ივანე დარსაველიძე

ცილინდრული და სფერული ტალღური ფუნქციების მონოპოლებით წარმოდგენა

თბილისი
2024

ივანე დარსაველიძე

ცილინდრული და სფერული ტალღური ფუნქციების მონოპოლებით წარმოდგენა

თბილისი
2024

წიგნი - „ცილინდრული და სფერული ტალღური ფუნქციების მონოპოლებით წარმოდგენა„. წინამდებარე მონოგრაფიული ნაშრომი ეხება მაღალი რიგის ცილინდრული და სფერული ტალღური ფუნქციების წარმოდგენას შესაბამისი ნულოვანი რიგის ფუნქციებით, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება, მაგალითად, ელექტროდინამიკისა და აკუსტიკის ორგანზომილებიან და სამგანზომილებიან სასაზღვრო ტალღურ ამოცანებში, როდესაც საჭირო ხდება ცილინდრული ან სფერული კოორდინატების შემოღება. ფიზიკური შინაარსიდან გამომდინარე, მოცემული ფუნქციები სკალარულ ტალღურ ველებს შეესაბამება და მათ მულტიპოლური ბუნება აქვთ. აქედან გამომდინარე, ასეთი ტალღური ველები მონოპოლების ერთობლიობებით, ანუ მულტიპოლებით უნდა აღიწერებოდეს. მოცემული ნაშრომის მიზანია ღრმად შევისწავლოთ მონოპოლების ასეთი ერთობლიობების თვისებები.

ნაშრომში მონოპოლების როლს ასრულებენ შესაბამისი ნულოვანი რიგის ტალღური ფუნქციები, რომლებიც აღწერენ ელემენტარული წერტილოვანი წყაროს ველს. კვლევის შედეგად ნაჩვენებია, რომ მოცემული მაღალი რიგის ტალღური ველის აღსაწერად, ორგანზომილებიან და ასევე, სამგანზომილებიან შემთხვევაში, შეიძლება გამოვიყენოთ რამდენიმე სახეობის მულტიპოლი. აღნიშნული მულტიპოლები განსხვავდებიან გეომეტრიული აგებულებით, მონოპოლების რაოდენობით და ასევე, აღწერის სიზუსტით. შერჩეულია ყველაზე ოპტიმალური მულტიპოლი, რომელიც შემდეგ გამოყენებულია ელექტრომაგნიტური ტალღის გაბნევის ამოცანებში.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

წიგნი გამოიცა „შოთა რუსთაველის საქართველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის„ ფინანსური მხარდაჭერით.

გრანტის ნომერი: ***[SP-23-361]; „ცილინდრული და სფერული ტალღური ფუნქციების მონოპოლებით წარმოდგენა“.***

The work was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation of Georgia (SRNSFG). Grant number: ***[SP-23-361]; “Cylindrical and spherical wave functions representation by the monopoles”.***

სამეცნიერო რედაქტორი:
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი ***რევაზ ზარიძე***

დაბეჭდილია სტამბაში „ფავორიტი სტილი“
ISBN 978-9941-8-6415-5

სარჩევი

თავი I
წრიული ცილინდრის ტალღური ფუნქციების მონოპოლებით წარმოდგენა

ამ თავში განიხილება მაღალი რიგის წრიული ცილინდრის ტალღური ფუნქციები. მიღებულია დიფერენციალური და ინტეგრალური გამოსახულებები, რომლებიც ამ ფუნქციებს იგივური ტოლობის სახით აკავშირებენ შესაბამისი ნულოვანი რიგის ტალღურ ფუნქციასთან. აღნიშნული გამოსახულებების ანალიზის საფუძველზე ნაჩვენებია, რომ განხილული მაღალი რიგის ფუნქციები შეგვიძლია მიახლოებით აღვწეროთ ორგანზომილებიანი მონოპოლების მეშვეობით.

დიფერენციალური გამოსახულებების მისაღებად გამოყენებულია ორი მიდგომა: პირველი დაკავშირებულია აღნიშნული მაღალი რიგის ფუნქციების შესაბამისი ველების დიაგრამების განხილვასთან. დიაგრამების ფოთლების მიმართულების დადგენის შედეგად აიგება წრფივი დიფერენციალური ოპერატორები, რომლებითაც დგინდება კავშირი ამ ფუნქციებსა და ნულოვანი რიგის ფუნქციას შორის; მეორე მიდგომა გულისხმობს ერთგვაროვანი მრავალწევრებისა და მათი საკუთარი ოპერატორების გამოყენებას. განხილულ ორგანზომილებიან შემთხვევაში ორივე მიდგომა ეკვივალენტური აღმოჩნდა. შემდეგ მიიღება ინტეგრალური გამოსახულება, რისთვისაც გამოყენებულია ცილინდრული ფუნქციებისთვის ცნობილი შეკრების თეორემა.

მიღებული გამოსახულებების საფუძველზე, საწყისი ფუნქციებისთვის ნაპოვნია მულტიპოლების სამი შესაძლო სტრუქტურა. ამის შემდეგ, შეირჩევა მათ შორის ყველაზე ოპტიმალური, რომელიც გამოირჩევა მონოპოლების მცირე რაოდენობით [1]. აღნიშნული ოპტიმალური მულტიპოლი შემდეგ გამოყენებულია დიფრაქციის ამოცანაში წრიულ ცილინდრზე. იგულისხმება, რომ დროითი მამრავლია $e^{-i\omega t}$.

§1. წრიული ცილინდრის ტალღური ფუნქციები და მათი წარმოდგენა შესაბამისი ნულოვანი რიგის ფუნქციით

განვიხილოთ წრიული ცილინდრის ტალღური ფუნქციები [2]

$$H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi),\ H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi), \qquad (1.1)$$

სადაც n ნატურალური რიცხვია, $H_n^{(1)}$ ჰანკელის ფუნქციაა, k ტალღური რიცხვია, ρ და φ წერტილის პოლარული კოორდინატებია სიბრტყეზე.

ფიზიკური შინაარსის თანახმად, ეს ფუნქციები აღწერენ დროში ჰარმონიულად ცვლად ცილინდრულ ტალღურ ველს. კერძოდ, შეგვიძლია მათი გაიგივება ელექტრული ველის z მდგენელთან. შესაბამისი ნულოვანი რიგის ფუნქცია $H_0^{(1)}(k\rho)$ აღწერს $\rho=0$ კოორდინატთა სათავეში მოთავსებული ელემენტარული ორგანზომილებიანი წერტილოვანი წყაროს (მონოპოლის) ველს. ასეთი ველი ყველა მიმართულებით თანაბრად გამოსხივდება და შესაბამისად, მისი ამპლიტუდური დიაგრამა ($\left|H_0^{(1)}(k\rho)\right|$ ფუნქციის გრაფიკი პოლარულ კოორდინატებში, როდესაც $\rho=const$), წარმოადგენს წრეწირს.

საინტერესოა განვიხილოთ ამპლიტუდური დიაგრამები (1.1) მაღალი რიგის ველებისთვისაც (ნახ. 1). შევნიშნოთ, რომ ყოველი ასეთი დიაგრამა შეიცავს $2n$ რაოდენობის ფოთოლს ($n=1,2,\ldots$). ამ ფოთლების მიმართულება შეიძლება განისაზღვროს ერთეულოვანი ვექტორებით:

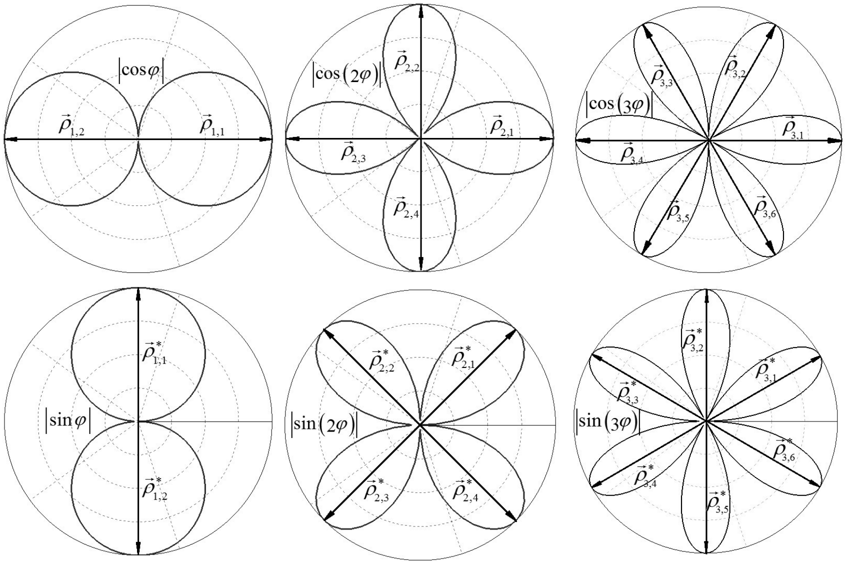
$$\vec{\rho}_{n,j}=\left\{\cos\varphi_{n,j},\sin\varphi_{n,j}\right\},\ \vec{\rho}^{\,*}_{n,j}=\left\{\cos\varphi^*_{n,j},\sin\varphi^*_{n,j}\right\}, \qquad (1.2)$$

სადაც:

$$\varphi_{n,j}=\frac{\pi}{n}(j-1),\ \varphi^*_{n,j}=\frac{\pi}{n}\left(j-\frac{1}{2}\right),\ j=1,\ldots,2n. \qquad (1.3)$$

ფიზიკური შინაარსიდან ცხადია, რომ წერტილოვანი წყარო, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში კოორდინატთა სათავეში იმყოფება, ყველა მიმართულებით თანაბრად უნდა ასხივებდეს, მოყვანილი დიაგრამების მიხედვით კი გამოსხივება არათანაბარია და ველის

ამპლიტუდა დამოკიდებულია მიმართულებაზე (მაგალითად, იგი მაქსიმალურია (1.2) ვექტორების გასწვრივ). ეს მიგვითითებს იმაზე, რომ შესაბამის წყაროებს აქვთ რთული აგებულება, ანუ გააჩნიათ მულტიპოლური (მონოპოლების ერთობლიობის) ხასიათი. ჩვენი ამოცანა იქნება შევისწავლოთ ასეთი მულტიპოლები და მათი მახასიათებლები.



ნახ. 1. $H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi)$ და $H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi)$ ველების ამპლიტუდური დიაგრამები, როდესაც $n=1,2,3$

პირველ რიგში, შევეცადოთ გამოვსახოთ (1.1) ფუნქციები ნულოვანი რიგის $H_0^{(1)}(k\rho)$ ფუნქციით. ამისთვის, ნახ. 1-ზე მოყვანილი დიაგრამების მიხედვით შევადგინოთ შემდეგი სახის წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი:

$$\hat{L}_n = \frac{(-1)^n\, 2^{n-1}}{nk^n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{\partial^n}{\partial\vec{\rho}_{n,j}^{\;n}}, \tag{1.4}$$

სადაც

$$\frac{\partial^n}{\partial \vec{\rho}_{n,j}^{\;n}}$$

წარმოადგენს n რიგის მიმართულების წარმოებულს $\vec{\rho}_{n,j}$ ვექტორის გასწვრივ. მიმართულების წარმოებულის განმარტებიდან გამომდინარე:

$$\frac{\partial^n}{\partial \vec{\rho}_{n,j}^{\;n}} = \left(\cos\varphi_{n,j} \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi_{n,j} \frac{\partial}{\partial y} \right)^n,$$

ან თუ გამოვიყენებთ ნიუტონის ბინომის ფორმულას, მაშინ:

$$\frac{\partial^n}{\partial \vec{\rho}_{n,j}^{\;n}} = \sum_{\alpha=0}^{n} C_n^{\alpha} \left(\cos\varphi_{n,j}\right)^{n-\alpha} \left(\sin\varphi_{n,j}\right)^{\alpha} \frac{\partial^n}{\partial x^{n-\alpha} \partial y^{\alpha}}.$$

შემოვილოთ კოეფიციენტები:

$$B_{n,\alpha} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \left(\cos\varphi_{n,j}\right)^{n-\alpha} \left(\sin\varphi_{n,j}\right)^{\alpha},$$

რის შედეგადაც, განხილული ოპერატორი (1.4) ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\hat{L}_n = \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{nk^n} \sum_{\alpha=0}^{n} C_n^{\alpha} B_{n,\alpha} \frac{\partial^n}{\partial x^{n-\alpha} \partial y^{\alpha}}.$$

თუ (1.4) გამოსახულებაში განვიხილავთ წარმოებულებს $\vec{\rho}_{n,j}^{\,*}$ ვექტორების გასწვრივ, მაშინ გვექნება ოპერატორი:

$$\hat{L}_n^* = \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{nk^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{\partial^n}{\partial \vec{\rho}_{n,j}^{\,*\,n}}, \tag{1.5}$$

რომლისთვისაც, ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\hat{L}_n^* = \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{nk^n} \sum_{\alpha=0}^{n} C_n^{\alpha} B_{n,\alpha}^* \frac{\partial^n}{\partial x^{n-\alpha} \partial y^{\alpha}}.$$

აქ:

$$B_{n,\alpha}^* = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \left(\cos\varphi_{n,j}^*\right)^{n-\alpha} \left(\sin\varphi_{n,j}^*\right)^{\alpha}.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ $B_{n,\alpha}$ და $B^{*}_{n,\alpha}$ კოეფიციენტების გამოთვლისას პრიორიტეტული უნდა იყოს ხარისხის მაჩვენებლები. ეს იმას ნიშნავს, რომ n და α რიცხვების მოცემული მნიშვნელობებისთვის, ჯერ უნდა გავითვალისწინოთ ხარისხები და მხოლოდ ამის შემდეგ ჩავსვათ $\varphi_{n,j}$ და $\varphi^{*}_{n,j}$ კუთხეების შესაბამისი მნიშვნელობები. ასეთი გამოთვლების შედეგად დავრწმუნდებით, რომ:

$$B_{n,\alpha} = (-1)^{\lambda_\alpha}\left[1+(-1)^{\alpha}\right]\frac{n}{2^n},\ B^{*}_{n,\alpha} = (-1)^{\lambda_\alpha}\left[1-(-1)^{\alpha}\right]\frac{n}{2^n},$$

სადაც სიდიდე λ_α განისაზღვრება, როგორც:

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{4}\left[2\alpha - 1 + (-1)^{\alpha}\right]. \tag{1.6}$$

იგი წარმოადგენს პირველ α ნატურალურ რიცხვთა შორის ლუწი რიცხვების რაოდენობას. თუ α ლუწია, მაშინ $\lambda_\alpha = \alpha/2$, ხოლო თუ α კენტია, მაშინ $\lambda_\alpha = (\alpha-1)/2$. აქედან გამომდინარე, $\lambda_\alpha = \lfloor \alpha/2 \rfloor$, ანუ λ_α წარმოადგენს $\alpha/2$ შეფარდების მთელ ნაწილს.

როგორც ვხედავთ, $B_{n,\alpha} = 0$, თუ α კენტია და $B^{*}_{n,\alpha} = 0$, თუ α ლუწია. აქედან გამომდინარე, $\hat{L}_n$ და $\hat{L}^{*}_n$ ოპერატორების გამოსახულებებში უნდა განვიხილოთ მხოლოდ არანულოვანი წევრები. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\hat{L}_n = \frac{(-1)^n}{k^n}\sum_{\alpha=0}^{\lambda_n}(-1)^{\alpha} C_n^{2\alpha}\frac{\partial^n}{\partial x^{n-2\alpha}\partial y^{2\alpha}}, \tag{1.7}$$

$$\hat{L}^{*}_n = \frac{(-1)^n}{k^n}\sum_{\alpha=1}^{\lambda_{n+1}}(-1)^{\alpha+1} C_n^{2\alpha-1}\frac{\partial^n}{\partial x^{n-2\alpha+1}\partial y^{2\alpha-1}}. \tag{1.8}$$

აქედან, n-ის პირველი ოთხი მნიშვნელობისთვის გვექნება:

$$\hat{L}_1 = -\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x},\ \hat{L}_2 = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),\ \hat{L}_3 = -\frac{1}{k^3}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\right),$$

$$\hat{L}_4 = \frac{1}{k^4}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 6\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right),\ \ldots,\ \hat{L}^{*}_1 = -\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial y},\ \hat{L}^{*}_2 = \frac{2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$\hat{L}_3^* = -\frac{1}{k^3}\left(3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3}{\partial y^3}\right),\ \hat{L}_4^* = \frac{4}{k^4}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3}\right).$$

შემდეგში ჩვენ დაგვჭირდება ვიმოქმედოთ (1.7) და (1.8) ოპერატორებით $H_0^{(1)}(k\rho)$ ფუნქციაზე. რადგან იგი აღწერს ცენტრალური სიმეტრიის მქონე ველს, ამიტომ ყველა კერძო წარმოებული უნდა გამოვსახოთ სრული წარმოებულით $k\rho$ არგუმენტის მიმართ. გარკვეული გარდაქმნების შედეგად, როდესაც $n = 1,...,4$, მივიღებთ გამოსახულებებს:

$$\begin{pmatrix}\hat{L}_1\\ \hat{L}_1^*\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\frac{d}{d(k\rho)},\ \begin{pmatrix}\hat{L}_2\\ \hat{L}_2^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(2\varphi)\\ \sin(2\varphi)\end{pmatrix}\left[\frac{d^2}{d(k\rho)^2} - \frac{1}{k\rho}\frac{d}{d(k\rho)}\right],$$

$$\begin{pmatrix}\hat{L}_3\\ \hat{L}_3^*\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\cos(3\varphi)\\ \sin(3\varphi)\end{pmatrix}\left\{\frac{d^3}{d(k\rho)^3} - \frac{3}{k\rho}\left[\frac{d^2}{d(k\rho)^2} - \frac{1}{k\rho}\frac{d}{d(k\rho)}\right]\right\},$$

$$\begin{pmatrix}\hat{L}_4\\ \hat{L}_4^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(4\varphi)\\ \sin(4\varphi)\end{pmatrix}\left\{\frac{d^4}{d(k\rho)^4} - \frac{6}{k\rho}\frac{d^3}{d(k\rho)^3} + \frac{15}{(k\rho)^2}\left[\frac{d^2}{d(k\rho)^2} - \frac{1}{k\rho}\frac{d}{d(k\rho)}\right]\right\}.$$

აქ და შემდგომშიც, ზოგიერთ შემთხვევაში, კომპაქტურობის მიზნით გამოვიყენებთ ჩანაწერს მატრიცის სახით.

ახლა გამოვიყენოთ ცნობილი რეკურენტული ფორმულა:

$$\frac{dH_n^{(1)}(k\rho)}{d(k\rho)} = \frac{n}{k\rho}H_n^{(1)}(k\rho) - H_{n+1}^{(1)}(k\rho), \qquad (1.9)$$

(იხ. [3]). შედეგად მივიღებთ იგივურ ტოლობებს:

$$\begin{pmatrix}\hat{L}_1\\ \hat{L}_1^*\end{pmatrix}H_0^{(1)}(k\rho) = H_1^{(1)}(k\rho)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\hat{L}_2\\ \hat{L}_2^*\end{pmatrix}H_0^{(1)}(k\rho) = H_2^{(1)}(k\rho)\begin{pmatrix}\cos(2\varphi)\\ \sin(2\varphi)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\hat{L}_3\\ \hat{L}_3^*\end{pmatrix}H_0^{(1)}(k\rho) = H_3^{(1)}(k\rho)\begin{pmatrix}\cos(3\varphi)\\ \sin(3\varphi)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\hat{L}_4\\ \hat{L}_4^*\end{pmatrix}H_0^{(1)}(k\rho) = H_4^{(1)}(k\rho)\begin{pmatrix}\cos(4\varphi)\\ \sin(4\varphi)\end{pmatrix},$$

საიდანაც, ზოგადი შემთხვევისთვის დავწერთ:

$$\begin{pmatrix} \hat{L}_n \\ \hat{L}_n^* \end{pmatrix} H_0^{(1)}(k\rho) = H_n^{(1)}(k\rho) \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

გამოსახულება (1.10) გაშლილი სახით ჩაიწერება, როგორც:

$$\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{nk^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{\partial^n H_0^{(1)}(k\rho)}{\partial \vec{\rho}_{n,j}{}^n} = H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi), \tag{1.11}$$

$$\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{nk^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{\partial^n H_0^{(1)}(k\rho)}{\partial \vec{\rho}^{\,*}_{n,j}{}^n} = H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi), \tag{1.12}$$

თუ (1.1) ფუნქციებიდან შევადგენთ მესამე ფუნქციას:

$$H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi) \pm iH_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi) = H_n^{(1)}(k\rho)e^{\pm in\varphi}, \tag{1.12*}$$

მაშინ მისთვის მარტივად მივიღებთ:

$$\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{nk^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \left[\frac{\partial^n H_0^{(1)}(k\rho)}{\partial \vec{\rho}_{n,j}{}^n} \pm i \frac{\partial^n H_0^{(1)}(k\rho)}{\partial \vec{\rho}^{\,*}_{n,j}{}^n} \right] = H_n^{(1)}(k\rho)e^{\pm in\varphi}. \tag{1.13}$$

ტოლობები (1.11) და (1.12) გამოსახავს (1.1) ცილინდრულ ტალღურ ფუნქციებს $H_0^{(1)}(k\rho)$ ფუნქციის მეშვეობით.

§2. პირველი სახეობის ორგანზომილებიანი მულტიპოლი

გამოსახულებებში (1.11) და (1.12) შემავალი მაღალი რიგის წარმოებულები წარმოვიდგინოთ სასრული სხვაობებით. ჩვენ ავირჩევთ ცენტრალურ სასრულ სხვაობებს, რადგან ისინი, ცალმხრივ სხვაობებთან შედარებით, უფრო მეტ სიზუსტეს მოგვცემს [4]. შედეგად მივიღებთ მიახლოებით ტოლობებს:

$$\frac{2^{n-1}}{n(k\rho_0)^n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+n+j+1} C_n^m H_0^{(1)}\left(k\left| \vec{\rho} - \left(m - \frac{n}{2} \right)\rho_0 \vec{\rho}_{n,j} \right| \right) \approx$$

$$\approx H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi), \tag{1.14}$$

$$\frac{2^{n-1}}{n(k\rho_0)^n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+n+j+1} C_n^m H_0^{(1)}\left(k\left| \vec{\rho} - \left(m - \frac{n}{2} \right)\rho_0 \vec{\rho}^{\,*}_{n,j} \right| \right) \approx$$

$$\approx H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi). \qquad (1.15)$$

აქ ρ_0 მცირე სიდიდეა (ρ ცვლადის ნაზრდი, რომელიც ზოგადად დამოკიდებულია n-ზე). იგულისხმება, რომ $\rho > (n/2)\rho_0$. დავუშვათ $k\rho_0$ ისეთი მცირე სიდიდეა, რომ ადგილი აქვს პირობას:

$$0 < k\rho_0 << \sqrt{n+1}, \qquad (1.16)$$

მაშინ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ბესელის ფუნქციის ცნობილი ასიმპტოტური წარმოდგენა:

$$J_n(k\rho_0) \approx \frac{1}{n!}\left(\frac{k\rho_0}{2}\right)^n,$$

(იხ. [5]), რომლის გათალისწინებითაც (1.14) და (1.15) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{2n(n!)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m+n+j+1}C_n^m H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\left(m-\frac{n}{2}\right)\rho_0\vec{\rho}_{n,j}\right|\right)\approx$$

$$\approx J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi), \qquad (1.17)$$

$$\frac{1}{2n(n!)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m+n+j+1}C_n^m H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\left(m-\frac{n}{2}\right)\rho_0\vec{\rho}^{\,*}_{n,j}\right|\right)\approx$$

$$\approx J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi). \qquad (1.18)$$

მიღებული გამოსახულებების ანალიზის საფუძველზე მივდივართ დასკვნამდე, რომ $H_0^{(1)}$ ტიპის ველის წერტილოვანი წყაროები (მონოპოლები), ამპლიტუდებით

$$\frac{1}{2n(n!)}(-1)^{m+n+j+1}C_n^m$$

და რადიუს-ვექტორებით

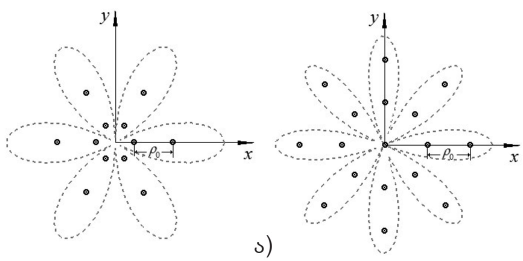
$$\left(m-\frac{n}{2}\right)\rho_0\vec{\rho}_{n,j},\ \left(m-\frac{n}{2}\right)\rho_0\vec{\rho}^{\,*}_{n,j},$$

ქმნიან მულტიპოლს, რომლის ჯამური ველი შესაბამისად არის:

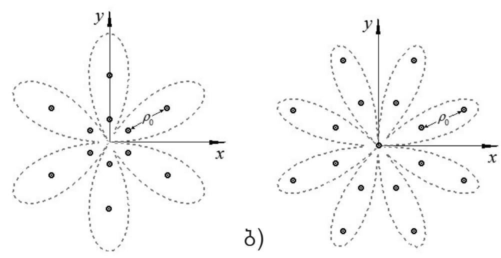
$$J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi),\ J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi).$$

მას ჩვენ პირველი სახეობის მულტიპოლს ვუწოდებთ.

ამ მულტიპოლის რადიუსი განისაზღვრება როგორც $(n/2)\rho_0$, ანუ ρ_0 სიდიდის ფიქსირებული მნიშვნელობის შემთხვევაში, იზრდება ველის n რიგის ზრდასთან ერთად. მონოპოლების სრული რაოდენობა ასეთ მულტიპოლში, კენტი n-ის შემთხვევაში არის $n(n+1)$. ლუწი n-ის შემთხვევაში, ზოგიერთი მონოპოლი აღმოჩნდება მულტიპოლის ცენტრში, რაც შეესაბამება ჯამური ამპლიტუდის მქონე ერთ მონოპოლს. მონოპოლების სრული რაოდენობა ასეთ შემთხვევაში იქნება n^2+1.



ა)



ბ)

ნახ. 2. პირველი სახეობის მულტიპოლის სტრუქტურა, რომელიც აღწერს ველს ა) $H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi)$ და ბ) $H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi)$, როდესაც $n=3$ და $n=4$

ნახ. 2 გვიჩვენებს მიღებული მულტიპოლის სტრუქტურას, როდესაც $n=3$ და $n=4$. როგორც ვხედავთ, მონოპოლები მდებარეობენ კონცენტრულ წრეწირებზე, დიაგრამების ფოთლების გასწვრივ.

§3. პირველი სახეობის მულტიპოლის ცდომილება

გასაგებია, რომ როდესაც n ფიქსირებულია, გამოსახულებებს (1.17) და (1.18) ექნებათ ერთნაირი ცდომილება, რომელიც დამოკიდებულია $k\rho_0$ და $k\rho$ სიდიდეებზე. ამიტომ აღნიშნული დამოკიდებულების დასადგენად, ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ (1.17) გამოსახულებას. ვინაიდან იგი კომპლექსურია, ამიტომ მისი რეალური და წარმოსახვითი ნაწილის ცდომილება ცალ-ცალკე უნდა შევაფასოთ.

შევარჩიოთ გარკვეული M რაოდენობის სატესტო წერტილი და დავუშვათ, რომ $\vec{\rho}_\mu$ მათი რადიუს-ვექტორებია ($\mu=1,2,...,M$). (1.17)-ის მარცხენა და მარჯვენა მხარის მნიშვნელობები სატესტო წერტილებში აღვნიშნოთ შესაბამისად, როგორც $L_n^I\left(\vec{\rho}_\mu\right)$ და $R_n\left(\vec{\rho}_\mu\right)$. რეალური და წარმოსახვითი ნაწილის δ_{Re}, δ_{Im} ცდომილებების შესაფასებლად, გამოვიყენოთ საშუალო ფარდობითი ცდომილების ცნობილი ფორმულა:

$$\delta_{\mathrm{Re}}=\frac{1}{M}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{\left|\mathrm{Re}\left[L_n^I\left(\vec{\rho}_\mu\right)-R_n\left(\vec{\rho}_\mu\right)\right]\right|}{\left|\mathrm{Re}\left[R_n\left(\vec{\rho}_\mu\right)\right]\right|}, \tag{1.19}$$

$$\delta_{\mathrm{Im}}=\frac{1}{M}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{\left|\mathrm{Im}\left[L_n^I\left(\vec{\rho}_\mu\right)-R_n\left(\vec{\rho}_\mu\right)\right]\right|}{\left|\mathrm{Im}\left[R_n\left(\vec{\rho}_\mu\right)\right]\right|}, \tag{1.19*}$$

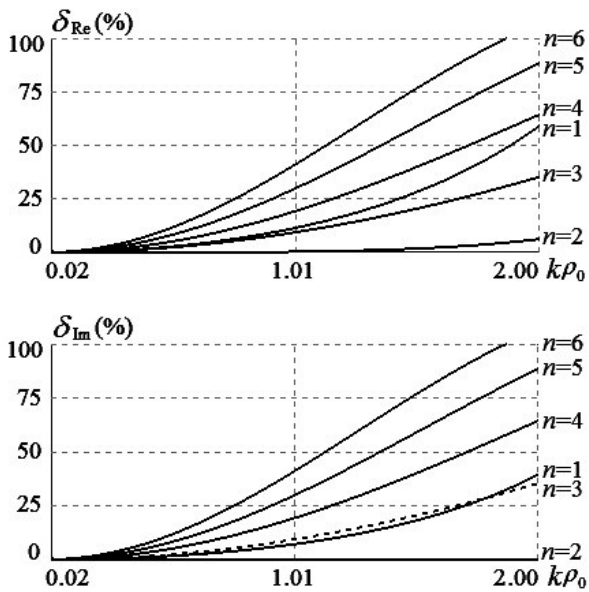
(იხ. [6]). იმისთვის, რომ გავარკვიოთ ამ ცდომილებების დამოკიდებულება $k\rho_0$ სიდიდეზე, სატესტო წერტილები უნდა გავანაწილოთ რომელიმე ფიქსირებული ρ რადიუსის მქონე წრეწირზე. ამავდროულად, $k\rho_0$ სიდიდე უნდა ვცვალოთ წინასწარ შერჩეულ ინტერვალში ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა $\rho>(n/2)\rho_0$. ამ დროს პირობა (1.16) შეიძლება აღარ იქნას გათვალისწინებული. თუ გვაინტერესებს ცდომილებების დამოკიდებულება $k\rho$ სიდიდეზე (დაშორებაზე მულტიპოლიდან), მაშინ უნდა დავაფიქსიროთ $k\rho_0$-ს მნიშვნელობა და ვცვალოთ ρ სიდიდე.

შევნიშნოთ, რომ სატესტო წერტილების რადიუს-ვექტორები შეიძლება განისაზღვროს, როგორც:

$$\vec{\rho}_\mu = \rho\left\{\cos\varphi_\mu, \sin\varphi_\mu\right\}, \; \varphi_\mu = \frac{2\pi\mu}{M}, \; \mu = 1,...,M .$$

ამასთანავე, რიცხვი M ისე უნდა შეირჩეს, რომ როდესაც $\mu = 1,...,M$, ადგილი ჰქონდეს პირობას $\cos\left(n\varphi_\mu\right) \neq 0$. სიდიდე $k\rho_0$ უნდა შეიცვალოს ისეთ ფარგლებში, რომ $J_n\left(k\rho_0\right) \neq 0$. გარდა ამისა, ρ რადიუსიც ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ $J_n\left(k\rho\right) \neq 0$ და $N_n\left(k\rho\right) \neq 0$, სადაც N_n ნეიმანის ფუნქციაა. ყველა ეს პირობა აუცილებელია იმისთვის, რომ თავი ავარიდოთ მნიშვნელის ნულთან ტოლობას (1.19) და (1.19*) ფორმულებში.

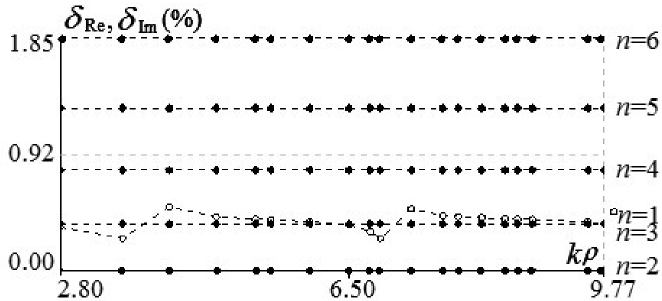
ცდომილების $k\rho_0$ სიდიდეზე დამოკიდებულების შესასწავლად, ჩამოთვლილი პირობების გათვალისწინებით, შეირჩა სეგმენტი $0.02 \leq k\rho_0 \leq 2$, როდესაც $k\rho = 8.5$ და $M = 99$. ნახ. 3 გვიჩვენებს მიღებულ დამოკიდებულებას n-ის პირველი ექვსი მნიშვნელობისთვის.



ნახ. 3. ცდომილების დამოკიდებულება $k\rho_0$ სიდიდეზე

როგორც ჩანს, როდესაც $n=2$, ცდომილება ამ სეგმენტზე მინიმალურია. n-ის გაზრდით ცდომილება $k\rho_0$ სიდიდის ტოლი მნიშვნელობებისთვისაც იზრდება. აქედან გამომდინარე, შეიძლება ავირჩიოთ $k\rho_0 = 0.2$, რომელიც უზრუნველყოფს ჩვენთვის დასაშვებ ცდომილებას ($< 5\%$).

ნახ. 4-ზე მოყვანილია ცდომილების დამოკიდებულება $k\rho$ სიდიდეზე, როდესაც $k\rho_0 = 0.2$. $k\rho$ სიდიდის მნიშვნელობები შერჩეულია დისკრეტულად, ცილინდრული ფუნქციების ნულების გათვალისწინებით (ზემოაღნიშნული პირობების გამო). აქ δ_{Re} და δ_{Im} ცდომილებებისთვის მოყვანილია ერთი საერთო სურათი, რადგან ისინი ფაქტობრივად ერთმანეთს ემთხვევა. როგორც ჩანს, ცდომილება თითქმის უცვლელი რჩება $k\rho$ სიდიდის ცვლილებისას და გააჩნია 2%-ზე ნაკლები მნიშვნელობა.



ნახ. 4. ცდომილების დამოკიდებულება $k\rho$ სიდიდეზე

მოყვანილი შედეგებიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ განხილული პირველი სახეობის მულტიპოლი საკმარისი სიზუსტით აღწერს (1.1) ველებს. მისი მონოპოლების საერთო რაოდენობაა n^2+1 ან $n(n+1)$, რაც დამოკიდებულია n-ის ლუწ-კენტობაზე. მულტიპოლის რადიუსი იზრდება n-ის ზრდასთან ერთად, როგორც .

§4. მეორე სახეობის ორგანზომილებიანი მულტიპოლი

ვაჩვენოთ, რომ (1.1) ველები შეიძლება აღიწეროს მულტიპოლით, რომელიც შედგება უფრო ნაკლები რაოდენობის მონოპოლისგან. ამისთვის განვიხილოთ შემდეგი სახის წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი:

$$\hat{M}_n = \frac{2^{n-2}\left(n-1\right)!}{\left(k\rho_0\right)^n}\sum_{j=1}^{2n}\left(-1\right)^{j+1}\hat{I}_{n,j}\ , \tag{1.20}$$

სადაც:

$$\hat{I}_{n,j} = \sum_{m=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^m}{m!}\rho_0{}^m\frac{\partial^m}{\partial\vec{\rho}_{n,j}{}^m}\,. \tag{1.21}$$

გარდავქმნათ იგი შემდეგნაირად:

$$\hat{M}_n = \frac{2^{n-2}\left(n-1\right)!}{\left(k\rho_0\right)^n}\sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^{j+1}\left[\hat{I}_{n,j} + \left(-1\right)^n\hat{I}_{n,n+j}\right].$$

$\vec{\rho}_{n,j}$ ვექტორის (1.2) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{\rho}_{n,n+j} = -\vec{\rho}_{n,j}$ და ამიტომ:

$$\frac{\partial^m}{\partial\vec{\rho}_{n,n+j}{}^m} = \left(-1\right)^m\frac{\partial^m}{\partial\vec{\rho}_{n,j}{}^m}\,.$$

ამის გათვალისწინებით, (1.21) გამოსახულებიდან მივიღებთ:

$$\hat{I}_{n,n+j} = \sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\rho_0{}^m\frac{\partial^m}{\partial\vec{\rho}_{n,j}{}^m}$$

და ოპერატორი $\hat{M}_n$ ჩაიწერება, როგორც:

$$\hat{M}_n = \frac{2^{n-2}\left(n-1\right)!}{\left(k\rho_0\right)^n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^{m+j+1}+\left(-1\right)^{n+j+1}}{m!}\rho_0{}^m\frac{\partial^m}{\partial\vec{\rho}_{n,j}{}^m}\,.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ:

$$\frac{\partial^m}{\partial\vec{\rho}_{n,j}{}^m} = \sum_{\alpha=0}^{m}C_m^\alpha\left(\cos\varphi_{n,j}\right)^{m-\alpha}\left(\sin\varphi_{n,j}\right)^\alpha\frac{\partial^m}{\partial x^{m-\alpha}\partial y^\alpha}$$

და შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$B_{n,m,\alpha}=\frac{1}{2}\Big[(-1)^m+(-1)^n\Big]\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\left(\cos\varphi_{n,j}\right)^{m-\alpha}\left(\sin\varphi_{n,j}\right)^{\alpha},$$

მაშინ გვექნება:

$$\hat{M}_n=\frac{2^{n-1}(n-1)!}{\left(k\rho_0\right)^n}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho_0{}^m}{m!}\sum_{\alpha=0}^{m}C_m^{\alpha}B_{n,m,\alpha}\frac{\partial^m}{\partial x^{m-\alpha}\partial y^{\alpha}}. \qquad (1.22)$$

ახლა $\vec{\rho}_{n,j}$ ვექტორები ჩავანაცვლოთ $\vec{\rho}^{\,*}_{n,j}$ ვექტორებით, მაშინ მივიღებთ ოპერატორს:

$$\hat{M}_n^*=\frac{2^{n-1}(n-1)!}{\left(k\rho_0\right)^n}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho_0{}^m}{m!}\sum_{\alpha=0}^{m}C_m^{\alpha}B^*_{n,m,\alpha}\frac{\partial^m}{\partial x^{m-\alpha}\partial y^{\alpha}}, \qquad (1.23)$$

სადაც:

$$B^*_{n,m,\alpha}=\frac{1}{2}\Big[(-1)^m+(-1)^n\Big]\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\left(\cos\varphi^*_{n,j}\right)^{m-\alpha}\left(\sin\varphi^*_{n,j}\right)^{\alpha}.$$

შემოღებული $B_{n,m,\alpha}$ და $B^*_{n,m,\alpha}$ კოეფიციენტების გამოთვლის შედეგად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ:

$$B_{n,m,\alpha}=\begin{cases}0, & m<n\\ (-1)^n B_{n,\alpha}, & m=n\end{cases},\quad B^*_{n,m,\alpha}=\begin{cases}0, & m<n\\ (-1)^n B^*_{n,\alpha}, & m=n\end{cases}.$$

აქედან, $\hat{M}_n$ და $\hat{M}_n^*$ ოპერატორებისთვის მივიღებთ:

$$\hat{M}_n=\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{nk^n}\sum_{\alpha=0}^{n}C_n^{\alpha}B_{n,\alpha}\frac{\partial^n}{\partial x^{n-\alpha}\partial y^{\alpha}},$$

$$\hat{M}_n^*=\frac{(-1)^n 2^{n-1}}{nk^n}\sum_{\alpha=0}^{n}C_n^{\alpha}B^*_{n,\alpha}\frac{\partial^n}{\partial x^{n-\alpha}\partial y^{\alpha}}$$

და როგორც ვხედავთ, ისინი ემთხვევა $\hat{L}_n$ და $\hat{L}_n^*$ ოპერატორებს. ეს გვაძლევს უფლებას დავწეროთ:

$$\begin{pmatrix} \hat{M}_n \\ \hat{M}_n^* \end{pmatrix} H_0^{(1)}(k\rho) = H_n^{(1)}(k\rho) \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

ან გაშლილი სახით:

$$\frac{2^{n-2}(n-1)!}{(k\rho_0)^n} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m H_0^{(1)}(k\rho)}{\partial \vec{\rho}_{n,j}{}^m} \rho_0{}^m = H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi), \tag{1.25}$$

$$\frac{2^{n-2}(n-1)!}{(k\rho_0)^n} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m H_0^{(1)}(k\rho)}{\partial \vec{\rho}^{*}_{n,j}{}^m} \rho_0{}^m = H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi), \tag{1.26}$$

$$\frac{2^{n-2}(n-1)!}{(k\rho_0)^n} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m \rho_0{}^m}{m!} \left[\frac{\partial^m H_0^{(1)}(k\rho)}{\partial \vec{\rho}_{n,j}{}^m} \pm i \frac{\partial^m H_0^{(1)}(k\rho)}{\partial \vec{\rho}^{*}_{n,j}{}^m} \right] =$$

$$= H_n^{(1)}(k\rho) e^{\pm in\varphi}. \tag{1.27}$$

მოყვანილი ტოლობები, (1.11)-(1.13) ტოლობების ეკვივალენტურია იმ თვალსაზრისით, რომ ასევე აკავშირებენ საწყის ტალღურ ფუნქციებს ნულოვანი რიგის $H_0^{(1)}(k\rho)$ ფუნქციასთან.

