

თამაზ ზერევიძე
რუსუდან მესხია

**მათაშახი
ჯონოთიხისა და
ბიზნისსათვის - 2**

A decorative graphic element consisting of two overlapping diamond shapes (rhombuses) with double outlines, positioned over a horizontal bar that is light green on top and light blue on the bottom.

**მათემატიკა ეკონომიკისა და
ბიზნესისათვის – 2**

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თამაზ ზერეკიძე, რუსუდან მესხია

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის – 2

ამოცანათა კრებული ეკონომიკისა და
ბიზნესის ფაკულტეტის სტუდენტებისთვის



უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

კრებული განკუთვნილია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ეკონომიკისა და ბიზნესის ფაკულტეტის სტუდენტებისთვის და შედგენილია მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის – 2 სასწავლო კურსის სილაბუსის მიხედვით.

კრებული წარმოადგენს ძირითად სახელმძღვანელოს მათემატიკის პრაქტიკულ კურსში.

რედაქტორები: ლერი გოგოლაძე, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

ნიკოლოზ გუნია, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, პროფესორი

რეცენზენტები: ვახტანგ ცაგარეიშვილი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

გიორგი ჭელიძე, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, პროფესორი

გამოცემულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადანყვეტილებით.

© ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2019

ISBN 978-9941-13-867-6 (pdf)

სარჩევი

1. დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები	7
1.1. ფუნქციის წარმოებულნი	7
1.2. რთული ფუნქციის წარმოებულნი	9
1.3. წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი	10
1.4 მაღალი რიგის წარმოებულები	11
1.5. ფუნქციის დიფერენციალი	12
1.6. განუსაზღვრელობის გახსნის ლოპიტალის წესი	13
1.7. ფუნქციის მონოტონურობა და ექსტრემუმი	14
1.8. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა. გადაღუნვის წერტილები	18
1.9. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები	20
1.10. ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება	21
2. ორი ცვლადის ფუნქცია	30
2.1. ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი	30
2.2. ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები	31
2.3. ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი	32
2.4. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები	33
2.5. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი	35
2.6. ორი ცვლადის ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი. ლაგრანჟის მამარავლთა მეთოდი	36
3. ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტები	37
3.1. პირველადი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი	37
3.2. ცვლადის გარდაქმნა განუსაზღვრელ ინტეგრალში (ჩასმის ხერხი)	38
3.3. ნაწილობითი ინტეგრება	42
4. განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი გამოყენება	44
4.1. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა	44
4.2. ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა	47
4.3. ბრუნვითი სხეულის მოცულობა	48

5. დიფერენციალური განტოლებები	49
5.1. განცალკევებული პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება	49
5.2. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება	50
5.3. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება	50

1. დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები

1.1. ფუნქციის წარმოებული

ძირითად ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილი

- $(c)' = 0$, c მუდმივია.
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x > 0$, $\alpha \in R$;
 $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in R$, $n \in N$.
- $(a^x)' = a^x \ln a$;
 $(e^x)' = e^x$.
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- $(\sin x)' = \cos x$.
- $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

განარმოების წესები

ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- $(cf(x))' = cf'(x)$, c მუდმივია.
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$.
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულ და გამოთვალეთ წარმოებული მითითებულ წერტილში

1.1. $y = 5^2 + x^2, y'(3).$

1.2. $y = 3^5 + 5^3 + x.$

1.3. $y = x^n + nx, y'(0).$

1.4. $y = mx^n + nx^m, y'(1).$

1.5. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 0.1x^9.$

1.6. $y = \frac{2}{x^4} + \frac{3\sqrt[3]{x}}{x} + \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}} + 1.$

1.7. $y = \frac{5x^2 + 4\sqrt[3]{x} + 3x^4}{2\sqrt{x}}, y'(1).$

1.8. $y = \frac{z^2 + 3\sqrt[3]{z} + 5}{z^3}.$

1.9. $y = \frac{2t^3 + t^6 + 1}{3 \ln 2}, y'(0).$

1.10. $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}.$

1.11. $y = 2e^x + \ln x.$

1.12. $y = 2^x \cdot \log_2 x.$

1.13. $y = \ln 2 \cdot 5^x.$

1.14. $y = \frac{2^{3x}}{3^{2x}} + \ln x.$

1.15. $y = 4 \sin x + x \cos x + \cos 2,$
 $y'\left(\frac{\pi}{2}\right).$

1.16. $y = x^2 \arctg x - 2 \arctg x, y'(1).$

1.17. $y = \frac{3^x}{\operatorname{tg} x}.$

1.18. $y = \frac{x^{10}}{10^x} + 10^3 \ln 10.$

1.19. $y = \frac{1 + 3^x}{1 - 3^x}.$

1.20. $y = \frac{x^5}{4 \cdot 5^x}.$

1.21. $y = (\sqrt[5]{x} + 2x^3) \log_2 x.$

1.22. $y = \frac{\arccos x}{x^2}.$

1.23. $y = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2.$

1.24. $y = \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}.$

პასუხები

1.1. $y' = 2x, y'(3) = 6.$

1.2. $y' = 1.$

1.3. $y' = nx^{n-1} + n, y'(0) = n.$

1.4. $y' = mnx^{n-1} + mnx^{m-1}, y'(1) = 2mn.$

1.5. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + 0.9x^8$

1.6. $y' = -\frac{8}{x^5} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{15}{4\sqrt[4]{x^7}}$

1.7. $y' = \frac{15}{4} \sqrt{x} - \frac{1}{3\sqrt[6]{x^7}} + \frac{21}{4\sqrt{x^5}},$

$y'(1) = \frac{26}{3}.$

1.8. $y' = -\frac{1}{z^2} - \frac{8}{\sqrt[3]{z^{11}}} - \frac{15}{z^4}.$

1. დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები

$$1.9. \quad y' = \frac{2t^2}{\ln 2} (1+t^3), \quad y'(0) = 0.$$

$$1.18. \quad y' = \frac{10x^9 - x^{10} \ln 10}{10^x}.$$

$$1.10. \quad y' = \frac{-3x^2 + 2x + 2}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

$$1.19. \quad y' = \frac{2 \ln 3 \cdot 3^x}{(1 - 3^x)^2}.$$

$$1.11. \quad y' = 2e^x + \frac{1}{x}.$$

$$1.20. \quad y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{5x^4 - \ln 5 \cdot x^5}{5^x}.$$

$$1.12. \quad y' = 2^x \left(\ln 2 \log_2 x + \frac{1}{x \ln 2} \right).$$

$$1.21. \quad y' = \left(\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} + 6x^2 \right) \log_2 x + \left(\sqrt[5]{x} + 2x^3 \right) \frac{1}{x \ln 2}.$$

$$1.13. \quad y' = \ln 2 \cdot \ln 5 \cdot 5^x.$$

$$1.14. \quad y' = \left(\frac{8}{9} \right)^x \ln \frac{8}{9} + \frac{1}{x}.$$

$$1.22. \quad y' = \frac{-(x + 2 \arccos x \cdot \sqrt{1-x^2})}{x^3 \sqrt{1-x^2}}.$$

$$1.15. \quad y' = 5 \cos x - x \sin x.$$

$$1.23. \quad y' = -\cos x.$$

$$1.16. \quad y' = 2x \operatorname{arctg} x + \frac{x^2 - 2}{1 + x^2},$$

$$y'(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.$$

$$1.24. \quad y' = \frac{-2}{\sqrt{x} (2 + \sqrt{x})^2}.$$

$$1.17. \quad y' = \frac{3^x (\ln 3 \sin x \cos x - 1)}{\sin^2 x}.$$

1.2. რთული ფუნქციის წარმოებული

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებული

$$1.25. \quad y = (2x^2 + 3)^{10}.$$

$$1.31. \quad y = 2^{x^2 \cdot \sin 5x}.$$

$$1.26. \quad y = (x^3 + 4x + 5)^9.$$

$$1.32. \quad y = \sin^3 \left(\frac{x+1}{3} \right).$$

$$1.27. \quad y = \sqrt{x^4 + 2x^3 + 1}.$$

$$1.33. \quad y = \ln(2x^2 + 3x + 2).$$

$$1.28. \quad y = \sqrt[3]{(x^2 + 2x + 3)^5}.$$

$$1.34. \quad y = \log_3(x + \sqrt{x}).$$

$$1.29. \quad y = e^{x^3+4}.$$

$$1.35. \quad y = 5^{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

$$1.30. \quad y = 4^{\cos 2x}.$$

$$1.36. \quad y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}.$$

$$1.37. y = 3^{\sqrt[3]{x^3+3}}.$$

$$1.40. y = \log_5 (\cos^2 x + 1).$$

$$1.38. y = \sqrt{\frac{4-x^2}{4+x^2}}, \text{ იპოვეთ } y'(0).$$

$$1.41. y = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{2x+1}{4} \right).$$

$$1.39. y = e^{-x} + e^{-x} \sin 2x.$$

პასუხები

$$1.25. y' = 40x(2x^2 + 3)^9.$$

$$1.28. y' = \frac{5}{3}(x^2 + 2x + 3)^{\frac{2}{3}}(2x + 2).$$

$$1.26. y' = 9(x^3 + 4x + 5)^8(3x^2 + 4).$$

$$1.29. y' = e^{x^3+4} \cdot 3x^2.$$

$$1.27. y' = \frac{2x^3 + 3x^2}{\sqrt{x^4 + 2x^3 + 1}}.$$

$$1.30. y' = -2 \cdot 4^{\cos 2x} \ln 4 \cdot \sin 2x.$$

$$1.31. y' = 2^{x^2 \sin 5x} \ln 2(2x \cdot \sin 5x + 5x^2 \cos 5x).$$

$$1.32. y' = \sin^2 \left(\frac{x+1}{3} \right) \cos \frac{x+1}{3}.$$

$$1.37. y' = \frac{3^{\sqrt[3]{x^3+3}} \cdot x^2 \ln 3}{\sqrt[3]{(x^3+3)^2}}.$$

$$1.33. y' = \frac{4x+3}{2x^2+3x+2}.$$

$$1.38. y' = \frac{-8x}{\sqrt{16-x^4} \cdot (4+x^2)}, y'(0) = 0.$$

$$1.34. y' = \frac{1}{(x+\sqrt{x}) \ln 3} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right).$$

$$1.39. y' = e^{-x} (2 \cos 2x - \sin 2x - 1).$$

$$1.35. y' = 4 \cdot 5^{\operatorname{tg}^2 2x} \ln 5 \operatorname{tg} 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x}.$$

$$1.40. y' = \frac{-\sin 2x}{(\cos^2 x + 1) \ln 5}.$$

$$1.36. y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \arcsin \sqrt{x}.$$

$$1.41. y' = \frac{1}{\sin \frac{2x+1}{2}}.$$

1.3. წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი

შეადგინეთ მოცემული წირისადმი მითითებულ წერტილში გავლებული მხე-ბის განტოლება

$$1.42. y = x^2 + 6x + 4, M(-1; -1).$$

$$1.44. y = \frac{x^2}{3^x}, M\left(1; \frac{1}{3}\right).$$

$$1.43. y = x^3 - x^2 + 4, M(1; 4).$$

$$1.45. y = \cos \frac{\pi}{2} x + \ln x, M(1; 0).$$

1. დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები

1.46. შეადგინეთ $y = x^2 - 4x + 5$ ფუნქციის გრაფიკის იმ მხების განტოლება, რომელიც პარალელურია:

ა) $y = 2x + 1$ წრფისა;

ბ) $y = -3$ წრფისა.

