tg} x}}{x}$; ე) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{x^2 + x}$; ვ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - e^{\sin x}}{x}$.

6.24. ა) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$; ბ) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right)^{x^2 + 1}$; გ) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x - 5}\right)^{4x - 5}$;

დ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; ე) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$.

6.4. პროცენტების უწყვეტად დარიცხვის ამოცანა

6.25. 20000 დოლარი გასესხებულია 6%-იანი რთული წლიური პროცენტით. რა თანხას დაიბრუნებს ბანკი პროცენტების უწყვეტად დარიცხვის შემთხვევაში:

- ა) 3 წლის შემდეგ; ბ) 10 წლის შემდეგ;
გ) 9 თვის შემდეგ; დ) t წლის შემდეგ.

6.26. გამოთვალეთ, რა თანხა უნდა შევიტანოთ ბანკში, რომ ყოველწლიურად რთული 3%-ის უწყვეტად დარიცხვის შემთხვევაში 10 წლის შემდეგ მივიღოთ 100000 ლარი.

პ ა ს უ ხ ე ბ ი :

6.20. ა) $\frac{7}{5}$; ბ) $\frac{1}{2}$; გ) 0; დ) $\frac{25}{2}$; ე) 25; ვ) -28; ზ) $2\sqrt{2}$.

6.21. ა) -6; ბ) $\frac{1}{2}$; გ) $\frac{1}{2}$; დ) 2; ე) $\frac{5}{2}$; ვ) $\frac{4}{\pi}$; ზ) $\sqrt{2}$.

6.22. а) -3 ; б) $\frac{1}{3 \ln 2}$; в) 3 ; г) $\frac{1}{5}$; д) $\frac{5}{2}$.

6.23. а) $\frac{1}{2}$; б) $a^b \ln a$; в) e^2 ; г) 1 ; д) $\ln \frac{5}{4}$; е) 2 .

6.24. а) e^3 ; б) e ; в) e^{16} ; г) $\frac{1}{e}$; д) 1 .

6.25. а) $20000e^{0.18}$; б) $20000e^{0.6}$;
в) $20000e^{0.045}$; г) $20000e^{0.06t}$.

6.26. $100000e^{-0.3}$.

ლიტერატურა

1. პ. ზერაგია, უმაღლესი მათემატიკა, ტ.1,2 თსუ, 1984.
2. მ. გელაშვილი, ქ. კიკვაძე, ქ. ლოსაბერიძე, ლ. მალრაძე, რ. მესხია, ნ. სვანიძე, უმაღლესი მათემატიკა, თსუ, 2004.
3. Крамер Н.Ш. , Высшая математика для экономистов, М., 2006.
4. დ. ბალაშვილი, მ. ბედოშვილი, ზ. ბლიაძე, ე. გობრონიძე, ლ. სკამკოჩაიშვილი, ზ. ჯიქია, უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, თსუ, 2001.
5. გ. ლობჯანიძე, ნ. მჭედლიშვილი, ნ. სხირტლაძე, თ. ჯანგველაძე, კალკულუსი, თბილისი, 2015.
6. გ. ლობჯანიძე, ნ. მჭედლიშვილი, ნ. სხირტლაძე, თ. ჯანგველაძე, ნრფივი ალგებრა, თბილისი, 2015.
7. James Stewart, Calculus, Early Transcendentals, Eighth Editions, USA, 2014.