ახლა ყურადღება მივაქციოთ (1.25) და (1.26) გამოსახულებების მარცხენა მხარეებს. მათი შიდა ჯამები წარმოადგენს $H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}_{n,j}\right|\right)$ და $H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}^{*}_{n,j}\right|\right)$ ფუნქციების ტეილორის მწკრივების n-ურ კერძო ჯამებს. ამიტომ მიახლოებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{2^{n-2}(n-1)!}{(k\rho_0)^n} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}_{n,j}\right|\right) \approx H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi), \tag{1.28}$$

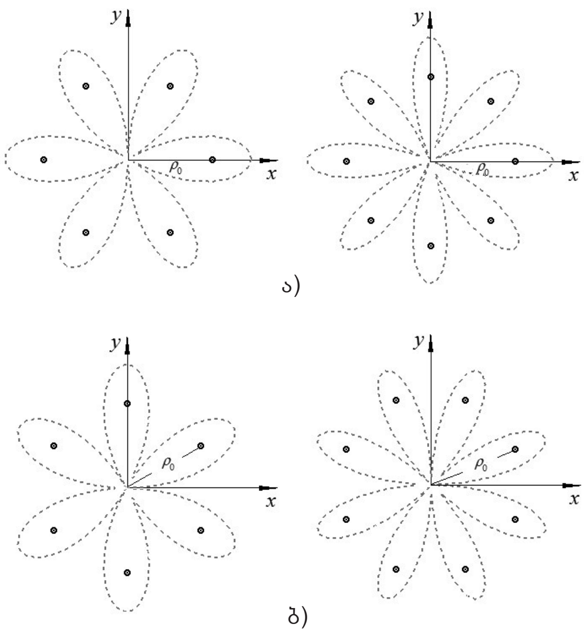
$$\frac{2^{n-2}(n-1)!}{(k\rho_0)^n} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}^{*}_{n,j}\right|\right) \approx H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi), \tag{1.29}$$

სადაც იგულისხმება: $\rho > \rho_0$.

ეს გამოსახულებები აღწერს $2n$ რაოდენობის მონოპოლისგან შემდგარ მულტიპოლს. მონოპოლები მდებარეობს ρ_0 რადი-

უსის წრეწირზე, იმ წერტილებში, რომელთა რადიუს-ვექტორე-ბია შესაბამისად $\rho_0\vec{\rho}_{n,j}$ და $\rho_0\vec{\rho}^{*}_{n,j}$ (ნახ. 5). აღსანიშნავია, რომ ρ_0-ს ფიქსირებული მნიშვნელობის შემთხვევაში, პირველი სახეობის მულტიპოლისგან განსხვავებით, ამ მულტიპოლის რადიუსი n-ის გაზრდით უცვლელი რჩება.

მამრავლი $(-1)^{j+1}$, რომელიც ფიგურირებს მიღებულ გამოსა-ხულებებში (1.28) და (1.29), მეტყველებს იმაზე, რომ ყოველი მო-მდევნო მონოპოლი ირხევა წინა მონოპოლის საწინააღმდეგო ფა-ზაში. მიღებულ მულტიპოლს ჩვენ მეორე სახეობის მულტიპოლს (წრიულ მულტიპოლს) ვუწოდებთ.



ნახ. 5. მეორე სახეობის მულტიპოლის სტრუქტურა, რომელიც აღწერს ველს ა) $H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi)$ და ბ) $H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi)$, როდესაც $n=3$ და $n=4$

აღნიშნული გამოსახულებებიდან ადვილად შევადგენთ გამო-სახულებას (1.12*) ფუნქციისთვის:

$$\frac{2^{n-2}(n-1)!}{(k\rho_0)^n}\sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j+1}\Big[H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}_{n,j}\right|\right)\pm$$

$$\pm iH_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}^{\,*}_{n,j}\right|\right)\Big]\approx H_n^{(1)}(k\rho)e^{\pm in\varphi}. \qquad (1.30)$$

(1.6) სიდიდის გამოყენებით, უფრო კომპაქტურად დავწერთ:

$$\frac{2^{n-2}(n-1)!}{(k\rho_0)^n}\sum_{m=1}^{4n}(-1)^{\lambda_m+m+1}\begin{pmatrix} e^{i(\pi/4)} \\ e^{i(3\pi/4)}\end{pmatrix}^{1+(-1)^m} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}\,'_{n,m}\right|\right)\approx$$

$$\approx H_n^{(1)}(k\rho)e^{\pm in\varphi}. \qquad (1.31)$$

აქ რადიუს-ვექტორი $\vec{\rho}\,'_{n,m}$ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\vec{\rho}\,'_{n,m}=\left\{\cos\left(\frac{\varphi_{n,m}}{2}\right),\sin\left(\frac{\varphi_{n,m}}{2}\right)\right\},\ \varphi_{n,m}=\frac{\pi}{n}(m-1). \qquad (1.32)$$

თუ კვლავ დავუშვებთ, რომ $k\rho_0$ სიდიდე აკმაყოფილებს პირობას (1.16), მაშინ (1.28), (1.29) და (1.31) დაიყვანება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{4n}\sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j+1}H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}_{n,j}\right|\right)\approx J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi), \qquad (1.33)$$

$$\frac{1}{4n}\sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j+1}H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}^{\,*}_{n,j}\right|\right)\approx J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi), \qquad (1.34)$$

$$\frac{1}{4n}\sum_{m=1}^{4n}(-1)^{\lambda_m+m+1}\begin{pmatrix} e^{i(\pi/4)} \\ e^{i(3\pi/4)}\end{pmatrix}^{1+(-1)^m} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}\,'_{n,m}\right|\right)\approx$$

$$\approx J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)e^{\pm in\varphi}. \qquad (1.35)$$

მაშასადამე, ველი $J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)e^{\pm in\varphi}$ შეიძლება აღიწეროს $4n$ რაოდენობის მონოპოლით, რომელთა რადიუს-ვექტორებია $\vec{\rho}\,'_{n,m}$, ხოლო:

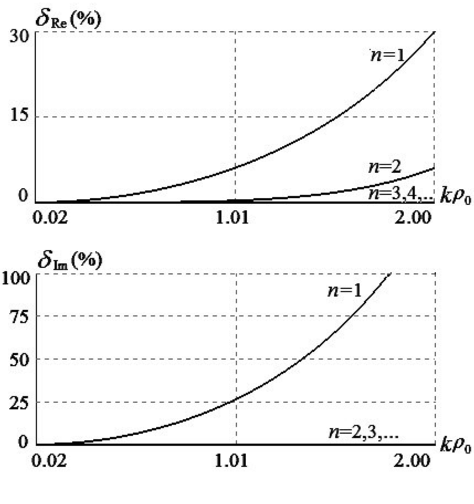
$$\frac{1}{4n}(-1)^{\lambda_m+m+1}\, e^{i(\pi/4)\left[1+(-1)^m\right]},\ \frac{1}{4n}(-1)^{\lambda_m+m+1}\, e^{i(3\pi/4)\left[1+(-1)^m\right]},$$

შესაბამისად, მათი ამპლიტუდებია.

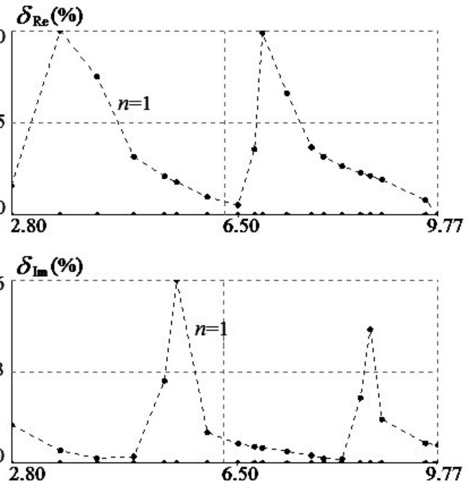
§5. მეორე სახეობის მულტიპოლის ცდომილება

მესამე პარაგრაფში აღწერილი მსჯელობის ანალოგიურად, შევისწავლოთ (1.33) გამოსახულების ცდომილების დამოკიდებულება $k\rho_0$ და $k\rho$ სიდიდეებზე.

ნახ. 6 გვიჩვენებს, როგორ იცვლება ეს ცდომილება სეგმენტზე $0.02 \le k\rho_0 \le 2$, როდესაც $k\rho = 8.5$ და $M = 99$. როგორც ჩანს, მაქსიმალური ცდომილება გააჩნია შემთხვევას $n = 1$, თუმცა იგი დასაშვებ ფარგლებშია, როდესაც $k\rho_0 = 0.2$. n-ის მნიშვნელობის გაზრდით, წინა შემთხვევისგან განსხვავებით, ცდომილება მცირდება. კერძოდ, როდესაც $n \ge 3$ მიღებული ცდომილება იმდენად მცირეა, რომ მოყვანილი სურათის მასშტაბებში მისი გრაფიკი აბსცისათა ღერძს ემთხვევა.



ნახ. 6. ცდომილების დამოკიდებულება $k\rho_0$ სიდიდეზე



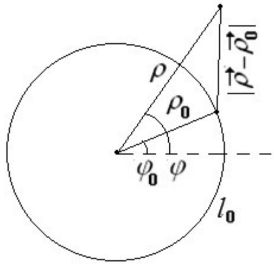
ნახ. 7. ცდომილების დამოკიდებულება $k\rho$ სიდიდეზე

ნახ. 7 გვიჩვენებს ცდომილების დამოკიდებულებას $k\rho$ სიდიდეზე, როდესაც $k\rho_0 = 0.2$. $k\rho$ სიდიდის დასაშვები მნიშვნელობები კვლავ შერჩეულია დისკრეტულად, წინა შემთხვევაში აღწერილი მიზეზის გამო. როგორც ჩანს, როდესაც $n=1$, δ_{Re} და δ_{Im} ცდომილებების მაქსიმალური მნიშვნელობები შეადგენს შესაბამისად 1%-ს და 2.6%-ს, რაც სრულიად დასაშვებია. n-ის მომდევნო მნიშვნელობებისთვის ცდომილების გრაფიკები აბსცისათა ღერძს ემთხვევა.

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ წრიული მულტიპოლი, პირველი სახეობის მულტიპოლთან შედარებით, უფრო ოპტიმალურია. იგი უფრო ზუსტად აღწერს (1.1) სახის ველებს და შეიცავს უფრო ნაკლებ ($2n$) რაოდენობის მონოპოლს.

§6. მესამე სახეობის ორგანზომილებიანი მულტიპოლი

მულტიპოლის კიდევ ერთი სახეობა შეიძლება მიღებულ იქნას ცილინდრული ფუნქციებისთვის ცნობილი შეკრების თეორემიდან [2, 7, 8].



ნახ. 8. შეკრების თეორემის ილუსტრაცია

ამ თეორემის თანახმად, ρ_0 რადიუსის მქონე წრის გარეთ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(k\rho_0) H_m^{(1)}(k\rho) e^{-im\varphi} = H_0^{(1)}\left(k|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0|\right), \ \rho > \rho_0, \quad (1.36)$$

სადაც:

$$\vec{\rho} = \rho\{\cos\varphi, \sin\varphi\}, \ \vec{\rho}_0 = \rho_0\{1,0\}.$$

უარყოფითი ინდექსის მქონე ცილინდრული ფუნქციის განმარტების თანახმად:

$$Z_{-m}(x) = (-1)^m Z_m(x) \quad (1.37)$$

და ამიტომ, (1.36) გარდაიქმნება როგორც:

$$J_0(k\rho_0) H_0^{(1)}(k\rho) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(k\rho_0) H_m^{(1)}(k\rho)\cos(m\varphi) = H_0^{(1)}\left(k|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0|\right). \quad (1.38)$$

ახლა დავუშვათ, რომ $\vec{\rho}_0$ წარმოადგენს l_0 წრეწირზე აღებული ნებისმიერი წერტილის რადიუს-ვექტორს (და არა მხოლოდ პოლარულ ღერძთან გადაკვეთის წერტილს (ნახ. 8)). მაშინ:

$$\vec{\rho}_0 = \rho_0\{\cos\varphi_0, \sin\varphi_0\}$$

და გამოსახულება (1.38) უფრო ზოგად სახეს მიიღებს:

$$J_0(k\rho_0) H_0^{(1)}(k\rho) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(k\rho_0) H_m^{(1)}(k\rho)\cos\left[m(\varphi-\varphi_0)\right] =$$

$$= H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0\right|\right). \qquad (1.39)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ განხილულ არეში ($\rho > \rho_0$), მოყვანილი ტოლობის მარცხენა მხარეს მდებარე მწკრივი თანაბრად კლებადია. ეს გვაძლევს საშუალებას გავაინტეგროთ ამ ტოლობის ორივე მხარე l_0 წრეწირის გასწვრივ. რადგან:

$$dl_0 = \rho_0 d\varphi_0, \ 0 \le \varphi_0 < 2\pi,$$

ამიტომ ინტეგრირების შედეგად მივიღებთ:

$$2\pi\rho_0 J_0\left(k\rho_0\right) H_0^{(1)}\left(k\rho\right) = \oint_{l_0} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0\right|\right) dl_0 \qquad (1.40)$$

ან:

$$2\pi J_0\left(k\rho_0\right) H_0^{(1)}\left(k\rho\right) = \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0\right|\right) d\varphi_0. \qquad (1.41)$$

აქ გავითვალისწინეთ, რომ:

$$\oint_{l_0} \cos\left[m\left(\varphi-\varphi_0\right)\right] dl_0 = \rho_0 \int_0^{2\pi} \cos\left[m\left(\varphi-\varphi_0\right)\right] d\varphi_0 = 0,$$

როდესაც $m = 1, 2, \ldots$.

გამოსახულებას (1.40) გააჩნია ღრმა ფიზიკური შინაარსი, რომელიც დაკავშირებულია ჰიუგენს-ფრენელის პრინციპთან. მართლაც, $e^{-i\omega t}$ დროითი მამრავლის შემთხვევაში ფუნქცია $H_0^{(1)}\left(k\rho\right)$ აღწერს $\rho = 0$ წერტილიდან გამოსხივებულ განშლად მონოქრომატულ ცილინდრულ ტალღას. როდესაც ამ ტალღის ფრონტი მიაღწევს l_0 წრეწირს, მაშინ მისი ყოველი წერტილი, ჰიუგენს-ფრენელის პრინციპის თანახმად, მეორადი ტალღის წყაროდ გადაიქცევა. სწორედ ამიტომ, განხილულ არეში ($\rho > \rho_0$) უნდა შეიძლებოდეს საწყისი $H_0^{(1)}\left(k\rho\right)$ ველის წარმოდგენა მეორადი წყაროებიდან გამოსხივებული ველების ჯამის სახით, ანუ ინტეგრალით l_0 კონტურის გასწვრივ. (1.40)-დან ასევე გამომდინარეობს, რომ წრეწირის ρ_0 რადიუსის გაზრდით, მეორადი წყაროების ამპლიტუდები მცირდება $2\pi\rho_0 J_0\left(k\rho_0\right)$ სიდიდის უკუპროპორციულად. უნდა

აღინიშნოს, რომ $k\rho_0$ სიდიდის იმ მნიშვნელობებზე, რომელთათვის $J_0(k\rho_0)=0$, (1.40) გამოსახულების ინტეგრალი წრის გარეთ ნულის ტოლი ხდება, წრის შიგნით კი იგი აღწერს რეზონანსულ მდგარ ტალღას.

თუ გავამრავლებთ (1.39) ტოლობის ორივე მხარეს სიდიდეზე $\cos\left[n(\varphi-\varphi_0)\right]$, სადაც n ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია და შემდეგ გავაინტეგრებთ l_0 წრეწირის გასწვრივ, მაშინ იმის გათვალისწინებით, რომ:

$$\oint_{l_0}\cos\left[m(\varphi-\varphi_0)\right]\cos\left[n(\varphi-\varphi_0)\right]dl_0=\pi\rho_0\delta_{m,n},$$

სადაც $\delta_{m,n}$ კრონეკერის სიმბოლოა, მივიღებთ უფრო ზოგადი სახის გამოსახულებას:

$$2\pi\rho_0 J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)=\oint_{l_0}H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0\right|\right)\cos\left[n(\varphi-\varphi_0)\right]dl_0, \quad (1.41^*)$$

საიდანაც, (1.41) გამომდინარეობს როგორც კერძო შემთხვევა, თუ დავუშვებთ, რომ $n=0$.

კვლავ დავუბრუნდეთ (1.39) ტოლობას და ახლა მისი ორივე მხარე გავამრავლოთ ფუნქციაზე $\cos(n\varphi_0)$ ($\sin(n\varphi_0)$), შემდეგ ხელახლა გავაინტეგროთ მიღებული ტოლობის ორივე მხარე l_0 წრეწირის გასწვრივ. შედეგად, იმის გათვალისწინებით, რომ:

$$\oint_{l_0}\cos\left[m(\varphi-\varphi_0)\right]\begin{pmatrix}\cos(n\varphi_0)\\ \sin(n\varphi_0)\end{pmatrix}dl_0=\pi\rho_0\delta_{m,n}\begin{pmatrix}\cos(n\varphi)\\ \sin(n\varphi)\end{pmatrix},$$

მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$2\pi\rho_0 J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi)=\oint_{l_0}H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0\right|\right)\cos(n\varphi_0)\,dl_0, \quad (1.42)$$

$$2\pi\rho_0 J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi)=\oint_{l_0}H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0\right|\right)\sin(n\varphi_0)\,dl_0. \quad (1.43)$$

აქედან გამომდინარე, საწყისი (1.1) მაღალი რიგის ფუნქციები გამოსახულია ნულოვანი რიგის ფუნქციის ინტეგრალებით, რაც

ასევე დაკავშირებულია ჰიუგენს-ფრენელის პრინციპთან. ახლა ეს ინტეგრალები ჩავანაცვლოთ შესაბამისი ინტეგრალური ჯამებით. თუ N საკმარისად დიდი რიცხვია, მაშინ ადგილი ექნება მიახლოებით ტოლობებს:

$$\oint_{l_0} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0\right|\right)\cos\left(n\varphi_0\right)dl_0 \approx \rho_0 \sum_{j=1}^{N} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}_{N,j}\right|\right)\cos\left(n\varphi_{N,j}\right)\Delta\varphi_N ,$$

$$\oint_{l_0} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0\right|\right)\sin\left(n\varphi_0\right)d\varphi_0 \approx \rho_0 \sum_{j=1}^{N} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}^{*}_{N,j}\right|\right)\sin\left(n\varphi^{*}_{N,j}\right)\Delta\varphi_N .$$

აქ:

$$\vec{\rho}_{N,j} = \left\{\cos\varphi_{N,j}, \sin\varphi_{N,j}\right\},\ \vec{\rho}^{*}_{N,j} = \left\{\cos\varphi^{*}_{N,j}, \sin\varphi^{*}_{N,j}\right\}, \qquad (1.44)$$

$$\varphi_{N,j} = \frac{2\pi}{N}(j-1),\ \varphi^{*}_{N,j} = \frac{2\pi}{N}\left(j-\frac{1}{2}\right),\ \Delta\varphi_N = \frac{2\pi}{N}. \qquad (1.45)$$

გამოსახულებები (1.42) და (1.43) მიიღებენ შემდეგ მიახლოებით სახეს:

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}_{N,j}\right|\right)\cos\left(n\varphi_{N,j}\right) \approx J_n\left(k\rho_0\right)H_n^{(1)}\left(k\rho\right)\cos\left(n\varphi\right), \qquad (1.46)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}^{*}_{N,j}\right|\right)\sin\left(n\varphi^{*}_{N,j}\right) \approx J_n\left(k\rho_0\right)H_n^{(1)}\left(k\rho\right)\sin\left(n\varphi\right). \qquad (1.47)$$

მაშასადამე, განხილული მაღალი რიგის ტალღური ფუნქციები, წრის გარეთ ($\rho > \rho_0$), შეგვიძლია აღვწეროთ l_0 კონტურზე განაწილებული N რაოდენობის მონოპოლით. ეს მონოპოლები ქმნიან მესამე სახეობის მულტიპოლს. მეორე სახეობის მულტიპოლისგან განსხვავებით, აქ მონოპოლების N რაოდენობა არაა შეზღუდული და შეიძლება შეირჩეს სასურველი სიზუსტის მიხედვით.

§7. მესამე სახეობის მულტიპოლის ცდომილება

რადგან (1.46) და (1.47) მიახლოებითი ტოლობების მარცხენა ნაწილში ინტეგრალური ჯამები ფიგურირებენ, ამიტომ ამ გამოსახულებების ცდომილება მიისწრაფვის ნულისკენ, როდესაც $N \to \infty$. ახლა გავარკვიოთ N რაოდენობის მინიმალური დასაშვები მნიშვნელობა.

განვიხილოთ გამოსახულებები (1.33) და (1.46), რომლებსაც შემოკლებული სახით გადავწერთ, როგორც:

$$L_n^{II}\left(\vec{\rho}\right) \approx R_n\left(\vec{\rho}\right),\ L_{N,n}^{III}\left(\vec{\rho}\right) \approx R_n\left(\vec{\rho}\right).$$

თუ დავუშვებთ, რომ $N = 2n$, მაშინ გამოსახულებებიდან (1.44) და (1.45) გვექნება:

$$\varphi_{N,j} = \varphi_{n,j},\ \varphi_{N,j}^{*} = \varphi_{n,j}^{*},\ \vec{\rho}_{N,j} = \vec{\rho}_{n,j},\ \vec{\rho}_{N,j}^{*} = \vec{\rho}_{n,j}^{*},$$

$$\cos\left(n\varphi_{N,j}\right) = \sin\left(n\varphi_{N,j}^{*}\right) = \left(-1\right)^{j+1}$$

და (1.46)-ს მარცხენა ნაწილი გადაიწერება, როგორც:

$$L_{N,n}^{III}\left(\vec{\rho}\right)\Big|_{N=2n} = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n}\left(-1\right)^{j+1} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho} - \rho_0\vec{\rho}_{n,j}\right|\right).$$

შემდეგ, (1.33)-ის მარცხენა ნაწილს აქვს სახე:

$$L_n^{II}\left(\vec{\rho}\right) = \frac{1}{4n}\sum_{j=1}^{2n}\left(-1\right)^{j+1} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho} - \rho_0\vec{\rho}_{n,j}\right|\right)$$

და ამიტომ:

$$L_{N,n}^{III}\left(\vec{\rho}\right)\Big|_{N=2n} = 2L_n^{II}\left(\vec{\rho}\right),$$

საიდანაც:

$$L_{N,n}^{III}\left(\vec{\rho}\right)\Big|_{N=2n} \approx 2R_n\left(\vec{\rho}\right).$$

აქედან გამომდინარე, (1.46)-ის ცდომილებისთვის, როდესაც $N = 2n$, მივიღებთ:

$$\frac{1}{M}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{\left|L_{N,n}^{III}\left(\vec{\rho}_{\mu}\right)\right|_{N=2n}-R_{n}\left(\vec{\rho}_{\mu}\right)\right|}{\left|R_{n}\left(\vec{\rho}_{\mu}\right)\right|}100\%\approx$$

$$\approx\frac{1}{M}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{\left|2R_{n}\left(\vec{\rho}_{\mu}\right)-R_{n}\left(\vec{\rho}_{\mu}\right)\right|}{\left|R_{n}\left(\vec{\rho}_{\mu}\right)\right|}100\%=100\%\,.$$

მაშასადამე, მესამე სახეობის მულტიპოლით, რომელიც შეიცავს N რაოდენობის მონოპოლს, შეიძლება აღწერილ იქნას (1.1) სახის n რიგის ველი, თუ სრულდება პირობა $N>2n$. სამივე სახეობის მულტიპოლების შედარებით მივდივართ დასკვნამდე, რომ მეორე ყველაზე ოპტიმალურია.

§8. ერთგვაროვანი მრავალწევრები და მათი საკუთარი ოპერატორები. ოპერატორების კომპოზიცია

დიფერენციალური ოპერატორები $\hat{L}_n$ და $\hat{L}_n^*$ აკავშირებენ n რიგის ცილინდრულ ტალღურ ფუნქციებს ნულოვანი რიგის ფუნქციასთან. ისინი შემოვიღეთ (1.1) ველების ამპლიტუდური დიაგრამების და მათი ფოთლების მიმართულების საფუძველზე.

ვაჩვენოთ, რომ ეს ოპერატორები სხვა გზითაც შეგვიძლია მივიღოთ. ამისთვის განვიხილოთ x და y ცვლადებზე დამოკიდებული n რიგის ერთგვაროვანი მრავალწევრი:

$$f_n\left(x,y\right)=\sum_{\alpha=0}^{n}A_{n,\alpha}x^{n-\alpha}y^{\alpha}\,, \tag{1.48}$$

სადაც $A_{n,\alpha}$ ცნობილი კოეფიციენტებია. ვთქვათ, რომ წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი $\hat{f}_n$ წარმოადგენს (1.48) ერთგვაროვანი მრავალწევრის საკუთარ ოპერატორს, თუ მას გააჩნია შემდეგი სახე:

$$\hat{f}_n=\frac{\left(-1\right)^n}{k^n}\sum_{\alpha=0}^{n}A_{n,\alpha}\frac{\partial^n}{\partial x^{n-\alpha}\partial y^{\alpha}}\,. \tag{1.49}$$

განვიხილოთ ფუნქციები $\rho^n \cos(n\varphi)$ და $\rho^n \sin(n\varphi)$, რომლებიც ლაპლასის განტოლებას აკმაყოფილებენ და მათ ცილინდრული ჰარმონიკები ეწოდებათ. თუ შევადგენთ მათგან ფუნქციას $\rho^n e^{in\varphi}$, მაშინ კომპლექსური რიცხვის n-ური ხარისხის განმარტებით, დავწერთ:

$$\rho^n e^{in\varphi} = (x+iy)^n .$$

ახლა გამოვიყენოთ ნიუტონის ბინომის ფორმულა, საიდანაც:

$$(x+iy)^n = \sum_{\alpha=0}^{n} C_n^{\alpha} x^{n-\alpha} (iy)^{\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{\lambda_n} C_n^{2\alpha} x^{n-2\alpha} (iy)^{2\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{\lambda_{n+1}} C_n^{2\alpha-1} x^{n-2\alpha+1} (iy)^{2\alpha-1}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\lambda_n} (-1)^{\alpha} C_n^{2\alpha} x^{n-2\alpha} y^{2\alpha} + i \sum_{\alpha=1}^{\lambda_{n+1}} (-1)^{\alpha+1} C_n^{2\alpha-1} x^{n-2\alpha+1} y^{2\alpha-1}$$

და მაშასადამე:

$$\rho^n \cos(n\varphi) = \sum_{\alpha=0}^{\lambda_n} (-1)^{\alpha} C_n^{2\alpha} x^{n-2\alpha} y^{2\alpha} , \tag{1.50}$$

$$\rho^n \sin(n\varphi) = \sum_{\alpha=1}^{\lambda_{n+1}} (-1)^{\alpha+1} C_n^{2\alpha-1} x^{n-2\alpha+1} y^{2\alpha-1} . \tag{1.51}$$

ფუნქციებს $\rho^n \cos(n\varphi)$ და $\rho^n \sin(n\varphi)$ ორგანზომილებიან ჰარმონიულ პოლინომებსაც უწოდებენ. მოყვანილი (1.49) განმარტების თანახმად, მათი საკუთარი ოპერატორებია:

$$\frac{(-1)^n}{k^n} \sum_{\alpha=0}^{\lambda_n} (-1)^{\alpha} C_n^{2\alpha} \frac{\partial^n}{\partial x^{n-2\alpha} \partial y^{2\alpha}} , \quad \frac{(-1)^n}{k^n} \sum_{\alpha=1}^{\lambda_{n+1}} (-1)^{\alpha+1} C_n^{2\alpha-1} \frac{\partial^n}{\partial x^{n-2\alpha+1} \partial y^{2\alpha-1}} ,$$

რაც ემთხვევა (1.7) და (1.8) ოპერატორებს. მაშასადამე, $\hat{L}_n$ და $\hat{L}_n^*$ ოპერტორები წარმოადგენენ $\rho^n \cos(n\varphi)$ და $\rho^n \sin(n\varphi)$ ჰარმონიული პოლინომების საკუთარ ოპერატორებს.

გამოსახულებას

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{e^{i\varphi}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}+i\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \qquad (1.51^*)$$

ვირტინგერის ოპერატორი ეწოდება. მისი მეშვეობით $\hat{L}_n$ და $\hat{L}_n^*$ ოპერატორები შეგვიძლია ასევე წარმოვიდგინოთ, როგორც:

$$\hat{L}_n=(-1)^n\left(\frac{2}{k}\right)^n\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}\right),\ \hat{L}_n^*=(-1)^n\left(\frac{2}{k}\right)^n\mathrm{Im}\left(\frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}\right). \qquad (1.52)$$

დავამტკიცოთ, რომ გამოსახულება (1.10), რომლის თანახმადაც:

$$\hat{L}_nH_0^{(1)}(k\rho)=H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi),\ \hat{L}_n^*H_0^{(1)}(k\rho)=H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi), \qquad (1.53)$$

სამართლიანია ნებისმიერი ნატურალური n-ისთვის. ამისთვის შევადგინოთ ოპერატორი $\hat{L}_n+i\hat{L}_n^*$ და ვაჩვენოთ, რომ:

$$\left(\hat{L}_n+i\hat{L}_n^*\right)\begin{pmatrix}J_0(k\rho)\\ N_0(k\rho)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_n(k\rho)\\ N_n(k\rho)\end{pmatrix}e^{in\varphi}, \qquad (1.54)$$

ან გაშლილი სახით:

$$(-1)^n\left(\frac{2}{k}\right)^n\frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}\begin{pmatrix}J_0(k\rho)\\ N_0(k\rho)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_n(k\rho)\\ N_n(k\rho)\end{pmatrix}e^{in\varphi}.$$

ფუნქციები $J_n(k\rho)$ და $N_n(k\rho)$ წარმოადგენენ ჰანკელის $H_n^{(1)}(k\rho)$ ფუნქციის რეალურ და წარმოსახვით ნაწილს. მათთვის, (1.9) რეკურენტული ფორმულის თანახმად, სამართლიანია ტოლობა:

$$\frac{d}{d(k\rho)}\begin{pmatrix}J_\nu(k\rho)\\ N_\nu(k\rho)\end{pmatrix}=\frac{\nu}{k\rho}\begin{pmatrix}J_\nu(k\rho)\\ N_\nu(k\rho)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}J_{\nu+1}(k\rho)\\ N_{\nu+1}(k\rho)\end{pmatrix},\ \nu=0,1,\ldots. \qquad (1.55)$$

(1.54) გამოსახულების დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი. როდესაც $n=1$, (1.55)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\left(\hat{L}_1+i\hat{L}_1^*\right)\begin{pmatrix} J_0(k\rho) \\ N_0(k\rho) \end{pmatrix}=-\frac{2}{k}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\begin{pmatrix} J_0(k\rho) \\ N_0(k\rho) \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{e^{i\varphi}}{k}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix} J_0(k\rho) \\ N_0(k\rho) \end{pmatrix}+i\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix} J_0(k\rho) \\ N_0(k\rho) \end{pmatrix}\right]=$$

$$=-\frac{d}{d(k\rho)}\begin{pmatrix} J_0(k\rho) \\ N_0(k\rho) \end{pmatrix}e^{i\varphi}=\begin{pmatrix} J_1(k\rho) \\ N_1(k\rho) \end{pmatrix}e^{i\varphi}$$

და მაშასადამე, ტოლობა (1.54) ამ დროს სრულდება. ახლა დავუშვათ, რომ იგი სრულდება აგრეთვე, როდესაც $n=m$, ანუ:

$$(-1)^m\left(\frac{2}{k}\right)^m\frac{\partial^m}{\partial\overline{z}^m}\begin{pmatrix} J_0(k\rho) \\ N_0(k\rho) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_m(k\rho) \\ N_m(k\rho) \end{pmatrix}e^{im\varphi}.$$

მაშინ, როდესაც $n=m+1$, (1.55)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\left(\hat{L}_{m+1}+i\hat{L}_{m+1}^*\right)\begin{pmatrix} J_0(k\rho) \\ N_0(k\rho) \end{pmatrix}=(-1)^{m+1}\left(\frac{2}{k}\right)^{m+1}\frac{\partial^{m+1}}{\partial\overline{z}^{m+1}}\begin{pmatrix} J_0(k\rho) \\ N_0(k\rho) \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{2}{k}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left[(-1)^m\left(\frac{2}{k}\right)^m\frac{\partial^m}{\partial\overline{z}^m}\begin{pmatrix} J_0(k\rho) \\ N_0(k\rho) \end{pmatrix}\right]=-\frac{2}{k}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left[\begin{pmatrix} J_m(k\rho) \\ N_m(k\rho) \end{pmatrix}e^{im\varphi}\right]=$$

$$=-\frac{2}{k}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\begin{pmatrix} J_m(k\rho) \\ N_m(k\rho) \end{pmatrix}e^{im\varphi}-\frac{2}{k}\begin{pmatrix} J_m(k\rho) \\ N_m(k\rho) \end{pmatrix}\frac{\partial e^{im\varphi}}{\partial\overline{z}}=$$

$$=-\frac{2}{k}\frac{e^{i\varphi}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}+i\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\begin{pmatrix} J_m(k\rho) \\ N_m(k\rho) \end{pmatrix}e^{im\varphi}-\frac{2}{k}\begin{pmatrix} J_m(k\rho) \\ N_m(k\rho) \end{pmatrix}\frac{e^{i\varphi}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}+i\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)e^{im\varphi}=$$

$$=\left[-\frac{d}{d(k\rho)}\begin{pmatrix} J_m(k\rho) \\ N_m(k\rho) \end{pmatrix}+\frac{m}{k\rho}\begin{pmatrix} J_m(k\rho) \\ N_m(k\rho) \end{pmatrix}\right]e^{i(m+1)\varphi}=\begin{pmatrix} J_{m+1}(k\rho) \\ N_{m+1}(k\rho) \end{pmatrix}e^{i(m+1)\varphi}.$$

მაშასადამე, (1.54) სრულდება ნებისმიერი ნატურალური n -ისთვის. ამ გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\hat{L}_n\begin{pmatrix} J_0(k\rho) \\ N_0(k\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_n(k\rho) \\ N_n(k\rho) \end{pmatrix}\cos(n\varphi),\ \hat{L}_n^*\begin{pmatrix} J_0(k\rho) \\ N_0(k\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_n(k\rho) \\ N_n(k\rho) \end{pmatrix}\sin(n\varphi),$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ (1.53) ფორმულებს.

განვიხილოთ ახლა n და m რიგის ოპერატორები $\hat{L}_n + i\hat{L}_n^*$ და $\hat{L}_m + i\hat{L}_m^*$. მათგან შევადგინოთ შემდეგი კომპოზიცია:

$$\left(\hat{L}_n + i\hat{L}_n^*\right)\left(\hat{L}_m + i\hat{L}_m^*\right) = \left(\hat{L}_n\hat{L}_m - \hat{L}_n^*\hat{L}_m^*\right) + i\left(\hat{L}_n\hat{L}_m^* + \hat{L}_n^*\hat{L}_m\right).$$

მეორე მხრივ, (1.51*) და (1.52) გამოსახულებების თანახმად:

$$\hat{L}_n + i\hat{L}_n^* = \frac{(-1)^n}{k^n}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^n,\ \hat{L}_m + i\hat{L}_m^* = \frac{(-1)^m}{k^m}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m$$

და ამიტომ:

$$\left(\hat{L}_n + i\hat{L}_n^*\right)\left(\hat{L}_m + i\hat{L}_m^*\right) = \frac{(-1)^{n+m}}{k^{n+m}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+m} = \hat{L}_{n+m} + i\hat{L}_{n+m}^*.$$

აქედან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\hat{L}_n\hat{L}_m - \hat{L}_n^*\hat{L}_m^* = \hat{L}_{n+m},\ \hat{L}_n\hat{L}_m^* + \hat{L}_n^*\hat{L}_m = \hat{L}_{n+m}^*.$$

თუ ამ ოპერატორებით ვიმოქმედებთ ფუნქციაზე $H_0^{(1)}(k\rho)$, მაშინ (1.53)-ის გათვალისწინებით, მარტივად მივიღებთ, რომ:

$$\hat{L}_n\left[H_m^{(1)}(k\rho)\cos(m\varphi)\right] - \hat{L}_n^*\left[H_m^{(1)}(k\rho)\sin(m\varphi)\right] = H_{n+m}^{(1)}(k\rho)\cos\left[(n+m)\varphi\right],$$

$$\hat{L}_n\left[H_m^{(1)}(k\rho)\sin(m\varphi)\right] + \hat{L}_n^*\left[H_m^{(1)}(k\rho)\cos(m\varphi)\right] = H_{n+m}^{(1)}(k\rho)\sin\left[(n+m)\varphi\right].$$

მიღებული გამოსახულებები უფრო ზოგადია. თუ მათში ჩავსვამთ $m = 0$, მაშინ მივიღებთ გამოსახულებებს (1.53) კერძო შემთხვევის სახით.

§9. წრიული ცილინდრის ტალღური ფუნქციების წრფივი კომბინაცია და მისი მონოპოლებით წარმოდგენა

საწყისი (1.1) ფუნქციებისგან შევადგინოთ წრფივი კომბინაცია:

$$F_N(\vec{\rho}) = a_0 H_0^{(1)}(k\rho) + \sum_{n=1}^{N} a_n H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi), \qquad (1.56)$$

სადაც N მოცემული ნატურალური რიცხვია, ხოლო a_n ცნობილი კოეფიციენტებია. ჩვენი მიზანი იქნება ამ კომბინაციის მიახლოებითი წარმოდგენა მონოპოლების მეშვეობით. ამისთვის განვიხილოთ მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრი. (1.41) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a_0 H_0^{(1)}(k\rho) = \frac{a_0}{2\pi J_0(k\rho_0)} \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho} - \vec{\rho}_0\right|\right) d\varphi_0 \ ,$$

ან თუ ჩავანაცვლებთ ინტეგრალს $2N$ რაოდენობის წევრისგან შემდგარი სასრული ჯამით, მაშინ:

$$a_0 H_0^{(1)}(k\rho) \approx \frac{a_0}{2N J_0(k\rho_0)} \sum_{j=1}^{2N} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho} - \rho_0 \vec{\rho}_{N,j}\right|\right),$$

სადაც:

$$\vec{\rho}_{N,j} = \left\{\cos\varphi_{N,j}, \sin\varphi_{N,j}\right\}, \ \varphi_{N,j} = \frac{\pi}{N}(j-1).$$

რაოდენობა $2N$ შერჩეულია მეტი სიზუსტისთვის (თუმცა შეიძლება უფრო მეტი რაოდენობის განხილვაც). დანარჩენი წევრები, (1.33) ფორმულის გამოყენებით, წარმოვიდგინოთ წრიული მულტიპოლებით, როგორც:

$$H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi) \approx \frac{1}{4n J_n(k\rho_0)} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho} - \rho_0 \vec{\rho}_{n,j}\right|\right).$$

მაშინ (1.56) მიიღებს შემდეგ მიახლოებით სახეს:

$$F_N(\vec{\rho}) \approx \frac{a_0}{2NJ_0(k\rho_0)} \sum_{j=1}^{2N} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}_{N,j}\right|\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{4nJ_n(k\rho_0)} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\rho_0\vec{\rho}_{n,j}\right|\right). \qquad (1.57)$$

ამ გამოსახულებაში მონოპოლების სრული რაოდენობაა N^2+3N. მაგრამ, მეორე მხრივ, $\vec{\rho}_{n,j}$ რადიუს-ვექტორის (1.2) ფორმულიდან ჩანს, რომ თუ $j=1,\dots,2n$ და $n=1,\dots,N$, მაშინ ზოგიერთი მონოპოლის მდებარეობა ერთმანეთს დაემთხვევა, რაც ჯამური ამპლიტუდის მქონე ერთ მონოპოლს მოგვცემს. შედეგად, მონოპოლების სრული რაოდენობა მოყვანილზე ნაკლები იქნება. მაგალითად, როდესაც $N=10$, მათი საერთო რაოდენობა გამოდის 64 და არა – 130.

§10. წრიულ ცილინდრზე დიფრაქციის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა

განვიხილოთ ერთეულოვანი ამპლიტუდის მქონე ბრტყელი ელექტრომაგნიტური ტალღის დიფრაქციის ამოცანა a რადიუსის იდეალურ გამტარ ცილინდრზე. თუ დაცემული ტალღა ვრცელდება x ღერძის საპირისპიროდ და მისი ელექტრული ვექტორი ცილინდრის z ღერძის პარალელურია, მაშინ გაბნეული ელექტრული ველი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$E_z(\vec{\rho}) = -\frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} H_0^{(1)}(k\rho) - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi),$$

(იხ. [10]). ცნობილია, რომ რიცხვითი ანალიზისთვის, მოყვანილი მწკრივი უნდა ჩავანაცვლოთ სასრული ჯამით. ამასთანავე, წევრების გასათვალისწინებელი N რაოდენობა უნდა იყოს იგივე რიგის, რა რიგისაც იქნება ka სიდიდე. მაშასადამე, ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისთვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$E_{z,N}(\vec{\rho}) = -\frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} H_0^{(1)}(k\rho) - 2\sum_{n=1}^{N} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi). \quad (1.58)$$

თუ ახლა შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$a_0 = -\frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)}, \quad a_n = -2(-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}, \quad (1.59)$$

მაშინ (1.58) გამოსახულების მარჯვენა მხარე დაემთხვევა (1.56)-ის მარჯვენა მხარეს და ამიტომ, შესაძლებელი იქნება მისი წარმოდგენა (1.57) სახით. მაშასადამე, განხილული ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი შეგვიძლია გადავწეროთ, როგორც:

$$E_{z,N}(\vec{\rho}) \approx \frac{a_0}{2NJ_0(k\rho_0)} \sum_{j=1}^{2N} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho} - \rho_0\vec{\rho}_{N,j}\right|\right) +$$

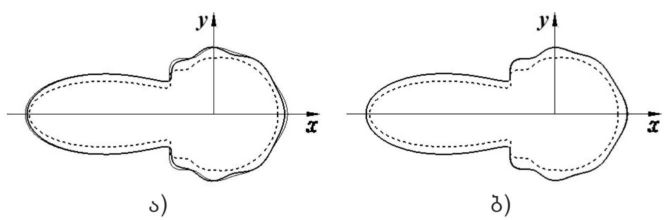
$$+ \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{4nJ_n(k\rho_0)} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho} - \rho_0\vec{\rho}_{n,j}\right|\right),$$

ან (1.59) აღნიშვნების გათვალისწინებით:

$$E_{z,N}(\vec{\rho}) \approx -\frac{J_0(ka)}{2NJ_0(k\rho_0)H_0^{(1)}(ka)} \sum_{j=1}^{2N} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho} - \rho_0\vec{\rho}_{N,j}\right|\right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{N} \frac{(-i)^n J_n(ka)}{2nJ_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(ka)} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho} - \rho_0\vec{\rho}_{n,j}\right|\right). \quad (1.60)$$

მაშასადამე, განხილული ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი წარმოდგენილია მონოპოლების ველების ჯამის სახით.