1.47. შეადგინეთ $y = \frac{3^x}{\ln 3}$ ფუნქციის

გრაფიკის იმ მხების განტოლება, რომელიც მართობულია:

ა) $y = -\frac{1}{3}x + 5$ წრფისა;

ბ) $x = 9$ წრფისა.

პასუხები

1.42. $y = 4x + 3$.

1.43. $y = x + 3$.

1.44. $y = \frac{2 - \ln 3}{3}x + \frac{\ln 3 - 1}{3}$.

1.45. $y = \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)x + \frac{\pi}{2} - 1$.

1.46. ა) $y = 2x - 4$;

ბ) $y = 1$.

1.47. ა) $y = 3x + \frac{3}{\ln 3} - 3$;

ბ) ასეთი მხები არ არსებობს.

1.4. მაღალი რიგის წარმოებულები

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციებისთვის მითითებული რიგის წარმოებულები

1.48. $y = x^4 + 3x^2 + 4x + 2$, $y''(1) = ?$

1.49. $y = x^3 + 2x^2 + 1$, $y''' = ?$

1.50. $y = (x^2 + 1)e^{2x}$, $y'' = ?$

1.51. $y = x \cdot \sin 2x$, $y'' = ?$

1.52. $y = \frac{1}{x+5}$, $y''' = ?$, $y^{(n)} = ?$

1.53. $y = \frac{1}{2} \ln^2 x$, $y''' = ?$

1.54. $y = (2x+3)^{\frac{7}{2}}$, $y'' = ?$

1.55. $y = e^{5x}$, $y^{(n)} = ?$

1.56. $y = 5^{2x}$, $y^{(n)} = ?$

1.57. $y = \cos 3x$, $y^{(5)} = ?$

1.58. $y = \frac{1}{kx+b}$, $y^{(n)} = ?$

პასუხები

1.48. $y'' = 12x^2 + 6$, $y''(1) = 18$.

1.49. $y''' = 6$.

1.50. $y'' = 2e^{2x}(2x^2 + 4x + 3)$.

1.51. $y'' = 4 \cos 2x - 4x \cdot \sin 2x$.

1.52. $y''' = -6(x+5)^{-4}$,

$y^{(n)} = (-1)^n n! (x+5)^{-(n+1)}$.

1.53. $y''' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$.

$$1.54. y'' = 35(2x+3)^{\frac{3}{2}}.$$

$$1.55. y^{(n)} = 5^n e^{5x}.$$

$$1.56. y^{(n)} = (25^x)(\ln 25)^n.$$

$$1.57. y^{(5)} = -3^5 \cdot \sin 3x.$$

$$1.58. y^{(n)} = (-1)^n k^n (kx+b)^{-(n+1)}.$$

1.5. ფუნქციის დიფერენციალი

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების დიფერენციალი

$$1.59. y = \frac{1}{3} e^{3x} + \sin^2(x^3 + 1).$$

$$1.60. y = x^3 \ln^2 x.$$

$$1.61. y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$1.62. y = \frac{e^{\sin^2 x}}{a^3}.$$

$$1.63. y = \ln(\cos^2 x + 4).$$

$$1.64. y = \operatorname{arctg}(3^x).$$

$$1.65. y = 2^{\lg^2 4x}.$$

$$1.66. y = \lg^2(x^2 + 5).$$

$$1.67. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

ფუნქციის დიფერენციალის გამოყენებით მიახლოებით გამოთვალეთ

$$1.68. \sqrt[3]{1.003}.$$

$$1.69. \sin(0.002).$$

$$1.70. \ln 3.$$

$$1.71. 3^{0.001}.$$

პასუხები

$$1.59. dy = (e^{3x} + 3x^2 \sin 2(x^3 + 1)) dx.$$

$$1.60. dy = x^2 \ln x (3 \ln x + 2) dx.$$

$$1.61. dy = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$1.62. dy = \frac{1}{a^3} e^{\sin^2 x} \sin 2x dx.$$

$$1.65. dy = 8 \ln 2 \cdot 2^{\lg^2 4x} \operatorname{tg} 4x \cdot \frac{1}{\cos^2 4x} dx.$$

$$1.66. dy = \frac{4x \lg(x^2 + 25)}{(x^2 + 25) \ln 10} dx.$$

$$1.67. dy = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

$$1.63. dy = \frac{-\sin 2x}{\cos^2 x + 4} dx.$$

$$1.64. dy = \frac{3^x \ln 3}{1+3^{2x}} dx.$$

$$1.68. 1.001.$$

$$1.69. 0.002.$$

$$1.70. 1.104.$$

$$1.71. 1.0011.$$

1.6. განუსაზღვრელობის გახსნის ლობიტალის წესი

გამოთვალეთ ფუნქციის ზღვარი ლობიტალის წესის გამოყენებით

1.72. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 6}{4x^3 + 3x^2 + x - 8}$.

1.80. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x - 9}{\operatorname{tg}(2x - 4)}$.

1.73. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\ln(1+x)}$.

1.81. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{3 \sin x - \operatorname{arctg} x}$.

1.74. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{2 - \log_2(x+3)}$.

1.82. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{2 - \log_2(1+3x)}$.

1.75. ა) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(2x^2 + 3x - 4)}$;

1.83. $\lim_{x \rightarrow 2} (2-z) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} z$.

ბ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{\operatorname{arctg}(x-1)}$.

1.84. $\lim_{x \rightarrow 2+} (x^2 - 4) \ln(x-2)$.

1.76. ა) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x - \sin x}$;

1.85. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)$.

ბ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2x}}{\ln x - \ln 2}$.

1.86. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$.

1.77. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1}$.

1.87. $\lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.

1.88. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

1.78. ა) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 4x)}$;

1.89. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$.

ბ) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\operatorname{tg} bx)}$ ($a, b > 0$).

1.90. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos^2 3x} \right)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

1.79. ა) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt[3]{8+x}}{3 - \sqrt{9+x}}$;

1.91. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{x - \frac{\pi}{2}}$.

ბ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{5^x}$.

პასუხები

1.72. 1.

1.75. ა) $\frac{1}{7}$; ბ) 5.

1.73. $\ln \frac{a}{b}$.

1.76. ა) ∞ ; ბ) -1.

1.74. $-28 \ln 2$.

1.77. 0.

1.78. ა) $\frac{9}{16}$; ბ) 1.

1.79. ა) $\frac{1}{2}$; ბ) 0.

1.80. $\frac{9}{2} \ln 3$.

1.81. $\frac{1}{2}$.

1.82. $\frac{-2 \ln 2}{3}$.

1.83. $\frac{4}{\pi}$.

1.84. 0.

1.85. 1.

1.86. 0.

1.87. $-\frac{1}{2}$

1.88. 1.

1.89. e .

1.90. e^9 .

1.91. 1.

1.7. ფუნქციის მონოტონურობა და ექსტრემუმი

დაადგინეთ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები და იპოვეთ ექსტრემუმი

1.92. $y = 3x^4 - 4x^3 - 1$.

1.93. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x + 1$.

1.94. $y = x^3 + 6x^2 + 1$.

1.95. $y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 10x + 2$.

1.96. $y = 1 + 3x - x^3$.

1.97. $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$.

1.98. $y = 2x^2 - x^4$.

1.99. $y = \frac{1}{4+x}$.

1.100. $y = \frac{1}{4+x^2}$.

1.101. $y = \frac{x^2}{1+x}$.

1.102. $y = \frac{x^2}{1+x^4}$.

1.103. $y = (2x-3)^4$.

1.104. $y = (x^3-1)^2$.

1.105. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

1.106. $y = \frac{x}{1+4x^2}$.

1.107. $y = x \cdot e^x$.

1.108. $y = \frac{x}{e^x}$.

1.109. $y = \sqrt{x^2 + 3x + 9}$.

1.110. $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

1.111. $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$.

1.112. $y = \ln(x^2 - 25)$.

1.113. $y = \ln(9 - x^2)$.

1.114. $y = \frac{x}{\ln x}$.

1.115. ა) $y = 3^{x^3-6x^2+4}$;

ბ) $y = e^{-x^2+4x+1}$.

1.116. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+5}$.

1. დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები

1.117. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$

1.119. $y = x + \frac{4}{x}$.

1.118. ა) $y = \ln(x^2 + 5x - 6)$;

ბ) $y = \ln(x^2 + 3x + 5)$.

იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები მითითებულ შუალედზე

1.120. $y = x^3, -1 \leq x \leq 3$.

1.121. $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}, 0 \leq x \leq 1$.

1.122. $y = x^3 \ln x, 1 \leq x \leq e$.

1.123. $y = 3x - x^3, -2 \leq x \leq 3$.

პასუხები

1.92. კლებადობის შუალედია $(-\infty; 1]$, ზრდადობის შუალედია $[1; +\infty)$,

$$y_{\min} = y(1) = -2.$$

1.93. ზრდადობის შუალედია $(-\infty; +\infty)$, ფუნქციას ექსტრემუმი არ აქვს.

1.94. კლებადობის შუალედია $[-4; 0]$, ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty; -4]$ და $[0; +\infty)$, $y_{\max} = y(-4) = 33$, $y_{\min} = y(0) = 1$.

1.95. კლებადობის შუალედია $(-\infty; +\infty)$, ფუნქციას ექსტრემუმი არ აქვს.

1.96. კლებადობის შუალედებია: $(-\infty; -1]$ და $[1; +\infty)$, ზრდადობის შუალედია $[-1; 1]$, $y_{\max} = y(1) = 3$, $y_{\min} = y(-1) = -1$.