გამომცემლობის რედაქტორი

მაია ეჯიზია

დამკაბადონებელი

ხათუთა ბადრიძე

გარეკანის დიზაინერი

ნინო ებრალიძე

გამოცემის მენეჯერი

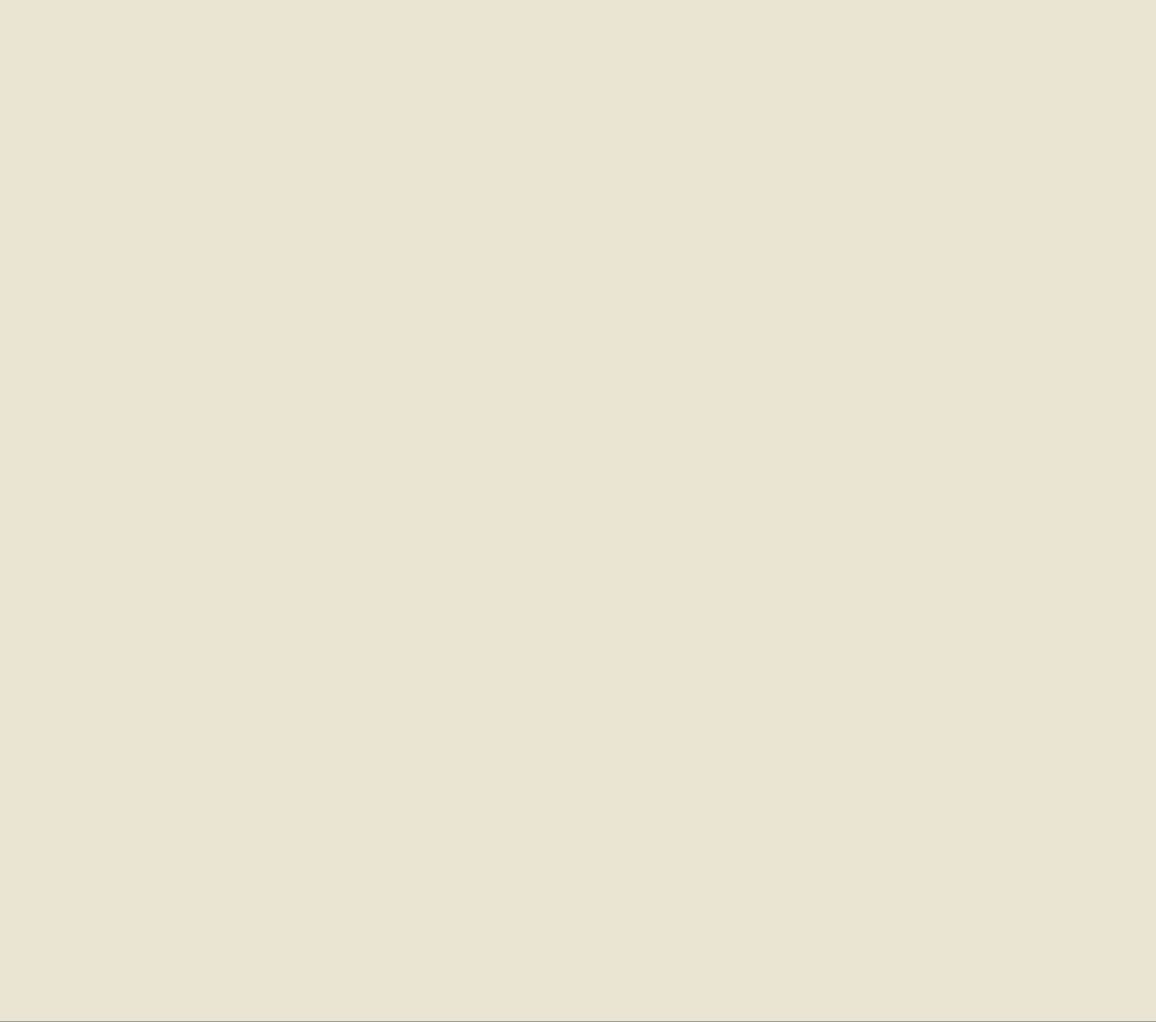
მარიკა ერქომაიშვილი

0179, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი, 14

14, Ilia Tshavtchavadze Ave., Tbilisi 0179

Tel.: 995(32) 225 14 32

www.press.tsu.ge



3

6

0

9

2

7