ნახ. 9. გაბნეული ველის დიაგრამები

მაგალითისთვის, ნახ. 9-ზე მოყვანილია გაბნეული ველის დიაგრამები, როდესაც ა) $k\rho_0 = 2$ და ბ) $k\rho_0 = 1$. ორივე შემთხვევაში, $ka = 4.1$ და $N = 5$. სქელი უწყვეტი პირველი მრუდი შეესაბამება (1.60) ფორმულით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნის შედეგს. წვრილი უწყვეტი მეორე მრუდი შეესაბამება (1.58) ფორმულით მიღებულ შედეგს, როდესაც გათვალისწინებულია საწყისი მწკრივის პირველი ხუთი წევრი. წყვეტილი მესამე მრუდი შეესაბამება ამოცანის ზუსტ ამონახსნს (როდესაც (1.58) ფორმულაში ოცი წევრია გათვალისწინებული). მეორე ნახატზე ბ), პირველი მრუდი იმდენად ახლოსაა მეორესთან, რომ მოყვანილ მასშტაბებში ისინი ერთმანეთს ემთხვევა, რაც (1.60) ფორმულის კარგ მიახლოებაზე მეტყველებს (1.58) ფორმულასთან.

§11. მბრუნავი ფრონტის მქონე ცილინდრული ტალღები

საინტერესოა განვიხილოთ შემდეგი სახის ფუნქციები:

$$J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)e^{-in(\varphi-\varphi_0)},\ J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)e^{in(\varphi-\varphi_0)}.$$

(1.37) თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ეს ფუნქციები მიიღება ერთი მეორისგან n ინდექსის ნიშნის ცვლილებით. ამასთან დაკავშირებით შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\mathrm{H}_{-n}(\vec{\rho},\vec{\rho}_0) = J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)e^{-in(\varphi-\varphi_0)},$$

$$\mathrm{H}_{+n}(\vec{\rho},\vec{\rho}_0) = J_n(k\rho_0)H_n^{(1)}(k\rho)e^{in(\varphi-\varphi_0)}$$

და შევისწავლოთ შესაბამისი ველების ხასიათი. შორი ზონისთვის გვექნება შემდეგი ასიმპტოტური გამოსახულებები:

$$\mathrm{H}_{-n}(\vec{\rho},\vec{\rho}_0) \approx J_n(k\rho_0)\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}e^{i\left(k\rho-n\varphi-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+n\varphi_0\right)},$$

$$\mathrm{H}_{+n}(\vec{\rho},\vec{\rho}_0) = J_n(k\rho_0)\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}e^{i\left(k\rho+n\varphi-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-n\varphi_0\right)},$$

(იხ. [3]). რადგან დროითი მამრავლია $e^{-i\omega t}$, ამიტომ განხილული ვე-ლების ფაზები უნდა განისაზღვრებოდეს შესაბამისად, როგორც:

$$\phi_{-n} = k\rho - n\varphi - \omega t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + n\varphi_0, \ \phi_{+n} = k\rho + n\varphi - \omega t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - n\varphi_0 .$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ტალღის ფრონტის წერტილებს გააჩნია სიჩქარის არა მარტო რადიალური, არამედ კუთხური მდგენელიც. რადიალური მდგენელი ორივე შემთხვევაში განისა-ზღვრება, როგორც:

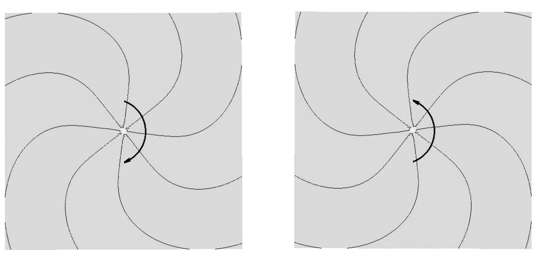
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\omega}{k} .$$

კუთხური მდგენელისთვის ვიღებთ შესაბამისად:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\omega}{n}, \ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega}{n} .$$

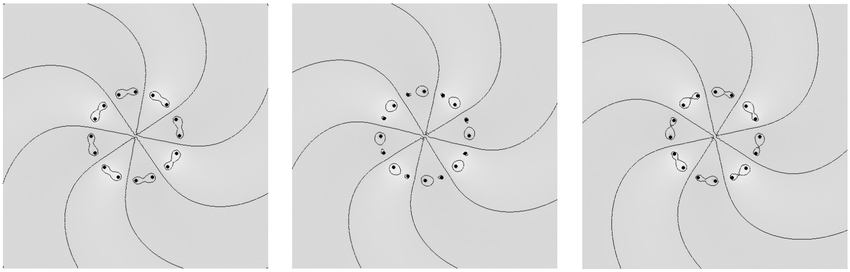
მაშასადამე, ტალღის ფრონტი ვრცელდება რადიალურად და ამავდროულად ბრუნავს. ბრუნვის სიხშირე განისაზღვრება როგორც f/n, ანუ მცირდება n-ის უკუპროპორციულად. აქ $f = \omega/(2\pi)$ ტალღის სიხშირეა. H_{-n} ველისთვის ფრონტის ბრუნვა სრულდება საათის ისრის ბრუნვის (უარყოფითი) მიმართულებით, ხოლო H_{+n}-ისთვის საწინააღმდეგო (დადებითი) მიმართულებით.

ნახ. 10 გვიჩვენებს H_{-n} და H_{+n} ველების ხასიათს, როდესაც $n = 4$. ისრით ნაჩვენებია ფაზის ბრუნვის მიმართულება. გამოსა-ხულება (1.35)-დან გამომდინარეობს, რომ განხილული ველები მა-ღალი სიზუსტით უნდა აღიწერებოდეს $4n$ რაოდენობის $H_0^{(1)}$ ტიპის მონოპოლებით, რომლებიც იმყოფებიან ρ_0 რადიუსის წრეწირზე.



ა) ბ)

ნახ. 10. ა) H_{-4} და ბ) H_{+4} ველები



ნახ. 11. ველი H_{-4}, რომელიც წარმოდგენილია წრეწირზე განაწილებული 16 მონოპოლით, დროის სამ ახლომდებარე მომენტში

ნახ. 11 შეესაბამება შემთხვევას, როდესაც $k\rho_0 = 2$ და $n = 4$. განხილული 16 მონოპოლის ჯამური ველი წარმოდგენილია დროის სამი ახლომდებარე მომენტისთვის. ყოველი მომდევნო მონოპოლის რხევების ფაზა, საათის ისრის მიმართულებით, ჩამორჩება წინამდებარე მონოპოლის ფაზას. ამის შედეგადაც ხდება გამოსხივებული ენერგიის გადაცემა მონოპოლიდან მონოპოლისკენ, აღნიშნული მიმართულებით, რაც განაპირობებს ბრუნვას. შედეგად, მიღებულ ჯამურ ველს გააჩნია ისეთივე ხასიათი, როგორიც H_{-4} ველს.

აღსანიშნავია, რომ მიღებული ველი შიდა არეშიც ემთხვევა H_{-4} ველს, მიუხედავად საწყისი შეზღუდვისა $\rho > \rho_0$. აღსანიშნავია აგრეთვე, რომ $\mathrm{H}_{-n}\left(\vec{\rho}, \vec{\rho}_0\right)$ და $\mathrm{H}_{+n}\left(\vec{\rho}, \vec{\rho}_0\right)$ ველების გამოსახულებიდან გამომდინარეობს ტოლობა:

$$J_n\left(k\rho_0\right) H_n^{(1)}\left(k\rho\right) \cos\left[n\left(\varphi - \varphi_0\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\mathrm{H}_{+n}\left(\vec{\rho}, \vec{\rho}_0\right) + \mathrm{H}_{-n}\left(\vec{\rho}, \vec{\rho}_0\right)\right],$$

ანუ მარცხენა ნაწილის ველი წარმოიდგინება ორივე მიმართულებით მბრუნავი ველების სუპერპოზიციით.

თავი II
ზონალური სფერული ტალღური ფუნქციების მონოპოლებით წარმოდგენა

ამ თავში განიხილება n რიგის ზონალური სფერული ტალღური ფუნქცია, რომელიც ფიზიკური შინაარსიდან გამომდინარე, სკალარულ ტალღურ ველს აღწერს. ნაჩვენებია, რომ იგი შეიძლება მიახლოებით წარმოდგენილ იქნას $n+1$ რაოდენობის მონოპოლით, რომლებიც ერთ წრფეზე მდებარეობს და ქმნის წრფივ მულტიპოლს [11]. შესწავლილია ასეთი წარმოდგენის სიზუსტე. ნაჩვენებია, რომ N რაოდენობის ზონალური ტალღური ფუნქციისგან შედგენილი წრფივი კომბინაცია, ასევე შეიძლება აღწერილ იქნას წრფივი მულტიპოლით, რომელშიც მონოპოლების რაოდენობა შეადგენს $2N+1$-ს. მიღებული შედეგები შემდეგ გამოყენებულია სფეროზე ბრტყელი ტალღის დიფრაქციის ამოცანაში.

§12. ზონალური სფერული ტალღური ფუნქციები და მათი კავშირი ნულოვანი რიგის ფუნქციასთან

განვიხილოთ სივრცის ორი წერტილი, სფერული კოორდინატებით $(r_0,\vartheta_0,\varphi_0)$, (r,ϑ,φ) და ჩავთვალოთ, რომ პირველი მათგანი ფიქსირებულია. ამ წერტილების რადიუსვექტორები აღვნიშნოთ შესაბამისად, როგორც $\vec{r}_0$ და $\vec{r}$. შევადგინოთ შემდეგი სახის ფუნქცია:

$$h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\gamma), \tag{2.1}$$

სადაც $h_n^{(1)}$ წარმოადგენს სფერული ჰანკელის ფუნქციას, P_n ლეჟანდრის პოლინომია, $n=1,2,\ldots$, ხოლო

$$\cos\gamma=\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_0}{rr_0}=\sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\cos\vartheta\cos\vartheta_0 \tag{2.2}$$

და შესაბამისად, γ წარმოადგენს კუთხეს $\vec{r}_0$ და $\vec{r}$ ვექტორებს შორის. გამოსახულებას (2.1) ეწოდება ზონალური სფერული ტა-

ლღური ფუნქცია [2]. ფიზიკის თვალსაზრისით, იგი აღწერს სფერულ სკალარულ ტალღურ ველს (კერძოდ, ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალს), როდესაც პროცესი დროში ჰარმონიულად იცვლება.

ფუნქციები $h_{\nu}^{(1)}\left(kr\right)$ და $P_{\nu}\left(\cos\gamma\right)$, როდესაც $\nu=0$ და $\nu=1$, განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$h_{0}^{(1)}\left(kr\right)=\frac{e^{ikr}}{ikr},\ P_{0}\left(\cos\gamma\right)=1,\ h_{1}^{(1)}\left(kr\right)=h_{0}^{(1)}\left(kr\right)\left(\frac{1}{kr}-i\right),\ P_{1}\left(\cos\gamma\right)=\cos\gamma .$$

მაღალი რიგის შემთხვევაში, შეგვიძლია გამოვიყენოთ ცნობილი რეკურენტული ფორმულები:

$$h_{\nu+1}^{(1)}\left(kr\right)=\frac{2\nu+1}{kr}h_{\nu}^{(1)}\left(kr\right)-h_{\nu-1}^{(1)}\left(kr\right), \tag{2.3}$$

$$P_{\nu+1}\left(\cos\gamma\right)=\frac{2\nu+1}{\nu+1}P_{\nu}\left(\cos\gamma\right)\cos\gamma-\frac{\nu}{\nu+1}P_{\nu-1}\left(\cos\gamma\right), \tag{2.4}$$

(იხ. [3]). აღვნიშნოთ, რომ თუ დროის მამრავლია $e^{-i\omega t}$, მაშინ ფუნქცია $h_{0}^{(1)}\left(kr\right)$ აღწერს ელემენტარული წერტილოვანი წყაროდან (მონოპოლიდან) გამოსხივებულ გამრბენ სფერულ ტალღას.

ორგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად, თუ აქაც ავაგებთ (2.1) ველის ამპლიტუდურ დიაგრამებს სხვადასხვა n-ისთვის (ნახ. 12), დავრწმუნდებით, რომ შესაბამის წყაროს რთული აგებულება უნდა ჰქონდეს და ამიტომ, შესაძლებელი უნდა იყოს მისი წარმოდგენა მონოპოლებით. ამისთვის შემოვიღოთ ერთეულოვანი ვექტორი $\vec{\tau}=\vec{r}_0/r_0$ და განვიხილოთ $h_{0}^{(1)}\left(kr\right)$ ფუნქციის სხვადასხვა რიგის წარმოებულები ამ ვექტორის გასწვრივ. გამოთვლების შედეგად მივიღებთ ტოლობებს:

$$-\frac{1}{k}\frac{\partial h_{0}^{(1)}\left(kr\right)}{\partial\vec{\tau}}=h_{1}^{(1)}\left(kr\right)P_{1}\left(\cos\gamma\right), \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3}{k^{2}}\frac{\partial^{2}h_{0}^{(1)}\left(kr\right)}{\partial\vec{\tau}^{2}}+h_{0}^{(1)}\left(kr\right)\right]=h_{2}^{(1)}\left(kr\right)P_{2}\left(\cos\gamma\right), \tag{2.6}$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{5}{k^3}\frac{\partial^3 h_0^{(1)}(kr)}{\partial\vec{\tau}^3}+\frac{3}{k}\frac{\partial h_0^{(1)}(kr)}{\partial\vec{\tau}}\right]=h_3^{(1)}(kr)P_3(\cos\gamma)\,, \qquad (2.7)$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{35}{k^4}\frac{\partial^4 h_0^{(1)}(kr)}{\partial\vec{\tau}^4}+\frac{30}{k^2}\frac{\partial^2 h_0^{(1)}(kr)}{\partial\vec{\tau}^2}+3h_0^{(1)}(kr)\right]=h_4^{(1)}(kr)P_4(\cos\gamma)\,. \qquad (2.8)$$

შევამჩნიოთ, რომ კოეფიციენტები წარმოებულების წინ, შეესაბამება ლეჟანდრის პოლინომების კოეფიციენტებს [12]. ამიტომ, ზოგადი შემთხვევისთვის გვექნება:

$$\frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{m=0}^{\lambda_n}C_n^m C_{2(n-m)}^n\frac{1}{k^{n-2m}}\frac{\partial^{n-2m}h_0^{(1)}(kr)}{\partial\vec{\tau}^{n-2m}}=h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\gamma)\,, \qquad (2.9)$$

სადაც სიდიდე λ_n განისაზღვრება (1.6) ფორმულით. შევნიშნოთ ასევე, რომ თუ $\vartheta_0=0$, მაშინ $\cos\gamma=\cos\vartheta$ და $\vec{\tau}$ ვექტორი მიმართულია z ღერძის გასწვრივ. ამ შემთხვევაში, (2.9) გამოსახულებიდან მივიღებთ:

$$\frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{m=0}^{\lambda_n}C_n^m C_{2(n-m)}^n\frac{1}{k^{n-2m}}\frac{\partial^{n-2m}h_0^{(1)}(kr)}{\partial z^{n-2m}}=h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\vartheta)\,. \qquad (2.10)$$

მაშასადამე, განხილული n რიგის ზონალური სფერული ტალღური ფუნქცია წარმოდგენილია ნულოვანი რიგის ფუნქციის წარმოებულების მეშვეობით.

აღსანიშნავია, რომ თუ გავითვალისწინებთ ცნობილ ფორმულებს:

$$\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d(\cos\vartheta)}(\sin\vartheta)^2=(n+1)\left[P_n(\cos\vartheta)\cos\vartheta-P_{n+1}(\cos\vartheta)\right],$$

$$\frac{dh_n^{(1)}(kr)}{d(kr)}=\frac{1}{2n+1}\left[nh_{n-1}^{(1)}(kr)-(n+1)h_{n+1}^{(1)}(kr)\right],$$

$$P_n(\cos\vartheta)\cos\vartheta=\frac{1}{2n+1}\left[nP_{n-1}(\cos\vartheta)+(n+1)P_{n+1}(\cos\vartheta)\right],$$

$$\frac{1}{kr}h_n^{(1)}(kr)=\frac{1}{2n+1}\left[h_{n-1}^{(1)}(kr)+h_{n+1}^{(1)}(kr)\right],$$

(იხ. [3]), მაშინ განხილული (2.1) ფუნქციებისთვის მივიღებთ შემდეგ რეკურენტულ ფორმულას:

$$\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial z}\left[h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\vartheta)\right]=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left[nh_{n-1}^{(1)}(kr)P_{n-1}(\cos\vartheta)-(n+1)h_{n+1}^{(1)}(kr)P_{n+1}(\cos\vartheta)\right].$$

ამ უკანასკნელის გამოყენებით, შეგვიძლია დავწეროთ (2.10)-ის შებრუნებული გამოსახულება:

$$\frac{1}{k^n}\frac{\partial^n h_0^{(1)}(kr)}{\partial z^n}=\sum_{m=0}^{\lambda_n}(-1)^{n-m}\,a_{nm}h_{n-2m}^{(1)}(kr)P_{n-2m}(\cos\vartheta), \quad (2.10^*)$$

სადაც a_{nm} გარკვეული კოეფიციენტებია. მათი საწყისი მნიშვნელობები შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი ცხრილიდან (ცხრილი I).

$n \backslash m$	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	2/3	1/3	0	0
3	2/5	3/5	0	0
4	8/35	4/7	1/5	0
5	8/63	4/9	3/7	0
6	16/231	24/77	10/21	1/7
7	16/429	8/39	14/33	1/3

ცხრილი I. a_{nm} კოეფიციენტების საწყისი მნიშვნელობები

§13. ცენტრალური სასრული სხვაობებით მიახლოება

განვიხილოთ $h_0^{(1)}(kr)$ ფუნქციის s რიგის წარმოებული $\vec{\tau}$ ვექტორის გასწვრივ და წარმოვიდგინოთ იგი ცენტრალური სასრული სხვაობით:

$$\frac{\partial^s h_0^{(1)}(kr)}{\partial\vec{\tau}^s}\approx(\delta_s)^{-s}\sum_{\alpha=0}^{s}(-1)^{\alpha}C_s^{\alpha}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}+\left(\frac{s}{2}-\alpha\right)\delta_s\vec{\tau}\right|\right).$$

აქ δ_s მცირე სიდიდეა და დამოკიდებულია წარმოებულის s რიგზე (იხ. [4]). თუ დავუშვებთ, რომ (2.9) გამოსახულებაში შემავალი ყველა წარმოებულისთვის შერჩეულია ერთი და იგივე ბიჯი δ_n (რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ საწყისი ფუნქციის n რიგზე), მაშინ (2.9) მიახლოებით წარმოიდგინება, როგორც:

$$\sum_{m=0}^{\lambda_n}\sum_{\alpha=0}^{n-2m}\Psi_{m,n,\alpha}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}+\left(\frac{n}{2}-m-\alpha\right)\delta_n\vec{\tau}\right|\right)\approx h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\gamma),\quad(2.11)$$

სადაც:

$$\Psi_{m,n,\alpha}=\frac{(-1)^{n+\alpha}}{2^n}C_n^m C_{2(n-m)}^n C_{n-2m}^{\alpha}(k\delta_n)^{2m-n}.\qquad(2.12)$$

(2.11) არ არის საკმარისად კომპაქტური, ვინაიდან მასში $h_0^{(1)}$ ფუნქციის არგუმენტი დამოკიდებულია ჯამის ორივე m და n ინდექსზე. გადავწეროთ იგი შემდეგი ეკვივალენტური სახით:

$$\sum_{j=0}^{\lambda_n}\sum_{m=0}^{j}\left[\Psi_{m,n,j-m}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}+\left(\frac{n}{2}-j\right)\delta_n\vec{\tau}\right|\right)+\Psi_{m,n,n-m-j}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\left(\frac{n}{2}-j\right)\delta_n\vec{\tau}\right|\right)\right]-$$

$$-\frac{1+(-1)^n}{2}\sum_{m=0}^{\lambda_n}\Psi_{m,n,\lambda_n-m}h_0^{(1)}(kr)\approx h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\gamma).$$

როგორც ვხედავთ, $h_0^{(1)}$ ფუნქციის არგუმენტი აღარაა დამოკიდებული m ინდექსზე. ახლა შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\mathrm{M}_{n,j}=\sum_{m=0}^{j}\Psi_{m,n,j-m},\ \Phi_{n,j}=\sum_{m=0}^{j}\Psi_{m,n,n-m-j},\ \Omega_n=\mathrm{M}_{n,\lambda_n}=\sum_{m=0}^{\lambda_n}\Psi_{m,n,\lambda_n-m},\quad(2.13)$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\sum_{j=0}^{\lambda_n}\left[\mathrm{M}_{n,j}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}+\left(\frac{n}{2}-j\right)\delta_n\vec{\tau}\right|\right)+\Phi_{n,j}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\left(\frac{n}{2}-j\right)\delta_n\vec{\tau}\right|\right)\right]-$$

$$-\frac{1+(-1)^n}{2}\Omega_n h_0^{(1)}(kr)\approx h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\gamma),$$

ან

$$\sum_{j=0}^{n-\lambda_n-1}\left[\mathrm{M}_{n,j}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}+\left(\frac{n}{2}-j\right)\delta_n\vec{\tau}\right|\right)+\Phi_{n,j}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\left(\frac{n}{2}-j\right)\delta_n\vec{\tau}\right|\right)\right]+$$

$$+\frac{1+(-1)^n}{2}\Omega_n h_0^{(1)}(kr)\approx h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\gamma). \qquad (2.14)$$

გამოსახულება (2.14) მოხერხებულია იმით, რომ მარტივად შეგვიძლია დავითვალოთ მისი წევრების (მონოპოლების) საერთო რაოდენობა. მართლაც, (1.6)-ის გათვალისწინებით, ამ საერთო რაოდენობისთვის გვექნება:

$$2(n-\lambda_n)+\frac{1+(-1)^n}{2}=n+1.$$

ეს გვაძლევს საშუალებას უფრო კომპაქტურად გადავწეროთ (2.14) გამოსახულება. ამისთვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$\tilde{A}_{n,j}=\begin{cases}\mathrm{M}_{n,j}, & j=0,\dots,n-\lambda_n-1\\ \Phi_{n,n-j}, & j=n-\lambda_n,\dots,n\end{cases}, \qquad (2.15)$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\sum_{j=0}^{n}\tilde{A}_{n,j}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\left(j-\frac{n}{2}\right)\delta_n\vec{z}\right|\right)\approx h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\vartheta), \qquad (2.16)$$

რაც (2.14) გამოსახულებასთან შედარებით, უფრო კომპაქტურია.

§14. წრფივი მულტიპოლი

გარდავქმნათ (2.16) გამოსახულების $\tilde{A}_{n,j}$ კოეფიციენტები ისე, რომ მათ გააჩნდეთ უფრო ცხადი სახე. ამისთვის განვიხილოთ გამოსახულება (2.12):

$$\Psi_{m,n,\beta}=\frac{(-1)^{n+\beta}}{2^n}C_n^m C_{2(n-m)}^n C_{n-2m}^{\beta}(k\delta_n)^{2m-n},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$\Psi_{m,n,j-m} = \frac{(-1)^{n+j-m}}{2^n} C_n^m C_{2(n-m)}^n C_{n-2m}^{j-m} \left(k\delta_n\right)^{2m-n} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+j+m}}{2^n} C_n^m C_{2(n-m)}^n C_{n-2m}^{j-m} \left(k\delta_n\right)^{2m-n},$$

$$\Psi_{m,n,n-m-\alpha} = \frac{(-1)^{2n-m-\alpha}}{2^n} C_n^m C_{2(n-m)}^n C_{n-2m}^{n-m-\alpha} \left(k\delta_n\right)^{2m-n} =$$

$$= \frac{(-1)^{m+\alpha}}{2^n} C_n^m C_{2(n-m)}^n C_{n-2m}^{n-m-\alpha} \left(k\delta_n\right)^{2m-n}.$$

მაშინ (2.13)-დან მივიღებთ:

$$\mathrm{M}_{n,j} = \frac{(-1)^{j+n}}{2^n} \sum_{m=0}^{j} (-1)^m C_n^m C_{2(n-m)}^n C_{n-2m}^{j-m} \left(k\delta_n\right)^{2m-n},$$

$$\Phi_{n,\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha}}{2^n} \sum_{m=0}^{\alpha} (-1)^m C_n^m C_{2(n-m)}^n C_{n-2m}^{n-m-\alpha} \left(k\delta_n\right)^{2m-n},$$

$$\Phi_{n,n-j} = \frac{(-1)^{j+n}}{2^n} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m C_n^m C_{2(n-m)}^n C_{n-2m}^{j-m} \left(k\delta_n\right)^{2m-n},$$

ან უფრო შემოკლებულად:

$$\mathrm{M}_{n,j} = (-1)^j \sum_{m=0}^{j} \psi_{m,n,j}, \quad \Phi_{n,n-j} = (-1)^j \sum_{m=0}^{n-j} \psi_{m,n,j},$$

$$\psi_{m,n,j} = \frac{(-1)^{m+n}}{2^n} C_n^m C_{2(n-m)}^n C_{n-2m}^{j-m} \left(k\delta_n\right)^{2m-n}. \qquad (2.17)$$

აქედან, $\tilde{A}_{n,j}$ კოეფიციენტებისთვის გვექნება:

$$\tilde{A}_{n,j} = (-1)^j \begin{cases} \sum_{m=0}^{j} \psi_{m,n,j}, & j = 0,...,n-\lambda_n - 1 \\ \sum_{m=0}^{n-j} \psi_{m,n,j}, & j = n-\lambda_n,...,n, \end{cases}$$

ან თუ შემოვიღებთ ახალ კოეფიციენტებს:

$$A_{n,j} = (-1)^j \tilde{A}_{n,j} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{j} \psi_{m,n,j}, & j = 0,...,n-\lambda_n - 1 \\ \sum_{m=0}^{n-j} \psi_{m,n,j}, & j = n-\lambda_n,...,n \end{cases}, \qquad (2.18)$$

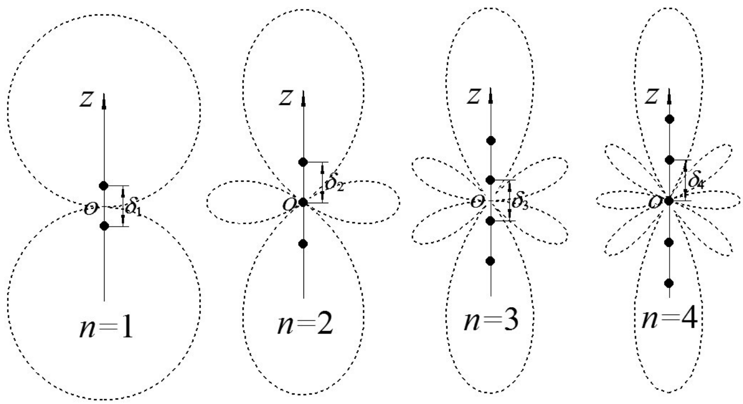
მაშინ გამოსახულებას (2.16) საბოლოოდ ასეთი სახე ექნება:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j A_{n,j} h_0^{(1)}\left(k \left| \vec{r} - \left(j - \frac{n}{2} \right) \delta_n \vec{\tau} \right| \right) \approx h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\gamma). \quad (2.19)$$

გამოსახულება (2.19)-ის თანახმად, $n+1$ რაოდენობის მონოპოლი განაწილებულია $\vec{r}_0$ ვექტორის მიმართულების გასწვრივ. მათი რადიუს-ვექტორებია:

$$\vec{r}_{n,j} = \left(j - \frac{n}{2} \right) \delta_n \vec{\tau} . \qquad (2.19^*)$$

აღნიშნული მონოპოლები ქმნიან $l_n = n\delta_n$ სიგრძის წრფივ მულტიპოლს, სიმეტრიულს კოორდინატთა სათავის მიმართ. ბიჯის სიდიდე δ_n განსაზღვრავს მანძილს ორ მეზობელ მონოპოლს შორის. კოეფიციენტები $A_{n,j}$ წარმოადგენს მონოპოლების ამპლიტუდებს და განისაზღვრება (2.18) გამოსახულებიდან. ყოველი მომდევნო მონოპოლი, $(-1)^j$ მამრავლის გამო, ირხევა წინა მონოპოლის საწინააღმდეგო ფაზაში.

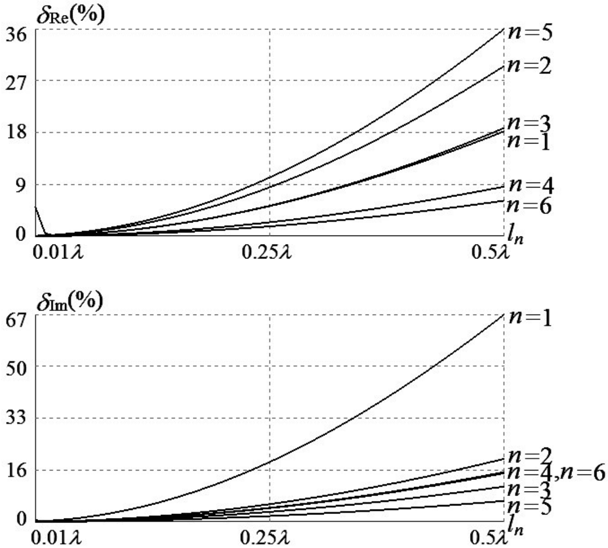


ნახ. 12. წრფივი მულტიპოლის აგებულება

ნახ. 12 გვიჩვენებს z ღერძის გასწვრივ ორიენტირებული წრფივი მულტიპოლის აგებულებას, n-ის პირველი ოთხი მნიშვნელობისთვის. პუნქტირით ნაჩვენებია შესაბამისი ველის ამპლიტუდური დიაგრამები $y=0$ კვეთში.

§15. წრფივი მულტიპოლის ცდომილება

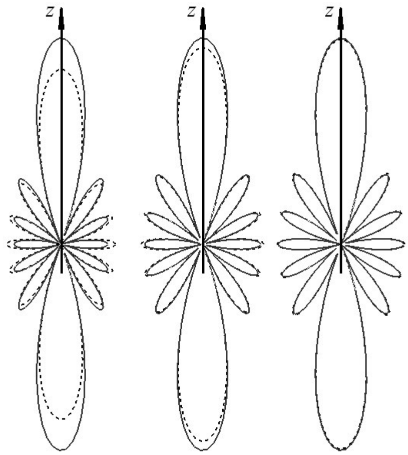
შევისწავლოთ (2.19) გამოსახულების ცდომილება n-ის სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის. რადგან იგი კომპლექსურია, ამიტომ მისი რეალური და წარმოსახვითი ნაწილის ცდომილება უნდა შეფასდეს ცალ-ცალკე. ორგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად, შევარჩიოთ M რაოდენობის სატესტო წერტილი, რომელთა რადიუს-ვექტორებია $\vec{r}_\mu$ და $\mu = 1,\dots,M$. აღვნიშნოთ (2.19) გამოსახულების მარცხენა და მარჯვენა ნაწილის მნიშვნელობები ამ წერტილებში შესაბამისად, როგორც $L_n\left(\vec{r}_\mu\right)$ და $R_n\left(\vec{r}_\mu\right)$. ცდომილების შესაფასებლად გამოვიყენოთ საშუალო ფარდობითი ცდომილების ფორმულები (1.19) და (1.19*). უნდა აღინიშნოს, რომ სატესტო წერტილების შერჩევისას თავი უნდა ავარიდოთ $R_n\left(\vec{r}_\mu\right)$ მარჯვენა ნაწილის ნულთან ტოლობას.



ნახ. 13. წრფივი მულტიპოლის ცდომილების დამოკიდებულება მის l_n სიგრძეზე

იმისთვის, რომ შევისწავლოთ ცდომილების დამოკიდებულება მულტიპოლის l_n სიგრძეზე, სატესტო წერტილები უნდა გავანაწილოთ რომელიმე ფიქსირებული R რადიუსის სფეროზე, ხოლო l_n სიგრძე უნდა ვცვალოთ წინასწარ შერჩეულ სეგმენტზე. სეგმენტის და R რადიუსის შერჩევის დროს უნდა შესრულდეს პირობა $R > l_n/2$, ანუ განხილული მულტიპოლი მთლიანად უნდა იმყოფებოდეს ამ სფეროს შიგნით.

ნახ. 13-ზე მოყვანილია აღნიშნული დამოკიდებულების გრაფიკები n-ის პირველი ექვსი მნიშვნელობისთვის, სეგმენტზე $0.01\lambda \le l_n \le 0.5\lambda$, როდესაც $R = 4\lambda$ და $M = 800$. აქ λ წარმოადგენს ტალღის სიგრძეს. როგორც ჩანს, l_n სიგრძის შემცირებით ცდომილება მცირდება. იგი ასევე მცირდება n-ის გაზრდით, თუმცა არათანაბრად (მაგალითად, $n = 5$ შემთხვევაში ცდომელება უფრო მეტია, ვიდრე $n = 4$ შემთხვევაში). როდესაც მულტიპოლის სიგრძეა 0.2λ, მაშინ $R = 4\lambda$ მანძილზე ცდომილება დაახლოებით 10%-ს შეადგენს, რაც ჩვენთვის დასაშვებია.



R=0.3λ R=0.5λ R=λ

ნახ. 14. (2.18)-ს მარცხენა და მარჯვენა ნაწილის
გრაფიკების შედარება სხვადასხვა დაშორებისთვის

ცდომილება ასევე შემცირდება, თუ გავზრდით დაშორებას მულტიპოლიდან. ნახ. 14 გვიჩვენებს (2.19) მიახლოებითი ტოლობის მარცხენა (წყვეტილი) და მარჯვენა (უწყვეტი) ნაწილის ამპლიტუდურ დიაგრამებს, როდესაც $l_n = 0.2\lambda$ და $n = 6$. როგორც ვხედავთ, მულტიპოლიდან λ ტალღის სიგრძის დაშორებაზე ორივე გრაფიკი ფაქტობრივად, ერთმანეთს ემთხვევა.

§16. ზონალური სფერული ტალღური ფუნქციების წრფივი კომბინაცია და მისი მონოპოლებით წარმოდგენა

ზონალური სფერული ტალღური ფუნქციებისგან შევადგინოთ შემდეგი სახის წრფივი კომბინაცია:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\gamma),$$

სადაც a_n ცნობილი (ზოგადად კომპლექსური) კოეფიციენტებია, ხოლო N მოცემული ნატურალური რიცხვია.

ჩავანაცვლოთ მისი ყოველი წევრი (2.19) გამოსახულების მარცხენა ნაწილში მდებარე ჯამით. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ მიახლოებითი ტოლობა:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\gamma) \approx \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, a_n A_{n,j} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r} - \left(j - \frac{n}{2} \right)\delta_n \vec{\tau}\right|\right).$$

ახლა დავუშვათ, რომ შეიძლება შეირჩეს ისეთი ბიჯი δ_N (დამოკიდებული მხოლოდ N -ზე), რომელიც იძლევა (2.19) გამოსახულების საკმარის სიზუსტეს ყველა განხილული $n = 1,...,N$ -ისთვის. ასეთი დაშვება საშუალებას მოგვცემს, წევრები ბოლო გამოსახულების მარჯვენა ნაწილში ისე დავაჯგუფოთ, რომ დაგვრჩეს მხოლოდ $2N+1$ წევრი. შედეგად მივიღებთ გამოსახულებას:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\gamma) \approx \sum_{m=0}^{2N} D_{N,m} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r} - \frac{m-N}{2}\delta_N \vec{\tau}\right|\right), \quad (2.20)$$

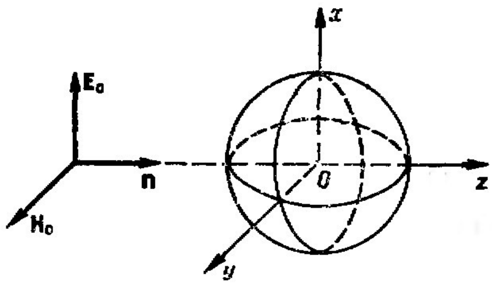
სადაც $D_{N,m}$ კოეფიციენტები განისაზღვრება a_n და $A_{n,j}$ კოეფიციენტების გამოყენებით, როგორც:

$$D_{N,m} = \begin{cases} \sum\limits_{\alpha=0}^{\lambda_m} (-1)^{\alpha} \, a_{N-m+2\alpha} A_{N-m+2\alpha,\alpha}, & m = 0,...,N-1 \\ \sum\limits_{\alpha=0}^{\lambda_m - 1} (-1)^{\alpha+1} \, a_{2(\alpha+1)} A_{2(\alpha+1),\alpha+1}, & m = N \\ \sum\limits_{\alpha=0}^{\lambda_{2N-m}} (-1)^{m-N+\alpha} \, a_{m-N+2\alpha} A_{m-N+2\alpha,m-N+\alpha}, & m = N+1,...,2N \end{cases} . \quad (2.21)$$

გამოსახულებები (2.20) და (2.21) შეიძლება გამოყენებულ იქნას სფეროზე დიფრაქციის ამოცანის ამოსახსნელად.

§17. ბრტყელი ტალღის დიფრაქციის ამოცანა სფეროზე. მიახლოებითი ამოხსნა

განვიხილოთ ბრტყელი, დროში ჰარმონიული ელექტრომაგნიტური ტალღის დიფრაქციის ამოცანა იდეალურ გამტარ სფეროზე [13, 14]. ჩვენი მიზანი იქნება მივიღოთ ამ ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი, ზემოთ მოყვანილი გამოსახულებების გამოყენებით.



ნახ. 15. სფეროზე ბრტყელი ტალღის დიფრაქცია

დავუშვათ, რომ E_0 ამპლიტუდის და x პოლარიზაციის მქონე ბრტყელი, დროში ჰარმონიული ელექტრომაგნიტური ტალღა ვრცელდება z ღერძის გასწვრივ და ეცემა a რადიუსის იდეალურ გამტარ სფეროს (ნახ. 15). ცნობილია, რომ სრული გაბნეული ველი $\vec{E}$, წარმოიდგინება ელექტრული $\vec{E}^I$ და მაგნიტური $\vec{E}^{II}$ ტიპის დამოუკიდებელი ამონახსნების ჯამის სახით [15]. გაბნეული ველის სფერული კომპონენტებისთვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$E_r = E_r^I + E_r^{II},\ E_\vartheta = E_\vartheta^I + E_\vartheta^{II},\ E_\varphi = E_\varphi^I + E_\varphi^{II}, \tag{2.22}$$

სადაც:

$$\left\{\begin{aligned} E_r^I &= E_0 \cos\varphi \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)\left(r\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\right) \\ E_\vartheta^I &= \frac{E_0 \cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial^2 P}{\partial \vartheta^2}\right) \\ E_\varphi^I &= -\frac{E_0 \sin\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\right) \end{aligned}\right. ,\quad \left\{\begin{aligned} E_r^{II} &= 0 \\ E_\vartheta^{II} &= \frac{iE_0 k\cos\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\partial Q}{\partial \vartheta} \\ E_\varphi^{II} &= -iE_0 k \sin\varphi \frac{\partial^2 Q}{\partial \vartheta^2} \end{aligned}\right. . \tag{2.23}$$

ფუნქციებს P და Q ფოკის პოტენციალები ეწოდება და ისინი განისაზღვრება შემდეგი მწკრივების სახით:

$$P=\sum_{n=1}^{\infty}a_n h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\vartheta),\ Q=\sum_{n=1}^{\infty}b_n h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\vartheta). \quad (2.24)$$

აქ a_n და b_n კოეფიციენტები განისაზღვრება, როგორც:

$$a_n=\frac{i^{n-1}}{k}\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{j_n(ka)+kaj_n'(ka)}{h_n^{(1)}(ka)+kah_n^{(1)\prime}(ka)},\ b_n=\frac{i^{n-1}}{k}\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)}.$$

მოყვანილი (2.24) მწკრივების კრებადობა დამოკიდებულია ka სიდიდეზე. მაგალითად, როდესაც $ka>1$, ამ მწკრივებისთვის პირველი $N=\lceil ka\rceil$ წევრის განხილვა უკვე საკმარის გამოთვლით სიზუსტეს იძლევა. ამიტომ, მიახლოებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$P\approx\sum_{n=1}^{N}a_n h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\vartheta),\ Q\approx\sum_{n=1}^{N}b_n h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\vartheta).$$

ახლა გამოვიყენოთ (2.20) გამოსახულება, რომლის გათვალისწინებითაც ფოკის პოტენციალებს შემდეგნაირად გადავწერთ:

$$P\approx\sum_{m=0}^{2N}D_{N,m}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec r-\frac{m-N}{2}\delta_N\vec z\right|\right),\ Q\approx\sum_{m=0}^{2N}F_{N,m}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec r-\frac{m-N}{2}\delta_N\vec z\right|\right).$$

აქ კოეფიციენტები $D_{N,m}$ განისაზღვრება (2.21) გამოსახულებიდან. რაც შეეხება კოეფიციენტებს $F_{N,m}$, ისინი განისაზღვრება კოეფიციენტებიდან $D_{N,m}$, თუ ყოველ a_n-ს ჩავანაცვლებთ შესაბამისი b_n-ით.