1.97. ზრდადობის შუალედია $[1; +\infty)$, კლებადობის შუალედია $(-\infty; 1]$,

$$y_{\min} = y(1) = -1.$$

1.98. ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty; -1]$ და $[0; 1]$, კლებადობის შუალედებია: $[-1; 0]$ და $[1; +\infty)$, $y_{\max} = y(-1) = y(1) = 1$, $y_{\min} = y(0) = 0$.

1.99. კლებადობის შუალედებია: $(-\infty; -4)$ და $(4; +\infty)$, ფუნქციას ექსტრემუმი არ აქვს.

1.100. კლებადობის შუალედია $[0; +\infty)$, ზრდადობის შუალედია $(-\infty; 0]$,

$$y_{\max} = y(0) = \frac{1}{4}.$$

1.101. ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty; -2]$ და $[0; +\infty)$, კლებადობის შუალედებია: $[-2; -1]$ და $(-1; 0]$, $y_{\max} = y(-2) = -4$, $y_{\min} = y(0) = 0$.

1.102. ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty; -1]$ და $[0; 1]$, კლებადობის შუალედებია: $[-1; 0]$ და $[1; +\infty)$, $y_{\max} = y(-1) = y(1) = \frac{1}{2}$, $y_{\min} = y(0) = 0$.

1.103. ზრდადობის შუალედია $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$, კლებადობის შუალედია $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$,
 $y_{\min} = y\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

1.104. კლებადობის შუალედია $(-\infty; 1]$, ზრდადობის შუალედია $[1; +\infty)$,
 $y_{\min} = y(1) = 0$.

1.105. ზრდადობის შუალედია $[-1; 1]$, კლებადობის შუალედებია: $(-\infty; -1]$ და $[1; +\infty)$, $y_{\min} = y(-1) = -e^{-\frac{1}{2}}$, $y_{\max} = y(1) = e^{\frac{1}{2}}$.

1.106. კლებადობის შუალედებია: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ და $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, ზრდადობის შუალედია $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $y_{\max} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

1.107. კლებადობის შუალედია $(-\infty; -1]$, ზრდადობის შუალედია $[-1; +\infty)$,
 $y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{e}$.

1.108. ზრდადობის შუალედია $(-\infty; 1]$, კლებადობის შუალედია $[1; +\infty)$,
 $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{e}$.

1.109. კლებადობის შუალედია $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$, ზრდადობის შუალედია $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$,
 $y_{\min} = y\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{27}}{2}$.

1.110. ზრდადობის შუალედია $[3; +\infty)$, კლებადობის შუალედია $(-\infty; 2]$,
 $y_{\min} = y(2) = y(3) = 0$.

1. დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები

- 1.111. ზრდადობის შუალედია $[-1; 3]$, კლებადობის შუალედია $[3; 7]$,
 $y_{\max} = y(3) = 4$.
- 1.112. ზრდადობის შუალედია $(5; +\infty)$, კლებადობის შუალედია $(-\infty; -5)$,
 ფუნქციას ექსტრემუმი არ აქვს.
- 1.113. ზრდადობის შუალედია $(-3; 0]$, კლებადობის შუალედია $[0; 3)$,
 $y_{\max} = y(0) = \ln 9$.
- 1.114. კლებადობის შუალედებია: $(0; 1)$ და $(1; e]$, ზრდადობის შუალედია
 $[e; +\infty)$, $y_{\min} = y(e) = e$.
- 1.115. ა) ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty; 0]$ და $[4; +\infty)$, კლებადობის
 შუალედია $[0; 4]$, $y_{\max} = y(0) = 81$, $y_{\min} = y(4) = 3^{-28}$;
 ბ) ზრდადობის შუალედია $(-\infty; 2]$, კლებადობის შუალედია $[2; +\infty)$,
 $y_{\max} = y(2) = e^5$.
- 1.116. ზრდადობის შუალედია $(-\infty; 2]$, კლებადობის შუალედია $[2; +\infty)$,
 $y_{\max} = y(2) = \frac{1}{2}$.
- 1.117. ზრდადობის შუალედია $(0; +\infty)$, ფუნქციას ექსტრემუმი არ აქვს.
- 1.118. ა) კლებადობის შუალედია $(-\infty; -6)$, ზრდადობის შუალედია $(1; +\infty)$,
 ფუნქციას ექსტრემუმი არ აქვს;
 ბ) კლებადობის შუალედია $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$, ზრდადობის შუალედია
 $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$, $y_{\min} = y\left(-\frac{3}{2}\right) = \ln \frac{11}{4}$.
- 1.119. ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty; -2]$ და $[2; +\infty)$, კლებადობის
 შუალედებია: $[-2; 0)$ და $(0; 2]$, $y_{\max} = y(-2) = -4$, $y_{\min} = y(2) = 4$.
- 1.120. 27 და -1.
- 1.121. $\frac{\pi}{4}$ და 0.
- 1.122. e^3 და 0.
- 1.123. 2 და -18.

1.8. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა. გადაღუნვის წერტილები

დაადგინეთ შემდეგ ფუნქციათა ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები. იპოვეთ გადაღუნვის წერტილები

1.124. $y = 3x^5 + 5x^4 - 4.$

1.133. $y = x^5 - 5x^4 + \frac{20}{3}x^3 + 3x + 1.$

1.125. $y = 1 - 6x^5 + 10x^4.$

1.134. $y = x^7 + 7x + 6.$

1.126. $y = x^4 - 6x^2 + 2.$

1.135. $y = x^4 + 6x^2.$

1.127. $y = 2x^6 - 5x^4.$

1.136. $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2 + 2.$

1.128. $y = \frac{1}{2} \log_2(1 + x^2).$

1.137. $y = \frac{1}{x+2}.$

1.129. $y = x^4 - 2x^3 + 1.$

1.138. $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3.$

1.130. $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 3.$

1.139. $y = x \cdot e^{2x} + 1.$

1.131. $y = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + 4.$

1.140. $y = \sqrt[3]{x+1}.$

1.132. $y = x^6 - 6x^5 + \frac{15}{2}x^4 + 3x.$

1.141. $y = e^{-x^2}.$

პასუხები

1.124. ჩაზნექილობის შუალედია $(-1; +\infty)$, ამოზნექილობის შუალედია $(-\infty; -1)$, გადაღუნვის წერტილია $(-1; -2)$.

1.125. ამოზნექილობის შუალედია $(1; +\infty)$, ჩაზნექილობის შუალედია $(-\infty; 1)$, გადაღუნვის წერტილია $(1; 5)$.

1.126. ჩაზნექილობის შუალედებია: $(-\infty; -1)$ და $(1; +\infty)$, ამოზნექილობის შუალედია $(-1; 1)$, გადაღუნვის წერტილებია: $(\pm 1; -3)$.

1.127. ამოზნექილობის შუალედია $(-1; 1)$, ჩაზნექილობის შუალედებია $(-\infty; -1)$ და $(1; +\infty)$, გადაღუნვის წერტილებია $(\pm 1; -3)$.

1.128. ჩაზნექილობის შუალედია $(-1; 1)$, ამოზნექილობის შუალედებია: $(-\infty; -1)$ და $(1; +\infty)$, გადაღუნვის წერტილებია: $(\pm 1; \frac{1}{2})$.

1. დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები

- 1.129. ჩაზნექილობის შუალედებია: $(-\infty; 0)$ და $(1; +\infty)$, ამოზნექილობის შუალედია $(0; 1)$, გადაღუნვის წერტილებია: $(0; 1)$ და $(1; 0)$.
- 1.130. ჩაზნექილობის შუალედია $(-\infty; +\infty)$, გადაღუნვის წერტილები არ აქვს.
- 1.131. ამოზნექილობის შუალედია $(-\infty; \infty)$, გადაღუნვის წერტილები არ აქვს.
- 1.132. ამოზნექილობის შუალედია $(1; 3)$, ჩაზნექილობის შუალედებია: $(-\infty; 1)$ და $(3; +\infty)$, გადაღუნვის წერტილებია: $(1; 5.5)$ და $(3; -112.5)$.
- 1.133. ჩაზნექილობის შუალედებია: $(0; 1)$ და $(2; +\infty)$, ამოზნექილობის შუალედებია: $(-\infty; 0)$ და $(1; 2)$, გადაღუნვის წერტილებია: $(0; 1)$, $\left(1; \frac{20}{3}\right)$ და $\left(2; \frac{37}{3}\right)$.
- 1.134. ამოზნექილობის შუალედია $(-\infty; 0)$, ჩაზნექილობის შუალედია $(0; +\infty)$, გადაღუნვის წერტილია $(0; 6)$.
- 1.135. ჩაზნექილობის შუალედია $(-\infty; +\infty)$, გადაღუნვის წერტილები არ აქვს.
- 1.136. ჩაზნექილობის შუალედია $(-\infty; +\infty)$, გადაღუნვის წერტილები არ აქვს.
- 1.137. ამოზნექილობის შუალედია $(-\infty; -2)$, ჩაზნექილობის შუალედია $(-2; +\infty)$, გადაღუნვის წერტილები არ აქვს.
- 1.138. ამოზნექილობის შუალედია $(-\infty; 2)$, ჩაზნექილობის შუალედია $(2; +\infty)$, გადაღუნვის წერტილია $(2; 3)$.
- 1.139. ამოზნექილობის შუალედია $(-\infty; -1)$, ჩაზნექილობის შუალედია $(-1; +\infty)$, გადაღუნვის წერტილია $(-1; 1 - e^{-2})$.
- 1.140. ამოზნექილობის შუალედია $(-1; +\infty)$, ჩაზნექილობის შუალედია $(-\infty; -1)$, გადაღუნვის წერტილი არ აქვს.
- 1.141. ჩაზნექილობის შუალედებია: $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ და $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$, ამოზნექილობის შუალედია $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, გადაღუნვის წერტილებია: $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; e^{\frac{1}{2}}\right)$.

1.9. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკთა ასიმპტოტები

$$1.142. \quad y = \frac{x^2 - 1}{x + 3}.$$

$$1.151. \quad y = \frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}.$$

$$1.143. \quad y = \frac{3x^3}{x^2 - 1}.$$

$$1.152. \quad y = \frac{x - 3}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

$$1.144. \quad y = \frac{2x^2 - 3x}{x - 1}.$$

$$1.153. \quad y = x + \frac{1}{x}.$$

$$1.145. \quad y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}.$$

$$1.154. \quad y = \frac{2x}{x^2 - 4}.$$

$$1.146. \quad y = \frac{3x^2 + 1}{x}.$$

$$1.155. \quad y = \frac{x}{e^x}.$$

$$1.147. \quad y = \frac{x^2}{(x + 3)^2}.$$

$$1.156. \quad y = \frac{e^x}{1 + x}.$$

$$1.148. \quad y = 2x + \frac{2}{x - 1}.$$

$$1.157. \quad y = \frac{\sin x}{x}.$$

$$1.149. \quad y = \frac{x^3 - 1}{x(x + 1)}.$$

$$1.158. \quad y = \frac{\sin x}{x + 1}.$$

$$1.150. \quad y = \frac{2x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 4}.$$

$$1.159. \quad y = xe^{\frac{1}{x}}.$$

პასუხები

1.142. ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = -3$, დახრილი ასიმპტოტია $y = x - 3$.