ბოლო ორი გამოსახულების გათვალისწინებით, გაბნეული ველი შეგვიძლია შემდეგი მიახლოებითი სახით წარმოვიდგინოთ:

$$\vec E_N\approx\sum_{m=0}^{2N}\left(D_{N,m}\vec E^{I}_{(N,m)}+F_{N,m}\vec E^{II}_{(N,m)}\right). \quad (2.25)$$

აქ $\vec{E}^{I}_{(N,m)}$ და $\vec{E}^{II}_{(N,m)}$ კერძო ველებია და ისინი განისაზღვრება (2.23) გამოსახულებების მარჯვენა ნაწილში მდებარე ოპერატორების მოქმედებით $h_0^{(1)}(kr)$ ფუნქციაზე. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\Delta_{N,m} = \frac{1}{2}(N-m)\delta_N\,,\ R_{N,m} = \sqrt{r^2 - 2r\Delta_{N,m}\cos\vartheta + \left(\Delta_{N,m}\right)^2}\,,$$

$$L_{1(N,m)} = h_0^{(1)\prime}\left(kR_{N,m}\right),\ L_{2(N,m)} = kR_{N,m}h_0^{(1)\prime\prime}\left(kR_{N,m}\right) - L_{1(N,m)}\,,$$

$$L_{3(N,m)} = \left(kR_{N,m}\right)^2 h_0^{(1)\prime\prime\prime}\left(kR_{N,m}\right) - 3L_{2(N,m)}\,,$$

მაშინ კერძო ველების კომპონენტებისთვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$E^{I}_{r(N,m)} = \frac{E_0 k\Delta_{N,m}\sin\vartheta\cos\varphi}{R_{N,m}}\left\{\left[2+(kr)^2\right]L_{1(N,m)} + \right.$$

$$\left. + \frac{r\left(5r - 4\Delta_{N,m}\cos\vartheta\right)}{\left(R_{N,m}\right)^2}L_{2(N,m)} + \frac{r^2\left(r-\Delta_{N,m}\cos\vartheta\right)^2}{\left(R_{N,m}\right)^4}L_{3(N,m)}\right\},$$

$$E^{I}_{\vartheta(N,m)} = \frac{E_0 k\Delta_{N,m}\cos\varphi}{R_{N,m}}\times$$

$$\times\left\{2L_{1(N,m)}\cos\vartheta + \frac{r\left[3\Delta_{N,m}\sin^2\vartheta + \left(r-\Delta_{N,m}\cos\vartheta\right)\cos\vartheta\right]}{\left(R_{N,m}\right)^2}L_{2(N,m)} + \right.$$

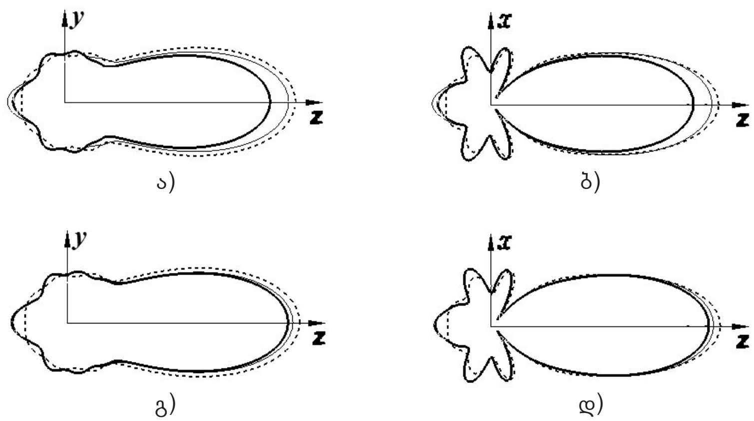
$$\left. + \frac{r^2\Delta_{N,m}\left(r-\Delta_{N,m}\cos\vartheta\right)\sin^2\vartheta}{\left(R_{N,m}\right)^4}L_{3(N,m)}\right\},$$

$$E^{I}_{\varphi(N,m)} = -\frac{E_0 k \Delta_{N,m} \sin\varphi}{R_{N,m}} \left[2L_{1(N,m)} + \frac{r\left(r - \Delta_{N,m}\cos\vartheta\right)}{\left(R_{N,m}\right)^2} L_{2(N,m)} \right],$$

$$E^{II}_{r(N,m)} = 0, \; E^{II}_{\vartheta(N,m)} = i\frac{E_0 k^2 r \Delta_{N,m} \cos\varphi}{R_{N,m}} L_{1(N,m)},$$

$$E^{II}_{\varphi(N,m)} = -i\frac{E_0 k^2 r \Delta_{N,m} \sin\varphi}{R_{N,m}} \left[L_{1(N,m)} \cos\vartheta + \frac{r\Delta_{N,m}\sin^2\vartheta}{\left(R_{N,m}\right)^2} L_{2(N,m)} \right].$$

ეს გამოსახულებები წარმოადგენს განხილული ამოცანის მიახლოებით ამონახსნს.



ნახ. 16. გაბნეული ველის დიაგრამები

ნახ. 16 ა) და ბ) გვიჩვენებს გაბნეული ველის დიაგრამებს კვეთებში $x=0$ და $y=0$, როდესაც $N=\lceil ka \rceil=5$ და $k\delta_N=0.5$. ნახ. 16 გ) და დ) გვიჩვენებს იმავე დიაგრამებს, როდესაც $k\delta_N=0.25$. სქელი უწყვეტი მრუდი შეესაბამება უკანასკნელი ფორმულებით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნის შედეგს. წვრილი უწყვეტი მრუდი შეესაბამება (2.22)-(2.24) ფორმულებით მიღებულ შედეგს, მწკრივების პირველი ხუთი წევრის გათვალისწინებით. წყვე-

ტილი მრუდი შეესაბამება იგივე ფორმულებით მიღებულ ზუსტ ამონახსნს. მოყვანილი ნახატიდან ჩანს, რომ (2.24) მწკრივებში, პირველი $N = \lceil ka \rceil$ წევრის განხილვა მართლაც საკმარის გამოთვლით სიზუსტეს იძლევა. გარდა ამისა, $k\delta_N$ სიდიდის შემცირებით მოყვანილი მიახლოებითი ამონახსნის სიზუსტე იზრდება [16].

დიფრაქციის ამოცანის მიღებული მიახლოებითი ამონახსნი გულისხმობს ცნობილი ზუსტი ამონახსნის კოეფიციენტების გამოყენებას. ამიტომ, ასეთი მიდგომა შეიძლება იყოს საინტერესო მხოლოდ იმ თვალსაზრისით, რომ გაბნეული ველის წარმოსადგენად, $2N+1$ რაოდენობის მონოპოლის განხილვა საკმარისი აღმოჩნდა.

თავი III
სექტორალური და ტესერალური სფერული ტალღური ფუნქციების მონოპოლებით წარმოდგენა

ამ თავში შეისწავლება სამგანზომილებიანი მულტიპოლები, რომლებიც აღწერენ სექტორალურ და ტესერალურ სფერულ ტალღურ ფუნქციებს. ორგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად, კვლავ მიიღება დიფერენციალური და ინტეგრალური გამოსახულებები, რომლებიც იგივური ტოლობების სახით აკავშირებს განხილულ ფუნქციებს შესაბამისი ნულოვანი რიგის ტალღურ ფუნქციასთან [17].

დიფერენციალური გამოსახულებების მისაღებად კვლავ ორი მიდგომა გამოიყენება: პირველი გულისხმობს საწყისი ველების ამპლიტუდური დიაგრამების აგებას და მათი ფოთლების მიმართულების დადგენას; მეორე მიდგომა ითვალისწინებს ერთგვაროვანი მრავალწევრების და მათი საკუთარი ოპერატორების გამოყენებას. პირველი მიდგომა სამართლიანი აღმოჩნდა მხოლოდ კერძო შემთხვევაში, როდესაც დიაგრამის ყველა ფოთოლი ერთნაირია. მეორე მიდგომა შედარებით ზოგადია და ასეთი შეზღუდვა არ გააჩნია. აღნიშნული დიფერენციალური გამოსახულებებიდან, კერძო შემთხვევის სახით, მიღებულია წინა თავში გამოყვანილი ფორმულა ზონალური სფერული ტალღური ფუნქციებისთვის.

ინტეგრალური გამოსახულების მისაღებად გამოყენებულია სფერული ფუნქციებისთვის ცნობილი შეკრების თეორემა. აღნიშნული დიფერენციალური და ინტეგრალური გამოსახულებების საფუძველზე ნაპოვნია მულტიპოლების სამი სივრცული სტრუქტურა, რომლებიც საწყის ტალღურ ფუნქციებს აღწერს. ამ სტრუქტურების ანალიზის საფუძველზე შერჩეულია ყველაზე ოპტიმალური.

§18. სექტორალური და ტესერალური სფერული ტალღური ფუნქციები. მათი კავშირი ნულოვანი რიგის ფუნქციასთან. ერთნაირი ფოთლების შემთხვევა

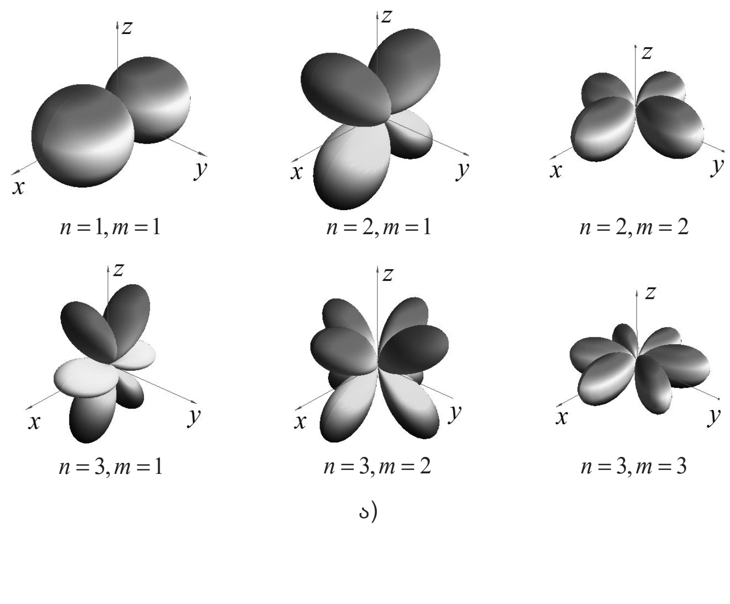
სფერული ტალღური ფუნქციები განისაზღვრება, როგორც:

$$h_n^{(1)}(kr)P_n^m(\cos\vartheta)\cos(m\varphi),\ h_n^{(1)}(kr)P_n^m(\cos\vartheta)\sin(m\varphi), \quad (3.1)$$

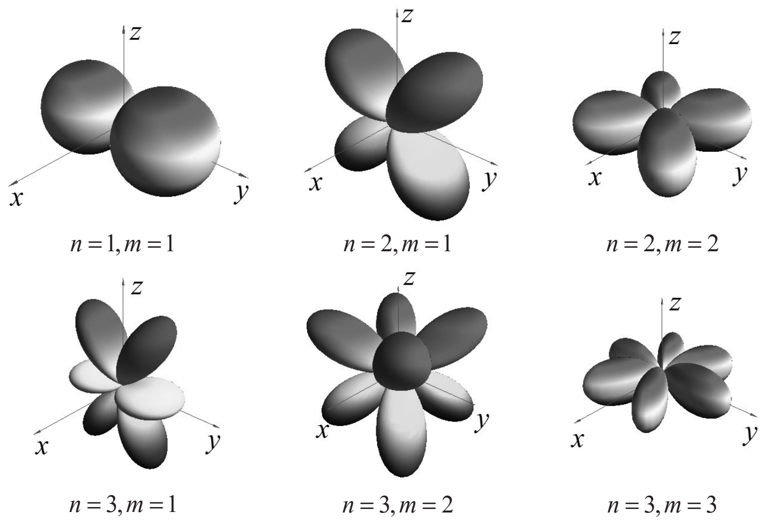
სადაც $n=1,2,...$ და $m=0,1,...$. იგულისხმება, რომ $m \le n$. თუ $m=n$, მაშინ (3.1) ფუნქციებს სექტორალურს, ხოლო თუ $0<m<n$, მათ ტესერალურ ფუნქციებს უწოდებენ [10]. იმ შემთხვევაში, როდესაც $m=0$, (3.1)-ის პირველი ფუნქციიდან მიიღება ზონალური სფერული ტალღური ფუნქცია, რომელზეც წინა თავში ვსაუბრობდით. ფუნქცია P_n^m წარმოადგენს ლეჟანდრის მიერთებულ პოლინომს და განმარტების თანახმად:

$$P_n^m(\cos\vartheta)=(-1)^m(\sin\vartheta)^m\frac{d^m}{d(\cos\vartheta)^m}\left[P_n(\cos\vartheta)\right]. \quad (3.2)$$

ფიზიკური შინაარსიდან გამომდინარე, (3.1) ფუნქციები აღწერენ დროში ჰარმონიულ სკალარულ ტალღურ ველებს. კერძოდ, შეგვიძლია მათი გაიგივება ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალთან.



ა)



ბ)

ნახ. 17. ა) $\left|h_n^{(1)}(kr)P_n^m(\cos\vartheta)\cos(m\varphi)\right|$ და ბ) $\left|h_n^{(1)}(kr)P_n^m(\cos\vartheta)\sin(m\varphi)\right|$ ფუნქციების გრაფიკები, როდესაც $n=1,2,3$ და $m \le n$, ($r=const$)

პირველ თავში შესწავლილი ორგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად, აქაც განვიხილოთ (3.1) ველების ამპლიტუდური დიაგრამები სფერულ კოორდინატებში (ნახ. 17). შევამჩნიოთ, რომ ყოველი დიაგრამა შედგება $2m(n-m+1)$ რაოდენობის ფოთლისგან. ამ ფოთლების მიმართულება შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი ერთეულოვანი ვექტორებით:

$$\vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}=\left\{\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\cos\varphi_{m,\beta},\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\sin\varphi_{m,\beta},\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right\}, \quad (3.3)$$

$$\vec{r}^{\,*}_{m,n,\alpha,\beta}=\left\{\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\cos\varphi^*_{m,\beta},\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\sin\varphi^*_{m,\beta},\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right\}, \quad (3.4)$$

სადაც:

$$\vartheta_{m,n,\alpha}=\frac{\pi(2\alpha-1)}{2(n-m+1)},\ \varphi_{m,\beta}=\frac{\pi}{m}(\beta-1),\ \varphi^*_{m,\beta}=\frac{\pi}{m}\left(\beta-\frac{1}{2}\right), \quad (3.5)$$

$$\alpha=1,\dots,n-m+1,\ \beta=1,\dots,2m.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ თუ m და n ინდექსების მოცემული მნიშვნელობებისთვის სრულდება ერთ-ერთი პირობა $m=n-1$ ან $m=n$, მაშინ შესაბამისი გრაფიკის ყველა ფოთოლი ერთნაირია. თუ მოყვანილი პირობებიდან არც ერთი არ სრულდება ($m<n-1$), მაშინ გრაფიკში გვექნება განსხვავებული ფოთლებიც (მაგალითად, შემთხვევა $n=3$ და $m=1$).

პირველ რიგში, დავუშვათ, რომ ადგილი აქვს ერთ-ერთ პირობას $m=n-1$ ან $m=n$ და შესაბამისად, ყველა ფოთოლი ერთნაირია. ორგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად, განვიხილოთ შემდეგი სახის ოპერატორი:

$$\hat{\Pi}_n^m = \frac{1}{k^n} \sum_{\alpha=1}^{n-m+1} \sum_{\beta=1}^{m} (-1)^{\alpha+\beta+1} \frac{\partial^n}{\partial \vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}{}^n}, \tag{3.6}$$

სადაც:

$$\frac{\partial^n}{\partial \vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}{}^n}$$

წარმოადგენს n რიგის მიმართულების წარმოებულს $\vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}$ ვექტორის გასწვრივ. მიმართულების წარმოებულის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\frac{\partial^n}{\partial \vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}{}^n} = \left(\sin\vartheta_{m,n,\alpha} \cos\varphi_{m,\beta} \frac{\partial}{\partial x} + \sin\vartheta_{m,n,\alpha} \sin\varphi_{m,\beta} \frac{\partial}{\partial y} + \cos\vartheta_{m,n,\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \right)^n,$$

ან თუ გამოვიყენებთ ნიუტონის ბინომის ფორმულას, მაშინ:

$$\frac{\partial^n}{\partial \vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}{}^n} = \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n-\mu} C_n^\mu C_{n-\mu}^\nu \left(\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^\mu \left(\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^{n-\mu} \times$$

$$\times \left(\cos\varphi_{m,\beta}\right)^{n-\mu-\nu} \left(\sin\varphi_{m,\beta}\right)^\nu \frac{\partial^n}{\partial x^{n-\mu-\nu} \partial y^\nu \partial z^\mu}.$$

შემოვიღოთ კოეფიციენტები:

$$D_{n,\mu,\nu}^m = \sum_{\alpha=1}^{n-m+1} \sum_{\beta=1}^{m} (-1)^{\alpha+\beta+1} \left(\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^\mu \left(\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^{n-\mu} \times$$

$$\times\left(\cos\varphi_{m,\beta}\right)^{n-\mu-\nu}\left(\sin\varphi_{m,\beta}\right)^{\nu}, \tag{3.7}$$

რომელთა გათვალისწინებითაც ოპერატორი (3.6) დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$\hat{\Pi}_n^m = \frac{1}{k^n}\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n-\mu} C_n^{\mu} C_{n-\mu}^{\nu} D_{n,\mu,\nu}^{m} \frac{\partial^n}{\partial x^{n-\mu-\nu}\partial y^{\nu}\partial z^{\mu}}. \tag{3.8}$$

თუ გამოსახულებაში (3.6) განვიხილავთ წარმოებულებს $\vec{r}^{\,*}_{m,n,\alpha,\beta}$ ვექტორის გასწვრივ, მაშინ შემდეგი კოეფიციენტების შემოღებით:

$$D_{n,\mu,\nu}^{m\,*} = \sum_{\alpha=1}^{n-m+1}\sum_{\beta=1}^{m}(-1)^{\alpha+\beta+1}\left(\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^{\mu}\left(\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^{n-\mu}\times$$

$$\times\left(\cos\varphi^{*}_{m,\beta}\right)^{n-\mu-\nu}\left(\sin\varphi^{*}_{m,\beta}\right)^{\nu}, \tag{3.9}$$

მივიღებთ ოპერატორს:

$$\hat{\Pi}_n^{m\,*} = \frac{1}{k^n}\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n-\mu} C_n^{\mu} C_{n-\mu}^{\nu} D_{n,\mu,\nu}^{m\,*} \frac{\partial^n}{\partial x^{n-\mu-\nu}\partial y^{\nu}\partial z^{\mu}}. \tag{3.10}$$

აღვნიშნოთ, რომ $D_{n,\mu,\nu}^{m}$ და $D_{n,\mu,\nu}^{m\,*}$ კოეფიციენტების ანგარიშის დროს, (3.7) და (3.9) ფორმულებით, პრიორიტეტულია ხარისხის მაჩვენებლები. კერძოდ, m და n ინდექსების საწყისი მნიშვნელობებისთვის, როდესაც $m = n-1$ ან $m = n$, მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} D_{1,0,0}^{1} \\ D_{1,0,1}^{1\,*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{2,1,0}^{1} \\ D_{2,1,1}^{1\,*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{2,0,0}^{2} \\ D_{2,0,1}^{2\,*} \end{pmatrix} = -1,$$

$$\begin{pmatrix} D_{3,1,0}^{2} \\ D_{3,1,1}^{2\,*} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \begin{pmatrix} D_{3,0,0}^{3} \\ D_{3,0,1}^{3\,*} \end{pmatrix} = -\frac{3}{4},\ \begin{pmatrix} D_{4,1,0}^{3} \\ D_{4,1,1}^{3\,*} \end{pmatrix} = -\frac{3}{8},\ \begin{pmatrix} D_{4,0,0}^{4} \\ D_{4,0,1}^{4\,*} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}. \tag{3.10*}$$

აქედან გამომდინარე, (3.8) და (3.10)-დან გვექნება:

$$\hat{\Pi}_1^1 = -\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x},\ \hat{\Pi}_2^1 = -\frac{2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z},\ \hat{\Pi}_2^2 = -\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$\hat{\Pi}_3^2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{1}{k^3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),\ \hat{\Pi}_3^3 = -\frac{3}{4}\frac{1}{k^3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$\hat{\Pi}_4^3 = -\frac{3}{2}\frac{1}{k^4}\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),\ \hat{\Pi}_4^4 = -\frac{1}{2}\frac{1}{k^4}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 6\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right),$$

$$\hat{\Pi}_1^{1\,*} = -\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial y},\ \hat{\Pi}_2^{1\,*} = -\frac{2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z},\ \hat{\Pi}_2^{2\,*} = -\frac{2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$\hat{\Pi}_3^{2\,*} = -3\sqrt{2}\frac{1}{k^3}\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z},\ \hat{\Pi}_3^{3\,*} = -\frac{3}{4}\frac{1}{k^3}\frac{\partial}{\partial y}\left(3\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$\hat{\Pi}_4^{3\,*} = -\frac{3}{2}\frac{1}{k^4}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(3\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),\ \hat{\Pi}_4^{4\,*} = -2\frac{1}{k^4}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

ჩვენ დაგვჭირდება, რომ ამ ოპერატორებით ვიმოქმედოთ ნულოვანი რიგის ფუნქციაზე $h_0^{(1)}(kr)$. ვინაიდან მას გააჩნია ცენტრალური სიმეტრია, ამიტომ ყველა კერძო წარმოებული უნდა გამოვსახოთ kr არგუმენტის მიმართ აღებული სრული წარმოებულით. გარკვეული გარდაქმნების შედეგად, სფერულ კოორდინატებში მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_1^1 \\ \hat{\Pi}_1^{1\,*} \end{pmatrix} = P_1^1(\cos\vartheta)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\hat{Q}_1,\ \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_2^1 \\ \hat{\Pi}_2^1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}P_2^1(\cos\vartheta)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\hat{Q}_2,$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_2^2 \\ \hat{\Pi}_2^{2\,*} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}P_2^2(\cos\vartheta)\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix}\hat{Q}_2,$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_3^2 \\ \hat{\Pi}_3^{2\,*} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}P_3^2(\cos\vartheta)\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix}\hat{Q}_3,$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_3^3 \\ \hat{\Pi}_3^{3\,*} \end{pmatrix} = \frac{1}{20} P_3^3 \left(\cos\vartheta\right) \begin{pmatrix} \cos\left(3\varphi\right) \\ \sin\left(3\varphi\right) \end{pmatrix} \hat{Q}_3 ,$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_4^3 \\ \hat{\Pi}_4^{3\,*} \end{pmatrix} = \frac{1}{70} P_4^3 \left(\cos\vartheta\right) \begin{pmatrix} \cos\left(3\varphi\right) \\ \sin\left(3\varphi\right) \end{pmatrix} \hat{Q}_4 ,$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_4^4 \\ \hat{\Pi}_4^{4\,*} \end{pmatrix} = -\frac{1}{210} P_4^4 \left(\cos\vartheta\right) \begin{pmatrix} \cos\left(4\varphi\right) \\ \sin\left(4\varphi\right) \end{pmatrix} \hat{Q}_4 ,$$

სადაც:

$$P_1^1\left(\cos\vartheta\right) = -\sin\vartheta ,\ P_2^1\left(\cos\vartheta\right) = -3\cos\vartheta\sin\vartheta ,\ P_2^2\left(\cos\vartheta\right) = 3\sin^2\vartheta ,$$

$$P_3^2\left(\cos\vartheta\right) = 15\cos\vartheta\sin^2\vartheta ,\ P_3^3\left(\cos\vartheta\right) = -15\sin^3\vartheta ,$$

$$P_4^3\left(\cos\vartheta\right) = -105\cos\vartheta\sin^3\vartheta ,\ P_4^4\left(\cos\vartheta\right) = 105\sin^4\vartheta ,$$

(იხ. [18]), ხოლო $\hat{Q}_1$, ..., $\hat{Q}_4$ შემდეგი ოპერატორებია:

$$\hat{Q}_1 = \frac{d}{d\left(kr\right)} ,\ \hat{Q}_2 = \frac{d^2}{d\left(kr\right)^2} - \frac{1}{kr}\frac{d}{d\left(kr\right)} ,\ \hat{Q}_3 = \frac{d^3}{d\left(kr\right)^3} - \frac{3}{kr}\left[\frac{d^2}{d\left(kr\right)^2} - \frac{1}{kr}\frac{d}{d\left(kr\right)}\right] ,$$

$$\hat{Q}_4 = \frac{d^4}{d\left(kr\right)^4} - \frac{3}{kr}\left\{2\frac{d^3}{d\left(kr\right)^3} - \frac{5}{kr}\left[\frac{d^2}{d\left(kr\right)^2} - \frac{1}{kr}\frac{d}{d\left(kr\right)}\right]\right\} . \qquad (3.10^{**})$$

ცნობილი რეკურენტული ფორმულების გამოყენებით:

$$h_{\nu+1}^{(1)}\left(kr\right) = \frac{2\nu+1}{kr} h_\nu^{(1)}\left(kr\right) - h_{\nu-1}^{(1)}\left(kr\right) ,\ \frac{dh_\nu^{(1)}\left(kr\right)}{d\left(kr\right)} = \frac{\nu}{kr} h_\nu^{(1)}\left(kr\right) - h_{\nu+1}^{(1)}\left(kr\right) ,$$

(იხ. [3]), შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $\hat{Q}_1$, ..., $\hat{Q}_4$ ოპერატორების მოქმედებით ფუნქციაზე, მიიღება:

$$\hat{Q}_1 h_0^{(1)}\left(kr\right) = -h_1^{(1)}\left(kr\right) ,\ \hat{Q}_2 h_0^{(1)}\left(kr\right) = h_2^{(1)}\left(kr\right) ,$$

$$\hat{Q}_3 h_0^{(1)}(kr) = -h_3^{(1)}(kr), \; \hat{Q}_4 h_0^{(1)}(kr) = h_4^{(1)}(kr).$$

აქედან გამომდინარე, $D_{n,\mu,\nu}^{m}$ და $D_{n,\mu,\nu}^{m\,*}$ კოეფიციენტების (3.10*) საწყისი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, საბოლოოდ დავწერთ:

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_1^1 \\ \hat{\Pi}_1^{1\,*} \end{pmatrix} h_0^{(1)}(kr) = \begin{pmatrix} D_{1,0,0}^1 \\ D_{1,0,1}^{1\,*} \end{pmatrix} h_1^{(1)}(kr) P_1^1(\cos\vartheta) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_2^1 \\ \hat{\Pi}_2^1 \end{pmatrix} h_0^{(1)}(kr) = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} D_{2,1,0}^1 \\ D_{2,1,1}^{1\,*} \end{pmatrix} h_2^{(1)}(kr) P_2^1(\cos\vartheta) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_2^2 \\ \hat{\Pi}_2^{2\,*} \end{pmatrix} h_0^{(1)}(kr) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} D_{2,0,0}^2 \\ D_{2,0,1}^{2\,*} \end{pmatrix} h_2^{(1)}(kr) P_2^2(\cos\vartheta) \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_3^2 \\ \hat{\Pi}_3^{2\,*} \end{pmatrix} h_0^{(1)}(kr) = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} D_{3,1,0}^2 \\ D_{3,1,1}^{m\,*} \end{pmatrix} h_3^{(1)}(kr) P_3^2(\cos\vartheta) \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_3^3 \\ \hat{\Pi}_3^{3\,*} \end{pmatrix} h_0^{(1)}(kr) = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} D_{3,0,0}^3 \\ D_{3,0,1}^{3\,*} \end{pmatrix} h_3^{(1)}(kr) P_3^3(\cos\vartheta) \begin{pmatrix} \cos(3\varphi) \\ \sin(3\varphi) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_4^3 \\ \hat{\Pi}_4^{3\,*} \end{pmatrix} h_0^{(1)}(kr) = -\frac{4}{105} \begin{pmatrix} D_{4,1,0}^3 \\ D_{4,1,1}^{3\,*} \end{pmatrix} h_4^{(1)}(kr) P_4^3(\cos\vartheta) \begin{pmatrix} \cos(3\varphi) \\ \sin(3\varphi) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_4^4 \\ \hat{\Pi}_4^{4\,*} \end{pmatrix} h_0^{(1)}(kr) = \frac{1}{105} \begin{pmatrix} D_{4,0,0}^4 \\ D_{4,0,1}^{4\,*} \end{pmatrix} h_4^{(1)}(kr) P_4^4(\cos\vartheta) \begin{pmatrix} \cos(4\varphi) \\ \sin(4\varphi) \end{pmatrix}.$$

მიღებული გამოსახულებები გვაძლევს საშუალებას დავწეროთ ზოგადი სახის გამოსახულება (როდესაც $m = n$ ან $m = n-1$):

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_n^m \\ \hat{\Pi}_n^{m\,*} \end{pmatrix} h_0^{(1)}(kr) = \frac{(-1)^{n+m}\, 2^m\, n!}{(n+m)!} \begin{pmatrix} D_{n,n-m,0}^m \\ D_{n,n-m,1}^{m\,*} \end{pmatrix} h_n^{(1)}(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta) \begin{pmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

აქ, (3.7) და (3,9)-დან გამომდინარე:

$$\begin{pmatrix} D_{n,n-m,0}^m \\ D_{n,n-m,1}^{m\,*} \end{pmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{n-m+1} \sum_{\beta=1}^{m} (-1)^{\alpha+\beta+1} \left(\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^{n-m} \left(\sin\vartheta_{m,n,\alpha} \cos\varphi_{m,\beta}\right)^m ,$$

ხოლო $\vartheta_{m,n,\alpha}$ და $\varphi_{m,\beta}$ კუთხეების მნიშვნელობები განისაზღვრება (3.5) ფორმულებიდან.

შევნიშნოთ, რომ მოყვანილი გამოსახულებიდან $D_{n,n-m,0}^m$ და $D_{n,n-m,1}^{m\,*}$ კოეფიციენტების ანგარიში საკმაოდ მოუხერხებელია. ამიტომ შევეცადოთ მივიღოთ მათთვის უფრო მარტივი გამოსახულება. დავუშვათ, პირველ რიგში, $m=n$, მაშინ (3.5) და (1.9*)-ს გათვალისწინებით გვექნება:

$$\left.\begin{pmatrix} D_{n,n-m,0}^m \\ D_{n,n-m,1}^{m\,*} \end{pmatrix}\right|_{m=n} = \sum_{\alpha=1}^{1} \sum_{\beta=1}^{m} (-1)^{\alpha+\beta+1} \left(\sin\vartheta_{n,n,\alpha} \cos\varphi_{n,\beta}\right)^n =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n} (-1)^{\beta} \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^n \left(\cos\varphi_{n,\beta}\right)^n = \sum_{\beta=1}^{n} (-1)^{\beta} \left(\cos\varphi_{n,\beta}\right)^n = -\frac{n}{2^{n-1}} .$$

ანალოგიურად, თუ დავუშვებთ, რომ $m=n-1$, მაშინ მივიღებთ:

$$\left.\begin{pmatrix} D_{n,n-m,0}^m \\ D_{n,n-m,1}^{m\,*} \end{pmatrix}\right|_{m=n-1} = \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{n-1} (-1)^{\alpha+\beta+1} \cos\vartheta_{n-1,n,\alpha} \left(\sin\vartheta_{n-1,n,\alpha} \cos\varphi_{n-1,\beta}\right)^{n-1} =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n-1} (-1)^{\beta} \left[\cos\vartheta_{n-1,n,1} \left(\sin\vartheta_{n-1,n,1}\right)^{n-1} - \cos\vartheta_{n-1,n,2} \left(\sin\vartheta_{n-1,n,2}\right)^{n-1}\right] \left(\cos\varphi_{n-1,\beta}\right)^{n-1} =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n-1} (-1)^{\beta} \left[\cos\frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n-1} - \cos\frac{3\pi}{4}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)^{n-1}\right] \left(\cos\varphi_{n-1,\beta}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{2^{(n/2)-1}} \sum_{\beta=1}^{n-1} (-1)^{\beta} \left(\cos\varphi_{n-1,\beta}\right)^{n-1} = -\frac{n-1}{2^{3[(n/2)-1]}} .$$

ზოგადი გამოსახულება ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\begin{pmatrix} D_{n,n-m,0}^{m} \\ D_{n,n-m,1}^{m\ *} \end{pmatrix} = -\frac{m}{2^{an^2+bmn+cm+dn+e}},$$

სადაც a, b, c, d და e უცნობი კოეფიციენტებია. როდესაც $m=n$ ან $m=n-1$, მნიშვნელის ხარისხისთვის, შესაბამისად უნდა მივიღოთ:

$$\left(an^2+bmn+cm+dn+e\right)\Big|_{m=n} = \left(a+b\right)n^2+\left(c+d\right)n+e \equiv n-1,$$

$$\left(an^2+bmn+cm+dn+e\right)\Big|_{m=n-1} = \left(a+b\right)n^2+\left(c+d-b\right)n+\left(e-c\right) \equiv \frac{3}{2}n-3$$

და აქედან გამომდინარე, უცნობი კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} a+b=0,\ c+d-b=\dfrac{3}{2} \\ c+d=1,\ e-c=-3,\ e=-1 \end{cases}.$$

ამ სისტემის ამონახსნია:

$$a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2},\ c=2,\ d=-1,\ e=-1$$

და ამიტომ, გვექნება:

$$an^2+bmn+cm+dn+e=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}mn+2m-n-1=\left(m-1\right)+\left(n-m\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

მაშასადამე, ზოგადი გამოსახულებისთვის მივიღეთ:

$$\begin{pmatrix} D_{n,n-m,0}^{m} \\ D_{n,n-m,1}^{m\ *} \end{pmatrix} = -\frac{m}{2^{(m-1)+(n-m)\left[(n/2)-1\right]}}.$$

მოხერხებულია შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$D_{n,m}=\frac{(-1)^{n+m}(n+m)!}{2^{1-(n-m)[(n/2)-1]}n!m}. \qquad (3.12)$$

მაშინ:

$$\begin{pmatrix} D^{m}_{n,n-m,0} \\ D^{m\,*}_{n,n-m,1} \end{pmatrix}=\frac{(-1)^{n+m+1}(n+m)!}{2^{m}n!}\frac{1}{D_{n,m}}$$

და (3.11) გადაიწერება, როგორც:

$$-D_{n,m}\begin{pmatrix} \hat{\Pi}^{m}_{n} \\ \hat{\Pi}^{m\,*}_{n} \end{pmatrix}h^{(1)}_{0}(kr)=h^{(1)}_{n}(kr)P^{m}_{n}(\cos\vartheta)\begin{pmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{pmatrix}, \quad (3.12^{*})$$

ან გაშლილი სახით, (3.6)-ს გათვალისწინებით:

$$\frac{D_{n,m}}{k^{n}}\sum_{\alpha=1}^{n-m+1}\sum_{\beta=1}^{m}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{\partial^{n}h^{(1)}_{0}(kr)}{\partial\vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}^{\;n}}=h^{(1)}_{n}(kr)P^{m}_{n}(\cos\vartheta)\cos(m\varphi), \quad (3.13)$$

$$\frac{D_{n,m}}{k^{n}}\sum_{\alpha=1}^{n-m+1}\sum_{\beta=1}^{m}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{\partial^{n}h^{(1)}_{0}(kr)}{\partial\vec{r}^{\,*\;n}_{m,n,\alpha,\beta}}=h^{(1)}_{n}(kr)P^{m}_{n}(\cos\vartheta)\sin(m\varphi). \quad (3.14)$$

შევნიშნოთ, რომ $\hat{\Pi}^{m}_{n}$ და $\hat{\Pi}^{m\,*}_{n}$ ოპერატორების (3.8) და (3.10) გამოსახულებები წარმოადგენს $\hat{L}_{n}$ და $\hat{L}^{*}_{n}$ ოპერატორების (1.7) და (1.8) გამოსახულებების სამგანზომილებიან ანალოგებს. თუ აქაც ჩავანაცვლებთ წარმოებულებს შესაბამისი ცენტრალური სასრული სხვაობებით, მაშინ მივიღებთ მულტიპოლის გარკვეულ სტრუქტურას. იგი იქნება პირველი სახეობის ორგანზომილებიანი მულტიპოლის სამგანზომილებიანი ანალოგი. აღვნიშნოთ, რომ პირველ თავში, $\hat{M}_{n}$ და $\hat{M}^{*}_{n}$ ოპერატორების განხილვით იქნა ნაპოვნი მეორე სახეობის ორგანზომილებიანი მულტიპოლი, რომელიც უფრო ოპტიმალური აღმოჩნდა. ამიტომ, განხილულ სამგანზომილებიან შემთხვევაშიც, ასევე მოსალოდნელია, რომ მოიძებნება

შედარებით ოპტიმალური მულტიპოლი, რომელიც შედგება ნაკლები რაოდენობის მონოპოლისგან.