1.143. ვერტიკალური ასიმპტოტებია: $x = \pm 1$, დახრილი ასიმპტოტია $y = 3x$.

1.144. ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = 1$, დახრილი ასიმპტოტია $y = 2x - 1$.

1.145. ვერტიკალური ასიმპტოტებია: $x = \pm 2$, დახრილი ასიმპტოტია $y = x$.

1.146. ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = 0$, დახრილი ასიმპტოტია $y = 3x$.

1.147. ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = -3$, ჰორიზონტალური ასიმპტოტია $y = 1$.

1.148. ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = 1$, დახრილი ასიმპტოტია $y = 2x$.

1. დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები

- 1.149. ვერტიკალური ასიმპტოტებია: $x = 0$ და $x = -1$, დახრილი ასიმპტოტია $y = x - 1$.
- 1.150. ვერტიკალური ასიმპტოტია: $x = \pm 2$, დახრილი ასიმპტოტია $y = 2x - 1$.
- 1.151. ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = 0$, დახრილი ასიმპტოტია $y = x + 3$, როცა $x \rightarrow +\infty$.
- 1.152. ვერტიკალური ასიმპტოტები არ აქვს, ჰორიზონტალური ასიმპტოტებია: $y = \pm 1$.
- 1.153. ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = 0$, დახრილი ასიმპტოტია $y = x$.
- 1.154. ვერტიკალური ასიმპტოტებია: $x = \pm 2$, ჰორიზონტალური ასიმპტოტია $y = 0$.
- 1.155. ვერტიკალური ასიმპტოტი არ აქვს, ჰორიზონტალური ასიმპტოტია $y = 0$, როცა $x \rightarrow +\infty$.
- 1.156. ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = -1$, ჰორიზონტალური ასიმპტოტია $y = 0$, როცა $x \rightarrow -\infty$.
- 1.157. ვერტიკალური ასიმპტოტი არ აქვს, ჰორიზონტალური ასიმპტოტია $y = 0$.
- 1.158. ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = -1$, ჰორიზონტალური ასიმპტოტია $y = 0$.
- 1.159. ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = 0$, დახრილი ასიმპტოტია $y = x + 1$.

1.10. ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება

გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციები და ააგეთ გრაფიკი

1.160. $y = 2 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.

1.161. $y = x^4 - 2x^3 + 3$.

1.162. $y = \frac{2x^2}{2x-1}$.

1.163. $y = \frac{2}{1-x^2}$.

1.164. $y = \frac{2x^3}{x^2-4}$.

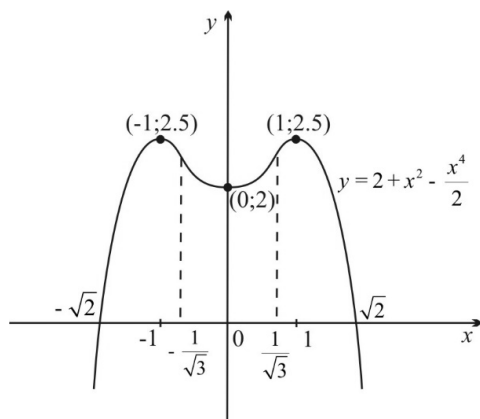
1.165. $y = \frac{x^2}{x+1}$.

1.166. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$.

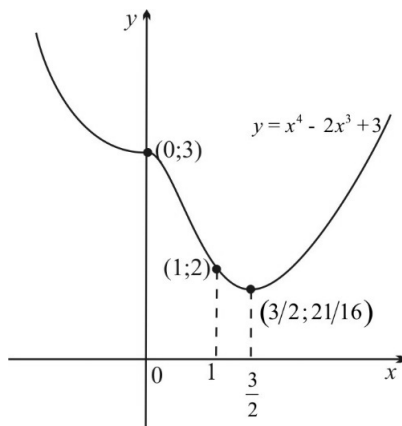
1.167. $y = \frac{e^x}{x+1}$.

პასუხები

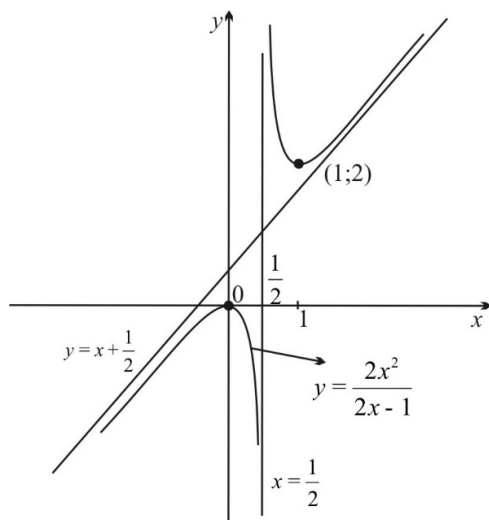
1.160.