ნათქვამის გათვალისწინებით შევადგინოთ ახალი ოპერატორები:

$$\hat{\Psi}_n^m = \sum_{\alpha=1}^{n-m+1} \sum_{\beta=1}^{2m} (-1)^{\alpha+\beta+1} \hat{Y}_{n,\alpha,\beta}^m , \tag{3.15}$$

$$\hat{\Psi}_n^{m\,*} = \sum_{\alpha=1}^{n-m+1} \sum_{\beta=1}^{2m} (-1)^{\alpha+\beta+1} \hat{Y}_{n,\alpha,\beta}^{m\,*} , \tag{3.16}$$

სადაც ოპერატორებს $\hat{Y}_{n,\alpha,\beta}^m$ და $\hat{Y}_{n,\alpha,\beta}^{m\,*}$ განვსაზღვრავთ, როგორც:

$$\hat{Y}_{n,\alpha,\beta}^m = \sum_{\sigma=0}^{n} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} r_0^{\ \sigma} \frac{\partial^\sigma}{\partial \vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}^{\ \ \sigma}} , \tag{3.17}$$

$$\hat{Y}_{n,\alpha,\beta}^{m\,*} = \sum_{\sigma=0}^{n} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} r_0^{\ \sigma} \frac{\partial^\sigma}{\partial \vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}^{\,*\ \sigma}} . \tag{3.18}$$

აქ r_0 მცირე სიდიდეა. ნიუტონის ბინომის ფორმულის თანახმად:

$$\frac{\partial^\sigma}{\partial \vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}^{\ \ \sigma}} = \sum_{\mu=0}^{\sigma} \sum_{\nu=0}^{\sigma-\mu} C_\sigma^\mu C_{\sigma-\mu}^\nu \left(\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^\mu \left(\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^{\sigma-\mu} \times$$

$$\times \left(\cos\varphi_{m,\beta}\right)^{\sigma-\mu-\nu} \left(\sin\varphi_{m,\beta}\right)^\nu \frac{\partial^\sigma}{\partial x^{\sigma-\mu-\nu} \partial y^\nu \partial z^\mu} ,$$

$$\frac{\partial^\sigma}{\partial \vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}^{\,*\ \sigma}} = \sum_{\mu=0}^{\sigma} \sum_{\nu=0}^{\sigma-\mu} C_\sigma^\mu C_{\sigma-\mu}^\nu \left(\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^\mu \left(\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^{\sigma-\mu} \times$$

$$\times \left(\cos\varphi_{m,\beta}^*\right)^{\sigma-\mu-\nu} \left(\sin\varphi_{m,\beta}^*\right)^\nu \frac{\partial^\sigma}{\partial x^{\sigma-\mu-\nu} \partial y^\nu \partial z^\mu} .$$

ამიტომ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$S_{n,\mu,\nu,\sigma}^m = \sum_{\alpha=1}^{n-m+1} \sum_{\beta=1}^{2m} (-1)^{\alpha+\beta+1} \left(\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^\mu \left(\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^{\sigma-\mu} \times$$

$$\times\left(\cos\varphi_{m,\beta}\right)^{\sigma-\mu-\nu}\left(\sin\varphi_{m,\beta}\right)^{\nu}, \tag{3.19}$$

$$S^{m\,*}_{n,\mu,\nu,\sigma}=\sum_{\alpha=1}^{n-m+1}\sum_{\beta=1}^{2m}(-1)^{\alpha+\beta+1}\left(\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^{\mu}\left(\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\right)^{\sigma-\mu}\times$$

$$\times\left(\cos\varphi^{*}_{m,\beta}\right)^{\sigma-\mu-\nu}\left(\sin\varphi^{*}_{m,\beta}\right)^{\nu}, \tag{3.20}$$

მაშინ გვექნება:

$$\hat{\Psi}^{m}_{n}=\sum_{\sigma=0}^{n}\frac{(-1)^{\sigma}}{\sigma!}r_0{}^{\sigma}\sum_{\mu=0}^{\sigma}\sum_{\nu=0}^{\sigma-\mu}C^{\mu}_{\sigma}C^{\nu}_{\sigma-\mu}S^{m}_{n,\mu,\nu,\sigma}\frac{\partial^{\sigma}}{\partial x^{\sigma-\mu-\nu}\partial y^{\nu}\partial z^{\mu}}, \tag{3.21}$$

$$\hat{\Psi}^{m\,*}_{n}=\sum_{\sigma=0}^{n}\frac{(-1)^{\sigma}}{\sigma!}r_0{}^{\sigma}\sum_{\mu=0}^{\sigma}\sum_{\nu=0}^{\sigma-\mu}C^{\mu}_{\sigma}C^{\nu}_{\sigma-\mu}S^{m\,*}_{n,\mu,\nu,\sigma}\frac{\partial^{\sigma}}{\partial x^{\sigma-\mu-\nu}\partial y^{\nu}\partial z^{\mu}}. \tag{3.22}$$

ამ გამოსახულებებიდან, (3.19) და (3.20)-ის გათვალისწინებით, m და n ინდექსების საწყისი მნიშვნელობებისთვის (როდესაც $m=n-1$ ან $m=n$), მივიღებთ:

$$\hat{\Psi}^{1}_{1}=2r_0\frac{\partial}{\partial x},\ \hat{\Psi}^{1}_{2}=-2r_0{}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z},\ \hat{\Psi}^{2}_{2}=-r_0{}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$\hat{\Psi}^{2}_{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}r_0{}^{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),\ \hat{\Psi}^{3}_{3}=\frac{1}{4}r_0{}^{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$\hat{\Psi}^{3}_{4}=-\frac{1}{8}r_0{}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),\ \hat{\Psi}^{4}_{4}=-\frac{1}{24}r_0{}^{4}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}-6\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right),$$

$$\hat{\Psi}^{1\,*}_{1}=2r_0\frac{\partial}{\partial y},\ \hat{\Psi}^{1\,*}_{2}=-2r_0{}^{2}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z},\ \hat{\Psi}^{2\,*}_{2}=-2r_0{}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},$$

$$\hat{\Psi}^{2\,*}_{3}=\sqrt{2}r_0\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z},\ \hat{\Psi}^{3\,*}_{3}=\frac{1}{4}r_0{}^{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(3\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$\hat{\Psi}_4^{3\,*} = -\frac{1}{8} r_0^{\,4} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(3\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),\ \hat{\Psi}_4^{4\,*} = -\frac{1}{6} r_0^{\,4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

$\hat{\Pi}_n^m$ და $\hat{\Pi}_n^{m\,*}$ ოპერატორების ანალოგიურ გამოსახულებებთან შედარებით შევამჩნევთ, რომ:

$$\begin{pmatrix} \hat{\Psi}_1^1 \\ \hat{\Psi}_1^{1\,*} \end{pmatrix} = -2kr_0 \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_1^1 \\ \hat{\Pi}_1^{1\,*} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_2^1 \\ \hat{\Psi}_2^{1\,*} \end{pmatrix} = (kr_0)^2 \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_2^1 \\ \hat{\Pi}_2^{1\,*} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Psi}_2^2 \\ \hat{\Psi}_2^{2\,*} \end{pmatrix} = (kr_0)^2 \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_2^2 \\ \hat{\Pi}_2^{2\,*} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_3^2 \\ \hat{\Psi}_3^{2\,*} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(kr_0)^3 \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_3^2 \\ \hat{\Pi}_3^{2\,*} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Psi}_3^3 \\ \hat{\Psi}_3^{3\,*} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(kr_0)^3 \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_3^3 \\ \hat{\Pi}_3^{3\,*} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_4^3 \\ \hat{\Psi}_4^{3\,*} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}(kr_0)^4 \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_4^3 \\ \hat{\Pi}_4^{3\,*} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\Psi}_4^4 \\ \hat{\Psi}_4^{4\,*} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}(kr_0)^4 \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_4^4 \\ \hat{\Pi}_4^{4\,*} \end{pmatrix}.$$

აქედან გამომდინარე, ზოგადად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{pmatrix} \hat{\Psi}_n^m \\ \hat{\Psi}_n^{m\,*} \end{pmatrix} = (-1)^n \frac{2}{n!}(kr_0)^n \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_n^m \\ \hat{\Pi}_n^{m\,*} \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

საიდანაც, (3.12*)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\frac{(-1)^{n+1} n!}{2} \frac{D_{n,m}}{(kr_0)^n} \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_n^m \\ \hat{\Psi}_n^{m\,*} \end{pmatrix} h_0^{(1)}(kr) = h_n^{(1)}(kr) P_n^m(\cos\vartheta) \begin{pmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{pmatrix},$$

ან გაშლილი სახით:

$$\frac{n!}{2} \frac{D_{n,m}}{(kr_0)^n} \sum_{\alpha=1}^{n-m+1} \sum_{\beta=1}^{2m} (-1)^{\alpha+\beta+n} \sum_{\sigma=0}^{n} \frac{(-1)^\sigma}{\sigma!} r_0^{\,\sigma} \frac{\partial^\sigma h_0^{(1)}(kr)}{\partial \vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}^{\,\sigma}} =$$

$$= h_n^{(1)}(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)\cos(m\varphi), \tag{3.24}$$

$$\frac{n!}{2}\frac{D_{n,m}}{(kr_0)^n}\sum_{\alpha=1}^{n-m+1}\sum_{\beta=1}^{2m}(-1)^{\alpha+\beta+n}\sum_{\sigma=0}^{n}\frac{(-1)^\sigma}{\sigma!}r_0{}^\sigma\frac{\partial^\sigma h_0^{(1)}(kr)}{\partial \vec{r}^{*\,\sigma}_{m,n,\alpha,\beta}} =$$

$$= h_n^{(1)}(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)\sin(m\varphi). \tag{3.25}$$

მიღებული გამოსახულებები წარმოადგენს (1.25) და (1.26) გამოსახულებების სამგანზომილებიან ანალოგს. ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ მარცხენა ნაწილში მდებარე შიდა ჯამები წარმოადგენს $h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}\right|\right)$ და $h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\vec{r}^{\,*}_{m,n,\alpha,\beta}\right|\right)$ ფუნქციების ტეილორის მწკრივის n-ურ კერძო ჯამებს. ამიტომ, მიახლოებით გვექნება:

$$\frac{n!}{2}\frac{D_{n,m}}{(kr_0)^n}\sum_{\alpha=1}^{n-m+1}\sum_{\beta=1}^{2m}(-1)^{\alpha+\beta+n}\, h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}\right|\right) \approx$$

$$\approx h_n^{(1)}(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)\cos(m\varphi), \tag{3.26}$$

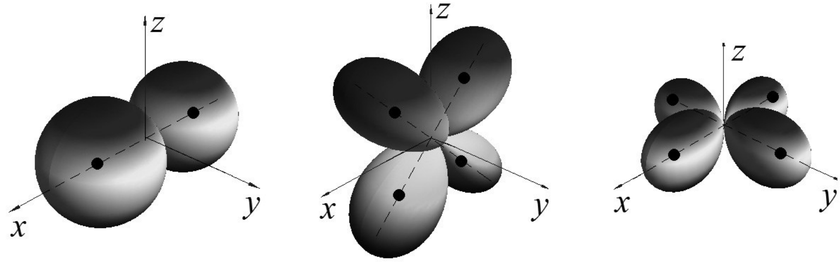
$$\frac{n!}{2}\frac{D_{n,m}}{(kr_0)^n}\sum_{\alpha=1}^{n-m+1}\sum_{\beta=1}^{2m}(-1)^{\alpha+\beta+n}\, h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\vec{r}^{\,*}_{m,n,\alpha,\beta}\right|\right) \approx$$

$$\approx h_n^{(1)}(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta)\sin(m\varphi). \tag{3.27}$$

აქ სიდიდე $D_{n,m}$, განისაზღვრება (3.12) ფორმულით. იგულისხმება, რომ $r > r_0$. მოყვანილი გამოსახულებების მარცხენა ნაწილი აღწერს მულტიპოლს, რომელიც შედგება $2m(n-m+1)$ რაოდენობის მონოპოლისგან. ეს მონოპოლები მდებარეობს r_0 რადიუსის სფეროზე, წერტილებში, რომელთა რადიუს-ვექტორებია $r_0\vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}$ და $r_0\vec{r}^{\,*}_{m,n,\alpha,\beta}$. მიღებული მულტიპოლი წარმოადგენს მეორე სახეობის ორგანზომილებიანი მულტიპოლის ანალოგს.

ნახ. 18 გვიჩვენებს (3.26)-ის შესაბამისი მულტიპოლის ჯამური ველის ამპლიტუდურ დიაგრამებს, n და m ინდექსების საწყისი მნიშვნელობებისთვის. აქვე მოყვანილია მულტიპოლის აგებულება გადიდებული მასშტაბით. ვხედავთ, რომ მონოპოლები დი-

აგრამების ფოთლების გასწვრივაა. გარდა ამისა, ეს დიაგრამები ემთხვევა საწყისი ველის შესაბამის დიაგრამებს (ნახ. 17ა), რაც (3.26) გამოსახულების სამართლიანობაზე მეტყველებს.



ნახ. 18. მულტიპოლის აგებულება
და მისი ველის ამპლიტუდური დიაგრამები

§19. განსხვავებული ფოთლების შემთხვევა. ერთგვაროვანი მრავალწევრები და მათი საკუთარი ოპერატორები

წინა პარაგრაფში იგულისხმებოდა, რომ სრულდება ერთ-ერთი პირობა $m=n-1$ ან $m=n$. ახლა დავუშვათ, რომ $m<n-1$. პირველი ასეთი შემთხვევა გვექნება, როდესაც $n=3$ და $m=1$. სფერული ფუნქციები (3.1) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$h_3^{(1)}(kr)P_3^1(\cos\vartheta)\cos\varphi=-\frac{3}{2}h_3^{(1)}(kr)\left(5\cos^2\vartheta-1\right)\sin\vartheta\cos\varphi, \quad (3.28)$$

$$h_3^{(1)}(kr)P_3^1(\cos\vartheta)\sin\varphi=-\frac{3}{2}h_3^{(1)}(kr)\left(5\cos^2\vartheta-1\right)\sin\vartheta\sin\varphi. \quad (3.29)$$

გამოსახულებებიდან (3.8) და (3.9), ასეთ შემთხვევაში, მივიღებთ:

$$\hat{\Pi}_3^1 = \frac{3}{4}\frac{1}{k^3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),\ \hat{\Pi}_3^{1*} = \frac{3}{4}\frac{1}{k^3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 3\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

ან თუ გამოვსახავთ კერძო წარმოებულებს სრული წარმოებულით kr არგუმენტის მიმართ, მაშინ, სფერულ კოორდინატებში:

$$\hat{\Pi}_3^1 = \frac{3}{4}\sin\vartheta\cos\varphi\left(\sin^2\vartheta\cos^2\varphi - 3\cos^2\vartheta\right)\hat{Q}_3,$$

$$\hat{\Pi}_3^{1*} = \frac{3}{4}\sin\vartheta\sin\varphi\left(\sin^2\vartheta\sin^2\varphi - 3\cos^2\vartheta\right)\hat{Q}_3.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ:

$$\hat{\Pi}_3^1 h_0^{(1)}(kr) = \frac{3}{4}h_3^{(1)}(kr)\left(3\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\cos^2\varphi\right)\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$\hat{\Pi}_3^{1*} h_0^{(1)}(kr) = \frac{3}{4}h_3^{(1)}(kr)\left(3\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\sin^2\varphi\right)\sin\vartheta\sin\varphi$$

და შესაბამისად, მიღებული გამოსახულებები არ ემთხვევა (3.28) და (3.29) გამოსახულებებს. მოყვანილი მაგალითის საფუძველზე ვრწმუნდებით, რომ ზოგადად, როდესაც $m < n-1$ და შესაბამისად, დიაგრამაში გვაქვს განსხვავებული ფოთლებიც, ფორმულები (3.13), (3.14) და (3.24), (3.25) არასწორია.

სანამ მსჯელობას გავაგრძელებთ, განვიხილოთ x, y და z ცვლადებზე დამოკიდებული n რიგის ერთგვაროვანი მრავალწევრი:

$$F_n(x,y,z) = \sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n-\mu} A_{n,\mu,\nu}x^{n-\mu-\nu}y^{\mu}z^{\nu}, \tag{3.30}$$

სადაც $A_{n,\mu,\nu}$ გარკვეული კოეფიციენტებია. ორგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად ვთქვათ, რომ n რიგის წრფივი დიფერენციალური ოპერატორი $\hat{F}_n$ წარმოადგენს მოცემული მრავალწევრის საკუთარ ოპერატორს, თუ მას გააჩნია სახე:

$$\hat{F}_n = \frac{(-1)^n}{k^n}\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n-\mu} A_{n,\mu,\nu}\,\frac{\partial^n}{\partial x^{n-\mu-\nu}\partial y^{\mu}\partial z^{\nu}}\,. \tag{3.31}$$

დავუბრუნდეთ გამოსახულებებს (3.28) და (3.29), რომლებსაც დეკარტულ კოორდინატებში შემდეგნაირად გადავწერთ:

$$h_3^{(1)}(kr)\,P_3^1(\cos\vartheta)\cos\varphi = \frac{h_3^{(1)}(kr)}{r^3}\left[-\frac{3}{2}x\left(5z^2 - r^2\right)\right],$$

$$h_3^{(1)}(kr)\,P_3^1(\cos\vartheta)\sin\varphi = \frac{h_3^{(1)}(kr)}{r^3}\left[-\frac{3}{2}y\left(5z^2 - r^2\right)\right].$$

როგორც ვხედავთ, ამ ტოლობების მარჯვენა ნაწილში ფიგურირებენ შემდეგი მესამე რიგის მრავალწევრები:

$$-\frac{3}{2}x\left(5z^2 - r^2\right) = -\frac{3}{2}x\left[5z^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right],$$

$$-\frac{3}{2}y\left(5z^2 - r^2\right) = -\frac{3}{2}y\left[5z^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right].$$

მათი საკუთარი ოპერატორებისთვის, (3.31)-ის თანახმად, გვექნება:

$$\hat{F}_3^1 = \frac{3}{2}\frac{1}{k^3}\frac{\partial}{\partial x}\left(5\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Delta\right), \tag{3.32}$$

$$\hat{F}_3^{1\,*} = \frac{3}{2}\frac{1}{k^3}\frac{\partial}{\partial y}\left(5\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Delta\right). \tag{3.33}$$

აქ Δ ლაპლასის ოპერატორია. თუ გამოვსახავთ კერძო წარმოებულებს სრული წარმოებულებით kr არგუმენტის მიმართ, მაშინ მივიღებთ:

$$\hat{F}_3^1 = \frac{3}{2}\frac{x\left(5z^2 - r^2\right)}{r^3}\hat{Q}_3 = \frac{3}{2}\sin\vartheta\cos\varphi\left(5\cos^2\vartheta - 1\right)\hat{Q}_3\,,$$

$$\hat{F}_3^{1\,*} = \frac{3}{2}\frac{y\left(5z^2 - r^2\right)}{r^3}\hat{Q}_3 = \frac{3}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\left(5\cos^2\vartheta - 1\right)\hat{Q}_3 \,,$$

საიდანაც საბოლოოდ:

$$\begin{pmatrix} \hat{F}_3^1 \\ \hat{F}_3^{1\,*} \end{pmatrix} h_0^{(1)}(kr) = h_3^{(1)}(kr)\, P_3^1(\cos\vartheta) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}. \qquad (3.34)$$

მაშასადამე, როდესაც $n=3$ და $m=1$, საწყისი (3.1) ფუნქციები აღიწერება $\hat{F}_3^1$ და $\hat{F}_3^{1\,*}$ ოპერატორებით.

§20. სექტორალური და ტესერალური სფერული ტალღური ფუნქციები. მათი კავშირი ნულოვანი რიგის ფუნქციასთან. ზოგადი შემთხვევა

ცნობილია, რომ ლეჟანდრის მიერთებული პოლინომები (3.2) შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ჩაკეტილი ფორმით:

$$P_n^m(\cos\vartheta) = (-1)^m\, 2^n (\sin\vartheta)^m \sum_{\beta=m}^{n} \frac{\beta!}{(\beta - m)!} (\cos\vartheta)^{\beta - m}\, C_n^\beta C_{(n+\beta-1)/2}^n \,,$$

(იხ. [18]), სადაც $C_{(n+\beta-1)/2}^n$ განზოგადებული ბინომიალური კოეფიციენტებია. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$\omega_{n,\beta}^m = \frac{(-1)^m\, 2^n}{(n-\beta)!(\beta-m)!} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{n+\beta-1}{2} - j \right), \qquad (3.35)$$

მაშინ ჩაკეტილი ფორმა ჩაიწერება უფრო კომპაქტურად:

$$P_n^m(\cos\vartheta) = (\sin\vartheta)^m \sum_{\beta=m}^{n} \omega_{n,\beta}^m (\cos\vartheta)^{\beta-m} \,. \qquad (3.36)$$

მოვიყვანოთ აგრეთვე ვიეტას ფორმულები, ჯერადი კუთხეების კოსინუსისთვის და სინუსისთვის:

$$\cos(m\varphi)=\sum_{\alpha=0}^{m}C_m^{\alpha}(\cos\varphi)^{\alpha}(\sin\varphi)^{m-\alpha}\cos\left[\frac{\pi}{2}(m-\alpha)\right], \qquad (3.37)$$

$$\sin(m\varphi)=\sum_{\alpha=0}^{m}C_m^{\alpha}(\cos\varphi)^{\alpha}(\sin\varphi)^{m-\alpha}\sin\left[\frac{\pi}{2}(m-\alpha)\right]. \qquad (3.38)$$

ახლა განვიხილოთ ფუნქციები $r^m P_n^m(\cos\vartheta)\cos(m\varphi)$ და $r^m P_n^m(\cos\vartheta)\sin(m\varphi)$, რომლებიც ლაპლასის განტოლებას აკმაყოფილებენ და მათ სფერული ჰარმონიკები ეწოდებათ. (3.36)-(3.38) გამოსახულებების გათვალისწინებით, ეს ფუნქციები დეკარტულ კოორდინატებში შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც:

$$r^n P_n^m(\cos\vartheta)\cos(m\varphi)=\sum_{\alpha=0}^{m}C_m^{\alpha}\cos\left[\frac{\pi}{2}(m-\alpha)\right]x^{\alpha}y^{m-\alpha}\sum_{\beta=m}^{n}\omega_{n,\beta}^{m}r^{n-\beta}z^{\beta-m}, \qquad (3.39)$$

$$r^n P_n^m(\cos\vartheta)\sin(m\varphi)=\sum_{\alpha=0}^{m}C_m^{\alpha}\sin\left[\frac{\pi}{2}(m-\alpha)\right]x^{\alpha}y^{m-\alpha}\sum_{\beta=m}^{n}\omega_{n,\beta}^{m}r^{n-\beta}z^{\beta-m} \qquad (3.40)$$

და მაშასადამე, მარცხენა მხარის ფუნქციები წარმოადგენენ n რიგის ერთგვაროვან მრავალწევრებს. მათ ერთგვაროვან ჰარმონიულ პოლინომებსაც უწოდებენ [19].

უნდა აღინიშნოს, რომ ამ გამოსახულებებში ყველა $\omega_{n,\beta}^{m}$ კოეფიციენტი, რომლისთვისაც $n-\beta$ კენტი რიცხვია, უდრის ნულს. მართლაც, დავუშვათ $n-\beta=2p+1$, სადაც $p=0,1,\ldots$. ამ შემთხვევაში (3.35)-დან გვექნება:

$$\omega_{\beta+2p+1,\beta}^{m}=\frac{(-1)^m\,2^{\beta+2p+1}}{(2p+1)!(\beta-m)!}\prod_{j=0}^{\beta+2p}(\beta+p-j)=0,$$

ვინაიდან ინდექსი j იცვლება 0-დან $\beta+2p$-მდე და როდესაც $j=\beta+p$, მაშინ შესაბამისი მამრავლი უდრის ნულს.

აქედან გამომდინარეობს, რომ (3.39) და (3.40) გამოსახულებების შიდა ჯამებში უნდა ფიგურირებდეს მხოლოდ ისეთი წევრები, რომლებიც შეიცავს r-ს ლუწ ხარისხებს. ამიტომ დავწერთ:

$$r^n P_n^m(\cos\vartheta)\cos(m\varphi)=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{m} C_m^{\alpha} \cos\left[\frac{\pi}{2}(m-\alpha)\right] x^{\alpha} y^{m-\alpha} \sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} \omega_{n,n-2\beta}^{m} r^{2\beta} z^{n-m-2\beta} \ ,$$

$$r^n P_n^m(\cos\vartheta)\sin(m\varphi)=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{m} C_m^{\alpha} \sin\left[\frac{\pi}{2}(m-\alpha)\right] x^{\alpha} y^{m-\alpha} \sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} \omega_{n,n-2\beta}^{m} r^{2\beta} z^{n-m-2\beta} \ ,$$

სადაც ჯამის ზედა ინდექსი λ_{n-m} განისაზღვრება (1.6) ფორმულიდან. მოყვანილ გამოსახულებებს ჯერ კიდევ არ გააჩნია საბოლოო სახე. შევამჩნიოთ, რომ ორივე გამოსახულების მარჯვენა ნაწილი შეიცავს ორი ჯამის ნამრავლს. გარდავქმნათ პირველი ჯამი. თუ შემოვიღებთ ახალ ინდექსს, როგორც $\gamma=m-\alpha$ და გავითვალისწინებთ, რომ:

$$C_m^{\alpha}=C_m^{m-\gamma}=\frac{m!}{(m-\gamma)!\gamma!}=C_m^{\gamma},$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sum_{\alpha=0}^{m} C_m^{\alpha} \cos\left[\frac{\pi}{2}(m-\alpha)\right] x^{\alpha} y^{m-\alpha}=\sum_{\gamma=0}^{m} C_m^{\gamma} \cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right) x^{m-\gamma} y^{\gamma} \ ,$$

$$\sum_{\alpha=0}^{m} C_m^{\alpha} \sin\left[\frac{\pi}{2}(m-\alpha)\right] x^{\alpha} y^{m-\alpha}=\sum_{\gamma=0}^{m} C_m^{\gamma} \sin\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right) x^{m-\gamma} y^{\gamma} \ .$$

ახლა გარდავქმნათ უკანასკნელი გამოსახულებები ისე, რომ დაგვრჩეს მხოლოდ არანულოვანი წევრები, ანუ წევრები, რომელთათვისაც:

$$\cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)\neq 0\ ,\ \sin\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)\neq 0\ .$$

ამისთვის განვიხილოთ შემდეგი სახის ჯამები:

$$\sum_{\gamma=0}^{m} b_{m,\gamma} \cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right),\ \sum_{\gamma=0}^{m} b_{m,\gamma} \sin\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right),$$

სადაც $b_{m,\gamma}$ გარკვეული კოეფიციენტებია. შემოწმებით m-ს სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის, დავრწმუნდებით, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$\sum_{\gamma=0}^{m} b_{m,\gamma} \cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right) = \sum_{\gamma=0}^{\lambda_m} (-1)^{\gamma} b_{m,2\gamma}, \sum_{\gamma=0}^{m} b_{m,\gamma} \sin\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right) = \sum_{\gamma=1}^{\lambda_{m+1}} (-1)^{\gamma+1} b_{m,2\gamma-1}.$$

ჩვენს შემთხვევაში:

$$b_{m,\gamma} = C_m^{\gamma} x^{m-\gamma} y^{\gamma}$$

და ამიტომ მივიღებთ:

$$\sum_{\alpha=0}^{m} C_m^{\alpha} \cos\left[\frac{\pi}{2}(m-\alpha)\right] x^{\alpha} y^{m-\alpha} = \sum_{\gamma=0}^{\lambda_m} (-1)^{\gamma} C_m^{2\gamma} x^{m-2\gamma} y^{2\gamma},$$

$$\sum_{\alpha=0}^{m} C_m^{\alpha} \sin\left[\frac{\pi}{2}(m-\alpha)\right] x^{\alpha} y^{m-\alpha} = \sum_{\gamma=1}^{\lambda_{m+1}} (-1)^{\gamma+1} C_m^{2\gamma-1} x^{m-2\gamma+1} y^{2\gamma-1}.$$

აქედან გამომდინარე (თუ ჯამის ინდექსს კვლავ აღვნიშნავთ, როგორც α), დავწერთ:

$$r^n P_n^m(\cos\vartheta)\cos(m\varphi) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\lambda_m} (-1)^{\alpha} C_m^{2\alpha} x^{m-2\alpha} y^{2\alpha} \sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} \omega_{n,n-2\beta}^{m} r^{2\beta} z^{n-m-2\beta} \tag{3.41}$$

$$r^n P_n^m(\cos\vartheta)\sin(m\varphi) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\lambda_{m+1}} (-1)^{\alpha+1} C_m^{2\alpha-1} x^{m-2\alpha+1} y^{2\alpha-1} \sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} \omega_{n,n-2\beta}^{m} r^{2\beta} z^{n-m-2\beta}. \tag{3.42}$$

შევადგინოთ ამ მრავალწევრების საკუთარი ოპერატორები (3.31)-ს მიხედვით. გასაგებია, რომ კოორდინატების ხარისხები უნდა ჩავანაცვლოთ შესაბამისი რიგის კერძო წარმოებულებით:

$$x^{m-2\alpha} y^{2\alpha} \to \frac{\partial^m}{\partial x^{m-2\alpha} \partial y^{2\alpha}}, \; x^{m-2\alpha+1} y^{2\alpha-1} \to \frac{\partial^m}{\partial x^{m-2\alpha+1} \partial y^{2\alpha-1}},$$

$$z^{n-m-2\beta} \to \frac{\partial^{n-m-2\beta}}{\partial z^{n-m-2\beta}}, \; r^{2\beta} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\beta} \to (\Delta)^{\beta}.$$

აქედან გამომდინარე, გვექნება შემდეგი საკუთარი ოპერატორები:

$$\hat{F}_n^m = \frac{(-1)^n}{k^n} \sum_{\alpha=0}^{\lambda_m} (-1)^{\alpha} C_m^{2\alpha} \frac{\partial^m}{\partial x^{m-2\alpha} \partial y^{2\alpha}} \sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} \omega_{n,n-2\beta}^m (\Delta)^{\beta} \frac{\partial^{n-m-2\beta}}{\partial z^{n-m-2\beta}},$$

$$\hat{F}_n^{m\,*} = \frac{(-1)^n}{k^n} \sum_{\alpha=1}^{\lambda_{m+1}} (-1)^{\alpha+1} C_m^{2\alpha-1} \frac{\partial^m}{\partial x^{m-2\alpha+1} \partial y^{2\alpha-1}} \sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} \omega_{n,n-2\beta}^m (\Delta)^{\beta} \frac{\partial^{n-m-2\beta}}{\partial z^{n-m-2\beta}}.$$

შევამჩნიოთ, რომ (1.7) და (1.8)-ს თანახმად:

$$\frac{(-1)^m}{k^m} \sum_{\alpha=0}^{\lambda_m} (-1)^{\alpha} C_m^{2\alpha} \frac{\partial^m}{\partial x^{m-2\alpha} \partial y^{2\alpha}} = \hat{L}_m,$$

$$\frac{(-1)^m}{k^m} \sum_{\alpha=1}^{\lambda_{m+1}} (-1)^{\alpha+1} C_m^{2\alpha-1} \frac{\partial^m}{\partial x^{m-2\alpha+1} \partial y^{2\alpha-1}} = \hat{L}_m^*.$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\hat{F}_n^m = \frac{(-1)^{n-m}}{k^{n-m}} \hat{L}_m \left[\sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} \omega_{n,n-2\beta}^m (\Delta)^{\beta} \frac{\partial^{n-m-2\beta}}{\partial z^{n-m-2\beta}} \right],$$

$$\hat{F}_n^{m\,*} = \frac{(-1)^{n-m}}{k^{n-m}} \hat{L}_m^* \left[\sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} \omega_{n,n-2\beta}^m (\Delta)^{\beta} \frac{\partial^{n-m-2\beta}}{\partial z^{n-m-2\beta}} \right].$$

შემდეგში ჩვენ დაგვჭირდება ვიმოქმედოთ $\hat{F}_n^m$ და $\hat{F}_n^{m\,*}$ ოპერატორებით ფუნქციაზე $h_0^{(1)}(kr)$. ვინაიდან იგი აკმაყოფილებს ჰელმგოლცის განტოლებას:

$$\left(\Delta + k^2\right) h_0^{(1)}(kr) = 0,$$

ამიტომ ოპერატორი $(\Delta)^{\beta}$ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც:

$$\left(\Delta\right)^{\beta} = \left(-1\right)^{\beta} k^{2\beta}$$

და განხილული ოპერატორებისთვის მივიღებთ:

$$\hat{F}_n^m = \frac{\left(-1\right)^{n-m}}{k^{n-m}} \hat{L}_m \left[\sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} \left(-1\right)^{\beta} k^{2\beta} \omega_{n,n-2\beta}^m \frac{\partial^{n-m-2\beta}}{\partial z^{n-m-2\beta}} \right], \qquad (3.43)$$

$$\hat{F}_n^{m\,*} = \frac{\left(-1\right)^{n-m}}{k^{n-m}} \hat{L}_m^* \left[\sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} \left(-1\right)^{\beta} k^{2\beta} \omega_{n,n-2\beta}^m \frac{\partial^{n-m-2\beta}}{\partial z^{n-m-2\beta}} \right]. \qquad (3.44)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც $n=4$ და $m=1$. გამოსახულებებიდან (3.43) და (3.44) მივიღებთ:

$$\hat{F}_4^1 = -\frac{5}{2}\frac{1}{k^4}\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(7\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 3k^2\right), \quad \hat{F}_4^{1\,*} = -\frac{5}{2}\frac{1}{k^4}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(7\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 3k^2\right).$$

თუ გამოვსახავთ $\hat{F}_4^1$ და $\hat{F}_4^{1\,*}$ ოპერატორებს სრული წარმოებულებით kr ცვლადის მიმართ, მაშინ გვექნება:

$$\hat{F}_4^1 = -\frac{5}{2}\frac{xz\left(7z^2 - 3r^2\right)}{r^4}\hat{Q}_4 = -\frac{5}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\left(7\cos^2\vartheta - 3\right)\hat{Q}_4,$$

$$\hat{F}_4^{1\,*} = -\frac{5}{2}\frac{yz\left(7z^2 - 3r^2\right)}{r^4}\hat{Q}_4 = -\frac{5}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\left(7\cos^2\vartheta - 3\right)\hat{Q}_4,$$

სადაც ოპერატორი $\hat{Q}_4$ განისაზღვრება (3.10**) გამოსახულებიდან. აქედან, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} \hat{F}_4^1 \\ \hat{F}_4^{1\,*} \end{pmatrix} h_0^{(1)}\left(kr\right) = h_4^{(1)}\left(kr\right) P_4^1\left(\cos\vartheta\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

განხილული $n=3$, $m=1$ და $n=4$, $m=1$ კერძო შემთხვევების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ადგილი აქვს ზოგად გამოსახულებას:

$$\begin{pmatrix} \hat{F}_n^m \\ \hat{F}_n^{m\,*} \end{pmatrix} h_0^{(1)}(kr) = h_n^{(1)}(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta) \begin{pmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{pmatrix}, \tag{3.45}$$

რომელიც გაშლილი სახით, ჩაიწერება როგორც:

$$\frac{(-1)^n}{k^n} \sum_{\alpha=0}^{\lambda_m} (-1)^{\alpha}\, C_m^{2\alpha} \frac{\partial^m}{\partial x^{m-2\alpha} \partial y^{2\alpha}} \sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} (-1)^{\beta}\, k^{2\beta} \omega_{n,n-2\beta}^m \frac{\partial^{n-m-2\beta} h_0^{(1)}(kr)}{\partial z^{n-m-2\beta}} =$$

$$= h_n^{(1)}(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta) \cos(m\varphi), \tag{3.46}$$

$$\frac{(-1)^n}{k^n} \sum_{\alpha=1}^{\lambda_{m+1}} (-1)^{\alpha+1}\, C_m^{2\alpha-1} \frac{\partial^m}{\partial x^{m-2\alpha+1} \partial y^{2\alpha-1}} \sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} (-1)^{\beta}\, k^{2\beta} \omega_{n,n-2\beta}^m \frac{\partial^{n-m-2\beta} h_0^{(1)}(kr)}{\partial z^{n-m-2\beta}} =$$

$$= h_n^{(1)}(kr)\, P_n^m(\cos\vartheta) \sin(m\varphi). \tag{3.47}$$

უნდა აღინიშნოს, რომ თუ $m = 0$, მაშინ (3.46) გამოსახულების მარჯვენა ნაწილი ემთხვევა წინა თავში განხილულ ზონალურ სფერულ ფუნქციას. თავად ეს გამოსახულება კი გადაიწერება, როგორც:

$$(-1)^n \sum_{\beta=0}^{\lambda_n} (-1)^{\beta}\, \omega_{n,n-2\beta}^0 \frac{1}{k^{n-2\beta}} \frac{\partial^{n-2\beta} h_0^{(1)}(kr)}{\partial z^{n-2\beta}} = h_n^{(1)}(kr)\, P_n(\cos\vartheta). \tag{3.48}$$

შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას:

$$(-1)^{\beta}\, \omega_{n,n-2\beta}^0 = \frac{C_n^{\beta} C_{2(n-\beta)}^n}{2^n}, \tag{3.49}$$

მაშინ გვექნება:

$$\frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{\beta=0}^{\lambda_n} C_n^{\beta} C_{2(n-\beta)}^n \frac{1}{k^{n-2\beta}} \frac{\partial^{n-2\beta} h_0^{(1)}(kr)}{\partial z^{n-2\beta}} = h_n^{(1)}(kr)\, P_n(\cos\vartheta),$$

რაც ემთხვევა (2.9) გამოსახულებას.

თანაბარი ფოთლების შემთხვევაში ($m=n-1$ ან $m=n$), გვექნება $\lambda_{n-m}=0$ და გამოსახულებებიდან (3.46), (3.47) მივიღებთ:

$$\frac{(-1)^n}{k^n}\sum_{\alpha=0}^{\lambda_m}(-1)^{\alpha}\,C_m^{2\alpha}\omega_{n,n}^m\,\frac{\partial^n h_0^{(1)}(kr)}{\partial x^{m-2\alpha}\partial y^{2\alpha}\partial z^{n-m}}=$$

$$=h_n^{(1)}(kr)\,P_n^m(\cos\vartheta)\cos(m\varphi),\tag{3.50}$$

$$\frac{(-1)^n}{k^n}\sum_{\alpha=1}^{\lambda_{m+1}}(-1)^{\alpha+1}\,C_m^{2\alpha-1}\omega_{n,n}^m\,\frac{\partial^n h_0^{(1)}(kr)}{\partial x^{m-2\alpha+1}\partial y^{2\alpha-1}\partial z^{n-m}}=$$

$$=h_n^{(1)}(kr)\,P_n^m(\cos\vartheta)\sin(m\varphi).\tag{3.51}$$

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ გამოსახულებები (3.46) და (3.47) უფრო ზოგადი სახისაა. მათ აქვთ ადგილი ყოველთვის (როდესაც $m\le n$) და არა მარტო დიაგრამის ერთნაირი ფოთლების შემთხვევაში.

§21. ცენტრალური სასრული სხვაობებით მიახლოება. ზოგიერთი კერძო შემთხვევა

გარდავქმნათ გამოსახულებები (3.46) და (3.47) შემდეგნაირად:

$$\sum_{\alpha=0}^{\lambda_m}\sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}}(-1)^{n+\alpha+\beta}\,C_m^{2\alpha}k^{2\beta-n}\omega_{n,n-2\beta}^m\,\frac{\partial^{n-2\beta}h_0^{(1)}(kr)}{\partial x^{m-2\alpha}\partial y^{2\alpha}\partial z^{n-m-2\beta}}=$$

$$=h_n^{(1)}(kr)\,P_n^m(\cos\vartheta)\cos(m\varphi),\tag{3.52}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda_{m+1}}\sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}}(-1)^{n+\alpha+\beta+1}\,C_m^{2\alpha-1}k^{2\beta-n}\omega_{n,n-2\beta}^m\,\frac{\partial^{n-2\beta}h_0^{(1)}(kr)}{\partial x^{m-2\alpha+1}\partial y^{2\alpha-1}\partial z^{n-m-2\beta}}=$$

$$=h_n^{(1)}(kr)\,P_n^m(\cos\vartheta)\sin(m\varphi).\tag{3.53}$$

მიღებულ გამოსახულებებში შემავალი კერძო წარმოებულები ჩავანაცვლოთ ცენტრალური სასრული სხვაობებით. ამასთანავე და-

ვუშვათ, რომ ყველა წარმოებულისთვის შეიძლება შეირჩეს ერთი და იგივე r_0 ბიჯი. გარკვეული გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ, რომ:

$$\frac{\partial^{n-2\beta} h_0^{(1)}(kr)}{\partial x^{m-2\alpha} \partial y^{2\alpha} \partial z^{n-m-2\beta}} \approx (r_0)^{2\beta-n} \sum_{p=0}^{m-2\alpha} \sum_{q=0}^{2\alpha} \sum_{s=0}^{n-m-2\beta} (-1)^{p+q+s} C_{m-2\alpha}^{p} C_{2\alpha}^{q} \times$$

$$\times C_{n-m-2\beta}^{s} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r} - r_0 \vec{R}_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta}\right|\right),$$

$$\frac{\partial^{n-2\beta} h_0^{(1)}(kr)}{\partial x^{m-2\alpha+1} \partial y^{2\alpha-1} \partial z^{n-m-2\beta}} \approx (r_0)^{2\beta-n} \sum_{p=0}^{m-2\alpha+1} \sum_{q=0}^{2\alpha-1} \sum_{s=0}^{n-m-2\beta} (-1)^{p+q+s} C_{m-2\alpha+1}^{p} C_{2\alpha-1}^{q} \times$$

$$\times C_{n-m-2\beta}^{s} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r} - r_0 \vec{R}_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta\,*}\right|\right),$$

სადაც $\vec{R}_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta}$ და $\vec{R}_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta\,*}$ ვექტორები განისაზღვრება, როგორც:

$$\vec{R}_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta} = \left\{ p - \frac{1}{2}(m-2\alpha), q-\alpha, s - \frac{1}{2}(n-m-2\beta) \right\}, \qquad (3.54)$$

$$\vec{R}_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta\,*} = \left\{ p - \frac{1}{2}(m-2\alpha+1), q - \frac{1}{2}(2\alpha-1), s - \frac{1}{2}(n-m-2\beta) \right\}. \qquad (3.55)$$

თუ ჩავსვამთ წარმოებულების გამოსახულებებს ფორმულებში (3.52) და (3.53), საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\sum_{\alpha=0}^{\lambda_m} \sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} \sum_{p=0}^{m-2\alpha} \sum_{q=0}^{2\alpha} \sum_{s=0}^{n-m-2\beta} \Omega_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta} \omega_{n,n-2\beta}^{m} (kr_0)^{2\beta-n} \; h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r} - r_0 \vec{R}_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta}\right|\right) \approx$$

$$\approx h_n^{(1)}(kr) P_n^m(\cos\vartheta) \cos(m\varphi), \qquad (3.56)$$

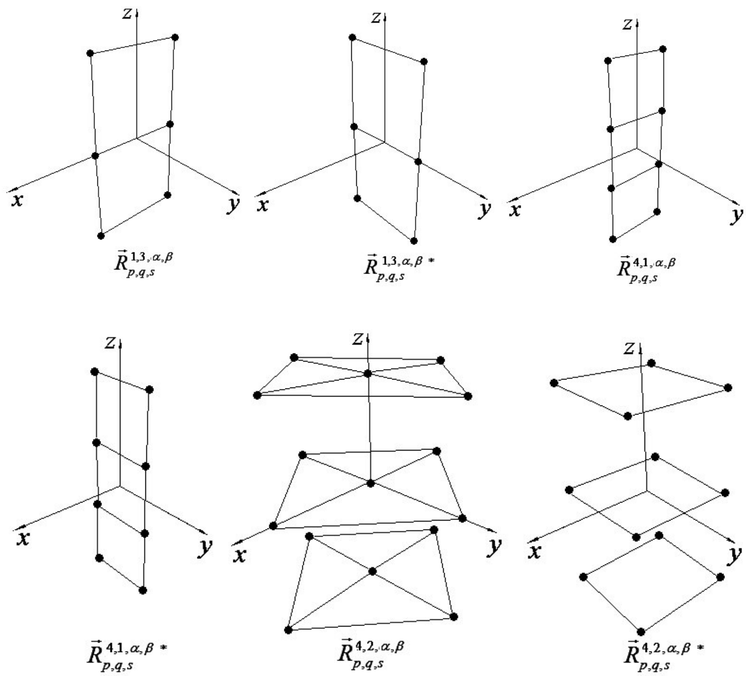
$$\sum_{\alpha=1}^{\lambda_{m+1}} \sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} \sum_{p=0}^{m-2\alpha+1} \sum_{q=0}^{2\alpha-1} \sum_{s=0}^{n-m-2\beta} \Omega_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta\,*} \omega_{n,n-2\beta}^{m} (kr_0)^{2\beta-n} \; h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r} - r_0 \vec{R}_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta\,*}\right|\right) \approx$$

$$\approx h_n^{(1)}(kr)\,P_n^m(\cos\vartheta)\sin(m\varphi)\,, \qquad (3.57)$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\Omega_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta} = (-1)^{n+\alpha+\beta+p+q+s}\, C_m^{2\alpha} C_{m-2\alpha}^{p} C_{2\alpha}^{q} C_{n-m-2\beta}^{s}\,,$$

$$\Omega_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta\,*} = (-1)^{n+\alpha+\beta+p+q+s+1}\, C_m^{2\alpha-1} C_{m-2\alpha+1}^{p} C_{2\alpha-1}^{q} C_{n-m-2\beta}^{s}\,.$$



ნახ. 19. მულტიპოლების სტრუქტურები,
რომლებიც აღწერენ (3.1) ველებს

მაშასადამე, ველი $h_n^{(1)}(kr)\,P_n^m(\cos\vartheta)\cos(m\varphi)$, აღიწერება მონოპოლებით, რომელთა რადიუს-ვექტორებია $\vec{R}_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta}$. აქ

$$\alpha = 1,\dots,\lambda_m\,,\ \ \beta = 0,\dots,\lambda_{n-m}\,,\ \ p = 0,\dots,m-2\alpha\,,$$

$$q=0,...,2\alpha\,,\ s=0,...,n-m-2\beta\,.$$

ანალოგიურად, ველი $h_n^{(1)}(kr)P_n^m(\cos\vartheta)\sin(m\varphi)$ აღიწერება მონოპოლებით, რომელთა რადიუს-ვექტორებია $\vec{R}_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta\,*}$, სადაც

$$\alpha=1,...,\lambda_{m+1}\,,\ \beta=0,...,\lambda_{n-m}\,,\ p=0,...,m-2\alpha+1\,,$$
$$q=0,...,2\alpha-1\,,\ s=0,...,n-m-2\beta\,.$$

მიღებული მულტიპოლები, კერძო შემთხვევებისთვის $n=3$, $m=1$; $n=4$, $m=1$ და $n=4$, $m=2$, წარმოდგენილია ნახ. 19-ზე.