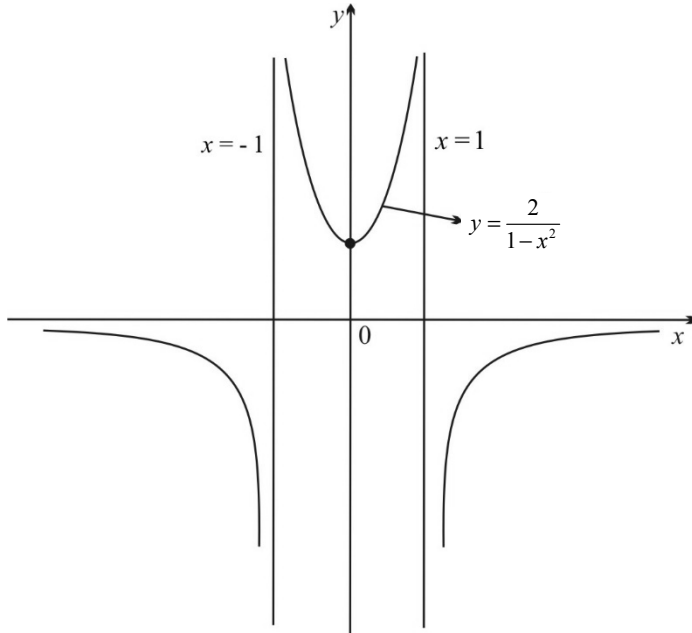
1.161. $y = x^4 - 2x^3 + 3$



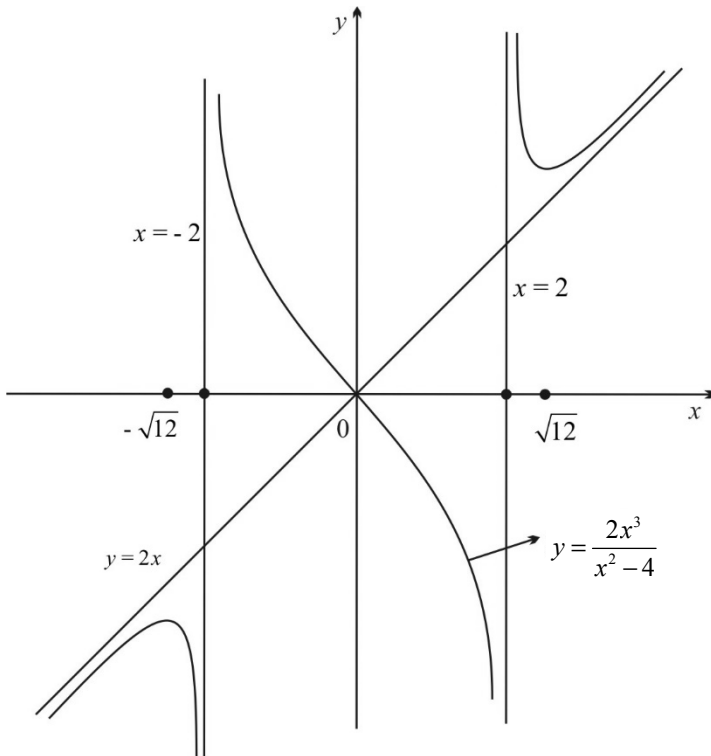
1.162. $y = \frac{2x^2}{2x-1}$



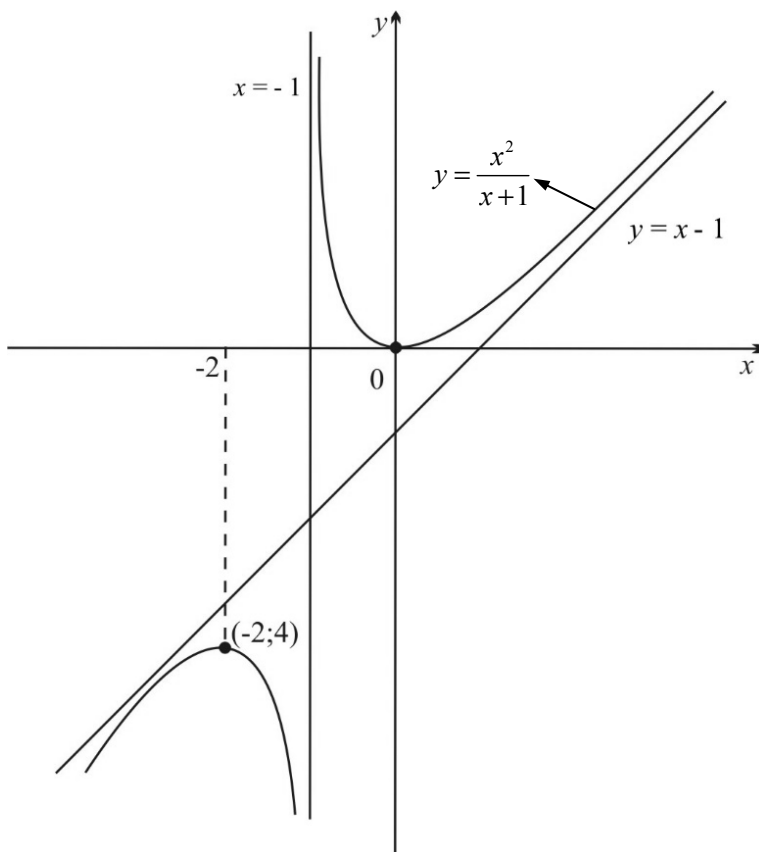
1.163. $y = \frac{2}{1-x^2}$



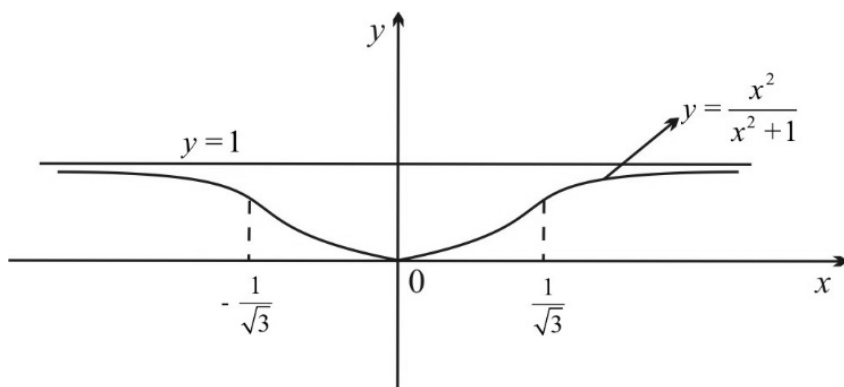
1.164. $y = \frac{2x^3}{x^2-4}$



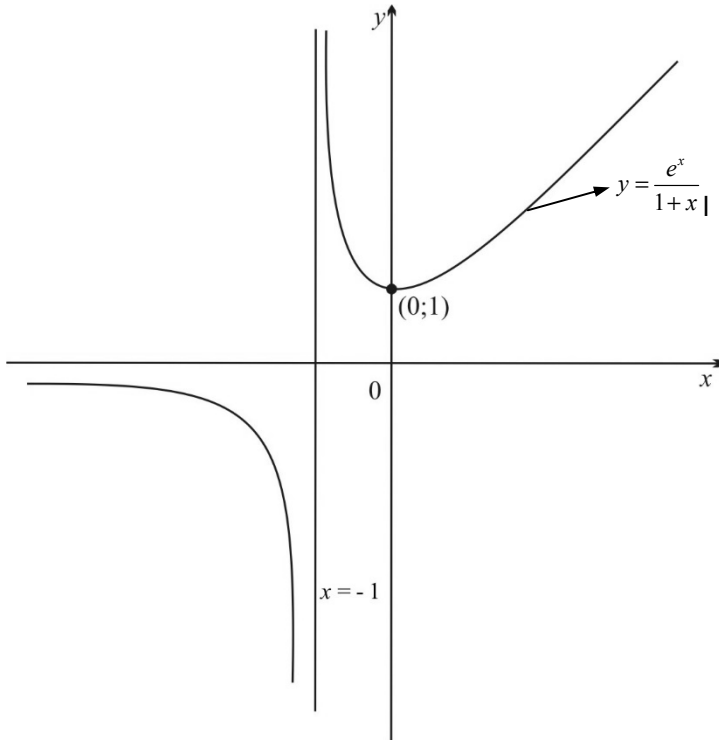
1.165. $y = \frac{x^2}{x+1}$



1.166. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$



1.167. $y = \frac{e^x}{1+x}$



დამატებითი სავარჯიშოები

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებული

1.168. $y = (\sqrt{x})^{\sin x}$.

1.170. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$.

1.169. $y = (x^2 + 4)^{\frac{1}{x}}$.

1.171. $y = \frac{(x+3)^3 \sqrt[3]{x+1}}{(x+5)^5}$.

გამოთვალეთ ზღვარი

1.172. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{\sin x}$.

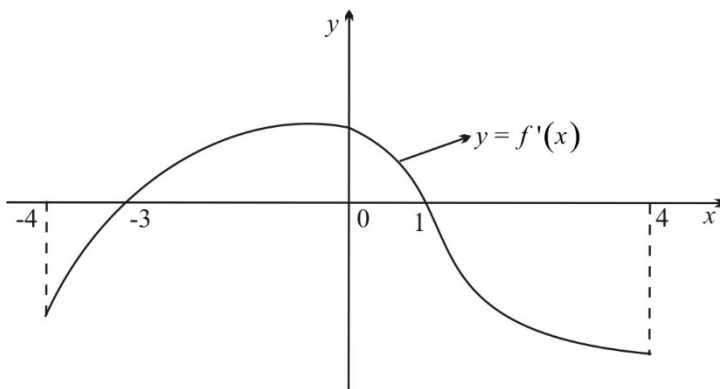
1.174. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

1.173. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$.

1.175. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1.176. იპოვეთ $y = x^3 - 3x^2$ ფუნქციის ექსტრემუმი და გადაღუნვის წერტილები.

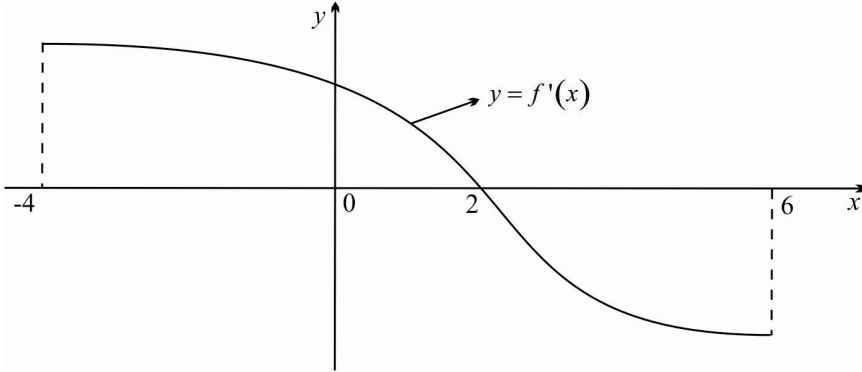
- 1.177.** იპოვეთ შუალედი, სადაც $y = x^5 - 5x^4 + 1$ ფუნქცია კლებადივც არის და ამოზნექილივც. იპოვეთ მინიმუმისა და გადაღუნვის წერტილები.
- 1.178.** იპოვეთ $y = x^3 - 6x^2 - 3$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები, მონოტონურობის შუალედები და ჩაზნექილობა-ამოზნექილობის შუალედები.
- 1.179.** იპოვეთ $y = 3x^5 - 5x^4 - 4$ ფუნქციის მაქსიმუმი და ამოზნექილობა-ჩაზნექილობის შუალედები.
- 1.180.** იპოვეთ $y = xe^{2x}$ ფუნქციის კლებადობის შუალედი და მინიმუმი, აგრეთვე ამოზნექილობის შუალედი და გადაღუნვის წერტილები.
- 1.181.** იპოვეთ a -ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც
- $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2a$ ფუნქციის მინიმუმი 6-ის ტოლია;
 - $f(x) = 4x^3 - 3x^4 - 5a$ ფუნქციის მაქსიმუმი 3-ის ტოლია.
- 1.182.** a -ს რა მნიშვნელობისთვის არ აქვს გადაღუნვის წერტილი შემდეგ ფუნქციებს:
- $f(x) = ax^3 + 5x^2 + 2x + 1$;
 - $f(x) = ax^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$;
 - $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + ax^3 + 3x^2 + 4$.
- 1.183.** ნახაზზე (იხ. ნახ. 1, ნახ. 2, ნახ. 3) მოცემულია $y = f'(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები და დაადგინეთ ექსტრემუმის წერტილები.
- ა)



ნახ. 1.

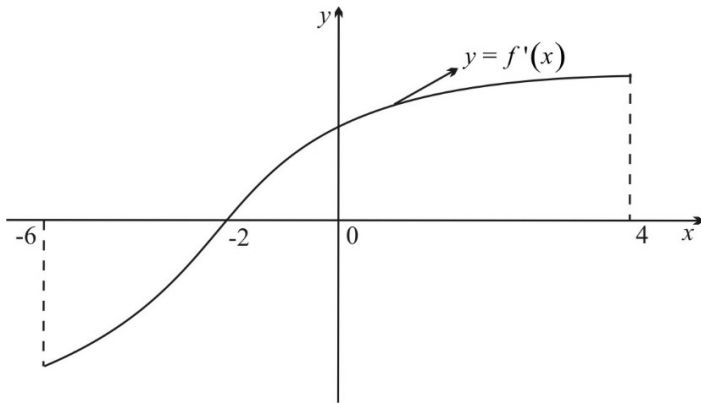
1. დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები

ბ)



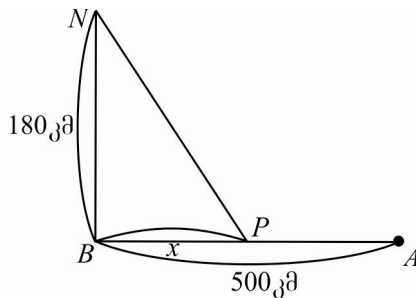
ნახ. 2

გ)



ნახ. 3

1.184. N ქალაქში წარმოებული პროდუქციის A ქალაქში გადასატანად უნდა გაკეთდეს გზატკეცილი NP , რომელიც შეაერთებს N ქალაქს A ქალაქზე გამავალ AB რკინიგზასთან (იხ. ნახ. 4). გადაზიდვები გზატკეცილზე ჯდება ორჯერ მეტი, ვიდრე რკინიგზით. როგორ P პუნქტში უნდა გაიაროს გზატკეცილმა, რომ გადაზიდვის ხარჯები იყოს მინიმალური.



ნახ. 4

1.185. ქარხანა ერთ თვეში ამზადებს x ერთეულ პროდუქციას და p ფასი ამ პროდუქციისა განისაზღვრება შემდეგი სახით:

$$p(x) = 60 - \frac{1}{10}x.$$

როდის იქნება $u = px$ შემოსავალი მაქსიმალური?

1.186. a სიგრძის მონაკვეთი გაყავით ორ მონაკვეთზე ისე, რომ ამ მონაკვეთებზე აგებული კვადრატების ფართობთა ჯამი იყოს უმცირესი.

1.187. იპოვეთ $y = x(3 + e^{-x})$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი, როცა $x \rightarrow +\infty$.

1.188. იპოვეთ $y = \frac{x^2}{x - \sqrt{x}}$ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი და დაასაბუთეთ, რომ დახრილი ასიმპტოტი არ აქვს.

პასუხები

1.168. $\frac{1}{2}(\sqrt{x})^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right).$

1.169. $(x^2 + 4)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2}{x^2 + 4} - \frac{\ln(x^2 + 4)}{x^2} \right).$

1.170. $\left(x + \frac{1}{x} \right)^x \left(\ln \frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right).$

1.171. $\frac{(x+3)^3 \sqrt[3]{x+1}}{(x+5)^5} \left(\frac{3}{x+3} + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{5}{x+5} \right).$

1.172. 1.

1.173. $3e$.

1.174. e .

1.175. 1.

1.176. $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(2) = -4$, გადაღუნვის წერტილია $(1; -2)$.

1.177. ამოზნექილიც და კლებადიცაა $(0; 3)$ შუალედზე, მინიმუმის წერტილია $x = 4$, გადაღუნვის წერტილია $(3; -161)$.

1.178. კრიტიკული წერტილებია: $x = 0$ და $x = 4$. ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty; 0]$ და $[4; +\infty)$, კლებადობის შუალედია $[0; 4]$, ამოზნექილობის შუალედია $(-\infty; 2)$, ჩაზნექილობის შუალედია $(2; +\infty)$.

1. დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები

1.179. $y_{\max} = y(0) = -4$, ამოზნექილობის შუალედია $(-\infty; 1)$, ჩაზნექილობის შუალედია $(1; +\infty)$.

1.180. კლებადობის შუალედია $(-\infty; -\frac{1}{2})$, $y_{\min} = y(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2e}$, ამოზნექილობის შუალედია $(-\infty; -1)$, გადაღუნვის ნერტილია $(-1; -\frac{1}{e^2})$.

1.181. ა) $a = \frac{7}{2}$; ბ) $a = -\frac{2}{5}$.

1.182. ა) $a = 0$; ბ) $a \geq 3$, გ) $-2 \leq a \leq 2$.

1.183. ა) კლებადობის შუალედებია: $[-4; -3]$ და $[1; 4]$, ზრდადობის შუალედია $[-3; 1]$, მინიმუმის ნერტილია $x = -3$, მაქსიმუმის ნერტილია $x = 1$;

ბ) ზრდადობის შუალედია $[-4; 2]$, კლებადობის შუალედია $[2; 6]$, მაქსიმუმის ნერტილია $x = 2$, ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა $f(2)$.

გ) კლებადობის შუალედია $[-6; -2]$, ზრდადობის შუალედია $[-2; 4]$, მინიმუმის ნერტილია $x = -2$, ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა $f(-2)$.

1.184. P პუნქტი B -დან დაშორებული უნდა იყოს $60\sqrt{3}$ კმ-ზე.

1.185. შემოსავალი იქნება მაქსიმალური, თუ ყოველ თვეში 300 ერთეულ პროდუქციას აწარმოებენ.

1.186. a მონაკვეთი უნდა გაიყოს ორ ტოლ ნაწილად.

1.187. $y = 3x$ არის დახრილი ასიმპტოტი, როცა $x \rightarrow +\infty$.

1.188. ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = 1$, დახრილი ასიმპტოტი არ აქვს, რადგან $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \infty$.

2. ორი ცვლადის ფუნქცია

2.1. ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი

გამოთვალეთ ფუნქციის მნიშვნელობები მითითებულ წერტილებში

2.1. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$. იპოვეთ $f(3; -2)$ და $f(-4; -4)$.

2.2. $f(x, y) = \frac{(x-1)(y-1)}{x+y}$. იპოვეთ $f(-1; -2)$ და $f(3; -2)$.

2.3. $f(x, t) = \frac{x-t+1}{x^2+t^2}$. იპოვეთ $f(2; 1)$ და $f(3; 2)$.

2.4. $f(u, v) = u + \ln|v|$. იპოვეთ $f(6; -1)$ და $f(0; e^3)$.

გამოთვალეთ შემდეგი ფუნქციების ზღვარი

2.5. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$.

2.9. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x+y}$.

2.6. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

2.10. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

2.7. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x}$.

2.11. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}$.

2.8. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow k}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$

2.12. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$.

პასუხები

2.1. $f(3; -2) = 33$, $f(-4; -4) = 32$.

2.7. 2.

2.2. $f(-1; -2) = -2$, $f(3; -2) = -6$.

2.8. e^k .

2.3. $f(2; 1) = \frac{2}{5}$, $f(3; 2) = \frac{2}{13}$.

2.9. ზღვარი არ აქვს.

2.10. ზღვარი არ აქვს.

2.4. $f(6; -1) = 6$, $f(0; e^3) = 3$.

2.11. $-\frac{1}{4}$.

2.5. 0.

2.12. 0.

2.6. 0.

2.2. ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები

გამოთვალეთ

2.13. $f'_x(0;1)$, თუ $f(x; y) = x^2 - 3xy + y^4$.

2.14. $f'_y\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, თუ $f(x; y) = 3^{x^2 - y^2}$.

2.15. $f'_x\left(\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$, თუ $f(x; y) = \sin^2(x - y)$.

2.16. $z'_x(2; -1)$, თუ $z = xy + \ln(x + y)$.

2.17. $z'_y\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right)$, თუ $z = \cos(3x + 2y)$.

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა კერძო წარმოებულები

2.18. $z = x^3 + y^3 - 3axy$.

2.27. $z = e^{\frac{\sin y}{x}}$.

2.19. $z = \cos \frac{x}{y}$.

2.28. $z = y \ln^2 \frac{x}{y}$.

2.20. $z = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{y}$.

2.29. $z = x^2 \sin^2 y$.

2.21. $z = \sin(xy^2)$.

2.30. $z = y^{\operatorname{tg}^2 x}$.

2.22. $z = \frac{x - y}{x + y}$.

2.31. $z = (x^2 + 1)^{\cos y}$.

2.23. $z = \frac{y}{x}$.

2.32. $z = 2^x \operatorname{arctg} y$.

2.24. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

2.33. $z = x^{\cos^2 y}$.

2.25. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

2.34. იპოვეთ z'_y , თუ $z = 2^y \sin \frac{\sqrt[3]{x}}{y}$.

2.26. $z = x^y + y^x$.

2.35. იპოვეთ $z'_x(1; 0)$, $z'_y(1; 0)$, თუ $z = (1 + y^2)^x \sqrt{x}$.

პასუხები

2.13. -3 .

2.15. -1 .

2.14. $\frac{2 \ln 3}{\sqrt[4]{27}}$.

2.16. 0 .

2.17. -2 .

$$2.18. \begin{aligned} z'_x &= 3(x^2 - ay), \\ z'_y &= 3(y^2 - ax). \end{aligned}$$

$$2.19. z'_x = -\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y}, \quad z'_y = \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y}.$$

$$2.20. z'_x = \frac{2xy}{y^2 + x^4}, \quad z'_y = -\frac{x^2}{y^2 + x^4}.$$

$$2.21. \begin{aligned} z'_x &= y^2 \cos(xy^2), \\ z'_y &= 2xy \cos(xy^2). \end{aligned}$$

$$2.22. z'_x = \frac{2y}{(x+y)^2}, \quad z'_y = \frac{-2x}{(x+y)^2}.$$

$$2.23. z'_x = -\frac{y}{x^2}, \quad z'_y = \frac{1}{x}.$$

$$2.24. z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

$$2.25. \begin{aligned} z'_x &= \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \\ z'_y &= \frac{-xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}. \end{aligned}$$

$$2.26. \begin{aligned} z'_x &= yx^{y-1} + y^x \ln y, \\ z'_y &= x^y \ln x + xy^{x-1}. \end{aligned}$$

$$2.27. z'_x = -e^{\frac{\sin y}{x}} \cdot \cos \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{x^2},$$

$$z'_y = \frac{1}{x} e^{\frac{\sin y}{x}} \cos \frac{y}{x}.$$

$$2.28. \begin{aligned} z'_x &= \frac{2y}{x} \ln \frac{x}{y}, \\ z'_y &= \ln \frac{x}{y} \left(\ln \frac{x}{y} - 2 \right). \end{aligned}$$

$$2.29. z'_x = 2x \sin^2 y, \quad z'_y = x^2 \sin 2y.$$

$$2.30. \begin{aligned} z'_x &= 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot y^{\operatorname{tg}^2 x} \ln y, \\ z'_y &= \operatorname{tg}^2 x \cdot y^{\operatorname{tg}^2 x - 1}. \end{aligned}$$

$$2.31. \begin{aligned} z'_x &= 2x \cos y (x^2 + 1)^{\cos y - 1}, \\ z'_y &= -\sin y (x^2 + 1)^{\cos y} \ln(x^2 + 1). \end{aligned}$$

$$2.32. \begin{aligned} z'_x &= 2^x \ln 2 \operatorname{arctg} y, \\ z'_y &= \frac{2^x}{1 + y^2}. \end{aligned}$$

$$2.33. \begin{aligned} z'_x &= \cos^2 y \cdot x^{\cos^2 y - 1}, \\ z'_y &= -\sin 2y \cdot x^{\cos^2 y} \ln x. \end{aligned}$$

$$2.34. z'_y = 2^y \ln 2 \sin \frac{\sqrt[3]{x}}{y} - 2^y \frac{\sqrt[3]{x}}{y^2} \cos \frac{\sqrt[3]{x}}{y}.$$

$$2.35. z'_x(1;0) = \frac{1}{2}, \quad z'_y(1;0) = 0.$$

2.3. ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$2.36. z = x^2 + 3y^3 - 4xy.$$

$$2.37. z = x^2 + y^2 + 3x + \ln 2.$$

$$2.38. z = \arcsin \frac{x^2}{y^2}.$$

$$2.39. z = \frac{xy}{1 + x^2}.$$

$$2.40. z = e^{\frac{x}{y^2}}.$$

$$2.41. z = (1 + 2y)^x + \sin x.$$

$$2.42. z = (1 + \sqrt{x})^y + \cos y.$$

$$2.43. z = y^2 \operatorname{tg}(xy).$$

2.44. $z = (2 + \sin x)^{\ln y}$.

2.46. $z = \operatorname{tg}(\sqrt{x-1} + x^y)$.

2.45. $z = e^{\frac{\cos x}{y}}$

პასუხები

2.36. $dz = (2x - 4y) dx + (9y^2 - 4x) dy$.

2.37. $dz = (2x + 3) dx + 2y dy$.

2.38. $dz = \frac{2x}{\sqrt{y^4 - x^4}} dx - \frac{2x^2}{y\sqrt{y^4 - x^4}} dy$.

2.39. $dz = \frac{y(1-x^2)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{x}{1+x^2} dy$.

2.40. $dz = e^{\frac{x}{y^2}} \frac{1}{y^2} \left(dx - \frac{2x}{y} dy \right)$.

2.41. $dz = \left((1+2y)^x \ln(1+2y) + \cos x \right) dx + 2x(1+2y)^{x-1} dy$.