§22. მესამე სახის სფერული ტალღური ფუნქციის მონოპოლებით წარმოდგენა

საწყისი (3.1) ფუნქციებისგან შევადგინოთ ზოგადი სახის ფუნქცია

$$h_n^{(1)}(kr)P_n^m(\cos\vartheta)e^{\pm im\varphi}\,. \tag{3.58}$$

თუ n და m ინდექსები აკმაყოფილებს პირობას $m=n-1$ ან $m=n$, მაშინ გვექნება ერთნაირი ფოთლების შემთხვევა და შეგვიძლია ვისარგებლოთ გამოსახულებებით (3.26) და (3.27). მივიღებთ:

$$h_n^{(1)}(kr)P_n^m(\cos\vartheta)e^{\pm im\varphi}\approx$$

$$\frac{n!}{2}\frac{D_{n,m}}{(kr_0)^n}\sum_{\alpha=1}^{n-m+1}\sum_{\beta=1}^{2m}(-1)^{\alpha+\beta+n}\left[h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}\right|\right)\pm ih_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\vec{r}^{\,*}_{m,n,\alpha,\beta}\right|\right)\right],$$

ან უფრო კომპაქტურად:

$$h_n^{(1)}(kr)P_n^m(\cos\vartheta)e^{\pm im\varphi}\approx$$

$$\approx\frac{n!}{2}\frac{D_{n,m}}{(kr_0)^n}\sum_{\alpha=1}^{n-m+1}\sum_{\beta=1}^{4m}(-1)^{\lambda_\beta+\alpha+\beta+n}\begin{pmatrix}e^{i(\pi/4)}\\ e^{i(3\pi/4)}\end{pmatrix}^{1+(-1)^\beta}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\vec{r}\,'_{m,n,\alpha,\beta}\right|\right), \tag{3.59}$$

სადაც ერთეულოვანი ვექტორი $\vec{r}'_{m,n,\alpha,\beta}$, განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\vec{r}'_{m,n,\alpha,\beta} = \left\{ \sin\vartheta_{m,n,\alpha} \cos\left(\frac{\varphi_{m,\beta}}{2}\right), \sin\vartheta_{m,n,\alpha} \sin\left(\frac{\varphi_{m,\beta}}{2}\right), \cos\vartheta_{m,n,\alpha} \right\}. \quad (3.60)$$

გამოსახულება (3.59) წარმოადგენს (1.31) გამოსახულების სამგანზომილებიან ანალოგს. განსხვავებული ფოთლების შემთხვევაში ($m < n-1$), გამოვიყენებთ (3.56) და (3.57) გამოსახულებებს. მივიღებთ:

$$h_n^{(1)}(kr) P_n^m(\cos\vartheta) e^{\pm im\varphi} \approx \sum_{\beta=0}^{\lambda_{n-m}} \sum_{s=0}^{n-m-2\beta} \omega_{n,n-2\beta}^m (kr_0)^{2\beta-n} \times$$

$$\times \left[\sum_{\alpha=0}^{\lambda_m} \sum_{p=0}^{m-2\alpha} \sum_{q=0}^{2\alpha} \Omega_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r} - r_0 \vec{R}_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta}\right|\right) \pm \right.$$

$$\left. \pm i \sum_{\alpha=1}^{\lambda_{m+1}} \sum_{p=0}^{m-2\alpha+1} \sum_{q=0}^{2\alpha-1} \Omega_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta\,*} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r} - r_0 \vec{R}_{p,q,s}^{n,m,\alpha,\beta\,*}\right|\right) \right]. \quad (3.61)$$

მაშასადამე, (3.58) ტალღური ფუნქცია, ასევე წარმოიდგინება მონოპოლების მეშვეობით.

§23. მესამე სახეობის მულტიპოლის სამგანზომილებიანი ანალოგი

განვიხილოთ სფერული ფუნქციებისთვის ცნობილი შეკრების თეორემა [2], რომლის თანახმადაც r_0 რადიუსის მქონე S_0 სფეროს გარეთ ($r > r_0$), ადგილი აქვს ტოლობას:

$$h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu+1) j_\nu(kr_0) h_\nu^{(1)}(kr) P_\nu(\cos\gamma). \quad (3.62)$$

აქ $\vec{r}_0$ წარმოადგენს S_0 სფეროზე ფიქსირებული წერტილის რადიუს-ვექტორს, $\vec{r}$ სივრცის გარე წერტილის რადიუს-ვექტორია, γ წარმოადგენს კუთხეს $\vec{r}$ და $\vec{r}_0$ ვექტორებს შორის:

$$\cos\gamma = \sin\vartheta \sin\vartheta_0 \cos\left(\varphi - \varphi_0\right) + \cos\vartheta \cos\vartheta_0 .$$

აღსანიშნავია, რომ (3.62) გამოსახულებაში მყოფი მწკრივი თანაბრად კრებადია. ეს იძლევა საშუალებას გავაინტეგროთ ორივე მხარე S_0 სფეროს გასწვრივ. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\oiint_{S_0} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|\right) dS_0 = 4\pi r_0^{\,2} j_0\left(kr_0\right) h_0^{(1)}\left(kr\right) +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(2\nu + 1\right) j_\nu\left(kr_0\right) h_\nu^{(1)}\left(kr\right) \oiint_{S_0} P_\nu\left(\cos\gamma\right) dS_0 . \qquad (3.63)$$

ახლა ვისარგებლოთ ცნობილი ფორმულით:

$$P_\nu\left(\cos\gamma\right) = P_\nu\left(\cos\vartheta_0\right) P_\nu\left(\cos\vartheta\right) +$$

$$+2\sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{\left(\nu - \mu\right)!}{\left(\nu + \mu\right)!} P_\nu^\mu\left(\cos\vartheta_0\right) P_\nu^\mu\left(\cos\vartheta\right) \cos\left[\mu\left(\varphi - \varphi_0\right)\right]. \qquad (3.64)$$

მაშინ (3.63)-ის მარჯვენა ნაწილში მდებარე ინტეგრალისთვის გვექნება:

$$\oiint_{S_0} P_\nu\left(\cos\gamma\right) dS_0 = P_\nu\left(\cos\vartheta\right) \oiint_{S_0} P_\nu\left(\cos\vartheta_0\right) dS_0 +$$

$$+2\sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{\left(\nu - \mu\right)!}{\left(\nu + \mu\right)!} P_\nu^\mu\left(\cos\vartheta\right) \oiint_{S_0} P_\nu^\mu\left(\cos\vartheta_0\right) \cos\left[\mu\left(\varphi - \varphi_0\right)\right] dS_0 .$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ:

$$\oiint_{S_0} P_\nu\left(\cos\vartheta_0\right) dS_0 = 2\pi r_0^{\,2} \int_0^\pi P_\nu\left(\cos\vartheta_0\right) \sin\vartheta_0 d\vartheta_0 \left\langle \cos\vartheta_0 = w \right\rangle =$$

$$= 2\pi r_0^{\,2} \int_{-1}^{1} P_\nu\left(w\right) dw = 0 \text{ , } \left(\nu \ge 1\right)$$

$$\oiint_{S_0} P_\nu^\mu\left(\cos\vartheta_0\right) \cos\left[\mu\left(\varphi - \varphi_0\right)\right] dS_0 =$$

$$= r_0^{\,2} \int_0^\pi P_\nu^\mu\left(\cos\vartheta_0\right) \sin\vartheta_0 d\vartheta_0 \int_0^{2\pi} \cos\left[\mu\left(\varphi - \varphi_0\right)\right] d\varphi_0 = 0 \text{ , } \left(\mu \ge 1\right)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ (3.63)-ს ჯამის ყველა წევრი ნულის ტოლია და ამიტომ ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\oiint_{S_0} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|\right)dS_0 = 4\pi r_0^{\,2} j_0\left(kr_0\right)h_0^{(1)}\left(kr\right). \qquad (3.65)$$

(3.65)-ის ფიზიკური შინაარსი დაკავშირებულია ჰიუგენსის პრინციპთან. მართლაც, $e^{-i\omega t}$ დროის მამრავლის შემთხვევაში, ფუნქცია $h_0^{(1)}\left(kr\right)$ აღწერს მონოქრომატულ სფერულ ტალღას, რომელიც კოორდინატთა სათავიდან ვრცელდება. S_0 ზედაპირის ყოველი წერტილი, რომელსაც მიაღწევს ეს ტალღა, მეორადი ტალღების წყარო გახდება. მაშინ გარე სივრცეში საწყისი ველი წარმოიდგინება ამ მეორადი ტალღების წყაროების ჯამური ველის სახით, ანუ (3.65) გამოსახულების მარცხენა ნაწილის ინტეგრალით. ასევე ჩანს, რომ სფეროს r_0 რადიუსის გაზრდით, აღნიშნული წყაროების ამპლიტუდები მცირდება $4\pi r_0^{\,2} j_0\left(kr_0\right)$ სიდიდის უკუპროპორციულად.

დავუბრუნდეთ გამოსახულებას (3.62) და გავამრავლოთ მისი ორივე მხარე სიდიდეზე $P_n^m\left(\cos\vartheta_0\right)\cos\left(m\varphi_0\right)$ ($P_n^m\left(\cos\vartheta_0\right)\sin\left(m\varphi_0\right)$), სადაც m და n ფიქსირებული ნატურალური რიცხვებია. შემდეგ კვლავ გავაინტეგროთ მიღებული ტოლობის ორივე მხარე S_0 სფეროზე. მატრიცული ფორმით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\oiint_{S_0} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|\right)P_n^m\left(\cos\vartheta_0\right)\begin{pmatrix}\cos\left(m\varphi_0\right)\\ \sin\left(m\varphi_0\right)\end{pmatrix}dS_0 =$$

$$= j_0\left(kr_0\right)h_0^{(1)}\left(kr\right)I_{n,m} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(2\nu+1\right)j_\nu\left(kr_0\right)h_\nu^{(1)}\left(kr\right)I_{\nu,n,m}, \qquad (3.66)$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$I_{n,m} = \oiint_{S_0} P_n^m\left(\cos\vartheta_0\right)\begin{pmatrix}\cos\left(m\varphi_0\right)\\ \sin\left(m\varphi_0\right)\end{pmatrix}dS_0,$$

$$I_{\nu,n,m} = \oiint_{S_0} P_\nu\left(\cos\gamma\right)P_n^m\left(\cos\vartheta_0\right)\begin{pmatrix}\cos\left(m\varphi_0\right)\\ \sin\left(m\varphi_0\right)\end{pmatrix}dS_0.$$

პირველი $I_{n,m}$ ინტეგრალის გამოთვლით მივიღებთ:

$$I_{n,m} = r_0^{\,2} \int_0^{\pi} P_n^m \left(\cos \vartheta_0\right) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\left(m\varphi_0\right) \\ \sin\left(m\varphi_0\right) \end{pmatrix} d\varphi_0 = 0 \,.$$

მეორე $I_{\nu,n,m}$ ინტეგრალის გამოსათვლელად კვლავ ვისარგებლოთ (3.64) გამოსახულებით. გავამრავლოთ მისი ორივე მხარე სიდიდეზე $P_n^m\left(\cos \vartheta_0\right)\cos\left(m\varphi_0\right)$ ($P_n^m\left(\cos \vartheta_0\right)\sin\left(m\varphi_0\right)$) და გავაინტეგროთ S_0 სფეროს გასწვრივ. შედეგად მივიღებთ ტოლობას:

$$I_{\nu,n,m} = P_\nu\left(\cos \vartheta\right) Y_{\nu,n,m} + 2\sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!} P_\nu^\mu \left(\cos\vartheta\right) Y_{\nu,\mu,n,m} \,, \quad (3.67)$$

სადაც შემოვიღეთ ახალი ინტეგრალები:

$$Y_{\nu,n,m} = \oiint_{S_0} P_\nu\left(\cos \vartheta_0\right) P_n^m\left(\cos \vartheta_0\right) \begin{pmatrix} \cos\left(m\varphi_0\right) \\ \sin\left(m\varphi_0\right) \end{pmatrix} dS_0$$

და:

$$Y_{\nu,\mu,n,m} = \oiint_{S_0} P_\nu^\mu\left(\cos \vartheta_0\right) P_n^m\left(\cos \vartheta_0\right) \cos\left[\mu\left(\varphi-\varphi_0\right)\right] \begin{pmatrix} \cos\left(m\varphi_0\right) \\ \sin\left(m\varphi_0\right) \end{pmatrix} dS_0 \,.$$

$Y_{\nu,n,m}$ ინტეგრალის გამოთვლით, მივიღებთ:

$$Y_{\nu,n,m} = r_0^{\,2} \int_0^{\pi} P_\nu\left(\cos \vartheta_0\right) P_n^m\left(\cos \vartheta_0\right) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\left(m\varphi_0\right) \\ \sin\left(m\varphi_0\right) \end{pmatrix} d\varphi_0 = 0 \cdot$$

ახლა გამოვითვალოთ ინტეგრალი $Y_{\nu,\mu,n,m}$. გვექნება:

$$Y_{\nu,\mu,n,m} = r_0^{\,2} \int_0^{\pi} P_\nu^\mu\left(\cos \vartheta_0\right) P_n^m\left(\cos \vartheta_0\right) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \cos\left[\mu\left(\varphi-\varphi_0\right)\right] \begin{pmatrix} \cos\left(m\varphi_0\right) \\ \sin\left(m\varphi_0\right) \end{pmatrix} d\varphi_0 =$$

$$= \pi r_0^{\,2} \delta_{\mu,m} \begin{pmatrix} \cos\left(\mu\varphi\right) \\ \sin\left(\mu\varphi\right) \end{pmatrix} \int_0^{\pi} P_\nu^\mu\left(\cos \vartheta_0\right) P_n^\mu\left(\cos \vartheta_0\right) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \,.$$

ლეჟანდრის პოლინომების ორთოგონალობიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\int_0^\pi P_\nu^\mu\left(\cos\vartheta_0\right)P_n^\mu\left(\cos\vartheta_0\right)\sin\vartheta_0 d\vartheta_0\left\langle\cos\vartheta_0=w\right\rangle=$$

$$=\int_{-1}^1 P_\nu^\mu\left(w\right)P_n^\mu\left(w\right)dw=\delta_{\nu,n}\frac{2\left(n+\mu\right)!}{\left(2n+1\right)\left(n-\mu\right)!}$$

და ამიტომ, $Y_{\nu,\mu,n,m}$ ინტეგრალისთვის, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$Y_{\nu,\mu,n,m}=\pi r_0^{\;2}\delta_{\mu,m}\delta_{\nu,n}\frac{2\left(n+\mu\right)!}{\left(2n+1\right)\left(n-\mu\right)!}\begin{pmatrix}\cos\left(\mu\varphi\right)\\ \sin\left(\mu\varphi\right)\end{pmatrix}.$$

დავუბრუნდეთ გამოსახულებას (3.67), რომელიც დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$I_{\nu,n,m}=\frac{4\pi r_0^{\;2}}{2n+1}\delta_{\nu,n}\sum_{\mu=1}^{\nu}\delta_{\mu,m}\frac{(n+\mu)!(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!(n-\mu)!}P_\nu^\mu\left(\cos\vartheta\right)\begin{pmatrix}\cos\left(\mu\varphi\right)\\ \sin\left(\mu\varphi\right)\end{pmatrix}.$$

აქედან გამომდინარე, (3.66) ჩაიწერება, როგორც:

$$\oiint_{S_0} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|\right)P_n^m\left(\cos\vartheta_0\right)\begin{pmatrix}\cos\left(m\varphi_0\right)\\ \sin\left(m\varphi_0\right)\end{pmatrix}dS_0=$$

$$=\frac{4\pi r_0^{\;2}}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_{\nu,n}\sum_{\mu=1}^{\nu}\delta_{\mu,m}\frac{\left(2\nu+1\right)\left(n+\mu\right)!(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!(n-\mu)!}\times$$

$$\times j_\nu\left(kr_0\right)h_\nu^{(1)}\left(kr\right)P_\nu^\mu\left(\cos\vartheta\right)\begin{pmatrix}\cos\left(\mu\varphi\right)\\ \sin\left(\mu\varphi\right)\end{pmatrix},$$

საიდანაც, საბოლოოდ:

$$\oiint_{S_0} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|\right)P_n^m\left(\cos\vartheta_0\right)\begin{pmatrix}\cos\left(m\varphi_0\right)\\ \sin\left(m\varphi_0\right)\end{pmatrix}dS_0=$$

$$=4\pi r_0^{\;2}j_n\left(kr_0\right)h_n^{(1)}\left(kr\right)P_n^m\left(\cos\vartheta\right)\begin{pmatrix}\cos\left(m\varphi\right)\\ \sin\left(m\varphi\right)\end{pmatrix}.$$

აქ გავითვალისწინეთ, რომ $m \le n$. გაშლილი სახით:

$$\oiint_{S_0} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|\right) P_n^m\left(\cos\vartheta_0\right)\cos\left(m\varphi_0\right) dS_0 =$$

$$= 4\pi r_0^{\,2} j_n\left(kr_0\right) h_n^{(1)}\left(kr\right) P_n^m\left(\cos\vartheta\right)\cos\left(m\varphi\right), \qquad (3.68)$$

$$\oiint_{S_0} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|\right) P_n^m\left(\cos\vartheta_0\right)\sin\left(m\varphi_0\right) dS_0 =$$

$$= 4\pi r_0^{\,2} j_n\left(kr_0\right) h_n^{(1)}\left(kr\right) P_n^m\left(\cos\vartheta\right)\sin\left(m\varphi\right) \qquad (3.69)$$

და ასევე:

$$\oiint_{S_0} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|\right) P_n^m\left(\cos\vartheta_0\right) e^{\pm im\varphi_0} dS_0 =$$

$$= 4\pi r_0^{\,2} j_n\left(kr_0\right) h_n^{(1)}\left(kr\right) P_n^m\left(\cos\vartheta\right) e^{\pm im\varphi}. \qquad (3.70)$$

მაშასადამე, სექტორალური და ტესერალური სფერული ტალღური ფუნქციები გამოსახულია ნულოვანი რიგის ფუნქციის ინტეგრალებით, რაც აგრეთვე ჰიუგენსის პრინციპთანაა დაკავშირებული. აღსანიშნავია, რომ მიღებული გამოსახულებები სამართლიანია ყოველთვის, როდესაც $m \le n$. თუ N და M საკმაოდ დიდი რიცხვებია, მაშინ (3.68) და (3.69) გამოსახულებებში მდებარე ზედაპირული ინტეგრალები შეგვიძლია მიახლოებით ჩავანაცვლოთ ჯამებით:

$$\oiint_{S_0} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|\right) P_n^m\left(\cos\vartheta_0\right)\cos\left(m\varphi_0\right) dS_0 \approx$$

$$\approx r_0^{\,2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{M} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\vec{r}_{M,N,\alpha,\beta}\right|\right) P_n^m\left(\cos\vartheta_{N,\alpha}\right)\sin\vartheta_{N,\alpha}\cos\left(m\varphi_{M,\beta}\right)\Delta\vartheta_N\Delta\varphi_M ,$$

$$\oiint_{S_0} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|\right) P_n^m\left(\cos\vartheta_0\right)\sin\left(m\varphi_0\right) dS_0 \approx$$

$$\approx r_0^{\,2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{M} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\vec{r}^{\,*}_{M,N,\alpha,\beta}\right|\right) P_n^m\left(\cos\vartheta_{N,\alpha}\right)\sin\vartheta_{N,\alpha}\sin\left(m\varphi^{*}_{M,\beta}\right)\Delta\vartheta_N\Delta\varphi_M ,$$

სადაც

$$\vec{r}_{M,N,\alpha,\beta} = \left\{ \sin\vartheta_{N,\alpha}\cos\varphi_{M,\beta}, \sin\vartheta_{N,\alpha}\sin\varphi_{M,\beta}, \cos\vartheta_{N,\alpha} \right\}, \quad (3.71)$$

$$\vec{r}^{\,*}_{M,N,\alpha,\beta} = \left\{ \sin\vartheta_{N,\alpha}\cos\varphi^*_{M,\beta}, \sin\vartheta_{N,\alpha}\sin\varphi^*_{M,\beta}, \cos\vartheta_{N,\alpha} \right\}, \quad (3.72)$$

$$\vartheta_{N,\alpha} = \frac{\pi}{2N}(2\alpha-1),\ \varphi_{M,\beta} = \frac{2\pi}{M}(\beta-1),\ \varphi^*_{M,\beta} = \frac{2\pi}{M}\left(\beta-\frac{1}{2}\right),$$

$$\Delta\vartheta_N = \frac{\pi}{N},\ \Delta\varphi_M = \frac{2\pi}{M}. \quad (3.73)$$

მაშინ გამოსახულებებიდან (3.68) და (3.69) მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით ტოლობებს:

$$\frac{\pi}{2NM}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{M} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\vec{r}_{M,N,\alpha,\beta}\right|\right)P_n^m\left(\cos\vartheta_{N,\alpha}\right)\sin\vartheta_{N,\alpha}\cos\left(m\varphi_{M,\beta}\right) \approx$$

$$\approx j_n\left(kr_0\right)h_n^{(1)}\left(kr\right)P_n^m\left(\cos\vartheta\right)\cos\left(m\varphi\right), \quad (3.74)$$

$$\frac{\pi}{2NM}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{M} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\vec{r}^{\,*}_{M,N,\alpha,\beta}\right|\right)P_n^m\left(\cos\vartheta_{N,\alpha}\right)\sin\vartheta_{N,\alpha}\sin\left(m\varphi^*_{M,\beta}\right) \approx$$

$$\approx j_n\left(kr_0\right)h_n^{(1)}\left(kr\right)P_n^m\left(\cos\vartheta\right)\sin\left(m\varphi\right). \quad (3.75)$$

აქედან გამომდინარე, განხილული ტალღური ფუნქციები, $r > r_0$ არეში, მიახლოებით აღიწერება $N \times M$ რაოდენობის მონოპოლით. ისინი იმყოფებიან r_0 რადიუსის სფეროზე და ქმნიან სამგანზომილებიან მულტიპოლს. ამასთანავე გასაგებია, რომ N და M რიცხვების ერთდროული გაზრდა იწვევს (3.74) და (3.75) გამოსახულებების სიზუსტის მატებას. მიღებული მულტიპოლი წარმოადგენს მესამე სახეობის ორგანზომილებიანი მულტიპოლის სივრცულ ანალოგს.

ბოლოს აღვნიშნოთ, რომ თუ გამოსახულებაში (3.68) და (3.74) მოვახდენთ ჩასმას $m = 0$, მაშინ მივიღებთ:

$$\oint\!\!\!\!\oint_{S_0} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|\right)P_n\left(\cos\vartheta_0\right)dS_0 = 4\pi r_0^{\ 2} j_n\left(kr_0\right)h_n^{(1)}\left(kr\right)P_n\left(\cos\vartheta\right),$$

$$\frac{\pi}{2NM}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{M} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\vec{r}_{M,N,\alpha,\beta}\right|\right)P_n\left(\cos\vartheta_{N,\alpha}\right)\sin\vartheta_{N,\alpha}\approx$$

$$\approx j_n\left(kr_0\right)h_n^{(1)}\left(kr\right)P_n\left(\cos\vartheta\right),$$

რაც ველისთვის $h_n^{(1)}\left(kr\right)P_n\left(\cos\vartheta\right)$, შეესაბამება ახალი სახეობის მულტიპოლს, რომელიც წრფივისგან განსხვავებით, სფერულია.

§24. მესამე სახეობის სამგანზომილებიანი მულტიპოლის ცდომილება

განვიხილოთ გამოსახულებები (3.26), (3.27) და გავამრავლოთ მათი ორივე მხარე სიდიდეზე $j_n\left(kr_0\right)$. თუ გავითვალისწინებთ გამოსახულებას (3.12) კოეფიციენტისთვის $D_{n,m}$, მაშინ მატრიცული ფორმის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{2^{2-(n-m)\left[(n/2)-1\right]}}\frac{(n+m)!}{m}\frac{j_n\left(kr_0\right)}{\left(kr_0\right)^n}\sum_{\alpha=1}^{n-m+1}\sum_{\beta=1}^{2m}(-1)^{\alpha+\beta+m}\, h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\begin{pmatrix}\vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}\\ \vec{r}^{\,*}_{m,n,\alpha,\beta}\end{pmatrix}\right|\right)\approx$$

$$\approx j_n\left(kr_0\right)h_n^{(1)}\left(kr\right)P_n^m\left(\cos\vartheta\right)\begin{pmatrix}\cos\left(m\varphi\right)\\ \sin\left(m\varphi\right)\end{pmatrix}. \qquad (3.76)$$

აღვნიშნოთ, რომ ეს გამოსახულება სამართლიანია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $m=n$, ან $m=n-1$. გამოსახულებები (3.74) და (3.75) ასევე დავწეროთ მატრიცული ფორმით:

$$\frac{\pi}{2MN}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{M} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\begin{pmatrix}\vec{r}_{M,N,\alpha,\beta}\\ \vec{r}^{\,*}_{M,N,\alpha,\beta}\end{pmatrix}\right|\right)P_n^m\left(\cos\vartheta_{N,\alpha}\right)\sin\vartheta_{N,\alpha}\begin{pmatrix}\cos\left(m\varphi_{M,\beta}\right)\\ \sin\left(m\varphi^*_{M,\beta}\right)\end{pmatrix}\approx$$

$$\approx j_n(kr_0)\,h_n^{(1)}(kr)\,P_n^m(\cos\vartheta)\begin{pmatrix}\cos(m\varphi)\\ \sin(m\varphi)\end{pmatrix}. \qquad (3.77)$$

ამ გამოსახულებაში იგულისხმება, რომ $m \le n$ და ამიტომ ის უფრო ზოგადია. გარდა ამისა, მისი სიზუსტე გაიზრდება, თუ ერთდროულად გავზრდით M-ს და N-ს. ვხედავთ, რომ (3.76) და (3.77) გამოსახულებების მარჯვენა მხარეები ერთმანეთს ემთხვევა. ამიტომ, საინტერესოა შევადაროთ მათი მარცხენა მხარეებიც.

გამოსახულება (3.76)-ის მარცხენა მხარე აღწერს მულტიპოლს, რომელიც წარმოადგენს მეორე სახეობის ორგანზომილებიანი მულტიპოლის სივრცულ ანალოგს. (3.77)-ის მარცხენა მხარე კი აღწერს მულტიპოლს, რომელიც მესამე სახეობის ორგანზომილებიანი მულტიპოლის სივრცული ანალოგია. ამიტომ, ისინი შეგვიძლია აღვნიშნოთ შესაბამისად, როგორც $L_n^{II,m}(\vec{r})$ და $L_{n,N}^{III,m,M}(\vec{r})$, ანუ:

$$L_n^{II,m}(\vec{r}) = \frac{1}{2^{2-(n-m)\left[(n/2)-1\right]}}\frac{(n+m)!}{m}\frac{j_n(kr_0)}{(kr_0)^n}\times$$

$$\times\sum_{\alpha=1}^{n-m+1}\sum_{\beta=1}^{2m}(-1)^{\alpha+\beta+m}\,h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\begin{pmatrix}\vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}\\ \vec{r}^{\,*}_{m,n,\alpha,\beta}\end{pmatrix}\right|\right) \qquad (3.78)$$

და:

$$L_{n,N}^{III,m,M}(\vec{r}) = \frac{\pi}{2MN}\times$$

$$\times\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{M}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-r_0\begin{pmatrix}\vec{r}_{M,N,\alpha,\beta}\\ \vec{r}^{\,*}_{M,N,\alpha,\beta}\end{pmatrix}\right|\right)P_n^m\left(\cos\vartheta_{N,\alpha}\right)\sin\vartheta_{N,\alpha}\begin{pmatrix}\cos\left(m\varphi_{M,\beta}\right)\\ \sin\left(m\varphi^*_{M,\beta}\right)\end{pmatrix}. \qquad (3.79)$$

გამოსახულებაში (3.79) მოვახდინოთ ჩასმა $M=2m$ და $N=n-m+1$. შევამჩნიოთ, რომ (3.71)-(3.73)-დან, (3.3)-(3.5)-ის გათვალისწინებით, გვექნება:

$$\vartheta_{N,\alpha}\Big|_{N=n-m+1}=\frac{\pi(2\alpha-1)}{2(n-m+1)}=\vartheta_{m,n,\alpha}\,,$$

$$\varphi_{M,\beta}\Big|^{M=2m}=\frac{\pi}{m}(\beta-1)=\varphi_{m,\beta}\,,\;\varphi^{*}_{M,\beta}\Big|^{M=2m}=\frac{\pi}{m}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)=\varphi^{*}_{m,\beta}\,,$$

$$\vec{r}_{M,N,\alpha,\beta}\Big|^{M=2m}_{N=n-m+1}=\vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}\,,\;\vec{r}^{\,*}_{M,N,\alpha,\beta}\Big|^{M=2m}_{N=n-m+1}=\vec{r}^{\,*}_{m,n,\alpha,\beta}\,,$$

$$\cos\left(m\,\varphi_{M,\beta}\Big|^{M=2m}\right)=\sin\left(m\,\varphi^{*}_{M,\beta}\Big|^{M=2m}\right)=\cos\left(m\varphi_{m,\beta}\right)=\sin\left(m\varphi^{*}_{m,\beta}\right)=(-1)^{\beta+1}$$

და ამიტომ მივიღებთ:

$$L^{III,m,M}_{n,N}\left(\vec{r}\right)\Big|^{M=2m}_{N=n-m+1}=\frac{\pi}{4m(n-m+1)}\times$$

$$\times\sum_{\alpha=1}^{n-m+1}\sum_{\beta=1}^{2m}(-1)^{\beta+1}h^{(1)}_{0}\left(k\left|\vec{r}-r_{0}\begin{pmatrix}\vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}\\ \vec{r}^{\,*}_{m,n,\alpha,\beta}\end{pmatrix}\right|\right)P^{m}_{n}\left(\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right)\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\,. \quad (3.79^{*})$$

ახლა დავუშვათ, რომ სრულდება $m=n$, მაშინ $\alpha=1$ და ამიტომ:

$$P^{m}_{n}\left(\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right)\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\Big|^{\alpha=1}_{m=n}=P^{n}_{n}\left(\cos\vartheta_{n,n,1}\right)\sin\vartheta_{n,n,1}=$$

$$=P^{n}_{n}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}=P^{n}_{n}(0)=\frac{(-1)^{n}}{2^{n-1}}\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}\,.$$

აქ ჩვენ ვისარგებლეთ ცნობილი ფორმულებით:

$$P^{n}_{n}(x)=(-1)^{n}(2n-1)!!\left(1-x^{2}\right)^{n/2},\;(2n-1)!!=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}\,.$$

თუ დავუშვებთ, რომ ადგილი აქვს პირობას $m=n-1$, მაშინ α ინდექსი მიიღებს ორ მნიშვნელობას (1 და 2). როდესაც $\alpha=1$, მაშინ:

$$P^{m}_{n}\left(\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right)\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\Big|^{\alpha=1}_{m=n-1}=P^{n-1}_{n}\left(\cos\vartheta_{n-1,n,1}\right)\sin\vartheta_{n-1,n,1}=$$

$$= P_n^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} P_n^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2n-1}{2} P_{n-1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{(3n-1)/2}}\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$$

და როდესაც $\alpha = 2$, მაშინ:

$$P_n^m\left(\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right)\sin\vartheta_{m,n,\alpha}\Big|_{m=n-1}^{\alpha=2} = P_n^{n-1}\left(\cos\vartheta_{n-1,n,2}\right)\sin\vartheta_{n-1,n,2} =$$

$$= P_n^{n-1}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)\sin\frac{3\pi}{4} = P_n^{n-1}\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} P_n^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(-1)^n}{2^{(3n-1)/2}}\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}.$$

აქ ჩვენ ვისარგებლეთ ლეჟანდრის პოლინომების ცნობილი თვისებებით:

$$P_n^{n-1}(x) = x(2n-1)P_{n-1}^{n-1}(x),\ P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x).$$

თუ გავაერთიანებთ ამ შედეგებს, მივიღებთ, რომ როცა სრულდება ერთ-ერთი პირობა $m = n$ ან $m = n-1$, მაშინ ადგილი აქვს ზოგად ტოლობას:

$$P_n^m\left(\cos\vartheta_{m,n,\alpha}\right)\sin\vartheta_{m,n,\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha+m-1}}{2^{n-1+(n-m)[(n+1)/2]}}\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$$

და ამიტომ, გამოსახულება (3.79*) დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$\underset{(m=n)\vee(m=n-1)}{L_{n,N}^{III,m,M}}(\vec{r})\Big|_{N=n-m+1}^{M=2m} = \frac{\pi}{2^{n+1+(n-m)[(n+1)/2]}}\frac{(2n-1)!}{m(n-m+1)(n-1)!}\times$$

$$\times\sum_{\alpha=1}^{n-m+1}\sum_{\beta=1}^{2m}(-1)^{\alpha+\beta+m} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r} - r_0\begin{pmatrix}\vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}\\ \vec{r}^{\,*}_{m,n,\alpha,\beta}\end{pmatrix}\right|\right). \tag{3.80}$$

დავუბრუნდეთ გამოსახულებას (3.78). დავუშვათ, kr_0 ისეთი მცირე სიდიდეა, რომ შეგვიძლია ვისარგებლოთ $j_n(kr_0)$-ს ცნობილი ასიმპტოტური ფორმულით:

$$j_n\left(kr_0\right) \approx 2^n \left(kr_0\right)^n \frac{n!}{(2n+1)!},$$

(იხ. [20]). მაშინ გვექნება:

$$L_n^{II,m}\left(\vec{r}\right) \approx \frac{1}{2^{2-n-(n-m)\left[(n/2)-1\right]}} \frac{(n+m)!}{m} \frac{n!}{(2n+1)!} \times$$

$$\times \sum_{\alpha=1}^{n-m+1} \sum_{\beta=1}^{2m} (-1)^{\alpha+\beta+m} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r} - r_0\begin{pmatrix}\vec{r}_{m,n,\alpha,\beta}\\ \vec{r}^{\,*}_{m,n,\alpha,\beta}\end{pmatrix}\right|\right), \qquad (3.81)$$

თუ (3.80) და (3.81) გამოსახულებებს შევადარებთ, შევამჩნევთ, რომ ისინი განსხვავდება მხოლოდ ორმაგი ჯამის წინ მდებარე მამრავლით. ამ მამრავლების შეფარდებით, როდესაც $m = n$ ან $m = n-1$, მივიღებთ შესაბამის სიდიდეებს:

$$\frac{\pi}{4^n} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}, \; \frac{\pi}{4^n} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \frac{n\sqrt{2}}{2^n}.$$

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ (3.77)-ის მარცხენა ნაწილი ფორმით ახლოსაა (3.76)-ის მარცხენა ნაწილთან, როდესაც $M = 2m$, $N = n - m + 1$ და $m = n$ ან $m = n-1$. მიუხედავად ამისა, თვით მიახლოებითი ტოლობა (3.77), ასეთ შემთხვევაში, დიდ ცდომილებას მოგვცემს და აღარ იქნება სამართლიანი. ეს აიხსნება იმით, რომ N-ისთვის გვექნება მხოლოდ ორი შესაძლო მნიშვნელობა ($N = 1$ ან $N = 2$) და შესაბამისად, N-ს და M-ს ერთდროულად ვერ გავზრდით. ამიტომ, როდესაც $m = n$ ან $m = n-1$, გამოსახულება (3.76)-ით მიღებული მულტიპოლი, განხილულთაგან ყველაზე ოპტიმალურია.

თავი IV
წრფივი მულტიპოლი ორგანზომილებიან და სამგანზომილებიან შემთხვევაში

შეისწავლება სამგანზომილებიანი წრფივი მულტიპოლი, რომლის ერთ-ერთი მაგალითი მეორე თავში უკვე განვიხილეთ. ნაპოვნია მისი მონოპოლების ამპლიტუდების ახალი მნიშვნელობები, რომელთა გათვალისწინებითაც ზონალური სფერული ტალღური ფუნქცია უფრო ზუსტად აღიწერება.

ასევე შეისწავლება ორგანზომილებიანი წრფივი მულტიპოლი, წრიული ცილინდრის ტალღური ფუნქციების აღსაწერად. აღნიშნული მულტიპოლი შეიცავს მხოლოდ $n+1$ რაოდენობის მონოპოლს და ამიტომ, წრიულ მულტიპოლთან შედარებით, კიდევ უფრო მეტად ოპტიმალურია. ასეთი მულტიპოლი შემდეგ გამოყენებულია დიფრაციის ამოცანაში წრიულ ცილინდრზე.

სამგანზომილებიანი წრფივი მულტიპოლი გამოყენებულია სექტორალური და ტესერალური სფერული ტალღური ფუნქციების აღსაწერადაც. შედეგად მიღებულია ფიფქისებრი მულტიპოლი, რომლის ყველა მონოპოლი, სივრცული მულტიპოლებისგან განსხვავებით, ერთ სიბრტყეში იმყოფება.

§25. წრფივი მულტიპოლი ზონალური სფერული ტალღური ფუნქციებისთვის

მეორე თავში ვაჩვენეთ, რომ n რიგის ზონალური სფერული ტალღური ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს წრფივი მულტიპოლით, რომელიც შეიცავს $n+1$ რაოდენობის მონოპოლს:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)\delta_n\vec{\tau}\right|\right)\approx h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\gamma). \quad (4.1)$$

აქ $\vec{\tau}$ ერთეულოვანი ვექტორია, რომელიც განსაზღვრავს მულტიპოლის მიმართულებას. γ წარმოადგენს კუთხეს $\vec{\tau}$ ვექტორსა და სივრცის წერტილის $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორს შორის. მცირე სიდიდე

δ_n განსაზღვრავს მანძილს მეზობელ მონოპოლებს შორის. $A_{n,\alpha}$ მონოპოლების ამპლიტუდებია და განისაზღვრება, როგორც:

$$A_{n,\alpha}=\begin{cases}\sum_{m=0}^{\alpha}\frac{(-1)^{m+n}}{2^n}C_n^m C_{2(n-m)}^n C_{n-2m}^{\alpha-m}\left(k\delta_n\right)^{2m-n}, & \alpha=0,...,n-\lambda_n-1\\ \sum_{m=0}^{n-\alpha}\frac{(-1)^{m+n}}{2^n}C_n^m C_{2(n-m)}^n C_{n-2m}^{\alpha-m}\left(k\delta_n\right)^{2m-n}, & \alpha=n-\lambda_n,...,n\end{cases}. \quad (4.2)$$

გამოსახულება (4.1) მიღებულია ზოგადი დიფერენციალური გამოსახულებიდან (2.9), როდესაც მიმართულების წარმოებულები შესაბამისი რიგის ცენტრალური სასრული სხვაობებით ჩავანაცვლეთ.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ეს გამოსახულება შეიძლება სხვა გზითაც მივიღოთ. ამისთვის კვლავ განვიხილოთ შეკრების თეორემა (3.62):

$$h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|\right)=\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\,j_m\left(kr_0\right)h_m^{(1)}(kr)\,P_m(\cos\gamma),$$

სადაც იგულისხმება, რომ $r>r_0$ და $\vec{r}_0=r_0\vec{\tau}$. აღვნიშნოთ, რომ თუ სიდიდე kr_0 აკმაყოფილებს პირობას:

$$kr_0\le\frac{n}{2}, \quad (4.3)$$

მაშინ გარკვეული სიზუსტით შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ მწკრივის პირველი $n+1$ წევრით, ანუ დავწეროთ:

$$h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|\right)\approx\sum_{m=0}^{n}(2m+1)\,j_m\left(kr_0\right)h_m^{(1)}(kr)\,P_m(\cos\gamma). \quad (4.4)$$

აღსანიშნავია, რომ (4.4) გამოსახულების სიზუსტე იზრდება როგორც r მანძილის ზრდასთან, ასევე n-ის ზრდასთან ერთადაც.

ცხრილში მაგალითის სახით წარმოდგენილია ამ მიახლოებითი ტოლობის საშუალო ფარდობითი ცდომილებები და შესაბამისი მანძილები, n-ის რამდენიმე საწყისი მნიშვნელობისთვის (ცხრილი II). როგორც ვხედავთ, 9%-ზე ნაკლები ცდომილება (რომელიც

ჩვენთვის დასაშვები იქნება) მით უფრო მიიღწევა წერტილთან $\vec{r}_0$, რაც უფრო მეტია n. ამიტომ, ზოგადად ვიტყვით, რომ თუ სრულდება პირობა (4.3), მაშინ იმ არეში, სადაც $r > r_0$, ადგილი აქვს მიახლოებით ტოლობას (4.4):

n	1	2	3	4	5
$r \geqslant$	$3r_0$	$2r_0$	$1.7r_0$	$1.5r_0$	$1.4r_0$
$Error <$	9%	9%	8%	8%	9%

ცხრილი II. საშუალო ფარდობითი ცდომილება. $kr_0=n/2$

განვიხილოთ $\vec{\tau}$ ვექტორის გასწვრივ თანაბრად განაწილებული $n+1$ რაოდენობის წერტილები, რომლებიც მდებარეობს სიმეტრიულად კოორდინატთა სათავის მიმართ. მანძილი მეზობელ წერტილებს შორის კვლავ აღვნიშნოთ, როგორც δ_n. ამ წერტილების რადიუს-ვექტორებისთვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\vec{r}_{n,\alpha} = \left(\alpha - \frac{n}{2}\right)\delta_n \vec{\tau}\ ,\ \alpha = 0,...,n\ .$$

შევნიშნოთ, რომ თუ n კენტი რიცხვია, მაშინ α-ს ყველა მნიშვნელობისთვის, $\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right| \neq 0$; თუ n ლუწი რიცხვია, მაშინ $\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|_{\alpha=n/2} = \left|\vec{r}_{n,n/2}\right| = 0$ და შესაბამისი წერტილი კოორდინატთა სათავეში იმყოფება. განხილული განაწილების სრული l_n სიგრძე განისაზღვრება როგორც:

$$l_n = \left|\vec{r}_{n,n} - \vec{r}_{n,0}\right| = n\delta_n\ .$$

შევარჩიოთ სიდიდე δ_n ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა:

$$k\delta_n = 1\ . \qquad (4.5)$$

მაშინ $\vec{r}_{n,\alpha}$ ვექტორის ყველა მნიშვნელობისთვის გვექნება:

$$k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right| \leq \frac{n}{2}\ , \qquad (4.6)$$

სადაც ტოლობას აქვს ადგილი, მხოლოდ როდესაც $\alpha = 0$ და $\alpha = n$ (კიდურა წერტილებისთვის).