2.42. $dz = y(1+\sqrt{x})^{y-1} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx + \left((1+\sqrt{x})^y \ln(1+\sqrt{x}) - \sin y \right) dy$.

2.43. $dz = \frac{y^3}{\cos^2(xy)} dx + \left(2y \operatorname{tg}(xy) + \frac{xy^2}{\cos^2(xy)} \right) dy$.

2.44. $dz = (2 + \sin x)^{\ln y - 1} \left(\cos x \ln y dx + (2 + \sin x) \frac{\ln(2 + \sin x)}{y} dy \right)$.

2.45. $dz = -\frac{1}{y^2} e^{\frac{\cos x}{y}} \sin \frac{x}{y} (y dx - x dy)$.

2.46. $dz = \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x-1} + x^y)} \left(\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + yx^{y-1} \right) dx + x^y \ln x dy \right)$.

2.4. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები

იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

2.47. $z = 2y^5 + 3x^2y^3 + y$.

2.49. $z = x^{\sin y}$.

2.48. $z = e^x (\cos y + x \sin y)$.

2.50. $z = (\cos x)^y$.

2.51. $z = x \cdot e^{2y^2}$.

2.52. $z = y^{2x+1}$.

2.53. იპოვეთ $z''_{xy}(0;1)$, თუ

$$z = x \cdot 2^y + y^2 \sin x.$$

2.54. იპოვეთ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, თუ

$$z = x^3 \operatorname{tg}(xy).$$

2.55. იპოვეთ $z''_{xy}(0;1)$, თუ

$$z = \cos(xy^2), \quad z''_{xy}(0;1) = 0.$$

2.56. იპოვეთ z''_{yy} , თუ

$$z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

2.57. იპოვეთ z''_{xy} , თუ $z = x^{\ln y}$.

პასუხები

2.47. $z''_{xx} = 6y^3$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 18xy^2$, $z''_{yy} = 40y^3 + 18x^2y$.

2.48. $z''_{xx} = e^x (\cos y + x \sin y + 2 \sin y)$,

$$z''_{xy} = z''_{yx} = e^x (x \cos y + \cos y - \sin y),$$

$$z''_{yy} = -e^x (\cos y + x \sin y).$$

2.49. $z''_{xx} = \sin y (\sin y - 1) x^{\sin y - 2}$,

$$z''_{xy} = z''_{yx} = x^{\sin y - 1} \cos y (1 + \sin y \ln x),$$

$$z''_{yy} = x^{\sin y} \ln x (\cos y \ln x - \sin y).$$

2.50. $z''_{xx} = y \cos^{y-2} x (y \sin^2 x - 1)$,

$$z''_{xy} = z''_{yx} = -\sin x (\cos x)^{y-1} (1 + y \ln \cos x),$$

$$z''_{yy} = (\cos x)^y \ln^2 \cos x.$$

2.51. $z''_{xx} = 0$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 4ye^{2y^2}$, $z''_{yy} = 4xe^{2y^2} (1 + 4y^2)$.

2.52. $z''_{xx} = 4 \ln^2 y \cdot y^{2x+1}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 2y^{2x} (1 + (2x+1) \ln y)$,

$$z''_{yy} = 2x(2x+1)y^{2x-1}.$$

2.53. $z''_{xy}(0;1) = 2 + 2 \ln 2$.

2.54. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^3}{\cos^2(xy)} (4 + 2xy \operatorname{tg}(xy))$.

2.55. $z''_{xy} = z''_{yx} = -2y (\sin(xy^2) + xy^2 \cos(xy^2))$, $Z''_{xy}(0;1) = 0$.

$$2.56. z''_{yy} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$2.57. z''_{xy} = \frac{1}{y} x^{\ln y - 1} (1 + \ln y \cdot \ln x).$$

2.5. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე შემდეგი ფუნქციები

$$2.58. z = (x-1)^2 + 2y^2.$$

$$2.66. z = x^3 y^2 (6-x-y), \quad x > 0, \\ y > 0.$$

$$2.59. z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

$$2.67. z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

$$2.60. z = x^3 - 2y^2 - 27x + 4y.$$

$$2.68. z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 6y + 9x + 1.$$

$$2.61. z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

$$2.69. z = \frac{1}{2}x^2 + 3xy + y^3 - 12y + 15.$$

$$2.62. z = 3x - x^3 - 3y^2.$$

$$2.70. z = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + 2xy - 15x + 1.$$

$$2.63. z = 2x^3 - 6xy + 3y^2.$$

$$2.64. z = x^4 - 4x + y^3 - 3y^2.$$

$$2.65. z = \frac{1}{3}x^3 - xy + x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 1.$$

$$2.71. z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}.$$

პასუხები

$$2.58. z_{\min} = z(1; 0) = 0.$$

$$2.63. z_{\min} = z(1; 1) = -1.$$

$$2.59. z_{\min} = z(1; 0) = -1.$$

$$2.64. z_{\min} = z(1; 2) = -7.$$

$$2.60. z_{\max} = z(-3; 1) = 56.$$

$$2.65. z_{\min} = z(0; 0) = 1.$$

$$2.61. z_{\min} = z(1; 1) = -1.$$

$$2.66. z_{\max} = z(3; 2) = 108.$$

$$2.62. z_{\max} = z(1; 0) = 2.$$

$$2.67. z_{\min} = z(\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = z(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) = -8.$$

$$2.68. z_{\min} = z(-1; -1) = -7.$$

$$2.69. z_{\min} = z(-12; 4) = -41.$$

$$2.70. z_{\min} = z(4; -1) = -41\frac{2}{3}, \quad z_{\max} = z(-4; -1) = 43\frac{2}{3}.$$

$$2.71. z_{\min} = z(5; 2) = 30.$$

2.6. ორი ცვლადის ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი. ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების პირობითი ექსტრემუმი

2.72. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, თუ $2x + y - 3 = 0$.

2.73. $z = 2xy^2 + y$, თუ $2x + y = 1$.

2.74. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, თუ $x + y = 4$.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების პირობითი ექსტრემუმი ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით

2.75. $z = x - 2y$, თუ $x^2 + y^2 = 5$.

2.76. $z = xy$, თუ $x^2 + y^2 = 8$.

2.77. $z = 3x + y$, თუ $x^2 + y^2 = 10$.

2.78. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, თუ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{8}$.

2.79. $z = \frac{2}{x} - \frac{1}{y}$, თუ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}$.

პასუხები

2.72. $z_{\min} = -\frac{1}{3}$, როცა $x = \frac{5}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$.

2.73. $z_{\max} = 1$, როცა $x = 0$, $y = 1$; $z_{\min} = -\frac{5}{27}$, როცა $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$.

2.74. $z_{\min} = 1$, როცა $x = y = 2$.

2.75. $z_{\min} = -5$, როცა $x = -1$, $y = 2$, $z_{\max} = 5$, როცა $x = 1$, $y = -2$.

2.76. $z_{\max} = 4$, როცა $x = 2$, $y = 2$ ან $x = -2$, $y = -2$;

$z_{\min} = -4$, როცა $x = 2$, $y = -2$ ან $x = -2$, $y = 2$.

2.77. $z_{\min} = -10$, როცა $x = -3$, $y = -1$; $z_{\max} = 10$, როცა $x = 3$, $y = 1$.

2.78. $z_{\min} = -\frac{1}{2}$, როცა $x = y = -4$; $z_{\max} = \frac{1}{2}$, როცა $x = y = 4$.

2.79. $z_{\min} = -2\frac{1}{2}$, როცა $x = -1$, $y = 2$; $z_{\max} = 2\frac{1}{2}$, როცა $x = 1$, $y = -2$.

3. ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტები

3.1. პირველადი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი

განუსაზღვრელ ინტეგრალთა ცხრილი

1. $\int dx = x + c .$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c , \alpha \neq -1 .$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c .$
4. $\int e^x dx = e^x + c .$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c .$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c .$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c .$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c .$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c .$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c .$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c .$
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c .$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c .$
14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c .$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + c .$

ცხრილის გამოყენებით იპოვეთ შემდეგი ინტეგრალები

- 3.1. $\int (3x+1)^2 dx .$
- 3.2. $\int \left(6x^2 + 4x + \frac{1}{x} \right) dx .$
- 3.3. $\int (1+x)(1+2x)(1+3x) dx .$
- 3.4. $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx .$
- 3.5. $\int \frac{2x^2 + \sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[5]{x^4}}{x^3} dx .$
- 3.6. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx .$
- 3.7. $\int (2^x - 3^x) \cdot 4^x dx .$
- 3.8. $\int e^x \left(1 + \frac{1}{x^3 e^x} \right) dx .$
- 3.9. $\int (\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1) dx .$
- 3.10. $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{6}{x^4} \right) dx .$
- 3.11. $\int \frac{(3^x - 4^x)^2}{12^x} dx .$
- 3.12. $\int \operatorname{tg}^2 x dx .$
- 3.13. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx .$
- 3.14. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx .$

$$3.15. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx .$$

$$3.16. \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx .$$

$$3.17. \int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx .$$

$$3.18. \int \frac{dx}{1 - \cos 2x} .$$

$$3.19. \int \frac{dx}{1 + \cos 2x} .$$

$$3.20. \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx .$$

პასუხები

$$3.1. 3x^3 + 3x^2 + x + c .$$

$$3.2. 2x^3 + 2x^2 + \ln|x| + c .$$

$$3.3. \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 + 3x^2 + x + c .$$

$$3.4. \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + c$$

$$3.5. 2\ln|x| - \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{2\sqrt[5]{x^6}} + c .$$

$$3.6. -\frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c .$$

$$3.7. \frac{8^x}{\ln 8} - \frac{12^x}{\ln 12} + c .$$

$$3.8. e^x - \frac{1}{2x^2} + c .$$

$$3.9. \frac{x^2}{2} - x + c .$$

$$3.10. 2\ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} + c .$$

$$3.11. \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{4}{3}\right)^x}{\ln \frac{3}{4}} - 2x + c .$$

$$3.12. \operatorname{tg} x - x + c .$$

$$3.13. -\operatorname{ctg} x - x + c .$$

$$3.14. \frac{1}{2}(x + \sin x) + c .$$

$$3.15. \frac{1}{2}(x - \sin x) + c .$$

$$3.16. 2 \operatorname{arctg} x - 3 \operatorname{arcsin} x + c .$$

$$3.17. \sin x + \cos x + c .$$

$$3.18. -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + c .$$

$$3.19. \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + c .$$

$$3.20. x - \cos x + c .$$

3.2. ცვლადის გარდაქმნა განუსაზღვრელ ინტეგრალში (ჩასმის ხერხი)