დავუშვათ, რომ n კენტი რიცხვია, მაშინ (4.6) პირობის საფუძველზე, ყველა $\vec{r}_{n,\alpha}$ ვექტორისთვის ($\alpha = 0,...,n$), შეგვიძლია დავწეროთ (4.4) გამოსახულება:

$$h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) \approx \sum_{m=0}^{n}(2m+1)\, j_m\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) h_m^{(1)}(kr)\, P_m\left(\cos\gamma_{n,\alpha}\right), \qquad (4.7)$$

სადაც $\gamma_{n,\alpha}$ წარმოადგენს კუთხეს $\vec{r}_{n,\alpha}$ და $\vec{r}$ ვექტორებს შორის. იგულისხმება, რომ:

$$kr > \frac{kl_n}{2} = \frac{n}{2}\,. \qquad (4.7^*)$$

თუ n ლუწი რიცხვია, მაშინ $\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right| = 0$, როდესაც $\alpha = n/2$ და კუთხე $\gamma_{n,\alpha}$ შინაარსს დაკარგავს. ამიტომ, გამოსახულებიდან (4.7) ეს შემთხვევა უნდა გამოვრიცხოთ. დავწერთ:

$$h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\Big|_{\alpha\neq n/2} \approx j_0\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\Big|_{\alpha\neq n/2} h_0^{(1)}(kr) +$$

$$+\sum_{m=1}^{n}(2m+1)\, j_m\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) P_m\left(\cos\gamma_{n,\alpha}\right)\Big|_{\alpha\neq n/2} h_m^{(1)}(kr)\,. \qquad (4.8)$$

აქ ცალკე გამოვყავით ჯამის ნულოვანი წევრი. იმ შემთხვევაში, როდესაც $\alpha = n/2$, გვექნება:

$$h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\Big|_{\alpha=n/2} = h_0^{(1)}(kr)\,. \qquad (4.9)$$

ახლა შევადგინოთ შემდეგი სახის ჯამი:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} B_{n,\alpha} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right),$$

სადაც $B_{n,\alpha}$ უცნობი კოეფიციენტებია. თუ n კენტია, მაშინ (4.7) გამოსახულების საფუძველზე დავწერთ:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} B_{n,\alpha} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) \approx$$

$$\approx \sum_{m=0}^{n}\left[\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} B_{n,\alpha} j_m\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) P_m\left(\cos\gamma_{n,\alpha}\right)\right](2m+1)\, h_m^{(1)}(kr)\,. \qquad (4.10)$$

თუ n ლუწია, მაშინ ანალოგიურად, დავწერთ:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} B_{n,\alpha} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)=(-1)^{n/2} B_{n,n/2} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{n,n/2}\right|\right)+$$

$$+\sum_{\substack{\alpha=0\\ \alpha\neq n/2}}^{n}(-1)^{\alpha} B_{n,\alpha} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right),$$

საიდანაც (4.8) და (4.9) გამოსახულებების საფუძველზე გვექნება:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} B_{n,\alpha} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\approx$$

$$\approx\left[(-1)^{n/2} B_{n,n/2}+\sum_{\substack{\alpha=0\\ \alpha\neq n/2}}^{n}(-1)^{\alpha} B_{n,\alpha} j_0\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\right] h_0^{(1)}(kr)+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\left[\sum_{\substack{\alpha=0\\ \alpha\neq n/2}}^{n}(-1)^{\alpha} B_{n,\alpha} j_m\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) P_m\left(\cos\gamma_{n,\alpha}\right)\right](2m+1) h_m^{(1)}(kr). \quad (4.11)$$

განვიხილოთ (4.10) გამოსახულების კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული ჯამი და გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} B_{n,\alpha} j_m\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) P_m\left(\cos\gamma_{n,\alpha}\right)=\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2}(-1)^{\alpha}\Big[B_{n,\alpha} j_m\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) P_m\left(\cos\gamma_{n,\alpha}\right)-$$

$$-B_{n,n-\alpha} j_m\left(k\left|\vec{r}_{n,n-\alpha}\right|\right) P_m\left(\cos\gamma_{n,n-\alpha}\right)\Big]. \quad (4.12)$$

ანალოგიურად, (4.11) გამოსახულების კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული ჯამები გარდავქმნათ შესაბამისად, როგორც:

$$\sum_{\substack{\alpha=0\\ \alpha\neq n/2}}^{n}(-1)^{\alpha} B_{n,\alpha} j_0\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)=$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1} (-1)^{\alpha} \left[B_{n,\alpha} j_0 \left(k \left| \vec{r}_{n,\alpha} \right| \right) + B_{n,n-\alpha} j_0 \left(k \left| \vec{r}_{n,n-\alpha} \right| \right) \right], \tag{4.13}$$

$$\sum_{\substack{\alpha=0 \\ \alpha \neq n/2}}^{n} (-1)^{\alpha} B_{n,\alpha} j_m \left(k \left| \vec{r}_{n,\alpha} \right| \right) P_m \left(\cos \gamma_{n,\alpha} \right) = \sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1} (-1)^{\alpha} \left[B_{n,\alpha} j_m \left(k \left| \vec{r}_{n,\alpha} \right| \right) P_m \left(\cos \gamma_{n,\alpha} \right) + \right.$$

$$\left. + B_{n,n-\alpha} j_m \left(k \left| \vec{r}_{n,n-\alpha} \right| \right) P_m \left(\cos \gamma_{n,n-\alpha} \right) \right]. \tag{4.14}$$

მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ როდესაც n კენტია ან ლუწია და შესაბამისად $\alpha = 0,...,(n-1)/2$, ან $\alpha = 0,...,(n/2)-1$, მაშინ სრულდება ტოლობა:

$$\left| \vec{r}_{n,n-\alpha} \right| = \left| \vec{r}_{n,\alpha} \right|. \tag{4.15}$$

გარდა ამისა, $\vec{r}_{n,n-\alpha}$ ვექტორი მიმართულია $\vec{\tau}$ ვექტორის გასწვრივ, ხოლო $\vec{r}_{n,\alpha}$ - მის საპირისპიროდ. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\gamma_{n,n-\alpha} = \gamma, \; \gamma_{n,\alpha} = \pi - \gamma,$$

საიდანაც:

$$P_m \left(\cos \gamma_{n,n-\alpha} \right) = P_m \left(\cos \gamma \right), \tag{4.16}$$

$$P_m \left(\cos \gamma_{n,\alpha} \right) = P_m \left(-\cos \gamma \right) = (-1)^m P_m \left(\cos \gamma \right). \tag{4.17}$$

აქ გამოვიყენეთ ლეჟანდრის პოლინომებისთვის ერთ-ერთი ცნობილი თვისება [12].

(4.15)-(4.17)-ის გათვალისწინებით, გამოსახულებები (4.12)-(4.14) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\sum_{\alpha=0}^{n} (-1)^{\alpha} B_{n,\alpha} j_m \left(k \left| \vec{r}_{n,\alpha} \right| \right) P_m \left(\cos \gamma_{n,\alpha} \right) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2} (-1)^{\alpha} \left[(-1)^m B_{n,\alpha} - B_{n,n-\alpha} \right] j_m \left(k \left| \vec{r}_{n,\alpha} \right| \right) P_m \left(\cos \gamma \right),$$

$$\sum_{\substack{\alpha=0\\ \alpha\neq n/2}}^{n}(-1)^{\alpha}B_{n,\alpha}j_0\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)=\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1}(-1)^{\alpha}\left(B_{n,\alpha}+B_{n,n-\alpha}\right)j_0\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right),$$

$$\sum_{\substack{\alpha=0\\ \alpha\neq n/2}}^{n}(-1)^{\alpha}B_{n,\alpha}j_m\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)P_m\left(\cos\gamma_{n,\alpha}\right)=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1}(-1)^{\alpha}\left[(-1)^{m}B_{n,\alpha}+B_{n,n-\alpha}\right]j_m\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)P_m\left(\cos\gamma\right).$$

ახლა ეს უკანასკნელი გამოსახულებები ჩავსვათ ფორმულებში (4.10) და (4.11). საბოლოოდ, თუ n კენტია, მივიღებთ:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha}B_{n,\alpha}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\approx$$

$$\approx\sum_{m=0}^{n}\left\{\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2}(-1)^{\alpha}\left[(-1)^{m}B_{n,\alpha}-B_{n,n-\alpha}\right]j_m\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\right\}\times$$

$$\times(2m+1)h_m^{(1)}(kr)P_m(\cos\gamma) \qquad (4.18)$$

და თუ n ლუწია, მაშინ:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha}B_{n,\alpha}h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\approx$$

$$\approx\left[(-1)^{n/2}B_{n,n/2}+\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1}(-1)^{\alpha}\left(B_{n,\alpha}+B_{n,n-\alpha}\right)j_0\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\right]h_0^{(1)}(kr)+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1}(-1)^{\alpha}\left[(-1)^{m}B_{n,\alpha}+B_{n,n-\alpha}\right]j_m\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\right\}\times$$

$$\times(2m+1)h_m^{(1)}(kr)P_m(\cos\gamma). \qquad (4.19)$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, $B_{n,\alpha}$ უცნობი კოეფიციენტებია. მოვითხოვოთ, რომ n-ის კენტი მნიშვნელობებისთვის, ისინი აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2}(-1)^{\alpha}\left[(-1)^{m}B_{n,\alpha}-B_{n,n-\alpha}\right]j_{m}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)=\frac{1}{2n+1}\delta_{m,n}, \quad (4.20)$$

სადაც $m=0,...,n$ და $\delta_{m,n}$ წარმოადგენს კრონეკერის სიმბოლოს. ანალოგიურად მოვითხოვოთ, რომ n-ის ლუწი მნიშვნელობებისთვის სრულდებოდეს პირობები:

$$\begin{cases}(-1)^{n/2}B_{n,n/2}+\displaystyle\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1}(-1)^{\alpha}\left(B_{n,\alpha}+B_{n,n-\alpha}\right)j_{0}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)=0\\ \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1}(-1)^{\alpha}\left[(-1)^{m}B_{n,\alpha}+B_{n,n-\alpha}\right]j_{m}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)=\frac{1}{2n+1}\delta_{m,n}\end{cases}, \quad (4.21)$$

სადაც $m=1,2,...,n$. გამოსახულებებიდან (4.18) და (4.19) ჩანს, რომ ასეთ შემთხვევაში, n-ის ყველა მნიშვნელობისთვის ($n=1,2,...$) ადგილი ექნება მიახლოებით ტოლობას:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha}B_{n,\alpha}h_{0}^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\approx\frac{1}{2n+1}\sum_{m=0}^{n}\delta_{m,n}(2m+1)h_{m}^{(1)}(kr)P_{m}(\cos\gamma),$$

საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha}B_{n,\alpha}h_{0}^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)\delta_{n}\vec{\tau}\right|\right)\approx h_{n}^{(1)}(kr)P_{n}(\cos\gamma), \quad (4.22)$$

რაც (4.1) გამოსახულების ეკვივალენტურია. განსხვავება იმაში მდგომარეობს, რომ აქ გაგვაჩნია სხვა კოეფიციენტები – $B_{n,\alpha}$, რომლებიც განისაზღვრება (4.20) და (4.21) გამოსახულებებიდან.

შევნიშნოთ, რომ (4.20) გამოსახულება (ისევე, როგორც (4.21)), წარმოადგენს უცნობი $B_{n,\alpha}$ კოეფიციენტების მიმართ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას. განტოლებათა რაოდენობა, ისევე როგორც უცნობთა რაოდენობა, ორივე შემთხვევაში შეადგენს $n+1$-ს.

მაშასადამე, $\vec{r}_{n,\alpha}$ რადიუს-ვექტორებით განსაზღვრულ წერტილებში მოთავსებული $h_0^{(1)}$ ტიპის წერტილოვანი წყაროები, ამპლიტუდებით $B_{n,\alpha}$, რომლებიც აკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემას (2.32) ან (2.33), ქმნის წრფივ მულტიპოლს, რომლის ჯამური ველია $h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\gamma)$. ამ მულტიპოლის სიგრძე, (4.5) პირობის თანახმად, განისაზღვრება როგორც:

$$l_n = n\delta_n = \frac{n}{k}$$

და (4.7*) გამოსახულებიდან გამომდინარე, იგულისხმება, რომ:

$$r > \frac{l_n}{2} = \frac{n}{2k}. \tag{4.22*}$$

თუ δ_n მანძილს მეზობელ მონოპოლებს შორის ისე შევარჩევთ, რომ შესრულდეს პირობა $k\delta_n < 1$, მაშინ (4.22) გამოსახულების სიზუსტე გაიზრდება. ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $\delta_n = 1/k$ და $l_n = n/k$ შეესაბამება δ_n მანძილის და l_n სიგრძის მაქსიმალურ დასაშვებ მნიშვნელობებს, როდესაც ჯერ კიდევ ძალაშია აღნიშნული გამოსახულება.

§26. მონოპოლების ამპლიტუდები წრფივ მულტიპოლში

როგორც აღვნიშნეთ, წრფივი მულტიპოლის $B_{n,\alpha}$ ამპლიტუდები აკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემას (4.20) ან (4.21), რაც დამოკიდებულია n-ის ლუწ-კენტობაზე. ახლა შევეცადოთ გარკვეული გარდაქმნებით შევამციროთ განტოლებების და უცნობების რაოდენობა.

პირველ რიგში დავუშვათ, რომ n კენტი რიცხვია და განვიხილოთ სისტემა (4.20). რადგან $m = 0,...,n$, ამიტომ იგი შეიცავს $n+1$ ლუწი რაოდენობის განტოლებას. იმ განტოლებათა რიცხვი, რომელთათვისაც m ლუწია, იქნება შესაბამისად $(n+1)/2$. თუ შემოვიღებთ ახალ β ინდექსს, სადაც $\beta = 0,...,(n-1)/2$, მაშინ აღნიშნული განტოლებები შეგვიძლია გადავწეროთ როგორც:

$$\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2} (-1)^{\alpha} j_{2\beta}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\left(B_{n,\alpha} - B_{n,n-\alpha}\right) = 0, \qquad (4.23)$$

ან გაშლილი სახით:

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2} (-1)^{\alpha} j_0\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\left(B_{n,\alpha} - B_{n,n-\alpha}\right) = 0 \\ \sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2} (-1)^{\alpha} j_2\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\left(B_{n,\alpha} - B_{n,n-\alpha}\right) = 0 \\ ------------------- \\ \sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2} (-1)^{\alpha} j_{n-1}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\left(B_{n,\alpha} - B_{n,n-\alpha}\right) = 0 \end{cases} . \qquad (4.24)$$

როგორც ვხედავთ, იგი წარმოადგენს $(n+1)/2$ რაოდენობის განტოლებისგან შემდგარ ერთგვაროვან სისტემას უცნობი $B_{n,\alpha} - B_{n,n-\alpha}$ სიდიდეების მიმართ. ამ სისტემის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს, რაც იმას ნიშნავს, რომ მას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. ამიტომ:

$$B_{n,n-\alpha} = B_{n,\alpha}, \ \alpha = 0,\dots,\frac{n-1}{2}. \qquad (4.25)$$

საწყისი (4.20) სისტემის დარჩენილი განტოლებებისთვის, m კენტია და მათი რაოდენობა ასევე შეადგენს $(n+1)/2$-ს. შემოღებული β ინდექსის გამოყენებით, ეს განტოლებები შეგვიძლია გადავწეროთ როგორც:

$$\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2} (-1)^{\alpha} j_{2\beta+1}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\left(B_{n,\alpha} + B_{n,n-\alpha}\right) = -\frac{1}{2n+1}\delta_{\beta,(n-1)/2},$$

ან (4.25)-ის გათვალისწინებით:

$$\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2} (-1)^{\alpha} j_{2\beta+1}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) B_{n,\alpha} = -\frac{1}{2(2n+1)}\delta_{\beta,(n-1)/2}. \qquad (4.26)$$

გაშლილი სახით, სისტემა (4.26) ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\alpha=0}^{(n-1)/2} (-1)^{\alpha}\, j_1\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) B_{n,\alpha} = 0 \\ \sum\limits_{\alpha=0}^{(n-1)/2} (-1)^{\alpha}\, j_3\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) B_{n,\alpha} = 0 \\ ---------------- \\ \sum\limits_{\alpha=0}^{(n-1)/2} (-1)^{\alpha}\, j_n\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) B_{n,\alpha} = -\dfrac{1}{2(2n+1)} \end{cases} . \qquad (4.26^*)$$

ამ უკანასკნელი სისტემის განტოლებების რაოდენობაა $(n+1)/2$, რაც საწყის (4.20) სისტემასთან შედარებით ორჯერ ნაკლებია. მისი ამოხსნა, ზოგადად, კომპიუტერის გამოყენებით შეიძლება. შედეგად, $B_{n,\alpha}$ კოეფიციენტების სიმრავლიდან გვეცოდინება მნიშვნელობები პირველი $(n+1)/2$ რაოდენობისთვის. დანარჩენ მნიშვნელობებს მარტივად ვიპოვით (4.25) გამოსახულებიდან.

ახლა გადავიდეთ (4.21) სისტემაზე, რომელიც ძალაშია, თუ n ლუწი რიცხვია. მისი პირველი განტოლება ცალკე გამოვყოთ:

$$(-1)^{n/2} B_{n,n/2} + \sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1} (-1)^{\alpha} \left(B_{n,\alpha} + B_{n,n-\alpha}\right) j_0\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) = 0 . \qquad (4.27)$$

დარჩენილი n რაოდენობიდან, ცალ-ცალკე დავაჯგუფოთ განტოლებები, რომელთათვისაც m კენტია და რომელთათვისაც m ლუწია. მივიღებთ:

$$\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1} (-1)^{\alpha}\, j_{2\beta-1}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\left(B_{n,\alpha} - B_{n,n-\alpha}\right) = 0 , \qquad (4.28)$$

$$\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1} (-1)^{\alpha}\, j_{2\beta}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right)\left(B_{n,\alpha} + B_{n,n-\alpha}\right) = \frac{1}{2n+1}\delta_{\beta,n/2} , \qquad (4.29)$$

სადაც $\beta = 1,...,n/2$.წინა შემთხვევის ანალოგიურად, ერთგვაროვანი (4.28) სისტემის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს და ამიტომ:

$$B_{n,n-\alpha} = B_{n,\alpha}\,,\ \alpha = 0,...,\frac{n}{2}-1\,. \tag{4.30}$$

შედეგად, (4.29) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1} (-1)^{\alpha}\, j_{2\beta}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) B_{n,\alpha} = \frac{1}{2(2n+1)}\delta_{\beta,n/2}\,, \tag{4.31}$$

რომელიც გაშლილად ჩაიწერება, როგორც:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\alpha=0}^{n/2-1} (-1)^{\alpha}\, j_{2}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) B_{n,\alpha} = 0 \\ \sum\limits_{\alpha=0}^{n/2-1} (-1)^{\alpha}\, j_{4}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) B_{n,\alpha} = 0 \\ -------------- \\ \sum\limits_{\alpha=0}^{n/2-1} (-1)^{\alpha}\, j_{n}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) B_{n,\alpha} = \dfrac{1}{2(2n+1)} \end{cases} . \tag{4.32}$$

მივიღეთ, რომ საწყისი (4.21) სისტემა დაყვანილია (4.32) სისტემაზე, რომელშიც განტოლებების და უცნობების რაოდენობა შეადგენს $n/2$-ს. მისი ამოხსნა, ასევე კომპიუტერის გამოყენებით შეიძლება. შედეგად, $B_{n,\alpha}$ კოეფიციენტების სიმრავლიდან გვეცოდინება მნიშვნელობები პირველი $n/2$ რაოდენობისთვის. მათი მეშვეობით შეგვიძლია გავიგოთ $B_{n,n/2}$ კოეფიციენტის მნიშვნელობა. მართლაც, თუ განტოლებაში (4.27) გავითვალისწინებთ გამოსახულებას (4.30), მაშინ მივიღებთ:

$$B_{n,n/2} = 2\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1} (-1)^{\alpha+(n/2)-1}\, j_{0}\left(k\left|\vec{r}_{n,\alpha}\right|\right) B_{n,\alpha}\,. \tag{4.33}$$

დანარჩენ კოეფიციენტებს ვიპოვით თავად (4.30) გამოსახულებიდან.

n	$A_{n,\alpha}$	$B_{n,\alpha}$	$\lvert B_{n,\alpha}\rvert - \lvert A_{n,\alpha}\rvert$
1	-1.000	-1.025	0.025
	-1.000	-1.025	0.025
2	1.500	1.612	0.112
	2.500	2.713	0.213
	1.500	1.612	0.112
3	-2.500	-2.805	0.305
	-6.000	-6.837	0.837
	-6.000	-6.837	0.837
	-2.500	-2.805	0.305
4	4.375	5.123	0.748
	13.750	16.387	2.637
	19.125	22.920	3.795
	13.750	16.387	2.637
	4.375	5.123	0.748

ცხრილი III. მონოპოლების ამპლიტუდების შედარება

მაშასადამე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ წრფივი მულტიპოლის მონოპოლებისთვის გაგვაჩნია ორი სახის ამპლიტუდები: $A_{n,\alpha}$ და $B_{n,\alpha}$, სადაც $\alpha = 0,...,n$. ამპლიტუდები $A_{n,\alpha}$ განისაზღვრება ფორმულით (4.2). ამპლიტუდები $B_{n,\alpha}$ განისაზღვრება გამოსახულებებიდან (4.26*), (4.35) ან (4.32), (4.33), (4.30), რაც დამოკიდებულია n-ის ლუწ-კენტობაზე. ცხრილში წარმოდგენილია აღნიშნული ამპლიტუდების საწყისი მნიშვნელობები, როდესაც $k\delta_n = 1$ (ცხრილი III).

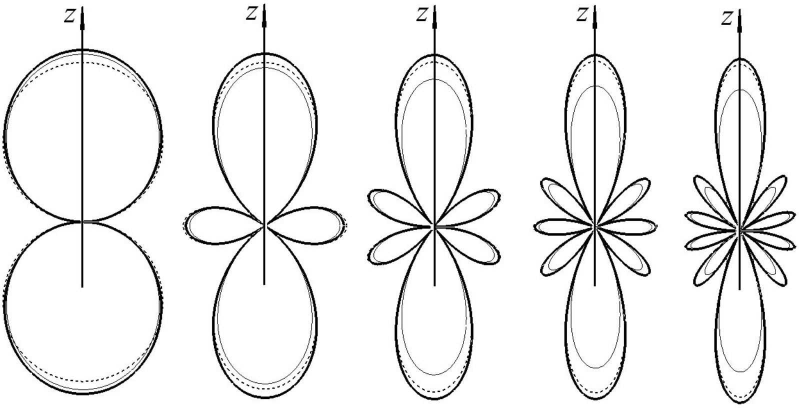
ჩანს, რომ $B_{n,\alpha}$ ამპლიტუდების მნიშვნელობები, მოდულით აღემატება $A_{n,\alpha}$ ამპლიტუდების შესაბამის მნიშვნელობებს:

$$\left|B_{n,\alpha}\right| > \left|A_{n,\alpha}\right|.$$

გარდა ამისა, მათი სხვაობა იზრდება n-ის ზრდასთან ერთად.

საინტერესოა გავიგოთ, რომელი ამპლიტუდების შემთხვევაში აღწერს წრფივი მულტიპოლი საწყის $h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\gamma)$ ველს უფრო ზუსტად. ამისთვის, ორივე შემთხვევაში, უნდა ავაგოთ წრფივი მულტიპოლის ველის დიაგრამები და ისინი საწყისი ველის დიაგრამას შევადაროთ. მიღებული შედეგი წარმოდგენილია ნახ. 20-

ზე. მსხვილი უწყვეტი მრუდი შეესაბამება $B_{n,\alpha}$ ამპლიტუდებს, წვრილი უწყვეტი მრუდი – $A_{n,\alpha}$ ამპლიტუდებს, ხოლო წყვეტილი მრუდი შეესაბამება საწყის ველს.



ნახ. 20. მულტიპოლების ველების დიაგრამები

მოყვანილი დიაგრამები აგებულია მულტიპოლების ცენტრებიდან მანძილებზე $R_n = \pi(l_n/2)$, სადაც $l_n = n/k$ მულტიპოლის სიგრძეა. როგორც ვხედავთ, როდესაც $n=1$ და $n=2$, $A_{n,\alpha}$ ამპლიტუდების მულტიპოლი უფრო ზუსტია, თუმცა n-ის გაზრდით მისი სიზუსტე მცირდება. $B_{n,\alpha}$ ამპლიტუდების შემთხვევაში კი პირიქით, სიზუსტე იზრდება n-ის გაზრდით. აქედან გამომდინარე, $B_{n,\alpha}$ ამპლიტუდების შემთხვევაში, საწყისი $h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\gamma)$ ველი უფრო ზუსტად აღიწერება და შესაბამისად, ეს მულტიპოლი უფრო ზუსტია.

§27. წრფივი მულტიპოლის განზოგადება

განვიხილოთ განაწილება, რომელიც შეიცავს $N+1$ რაოდენობის წერტილს ($N>n$), რადიუს-ვექტორებით:

$$\vec{r}_{N,\alpha} = \left(\alpha - \frac{N}{2}\right)\delta_N \vec{\tau}\ ,\ \alpha = 0,\dots,N\ .$$

დავუშვათ, რომ სიდიდე δ_N აკმაყოფილებს პირობას $k\delta_N = 1$ და შემოვიღოთ ახალი $C_{N,\alpha}$ უცნობი კოეფიციენტები. მაშინ (4.18) და (4.19) გამოსახულებების ანალოგიურად, N-ის კენტი და ლუწი მნიშვნელობებისთვის შესაბამისად გვექნება:

$$\sum_{\alpha=0}^{N} (-1)^{\alpha} C_{N,\alpha} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{N,\alpha}\right|\right) \approx$$

$$\approx \sum_{m=0}^{N} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{(N-1)/2} (-1)^{\alpha} \left[(-1)^{m} C_{N,\alpha} - C_{N,N-\alpha} \right] j_m\left(k\left|\vec{r}_{N,\alpha}\right|\right) \right\} (2m+1) h_m^{(1)}(kr) P_m(\cos\gamma),$$

$$\sum_{\alpha=0}^{N} (-1)^{\alpha} C_{N,\alpha} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\vec{r}_{N,\alpha}\right|\right) \approx$$

$$\approx \left[(-1)^{N/2} C_{N,N/2} + \sum_{\alpha=0}^{(N/2)-1} (-1)^{\alpha} \left(C_{N,\alpha} + C_{N,N-\alpha} \right) j_0\left(k\left|\vec{r}_{N,\alpha}\right|\right) \right] h_0^{(1)}(kr) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{N} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{(N/2)-1} (-1)^{\alpha} \left[(-1)^{m} C_{N,\alpha} + C_{N,N-\alpha} \right] j_m\left(k\left|\vec{r}_{N,\alpha}\right|\right) \right\} (2m+1) h_m^{(1)}(kr) P_m(\cos\gamma).$$

მოვითხოვოთ, რომ უცნობი $C_{N,\alpha}$ კოეფიციენტები, N-ის კენტი და ლუწი მნიშვნელობებისთვის შესაბამისად აკმაყოფილებდეს განტოლებათა სისტემებს:

$$\sum_{\alpha=0}^{(N-1)/2} (-1)^{\alpha} \left[(-1)^{m} C_{N,\alpha} - C_{N,N-\alpha} \right] j_m\left(k\left|\vec{r}_{N,\alpha}\right|\right) = \frac{1}{2n+1} \delta_{m,n}, \ m = 0,\dots,N$$

$$\begin{cases} (-1)^{N/2} C_{N,N/2} + \sum\limits_{\alpha=0}^{(N/2)-1} (-1)^{\alpha} \left(C_{N,\alpha} + C_{N,N-\alpha} \right) j_0\left(k\left|\vec{r}_{N,\alpha}\right|\right) = 0 \\ \sum\limits_{\alpha=0}^{(N/2)-1} (-1)^{\alpha} \left[(-1)^{m} C_{N,\alpha} + C_{N,N-\alpha} \right] j_m\left(k\left|\vec{r}_{N,\alpha}\right|\right) = \dfrac{1}{2n+1} \delta_{m,n} \end{cases}, \ m = 1,\dots,N.$$

ასეთ შემთხვევაში, წინა გამოსახულებებიდან გვექნება:

$$\sum_{\alpha=0}^{N} (-1)^{\alpha} C_{N,\alpha} h_0^{(1)}\left(k\left| \vec{r} - \left(\alpha - \frac{N}{2} \right) \delta_N \vec{\tau} \right| \right) \approx h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\gamma).$$

მაშასადამე, საწყისი n რიგის ველი $h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\gamma)$ შეიძლება აღიწეროს წრფივი მულტიპოლით, რომელიც შეიცავს $N+1$ რაოდენობის მონოპოლს. ამისთვის, მათი $C_{N,\alpha}$ ამპლიტუდები უნდა აკმაყოფილებდეს შესაბამის განტოლებათა სისტემას. რადგან $N>n$, ამიტომ მონოპოლების რაოდენობა, წინა შემთხვევებთან შედარებით, უფრო მეტია. ამიტომ, ასეთი მულტიპოლი არ იქნება მეტად ოპტიმალური. მონოპოლების მინიმალური დასაშვები რაოდენობის გასაგებად, საკმარისია შევხედოთ ნახ. 20-ზე წარმოდგენილ ამპლიტუდურ დიაგრამას, როდესაც $n=1$. იგი მიღებულია $n+1=2$ მონოპოლით. ასეთი დიაგრამის მიღება მხოლოდ ერთი მონოპოლით შეუძლებელია, რადგან ის ყველა მიმართულებით თანაბრად ასხივებს. ამიტომ, ზოგადად დავასკვნით, რომ (4.22) გამოსახულებით განსაზღვრული მულტიპოლი, რომელიც შეიცავს $n+1$ რაოდენობის მონოპოლს, განხილულთა შორის ყველაზე ოპტიმალურია.

§28. ორგანზომილებიანი წრფივი მულტიპოლი. ჯვრისებრი მულტიპოლი

ორგანზომილებიან შემთხვევაში ჩვენ ვიპოვეთ მონოპოლების სამი სტრუქტურა, რომლებითაც აღიწერება ველები:

$$H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi),\ H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi). \tag{4.34}$$

ვაჩვენეთ, რომ მათ შორის ყველაზე ოპტიმალურია წრიული მულტიპოლი, რომელიც წარმოიდგინება მცირე ρ_0 რადიუსზე თანაბრად განაწილებული $2n$ რაოდენობის მონოპოლით. ახლა შევეცდებით ვიპოვოთ კიდევ ერთი სახეობის მულტიპოლი, რისთვისაც ორგანზომილებიან შეკრების თეორემას გამოვიყენებთ:

$$H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0\right|\right)=J_0(k\rho_0)H_0^{(1)}(k\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_m(k\rho_0)H_m^{(1)}(k\rho)\cos(m\varphi),$$

$$\vec{\rho} = \rho\{\cos\varphi, \sin\varphi\}\,,\ \vec{\rho}_0 = \rho_0\{1,0\}\,,\ \rho > \rho_0\,.$$

(4.3) და (4.4) გამოსახულებების ანალოგიურად, შეიძლება ნაჩვენებ იქნას, რომ თუ სიდიდე $k\rho_0$ აკმაყოფილებს პირობას

$$k\rho_0 \le \frac{n}{4}\,, \tag{4.35}$$

მაშინ სამართლიანია მიახლოებითი ტოლობა:

$$H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0\right|\right) \approx J_0\left(k\rho_0\right)H_0^{(1)}\left(k\rho\right) + 2\sum_{m=1}^{n} J_m\left(k\rho_0\right)H_m^{(1)}\left(k\rho\right)\cos\left(m\varphi\right). \tag{4.36}$$

ახლა განვიხილოთ x ღერძზე თანაბრად განაწილებული $n+1$ რაოდენობის წერტილი, რომელთა რადიუს-ვექტორებია:

$$\vec{\rho}_{n,\alpha} = \left(\alpha - \frac{n}{2}\right)\delta_n\vec{x}\,,\ \alpha = 0,\dots,n\,.$$

წინა პარაგრაფებში განხილული სამგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად, $\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right| \ne 0$, თუ n კენტია და $\left|\vec{\rho}_{n,n/2}\right| = 0$, თუ n ლუწია. მოვითხოვოთ, რომ მანძილი δ_n ორ მეზობელ წერტილს შორის აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$k\delta_n = \frac{1}{2}, \tag{4.37}$$

მაშინ $\vec{\rho}_{n,\alpha}$ ვექტორის მნიშვნელობებისთვის გვექნება:

$$k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right| \le \frac{n}{4}\,, \tag{4.38}$$

სადაც ტოლობა სრულდება მხოლოდ კიდურა წერტილებისთვის ($\alpha = 0$ და $\alpha = 1$).

დავუშვათ, n კენტია. მაშინ (4.36) გამოსახულების თანახმად, უფლება გვექნება დავწეროთ:

$$H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right) \approx J_0\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)H_0^{(1)}\left(k\rho\right) +$$

$$+2\sum_{m=1}^{n} J_m\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)H_m^{(1)}\left(k\rho\right)\cos\left(m\varphi_{n,\alpha}\right),$$

სადაც $\varphi_{n,\alpha}$ წარმოადგენს კუთხეს $\vec{\rho}_{n,\alpha}$ და $\vec{\rho}$ ვექტორებს შორის, ხოლო $k\rho > n/4$.

თუ n ლუწია, მაშინ კუთხე $\varphi_{n,\alpha}$ შინაარსს დაკარგავს, როდესაც $\alpha = n/2$. ამიტომ დავწერთ:

$$H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)\Big|_{\alpha\neq n/2} \approx J_0\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)\Big|_{\alpha\neq n/2} H_0^{(1)}(k\rho)+$$

$$+2\sum_{m=1}^{n} J_m\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)\cos\left(m\varphi_{n,\alpha}\right)\Big|_{\alpha\neq n/2} H_m^{(1)}(k\rho),$$

$$H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)\Big|_{\alpha=n/2} = H_0^{(1)}(k\rho).$$

შემოვიღოთ $A_{n,\alpha}$ – ახალი უცნობი კოეფიციენტები და შევადგინოთ ჯამი

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right).$$

n-ის კენტი და ლუწი მნიშვნელობებისთვის, შესაბამისად მივიღებთ:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right) \approx \left[\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha} J_0\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)\right] H_0^{(1)}(k\rho)+$$

$$+2\sum_{m=1}^{n}\left[\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha} J_m\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)\cos\left(m\varphi_{n,\alpha}\right)\right] H_m^{(1)}(k\rho), \quad (4.39)$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right) \approx$$

$$\approx\left[(-1)^{n/2} A_{n,n/2} + \sum_{\substack{\alpha=0\\ \alpha\neq n/2}}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha} J_0\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)\right] H_0^{(1)}(k\rho)+$$

$$+2\sum_{m=1}^{n}\left[\sum_{\substack{\alpha=0\\ \alpha\neq n/2}}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha} J_m\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)\cos\left(m\varphi_{n,\alpha}\right)\right] H_m^{(1)}(k\rho). \quad (4.39^*)$$

(4.39) გამოსახულების კვადრატულ ფრჩხილებში მყოფი ჯამები შეგვიძლია გარდავქმნათ, როგორც:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha} J_0\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)=\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2}(-1)^{\alpha}\left(A_{n,\alpha}-A_{n,n-\alpha}\right) J_0\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)$$

და:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha} J_m\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)\cos\left(m\varphi_{n,\alpha}\right)=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2}(-1)^{\alpha}\left[(-1)^{m} A_{n,\alpha}-A_{n,n-\alpha}\right] J_m\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)\cos(m\varphi).$$

ანალოგიურად, (4.39*) გამოსახულების კვადრატულ ფრჩხილებში მყოფი ჯამებისთვის დავწერთ:

$$\sum_{\substack{\alpha=0\\ \alpha\neq n/2}}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha} J_0\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)=\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1}(-1)^{\alpha}\left(A_{n,\alpha}+A_{n,n-\alpha}\right) J_0\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)$$

და:

$$\sum_{\substack{\alpha=0\\ \alpha\neq n/2}}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha} J_m\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)\cos\left(m\varphi_{n,\alpha}\right)=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1}(-1)^{\alpha}\left[(-1)^{m} A_{n,\alpha}+A_{n,n-\alpha}\right] J_m\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)\cos(m\varphi).$$

აქ გავითვალისწინეთ გარემოება, რომ ზოგადად:

$$\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|=\left|\vec{\rho}_{n,n-\alpha}\right|,\ \cos\left(m\varphi_{n,n-\alpha}\right)=\cos(m\varphi),$$

$$\cos\left(m\varphi_{n,\alpha}\right)=\cos\left[m(\pi-\varphi)\right]=(-1)^{m}\cos(m\varphi),$$

სადაც $\alpha=0,\ldots,(n-1)/2$, თუ n კენტია და $\alpha=0,\ldots,(n/2)-1$, თუ n ლუწია.

მოყვანილი გარდაქმნების გათვალისწინებით, გამოსახულებები (4.39) და (3.39*) მიიღებს შემდეგ საერთო სახეს:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha}H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right)\approx$$

$$\approx S_{0,n}H_0^{(1)}(k\rho)+2\sum_{m=1}^{n}S_{m,n}H_m^{(1)}(k\rho)\cos(m\varphi), \qquad (4.40)$$

სადაც სიდიდეები $S_{0,n}$ და $S_{m,n}$ განიმარტება შემდეგნაირად:

$$S_{0,n}=\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2}(-1)^{\alpha}\left(A_{n,\alpha}-A_{n,n-\alpha}\right)J_0\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right),$$

$$S_{m,n}=\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2}(-1)^{\alpha}\left[(-1)^{m}A_{n,\alpha}-A_{n,n-\alpha}\right]J_m\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right),$$

თუ n კენტია;

$$S_{0,n}=(-1)^{n/2}A_{n,n/2}+\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1}(-1)^{\alpha}\left(A_{n,\alpha}+A_{n,n-\alpha}\right)J_0\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right),$$

$$S_{m,n}=\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1}(-1)^{\alpha}\left[(-1)^{m}A_{n,\alpha}+A_{n,n-\alpha}\right]J_m\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right),$$

თუ n ლუწია.

ახლა მოვითხოვოთ, რომ ეს სიდიდეები აკმაყოფილებდეს პირობებს:

$$S_{0,n}=0\,,\ S_{m,n}=\frac{1}{2}\delta_{m,n}\,, \qquad (4.41)$$

მაშინ (4.40) გამოსახულებიდან საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha}H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)\delta_n\vec{x}\right|\right)\approx H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi). \qquad (4.42)$$

ახლა შემოვიღოთ წერტილების ასეთივე განაწილება y ღერძის გასწვრივ. მათი რადიუს-ვექტორები იქნება:

$$\vec{\rho}^{\,*}_{n,\alpha} = \left(\alpha - \frac{n}{2}\right)\delta_n \vec{y}\,,\ \alpha = 0,...,n$$

და (4.42) გამოსახულების ანალოგიურად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sum_{\alpha=0}^{n} (-1)^{\alpha} A_{n,\alpha} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho} - \left(\alpha - \frac{n}{2}\right)\delta_n \vec{y}\right|\right) \approx H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi)\,. \qquad (4.43)$$

მაშასადამე, ამოცანა დაყვანილია იმაზე, რომ ვიპოვოთ უცნობი $A_{n,\alpha}$ კოეფიციენტები. ამისთვის გამოვიყენოთ (4.41) გამოსახულებები, რომლებიც გაშლილი სახით წარმოადგენს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას. თუ n კენტია, მაშინ:

$$\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2} (-1)^{\alpha}\left[(-1)^m A_{n,\alpha} - A_{n,n-\alpha}\right] J_m\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right) = \frac{1}{2}\delta_{m,n}\,,$$

სადაც $m = 0,...,n$. ანალოგიურად, თუ n ლუწია, მაშინ:

$$\begin{cases} (-1)^{n/2} A_{n,n/2} + \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1} (-1)^{\alpha}\left(A_{n,\alpha} + A_{n,n-\alpha}\right) J_0\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right) = 0 \\ \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1} (-1)^{\alpha}\left[(-1)^m A_{n,\alpha} + A_{n,n-\alpha}\right] J_m\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right) = \frac{1}{2}\delta_{m,n} \end{cases}$$

და ამ შემთხვევაში $m = 1,...,n$.

მოყვანილი სისტემები, (4.20) და (4.21) სისტემების ეკვივალენტურია. ამიტომ, მსგავსი ანალიზის საფუძველზე საბოლოოდ ვიტყვით, რომ თუ n კენტია, მაშინ $A_{n,\alpha}$ კოეფიციენტების პირველი $(n+1)/2$ მნიშვნელობა განისაზღვრება სისტემიდან:

$$\sum_{\alpha=0}^{(n-1)/2} (-1)^{\alpha} J_{2\beta+1}\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right) A_{n,\alpha} = -\frac{1}{4}\delta_{\beta,(n-1)/2}\,,\ \beta = 0,...,\frac{n-1}{2}\,, \qquad (4.44)$$

ხოლო დანარჩენ მნიშვნელობებს ვიპოვით, როგორც:

$$A_{n,n-\alpha} = A_{n,\alpha}\,,\ \alpha = 0,...,\frac{n-1}{2}\,. \qquad (4.45)$$

ანალოგიურად, თუ n ლუწია, მაშინ ამ კოეფიციენტების პირველ $n/2$ მნიშვნელობას ვიპოვით სისტემიდან:

$$\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1} (-1)^{\alpha} J_{2\beta}\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right) A_{n,\alpha} = \frac{1}{4}\delta_{\beta,n/2}\,,\ \beta = 1,...,n/2\,. \qquad (4.46)$$

მომდევნო $A_{n,n/2}$ კოეფიციენტებს ვიპოვით, როგორც:

$$A_{n,n/2} = 2\sum_{\alpha=0}^{(n/2)-1} (-1)^{\alpha+(n/2)-1} J_0\left(k\left|\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right) A_{n,\alpha}\,, \qquad (4.47)$$

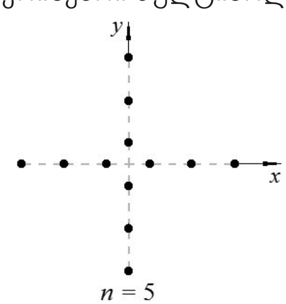
ხოლო დანარჩენებს – ტოლობიდან:

$$A_{n,n-\alpha} = A_{n,\alpha}\,,\ \alpha = 0,...,\frac{n}{2}-1\,. \qquad (4.48)$$

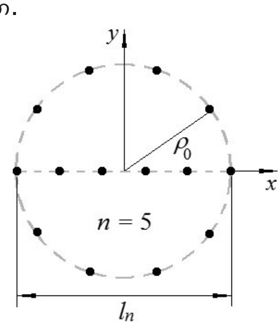
მაშასადამე, გამოსახულება (4.42) აღწერს x ღერძის გასწვრივ მოთავსებულ წრფივ ორგანზომილებიან მულტიპოლს, რომლის ჯამური ველია $H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi)$. ანალოგიურად, გამოსახულება (4.43) აღწერს ასეთივე მულტიპოლს y ღერძის გასწვრივ და მისი ჯამური ველია $H_n^{(1)}(k\rho)\sin(n\varphi)$. აღნიშნული გამოსახულებების გაერთიანებით მივიღებთ გამოსახულებას (1.12*) ფუნქციისთვის:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} A_{n,\alpha}\left[H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_{n,\alpha}\right|\right) \pm iH_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}_{n,\alpha}^{\,*}\right|\right)\right] \approx H_n^{(1)}(k\rho)\,e^{\pm in\varphi}\,.$$

იგი აღწერს მულტიპოლს, რომელიც შედგება ორი ჯვარედინად მდებარე წრფივი მულტიპოლისგან (ნახ. 21). ამიტომ შეგვიძლია მას ჯვრისებრი მულტიპოლი ვუწოდოთ.



ნახ. 21. ჯვრისებრი მულტიპოლი



ნახ. 22. წრიული და წრფივი მულტიპოლი, როდესაც $l_n=2\rho_0$

წრფივი მულტიპოლის მაქსიმალური დასაშვები სიგრძე, განისაზღვრება როგორც:

$$l_n = n\delta_n = \frac{n}{2k} \cdot$$

თუ დავუშვებთ, რომ მეზობელ მონოპოლებს შორის δ_n მანძილისთვის სრულდება პირობა $\delta_n < 1/(2k)$, მაშინ (4.42) და (4.43) გამოსახულებების სიზუსტე გაიზრდება. ეს მულტიპოლი პირველ თავში განხილული წრიული მულტიპოლისგან იმით გამოირჩევა, რომ შეიცავს მონოპოლების ნაკლებ რაოდენობას ($n+1$).

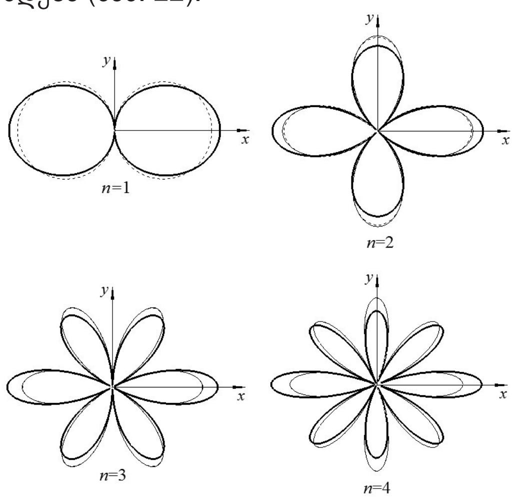
განვიხილოთ წრიული მულტიპოლის გამოსახულება:

$$\frac{1}{4nJ_n(k\rho_0)} \sum_{\alpha=1}^{2n} (-1)^{\alpha+1} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho} - \rho_0 \vec{\tilde{\rho}}_{n,\alpha}\right|\right) \approx H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi), \quad (4.49)$$

სადაც ვექტორი $\vec{\tilde{\rho}}_{n,\alpha}$ განისაზღვრება, როგორც:

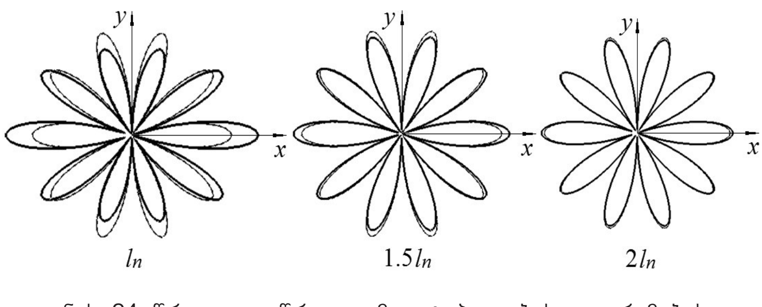
$$\vec{\tilde{\rho}}_{n,\alpha} = \{\cos\varphi_{n,\alpha}, \sin\varphi_{n,\alpha}\}, \ \varphi_{n,\alpha} = \frac{\pi}{n}(\alpha - 1).$$

შევარჩიოთ ამ მულტიპოლის ρ_0 რადიუსი, როგორც $\rho_0 = n/(4k)$. ასეთ შემთხვევაში, მისი დიამეტრი წრფივი მულტიპოლის l_n სიგრძის ტოლი გახდება (ნახ. 22).



ნახ. 23. წრფივი და წრიული მულტიპოლების დიაგრამები

საინტერესოა გავიგოთ, ასეთ შემთხვევაში რომელი მათგანი აღწერს, საწყის $H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi)$ ველს უფრო ზუსტად. ამისთვის უნდა განვიხილოთ (4.42) და (4.49) გამოსახულებების მარცხენა ნაწილის დიაგრამები და ისინი არა მარტო ერთმანეთს, არამედ საწყისი ველის დიაგრამასაც შევადაროთ. მიღებული შედეგები n -ის პირველი ოთხი მნიშვნელობისთვის წარმოდგენილია ნახ. 23-ზე. მსხვილი უწყვეტი მრუდი შეესაბამება წრფივ მულტიპოლს, წვრილი უწყვეტი მრუდი – წრიულ მულტიპოლს, ხოლო წყვეტილი მრუდი შეესაბამება საწყის ველს. მოყვანილი დიაგრამები აგებულია მულტიპოლების ცენტრიდან l_n მანძილზე. როგორც ვხედავთ, როდესაც $n=1$, წრფივი და წრიული მულტიპოლების დიაგრამები ერთმანეთს ემთხვევა და საგრძნობლად განსხვავდება საწყისი ველის დიაგრამისგან. n-ის ზრდასთან ერთად, წრიული მულტიპოლის დიაგრამა საწყისი ველის დიაგრამას იმდენად უახლოვდება, რომ მოყვანილ მასშტაბებში ორივე მრუდი ერთმანეთს ემთხვევა. ეს თანხვედრაშია პირველ თავში წარმოდგენილ შედეგებთან (ნახ. 6 და ნახ. 7). რაც შეეხება წრფივ მულტიპოლს, მისი ცდომილება n -ის ზრასთან ერთად არ მცირდება.



ნახ. 24. წრფივი და წრიული მულტიპოლების დიაგრამების დამოკიდებულება მანძილზე

ნახ. 24-ზე, შემთხვევისთვის $n=5$, წარმოდგენილია დიაგრამების ცვლილება, როდესაც ვზრდით მანძილს მონოპოლების ცენტრიდან. როგორც ვხედავთ, წრფივი მულტიპოლის დიაგრამა თანდათან უახლოვდება საწყისი ველის დიაგრამას და $2l_n$ მანძილზე მაღალი სიზუსტით ემთხვევა მას. თუმცა, ყოველ ჯერზე, წრიული

მულტიპოლის დიაგრამა უფრო ახლოსაა საწყისი ველის დიაგრამასთან და მაშასადამე, მას უფრო მაღალი სიზუსტე გააჩნია.

წრფივი მულტიპოლის სიზუსტის გაზრდა შეგვიძლია უზრუნველვყოთ δ_n სიდიდის შემცირებით ($\delta_n < 1/(2k)$). გარდა ამისა, წრიულ მულტიპოლთან შედარებით, იგი ნაკლები რაოდენობის მონოპოლს შეიცავს და ამიტომ, უფრო ოპტიმალურია. თუმცა იგივე ზომის წრიული მულტიპოლი შედარებით ზუსტი იქნება.

§29. ცილინდრული ტალღური ფუნქციების წრფივი კომბინაცია და მისი წარმოდგენა წრფივი მულტიპოლით

საწყისი $H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi)$ ფუნქციებისგან შევადგინოთ წრფივი კომბინაცია:

$$F_N(\vec{\rho}) = a_0 H_0^{(1)}(k\rho) + \sum_{n=1}^{N} a_n H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi)$$

და ჩავთვალოთ, რომ a_0, ... , a_N ცნობილი კოეფიციენტებია. თუ ამ კომბინაციის წევრებს გარდავქმნით (4.42) ფორმულით, მაშინ გვექნება:

$$F_N(\vec{\rho}) \approx a_0 H_0^{(1)}(k\rho) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} a_n A_{n,\alpha} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho} - \left(\alpha - \frac{n}{2}\right)\delta_n \vec{x}\right|\right).$$

ახლა n-ის ყველა განხილული მნიშვნელობისთვის შევარჩიოთ ერთი საერთო სიდიდე δ_N. მაგალითად, (4.37) პირობის თანახმად, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\delta_N = 1/(2k)$. მაშინ სამგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად, კომბინაცია $F_N(\vec{\rho})$, მიახლოებით წარმოიდგინება ერთი წრფივი მულტიპოლით, რომელშიც მონოპოლების რაოდენობაა $2N+1$,

$$F_N(\vec{\rho}) \approx \sum_{m=0}^{2N} \Theta_{N,m} H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho} - \vec{\rho}\,'_{N,m}\right|\right). \qquad (4.50)$$

ამ მონოპოლების $\vec{\rho}\,'_{N,m}$ რადიუს-ვექტორებისთვის გვექნება:

$$\vec{\rho}\,'_{N,m} = \frac{m-N}{2}\delta_N \vec{x}, \quad m = 0,\dots,2N \qquad (4.51)$$

და მანძილი მეზობელ მონოპოლებს შორის შეადგენს $\delta_N/2$-ს. მულტიპოლის სრული სიგრძეა:

$$L_N = N\delta_N = \frac{N}{2k}\cdot$$

მონოპოლების $\Theta_{N,m}$ ამპლიტუდები დამოკიდებულია როგორც მოცემულ $a_0,...,a_N$ კოეფიციენტებზე, ასევე კომბინაციის თითოეული წევრიდან მიღებულ $A_{n,\alpha}$ ამპლიტუდებზე,

$$\Theta_{N,m} = \begin{cases} \sum\limits_{\beta=0}^{\lambda_m} (-1)^{\beta} a_{N-m+2\beta} A_{N-m+2\beta,\beta}, & m = 0,...,N-1 \\ a_0 + \sum\limits_{\beta=0}^{\lambda_m - 1} (-1)^{\beta+1} a_{2(\beta+1)} A_{2(\beta+1),\beta+1}, & m = N \\ \sum\limits_{\beta=0}^{\lambda_{2N-m}} (-1)^{m-N+\beta} a_{m-N+2\beta} A_{m-N+2\beta,m-N+\beta}, & m = N+1,...,2N \end{cases} . \quad (4.52)$$

აქ სიდიდეები λ_m და λ_{2N-m} განისაზღვრება პირველ თავში მოყვანილი (1.6) გამოსახულებიდან. (4.50) გამოსახულების სიზუსტე გაიზრდება, თუ ავირჩევთ δ_N-ის უფრო ნაკლებ მნიშვნელობას ($\delta_N < 1/(2k)$). მულტიპოლის სიგრძეც შესაბამისად შემცირდება.

§30. წრიულ ცილინდრზე დიფრაქციის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა წრფივი მულტიპოლებით

კვლავ განვიხილოთ ბრტყელი ტალღის დიფრაქციის ამოცანა წრიულ იდეალურ გამტარ ცილინდრზე. როგორც უკვე აღვნიშნეთ (§10), ამ ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი ჯამის სახით:

$$E_{z,N}(\vec{\rho}) = -\frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} H_0^{(1)}(k\rho) - 2\sum_{n=1}^{N} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi), \quad (4.53)$$

სადაც a ცილინდრის რადიუსია, ხოლო წევრების N რაოდენობა განისაზღვრება როგორც $N=\lceil ka \rceil$. იგულისხმება, რომ დაცემული ტალღა ერთეულოვანი ამპლიტუდისაა, ვრცელდება x ღერძის საპირისპიროდ და პოლარიზებულია z ცილინდრის ღერძის პარალელურად. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$a_0=-\frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)},\ a_n=-2(-i)^n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}, \tag{4.54}$$

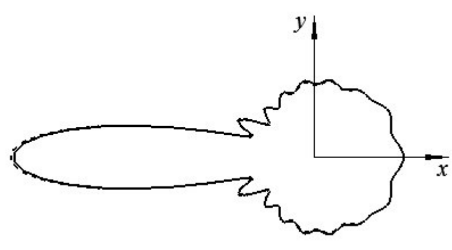
მაშინ ეს მიახლოებითი ამონახსნი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$E_{z,N}(\vec{\rho})=a_0H_0^{(1)}(k\rho)+\sum_{n=1}^{N}a_nH_n^{(1)}(k\rho)\cos(n\varphi),$$

რომელიც ემთხვევა ზემოთ განხილულ წრფივ კომბინაციას. §10-ში ჩვენ ჩავანაცვლეთ ამ კომბინაციის წევრები მეორე სახეობის მულტიპოლებით და მოყვანილი მიახლოებითი ამონახსნი წარმოვიდგინეთ წრეწირზე განაწილებული მონოპოლებით. ახლა აღნიშნული წევრები ჩავანაცვლოთ წრფივი მულტიპოლებით, რისთვისაც გამოვიყენებთ (4.42) გამოსახულებას. მიღებული ახალი მიახლოებითი ამონასხნი, (4.50)-ს და (4.51)-ს თანახმად, იქნება:

$$E_{z,N}(\vec{\rho})\approx\sum_{m=0}^{2N}\Theta_{N,m}H_0^{(1)}\left(k\left|\vec{\rho}-\frac{m-N}{2}\delta_N\vec{x}\right|\right), \tag{4.55}$$

სადაც $\Theta_{N,m}$ კოეფიციენტები განისაზღვრება ფორმულით (4.52).



ნახ. 25. გაბნეული ველის დიაგრამების შედარება

ნახ. 25-ზე მოყვანილია მიახლოებითი ამონახსნების დიაგრამების შედარება, როდესაც $ka = 9.1$ და შესაბამისად, $N = 10$. უწყვეტი და წყვეტილი მრუდები შეესაბამება (4.55) და (4.53) ამონახსნებს. ამ მრუდების მაღალი სიზუსტით დამთხვევა მიუთითებს (4.55) გამოსახულების კარგ მიახლოებაზე (4.53) გამოსახულებასთან.

სამგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად, აქაც უნდა აღვნიშნოთ, რომ მიახლოებითი ამონახსნი (4.55) გულისხმობს ზუსტი ამონახსნის (4.54) კოეფიციენტების გამოყენებას. აქედან გამომდინარე, იგი საინტერესოა იმ თვალსაზრისით, რომ გაბნეული ველი აღწერილია მხოლოდ $2N+1$ რაოდენობის მონოპოლით.

§31. წრფივი მულტიპოლის გამოყენება სექტორალური და ტესერალური სფერული ტალღური ფუნქციებისთვის. ფიფქისებრი მულტიპოლი

წრფივი მულტიპოლების გამოყენებით, შევეცადოთ აღვწეროთ (3.1) სექტორალური და ტესერალური სფერული ტალღური ფუნქციები. ამისთვის, სიბრტყეში $y = 0$, განვიხილოთ $n+1$ რაოდენობის ერთეულოვანი ვექტორი:

$$\vec{\tau}_{n,\alpha} = \left\{ \sin\vartheta_{n,\alpha}, 0, \cos\vartheta_{n,\alpha} \right\}, \tag{4.56}$$

სადაც n ნატურალური რიცხვია და $\alpha = 0,\dots,n$. კუთხეს $\vartheta_{n,\alpha}$, განვსაზღვრავთ n-ის ლუწ-კენტობის მიხედვით. თუ n ლუწია, მაშინ:

$$\vartheta_{n,\alpha} = \frac{\pi}{n+1}\alpha, \tag{4.57}$$

ხოლო თუ n კენტია:

$$\vartheta_{n,\alpha} = \frac{\pi}{n+1}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right). \tag{4.57*}$$

განვიხილოთ ასევე სივრცის წერტილი, სფერული კოორდინატებით (r, ϑ, φ) და მისი რადიუს-ვექტორი $\vec{r}$-ით აღვნიშნოთ. თუ $\gamma_{n,\alpha}$ წარმოადგენს კუთხეს $\vec{\tau}_{n,\alpha}$ და $\vec{r}$ ვექტორებს შორის, მაშინ:

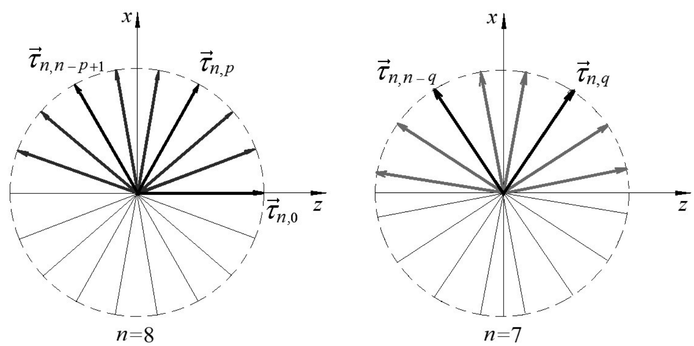
$$\cos\gamma_{n,\alpha} = \sin\vartheta_{n,\alpha}\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta_{n,\alpha}\cos\vartheta . \qquad (4.58)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ n ლუწია და $\alpha = 0$, მაშინ $\vartheta_{n,0} = 0$ და შესაბამისი ვექტორი $\vec{\tau}_{n,0}$ მიმართულია z ღერძის გასწვრივ. ასეთ შემთხვევაში, ყველა დანარჩენ $\vec{\tau}_{n,\alpha}$ ვექტორს ($\alpha \neq 0$) ეყოლება „მეწყვილე ვექტორი„, რომელიც მდებარეობს მასთან სიმეტრიულად, x ღერძის მიმართ (ნახ. 26 ა). ამიტომ, (4.57)-ის თანახმად, ადგილი ექნება პირობას:

$$\vartheta_{n,n-p+1} = \pi - \vartheta_{n,p}\,,\ \ p = 1,...,\frac{n}{2}. \qquad (4.59)$$

თუ n კენტი რიცხვია (ნახ. 27 ბ), მაშინ „მეწყვილე ვექტორი„ ეყოლება ყველა $\vec{\tau}_{n,\alpha}$ ვექტორს და (4.57*)-ის თანახმად, ადგილი ექნება პირობას:

$$\vartheta_{n,n-q} = \pi - \vartheta_{n,q}\,,\ \ q = 0,...,\frac{n-1}{2}. \qquad (4.60)$$



ნახ. 26. განხილული ვექტორები

დავწეროთ ფორმულა (4.22), $\vec{\tau}_{n,\alpha}$ ვექტორებისთვის:

$$\sum_{\beta=0}^{n}(-1)^{\beta} B_{n,\beta} h_0^{(1)}\left(k\left|\vec{r} - \left(\beta - \frac{n}{2}\right)\delta_n \vec{\tau}_{n,\alpha}\right|\right) \approx h_n^{(1)}(kr) P_n\left(\cos\gamma_{n,\alpha}\right), \qquad (4.61)$$

სადაც $\delta_n = 1/k$. გამოსახულება (4.22*)-ის თანახმად იგულისხმება, რომ $r > n/(2k)$. გავამრავლოთ (4.61)-ის ორივე მხარე სიდიდეზე

$(-1)^{\alpha} F_{n,\alpha}^{m}$, სადაც $F_{n,\alpha}^{m}$ ახალი უცნობი კოეფიციენტებია, $m=1,2,...$ და $m \le n$. შემდეგ კი ავჯამოთ α ინდექსით. მივიღებთ:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{n}(-1)^{\alpha+\beta} F_{n,\alpha}^{m} B_{n,\beta} h_{0}^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\left(\beta-\frac{n}{2}\right)\delta_{n}\vec{\tau}_{n,\alpha}\right|\right)\approx$$

$$\approx\left[\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} F_{n,\alpha}^{m} P_{n}\left(\cos\gamma_{n,\alpha}\right)\right]h_{n}^{(1)}(kr). \qquad (4.62)$$

გამოვიყენოთ ფორმულა (3.65), საიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$P_{n}\left(\cos\gamma_{n,\alpha}\right)=P_{n}\left(\cos\vartheta_{n,\alpha}\right)P_{n}(\cos\vartheta)+$$

$$+2\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(n-\nu)!}{(n+\nu)!}P_{n}^{\nu}\left(\cos\vartheta_{n,\alpha}\right)P_{n}^{\nu}(\cos\vartheta)\cos(\nu\varphi).$$

მაშინ (4.62) გამოსახულების მარჯვენა ნაწილში მდებარე ჯამისთვის დავწერთ:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} F_{n,\alpha}^{m} P_{n}\left(\cos\gamma_{n,\alpha}\right)=\left[\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} F_{n,\alpha}^{m} P_{n}\left(\cos\vartheta_{n,\alpha}\right)\right]P_{n}(\cos\vartheta)+$$

$$+2\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(n-\nu)!}{(n+\nu)!}\left[\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} F_{n,\alpha}^{m} P_{n}^{\nu}\left(\cos\vartheta_{n,\alpha}\right)\right]P_{n}^{\nu}(\cos\vartheta)\cos(\nu\varphi).$$

თუ შევარჩევთ უცნობ $F_{n,\alpha}^{m}$ კოეფიციენტებს ისე, რომ სრულდებოდეს პირობები:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} F_{n,\alpha}^{m} P_{n}\left(\cos\vartheta_{n,\alpha}\right)=0, \qquad (4.63)$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} F_{n,\alpha}^{m} P_{n}^{\nu}\left(\cos\vartheta_{n,\alpha}\right)=\frac{1}{2}\frac{(n+\nu)!}{(n-\nu)!}\delta_{\nu,m},\ \nu=1,...,n, \qquad (4.64)$$

მაშინ:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} F_{n,\alpha}^{m} P_{n}\left(\cos\gamma_{n,\alpha}\right)=\sum_{\nu=1}^{n}\delta_{\nu,m}P_{n}^{\nu}\left(\cos\vartheta\right)\cos(\nu\varphi)=P_{n}^{m}\left(\cos\vartheta\right)\cos(m\varphi),$$

რაც გამომდინარეობს დაშვებული პირობიდან $m\le n$. შედეგად, (4.62) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{n}(-1)^{\alpha+\beta} F_{n,\alpha}^{m}B_{n,\beta}h_{0}^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\left(\beta-\frac{n}{2}\right)\delta_{n}\vec{\tau}_{n,\alpha}\right|\right)\approx$$

$$\approx h_{n}^{(1)}(kr)P_{n}^{m}\left(\cos\vartheta\right)\cos(m\varphi). \qquad (4.65)$$

თუ შემოვიღებთ $\vec{\tau}_{n,\alpha}^{*}$ ვექტორებს $x=0$ სიბრტყეში, როგორც:

$$\vec{\tau}_{n,\alpha}^{*}=\left\{0,\sin\vartheta_{n,\alpha},\cos\vartheta_{n,\alpha}\right\}, \qquad (4.66)$$

მაშინ მიღებული (4.65) გამოსახულების ანალოგიურად გვექნება:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{n}(-1)^{\alpha+\beta} F_{n,\alpha}^{m}B_{n,\beta}h_{0}^{(1)}\left(k\left|\vec{r}-\left(\beta-\frac{n}{2}\right)\delta_{n}\vec{\tau}_{n,\alpha}^{*}\right|\right)\approx$$

$$\approx h_{n}^{(1)}(kr)P_{n}^{m}\left(\cos\vartheta\right)\sin(m\varphi). \qquad (4.67)$$

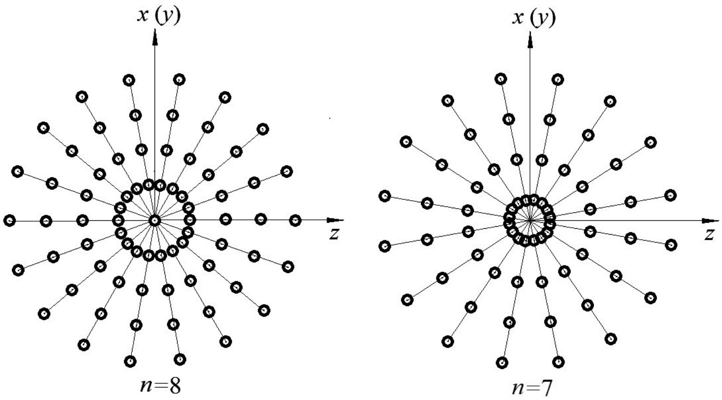
ცნობილი განმარტების თანახმად, სფერულ ტალღურ ფუნქციებს $h_{n}^{(1)}(kr)P_{n}^{m}(\cos\vartheta)\cos(m\varphi)$ და $h_{n}^{(1)}(kr)P_{n}^{m}(\cos\vartheta)\sin(m\varphi)$ ეწოდება სექტორალური ან ტესერალური, თუ შესაბამისად, $m=n$, ან $0<m<n$.

მოყვანილი პირობები (4.63) და (4.64) გავაერთიანოთ ერთი გამოსახულებით:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} F_{n,\alpha}^{m}P_{n}^{\mu}\left(\cos\vartheta_{n,\alpha}\right)=\frac{1}{2}\frac{(n+\mu)!}{(n-\mu)!}\delta_{\mu,m},\ \mu=0,...,n. \qquad (4.68)$$

გასაგებია, რომ n და m რიცხვები ფიქსირებულია, ხოლო $\alpha=0,...,n$. ამიტომ, (4.68) წარმოადგენს წრფივ ალგებრულ გა-

ნტოლებათა სისტემას უცნობი $F_{n,\alpha}^{m}$ კოეფიციენტების მიმართ. განტოლებებისა და უცნობების რაოდენობაა შესაბამისად $n+1$.



ნახ. 27. ფიფქისებრი მულტიპოლი

მიღებული (4.65) (ისევე, როგორც (4.67)) გამოსახულების მარცხენა ნაწილი შეესაბამება წრფივი მულტიპოლების ერთობლიობას. ყოველი ასეთი მულტიპოლი მდებარეობს $y=0$ $(x=0)$ სიბრტყეში და შედგება $n+1$ რაოდენობის მონოპოლისგან. თუ n ლუწი რიცხვია, მაშინ ყოველ განხილულ წრფივ მულტიპოლს ეყოლება ცენტრალური მონოპოლი, რომელიც კოორდინატთა სათავეშია. შესაბამისად, მონოპოლების სრული რაოდენობა ჯამურ მულტიპოლში იქნება $(n+1)^2-n$, (ნახ. 27 ა)). თუ n კენტი რიცხვია, მაშინ ჯამური მულტიპოლის მონოპოლების სრული რაოდენობა იქნება $(n+1)^2$, (ნახ. 27 ბ). მონოპოლების ამპლიტუდებია $F_{n,\alpha}^{m}B_{n,\beta}$, სადაც $B_{n,\beta}$ წრფივი მულტიპოლის კოეფიციენტებია, ხოლო $F_{n,\alpha}^{m}$ სიდიდეები განისაზღვრება (4.68) სისტემიდან.

მიღებული მულტიპოლი ბრტყელია და ამით იგი პრინციპულად განსხვავდება მესამე თავში შესწავლილი სივრცული მულტიპოლებისგან. ნახ. 27-ზე წარმოდგენილი აგებულების შესაბამისად, მას შეგვიძლია ფიფქისებრი მულტიპოლი ვუწოდოთ.

§32. მონოპოლების ამპლიტუდები ფიფქისებრ მულტიპოლში

შევეცადოთ შევამციროთ (4.68) სისტემის განტოლებებისა და უცნობების რაოდენობა. შევნიშნოთ, რომ თუ n ლუწია, მაშინ მისი მარცხენა ნაწილი, (4.59)-ის გათვალისწინებით, გარდაიქმნება როგორც:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} F_{n,\alpha}^{m} P_n^{\mu}\left(\cos\vartheta_{n,\alpha}\right)=F_{n,0}^{m} P_n^{\mu}\left(\cos\vartheta_{n,0}\right)+\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha} F_{n,\alpha}^{m} P_n^{\mu}\left(\cos\vartheta_{n,\alpha}\right)=$$

$$=F_{n,0}^{m} P_n^{\mu}(1)+\sum_{p=1}^{n/2}(-1)^{p}\left[F_{n,p}^{m} P_n^{\mu}\left(\cos\vartheta_{n,p}\right)-F_{n,n-p+1}^{m} P_n^{\mu}\left(\cos\vartheta_{n,n-p+1}\right)\right]=$$

$$=\delta_{\mu,0} F_{n,0}^{m}+\sum_{p=1}^{n/2}(-1)^{p}\left[F_{n,p}^{m}-(-1)^{\mu} F_{n,n-p+1}^{m}\right] P_n^{\mu}\left(\cos\vartheta_{n,p}\right).$$

შედეგად, (4.68) მიიღებს სახეს:

$$\delta_{\mu,0} F_{n,0}^{m}+\sum_{p=1}^{n/2}(-1)^{p}\left[F_{n,p}^{m}-(-1)^{\mu} F_{n,n-p+1}^{m}\right] P_n^{\mu}\left(\cos\vartheta_{n,p}\right)=\frac{1}{2}\frac{(n+\mu)!}{(n-\mu)!}\delta_{\mu,m}, \quad (4.69)$$

სადაც $\mu=0,\ldots,n$. გადავწეროთ (4.69) შემდეგი ეკვივალენტური სახით:

$$\begin{cases} F_{n,0}^{m}+\sum_{p=1}^{n/2}(-1)^{p}\left(F_{n,p}^{m}-F_{n,n-p+1}^{m}\right) P_n\left(\cos\vartheta_{n,p}\right)=0 \\ \sum_{p=1}^{n/2}(-1)^{p}\left(F_{n,p}^{m}-F_{n,n-p+1}^{m}\right) P_n^{2s}\left(\cos\vartheta_{n,p}\right)=\frac{1}{2}\frac{(n+2s)!}{(n-2s)!}\delta_{2s,m} \\ \sum_{p=1}^{n/2}(-1)^{p}\left(F_{n,p}^{m}+F_{n,n-p+1}^{m}\right) P_n^{2s-1}\left(\cos\vartheta_{n,p}\right)=\frac{1}{2}\frac{(n+2s-1)!}{(n-2s+1)!}\delta_{2s-1,m} \end{cases}, \quad (4.69^*)$$

სადაც $s=1,\ldots,n/2$.

ანალოგიურად, თუ n კენტია, მაშინ (4.68) გამოსახულების მარცხენა ნაწილი, (4.60)-ის გათვალისწინებით, გარდაიქმნება შემდეგნაირად:

$$\sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha} F_{n,\alpha}^{m} P_{n}^{\mu}\left(\cos\vartheta_{n,\alpha}\right)=\sum_{q=0}^{(n-1)/2}(-1)^{q}\left[F_{n,q}^{m} P_{n}^{\mu}\left(\cos\vartheta_{n,q}\right)-\right.$$

$$\left.-F_{n,n-q}^{m} P_{n}^{\mu}\left(\cos\vartheta_{n,n-q}\right)\right]=\sum_{q=0}^{(n-1)/2}(-1)^{q}\left[F_{n,q}^{m}+(-1)^{\mu} F_{n,n-q}^{m}\right] P_{n}^{\mu}\left(\cos\vartheta_{n,q}\right).$$

ამიტომ (4.68) მიიღებს სახეს:

$$\sum_{q=0}^{(n-1)/2}(-1)^{q}\left[F_{n,q}^{m}+(-1)^{\mu} F_{n,n-q}^{m}\right] P_{n}^{\mu}\left(\cos\vartheta_{n,q}\right)=\frac{1}{2}\frac{(n+\mu)!}{(n-\mu)!}\delta_{\mu,m}. \qquad (4.70)$$

იგი შემდეგი სისტემის ეკვივალენტურია:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{q=0}^{(n-1)/2}(-1)^{q}\left(F_{n,q}^{m}+F_{n,n-q}^{m}\right) P_{n}^{2t}\left(\cos\vartheta_{n,q}\right)=\frac{1}{2}\frac{(n+2t)!}{(n-2t)!}\delta_{2t,m}\\ \displaystyle\sum_{q=0}^{(n-1)/2}(-1)^{q}\left(F_{n,q}^{m}-F_{n,n-q}^{m}\right) P_{n}^{2t+1}\left(\cos\vartheta_{n,q}\right)=\frac{1}{2}\frac{(n+2t+1)!}{(n-2t-1)!}\delta_{2t+1,m}\end{cases}, \qquad (4.70^{*})$$

სადაც $t=0,\ldots,(n-1)/2$.

საწყისი ფუნქციების n და m ინდექსებისთვის გვექნება ოთხი შესაძლო შემთხვევა, რომლებსაც ცალ-ცალკე განვიხილავთ.

I. n და m, ორივე ლუწი რიცხვებია. სისტემა (4.69*)-დან ჩანს, რომ $\delta_{2s-1,m}=0$, $s=1,\ldots,n/2$ და ამიტომ, მისი მესამე განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\sum_{p=1}^{n/2}(-1)^{p}\left(F_{n,p}^{m}+F_{n,n-p+1}^{m}\right) P_{n}^{2s-1}\left(\cos\vartheta_{n,p}\right)=0.$$

იგი წარმოადგენს წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას $F_{n,p}^{m}+F_{n,n-p+1}^{m}$ სიდიდეების მიმართ. მისი დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისგან და მაშასადამე, გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, საიდანაც:

$$F^m_{n,n-p+1} = -F^m_{n,p}\,,\;\; p = 1,...,n/2\,. \tag{4.71}$$

შედეგად, (4.69*)-ის პირველი და მეორე განტოლებიდან, შესაბამისად გვექნება:

$$F^m_{n,0} = 2\sum_{p=1}^{n/2}(-1)^{p+1}P_n\left(\cos\vartheta_{n,p}\right)F^m_{n,p}\,, \tag{4.72}$$

$$\sum_{p=1}^{n/2}(-1)^p P_n^{2s}\left(\cos\vartheta_{n,p}\right)F^m_{n,p} = \frac{1}{4}\frac{(n+2s)!}{(n-2s)!}\delta_{2s,m}\,. \tag{4.73}$$

სისტემა (4.73) შეიცავს $n/2$ რაოდენობის განტოლებას და უცნობს. მისი ამოხსნის შედეგად გვეცოდინება $F^m_{n,p}$ კოეფიციენტების მნიშვნელობები, როდესაც $p = 1,...,n/2$. დანარჩენ კოეფიციენტებს $F^m_{n,0}$ და $F^m_{n,n-p+1}$, შემდეგ ვიპოვით (4.72) და (4.71) გამოსახულებებიდან.

II. n ლუწია და m კენტია. (4.69*) სისტემიდან გვექნება $\delta_{2s,m} = 0$, $s = 1,...,n/2$ და მეორე განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\sum_{p=1}^{n/2}(-1)^p\left(F^m_{n,p} - F^m_{n,n-p+1}\right)P_n^{2s}\left(\cos\vartheta_{n,p}\right) = 0\,.$$

ამ სისტემის ამონახსნია:

$$F^m_{n,n-p+1} = F^m_{n,p}\,,\;\; p = 1,...,n/2 \tag{4.74}$$

და პირველი და მესამე განტოლებიდან შესაბამისად გვექნება:

$$F^m_{n,0} = 0\,, \tag{4.75}$$

$$\sum_{p=1}^{n/2}(-1)^p P_n^{2s-1}\left(\cos\vartheta_{n,p}\right)F^m_{n,p} = \frac{1}{4}\frac{(n+2s-1)!}{(n-2s+1)!}\delta_{2s-1,m}\,. \tag{4.76}$$

(4.76) სისტემის ამოხსნის შედეგად გვეცოდინება $F^m_{n,p}$ კოეფიციენტების მნიშვნელობები, როდესაც $p = 1,...,n/2$. დანარჩენ $F^m_{n,n-p+1}$ კოეფიციენტებს, შემდეგ ვიპოვით (4.74) გამოსახულებიდან. (4.75)-ის თანახმად, დარჩენილი $F^m_{n,0}$ კოეფიციენტი უდრის ნულს.

III. n კენტია და m ლუწია. (4.70*) სისტემის მეორე განტოლებიდან ვხედავთ, რომ $\delta_{2t+1,m}=0$, როდესაც $t=0,...,(n-1)/2$ და შესაბამისად:

$$\sum_{q=0}^{(n-1)/2}(-1)^q\left(F_{n,q}^m-F_{n,n-q}^m\right)P_n^{2t+1}\left(\cos\vartheta_{n,q}\right)=0\,.$$

აქედან ვიღებთ:

$$F_{n,n-q}^m=F_{n,q}^m,\ q=0,...,(n-1)/2\,. \tag{4.77}$$

ამიტომ, (4.70*)-ის პირველი განტოლებიდან გვექნება:

$$\sum_{q=0}^{(n-1)/2}(-1)^q\,P_n^{2t}\left(\cos\vartheta_{n,q}\right)F_{n,q}^m=\frac{1}{4}\frac{(n+2t)!}{(n-2t)!}\delta_{2t,m}\,. \tag{4.78}$$

მიღებული (4.78) სისტემის ამოხსნის შედეგად ვიპოვით $F_{n,q}^m$ კოეფიციენტებს, სადაც $q=0,...,(n-1)/2$. დანარჩენ $F_{n,n-q}^m$ კოეფიციენტებს კი ვიპოვით გამოსახულებიდან (4.77).

IV. ბოლო შემთხვევაა, როდესაც n და m, ორივე კენტია. ასეთ შემთხვევაში, (4.70*) სისტემაში $\delta_{2t,m}=0$, როდესაც $t=0,...,(n-1)/2$ და ამიტომ პირველი განტოლებიდან გვექნება:

$$\sum_{q=0}^{(n-1)/2}(-1)^q\left(F_{n,q}^m+F_{n,n-q}^m\right)P_n^{2t}\left(\cos\vartheta_{n,q}\right)=0\,.$$

ამ სისტემის ამონახსნია:

$$F_{n,n-q}^m=-F_{n,q}^m,\ q=0,...,(n-1)/2 \tag{4.79}$$

და შესაბამისად, მეორე განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\sum_{q=0}^{(n-1)/2}(-1)^q\,P_n^{2t+1}\left(\cos\vartheta_{n,q}\right)F_{n,q}^m=\frac{1}{4}\frac{(n+2t+1)!}{(n-2t-1)!}\delta_{2t+1,m}\,. \tag{4.80}$$

(4.80) სისტემის ამოხსნის შედეგად ვიპოვით $F_{n,q}^m$ კოეფიციენტებს, სადაც $q=0,...,(n-1)/2$, ხოლო დანარჩენებს, გამოსახულებიდან (4.79).

მაშასადამე, ოთხივე შემთხვევაში, სისტემის განტოლებათა და უცნობთა რაოდენობა შემცირებულია. თუ n ლუწია, მაშინ გვრჩება $n/2$ რაოდენობის განტოლება. თუ n კენტია, ამ შემთხვევაში ეს რაოდენობა იქნება $(n+1)/2$.

გამოყენებული ლიტერატურა:

[1]. I. Darsavelidze, „Multipole Representation of Certain Cylindrical Wave Functions“, XXVIII-th IEEE International Seminar/ Workshop DIPED-2023, pp. 97-101.

[2]. J. A. Stratton, Theory of Electromagnetism, Moscow, 1948.

[3]. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Table of integrals, sums, series and products, Moscow, 1963.

[4]. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, G. M. Kobelkov, Numerical methods, Moscow, 2011.

[5]. M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, US Department of commerce, 1972.

[6]. A. E. Fridman, Fundamentals of metrology. Modern course, St. Petersburg, 2008.

[7]. R. S. Zaridze, I.M. Petoev, V.A. Tabatadze, B.V. Poniava, ‘’The Method of Auxiliary Sources for antenna synthesis problems“. Proceedings of XVIII-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2013), September 23-26, 2013, Lviv, Ukraine. pp. 13-19.

[8]. R. Zaridze, V. Tabatadze, I. Petoev-Darsavelidze, G. Popov, „Determination of the Location of Field Singularities Using the Method of Auxiliary Sources“, Journal of Communications Technology and Electronics, 2019, Vol. 64, No. 11, pp. 1170–1178.

[9]. https://en.wikipedia.org/wiki/De–Moivre%27s–formula

[10]. L. D. Goldstein, N. V. Zernov. Electromagnetic fields and waves, Soviet Radio, Moscow, 1971.

[11]. I. Darsavelidze, „Multipole Representation of Zonal Spherical Wave Functions“, XXVIII-th IEEE International Seminar/ Workshop DIPED-2023, pp. 102-105.

[12]. https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre–polynomials

[13]. G. Mie, «Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen», Leipzig, Ann. Phys. 330, 377-445 (1908).

[14]. M. Born, E. Wolf, Principles of Optics. Pergamon Press, 1968.

[15]. E. A. Ivanov, Diffraction of Electromagnetic Waves by Two Bodies. Science and Technology, Minsk, 1968.

[16]. I. Darsavelidze, R. Zaridze, „About One Method for the Approximate Solution the Plane Wave Diffraction Problem by the Sphere“, IEEE 2nd Ukrainian Microwave Week, Paper Collection, November 14th – 18th, 2022.

[17]. I. Darsavelidze, „Multipole Representation of Tesseral and Sectoral Spherical Wave Functions“, XXVIII-th IEEE International Seminar/Workshop DIPED-2023, pp. 106-111.

[18]. https://en.wikipedia.org/wiki/Associated–Legendre–polynomials

[19]. S. L. Sobolev, Equations of mathematical physics, Moscow, 1966.

[20]. https://www.math.usm.edu/lambers/mat415/notes415–1018.pdf

ISBN 978-9941-8-6415-5
9 789941 864155