ჩასმის ხერხის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები

$$3.21. \int \frac{dx}{(3x-2)^4} .$$

$$3.22. \int \frac{dx}{\sqrt{5x+4}} .$$

$$3.23. \int \frac{dx}{\sqrt[5]{2x-3}} .$$

$$3.24. \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx .$$

$$3.25. \int \frac{2x^2}{4x^3+7} dx .$$

$$3.26. \int x\sqrt[3]{x^2+4} dx .$$

$$3.27. \int \frac{2x^3}{\sqrt{7+x^4}} dx .$$

$$3.28. \int \frac{x+2}{x^2+4x+9} dx .$$

$$3.29. \int e^{3x} dx .$$

$$3.30. \int \frac{1}{4x+5} dx .$$

$$3.31. \int 3^{3-5x} dx .$$

$$3.32. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx .$$

$$3.33. \int \frac{e^x}{e^x+3} dx .$$

$$3.34. \int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx .$$

$$3.35. \int \frac{1}{\cos^2(3x+2)} dx .$$

$$3.36. \int x^2 e^{x^3} dx .$$

$$3.37. \int a^{\sin x} \cos x dx .$$

$$3.38. \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x + 1}} dx .$$

$$3.39. \int \frac{dx}{x^2+2x+1} .$$

$$3.40. \int x^2 \sin(1+x^3) dx .$$

$$3.41. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx .$$

$$3.42. \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x + 3}}{\cos^2 x} dx .$$

$$3.43. \int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx .$$

$$3.44. \int \frac{5^x}{5^{2x}+10} dx .$$

$$3.45. \int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} dx .$$

$$3.46. \int \frac{dx}{3+5x^2} .$$

$$3.47. \int \frac{dx}{\sqrt{3+5x^2}} .$$

$$3.48. \int \frac{\ln^3 x}{x} dx .$$

$$3.49. \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx .$$

$$3.50. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} .$$

$$3.51. \int \frac{\ln x}{x(1+\ln^4 x)} dx .$$

$$3.52. \int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}} dx .$$

$$3.53. \int \frac{2 \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx .$$

$$3.54. \int \operatorname{tg} x dx .$$

$$3.55. \int \operatorname{ctg} x dx .$$

$$3.56. \int \frac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2} dx .$$

$$3.57. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx .$$

$$3.58. \int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx .$$

$$3.59. \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{\cos^2 3x} + \operatorname{tg} x \right) dx .$$

$$3.60. \int \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x} + \cos(5x-1) \right) dx .$$

$$3.61. \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+9}} dx .$$

$$3.62. \int \left(\frac{\ln^2 x}{x} + \frac{x^5 - 3}{x^3} \right) dx .$$

$$3.63. \int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}} dx .$$

$$3.64. \int \frac{x-1}{x^2-9} dx .$$

$$3.65. \int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

$$3.66. \int \frac{x}{2x-1} dx .$$

$$3.67. \int \frac{x}{5-3x} dx .$$

$$3.68. \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx .$$

$$3.69. \int \frac{dx}{x^2+2x+3} .$$

$$3.70. \int \frac{dx}{3x^2-2x+2} .$$

$$3.71. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} .$$

$$3.72. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} .$$

$$3.73. \int \frac{dx}{x^2-5x+6} .$$

$$3.74. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} .$$

$$3.75. \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} .$$

$$3.76. \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} .$$

$$3.77. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}} .$$

$$3.78. \int \cos^3 x dx .$$

$$3.79. \int \sin^3 x dx .$$

$$3.80. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx .$$

$$3.81. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx .$$

$$3.82. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx .$$

პასუხები

$$3.21. -\frac{1}{9(3x-2)^3} + c .$$

$$3.22. \frac{2}{5}\sqrt{5x+4} + c .$$

$$3.23. \frac{5}{8}\sqrt[5]{(2x-3)^4} + c .$$

$$3.24. \sqrt{x^2+4} + c .$$

$$3.25. \frac{1}{6} \ln |4x^3+7| + c .$$

$$3.26. \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+4)^4} + c .$$

$$3.27. \sqrt{7+x^4} + c .$$

$$3.28. \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+9) + c .$$

$$3.29. \frac{1}{3} e^{3x} + c .$$

$$3.30. \frac{1}{4} \ln |4x+5| + c .$$

$$3.31. -\frac{1}{5 \ln 3} 3^{3-5x} + c .$$

$$3.32. \frac{\ln^3 x}{3} + c .$$

3.33. $\ln(e^x + 3) + c.$

3.34. $\frac{1}{\ln 2} 2^{\operatorname{arctg} x} + c.$

3.35. $\frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x + 2) + c.$

3.36. $\frac{1}{3} e^{x^3} + c.$

3.37. $\frac{a^{\sin x}}{\ln a} + c.$

3.38. $2\sqrt{\operatorname{tg} x + 1} + c.$

3.39. $-\frac{1}{x+1} + c.$

3.40. $-\frac{1}{3} \cos(1 + x^3) + c.$

3.41. $\frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + c.$

3.42. $\frac{3}{4} \sqrt[3]{(\operatorname{tg} x + 3)^4} + c.$

3.43. $\frac{1}{\ln 2} \arcsin(2^x) + c.$

3.44. $\frac{1}{\sqrt{10} \ln 5} \operatorname{arctg} \frac{5^x}{\sqrt{10}} + c.$

3.45. $\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{3}} + c.$

3.46. $\frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5}{3}} x + c.$

3.47. $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 + 3} \right| + c.$

3.48. $\frac{\ln^4 x}{4} + c.$

3.49. $\frac{3}{4} \sqrt[3]{(\ln x + 1)^4} + c.$

3.50. $2\sqrt{1 + \ln x} + c.$

3.51. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\ln^2 x) + c.$

3.52. $\frac{5}{3} (\sin x)^{\frac{3}{5}} + c.$

3.53. $-2 \ln \left| \cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x} \right| + c.$

3.54. $-\ln |\cos x| + c.$

3.55. $\ln |\sin x| + c.$

3.56. $\ln |\cos x + \sin x| + c.$

3.57. $\frac{1}{\cos x} + c.$

3.58. $\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{\ln^2 x}{2} + c.$

3.59. $-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x - \ln |\cos x| + c.$

3.60. $2\sqrt{x} + 2 \ln |x| + \frac{1}{5} \sin(5x - 1) + c.$

3.61. $\sqrt{x^2 + 9} + 3 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 9} \right| + c.$

3.62. $\frac{\ln^3 x}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2x^2} + c.$

3.63. $-\sqrt{9 - x^2} + 3 \arcsin \frac{x}{3} + c.$

3.64. $\frac{1}{3} \ln \left(|x - 3| (x + 3)^2 \right) + c.$

3.65. $\frac{(\arcsin x)^4}{4} + c.$

3.66. $\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \ln |2x - 1| + c.$

3.67. $-\frac{5}{9} \ln |5 - 3x| - \frac{1}{3} x + c.$

3.68. $2\sqrt{x+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} \right| + c.$

$$3.69. \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c.$$

$$3.70. \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{5}} + c.$$

$$3.71. \ln \left| x+1+\sqrt{x^2+x+5} \right| + c.$$

$$3.72. \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + c.$$

$$3.73. \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + c.$$

$$3.74. \ln \left| x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1} \right| + c.$$

$$3.75. \arcsin \frac{x+2}{3} + c.$$

$$3.76. \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + c.$$

$$3.77. \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| 3x-1+\sqrt{9x^2-6x-3} \right| + c.$$

$$3.78. \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

$$3.79. \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + c.$$

$$3.80. -\frac{1}{\sin x} + c.$$

$$3.81. \frac{1}{\cos x} + c.$$

$$3.82. \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x} + c.$$

3.3. ნაწილობითი ინტეგრება

შემდეგ ინტეგრალთა გამოსათვლელად ისარგებლეთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით

$$3.83. \int x \sin x \, dx.$$

$$3.84. \int x \cos x \, dx.$$

$$3.85. \int x \cdot 3^{-x} \, dx.$$

$$3.86. \int x \cdot 7^x \, dx.$$

$$3.87. \int x \cdot e^{-x} \, dx.$$

$$3.88. \int x \sin 2x \, dx.$$

$$3.89. \int x \cos 5x \, dx.$$

$$3.90. \int \ln x \, dx.$$

$$3.91. \int \arcsin x \, dx.$$

$$3.92. \int \operatorname{arctg} x \, dx.$$

$$3.93. \int x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

$$3.94. \int \frac{x}{e^{2x}} \, dx.$$

$$3.95. \int \frac{\ln x}{x^3} \, dx.$$

$$3.96. \int \sin(\ln x) \, dx.$$

$$3.97. \int \cos(\ln x) \, dx.$$

$$3.98. \int e^x \cos x \, dx.$$

$$3.99. \int e^x \sin x \, dx.$$

$$3.100. \int x^2 e^{-x} \, dx.$$

$$3.101. \int \ln(x^2 + 1) \, dx.$$

$$3.102. \int \frac{1+x^2 e^x}{x} \, dx.$$

$$3.103. \int \frac{1+x^2 \ln x}{x^4} \, dx.$$

$$3.104. \int \left(x \cos 5x + \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \right) dx.$$

პასუხები

3.83. $\sin x - x \cos x + c$.

3.84. $x \sin x + \cos x + c$.

3.85. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} \left(x + \frac{1}{\ln 3} \right) + c$.

3.86. $\frac{7^x}{\ln 7} \left(x - \frac{1}{\ln 7} \right) + c$.

3.87. $-e^{-x} (x+1) + c$.

3.88. $-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$.

3.89. $\frac{1}{5} x \sin 5x + \frac{1}{25} \cos 5x + c$.

3.90. $x \ln x - x + c$.

3.91. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$.

3.92. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$.

3.93. $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + c$.

3.104. $\frac{1}{5} x \sin 5x + \frac{1}{25} \cos 5x + \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + c$.

3.94. $-\frac{1}{4} e^{-2x} (2x+1) + c$.

3.95. $-\frac{1}{4x^2} (1+2 \ln x) + c$.

3.96. $\frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$.

3.97. $\frac{x}{2} (\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + c$.

3.98. $\frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c$.

3.99. $\frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + c$.

3.100. $-e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + c$.

3.101. $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + c$.

3.102. $\ln|x| + x e^x - e^x + c$.

3.103. $-\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} (\ln x + 1) + c$.

4. განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი გამოყენება

4.1. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა

ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები

$$4.1. \int_0^1 x^4 dx .$$

$$4.2. \int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx .$$

$$4.3. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} .$$

$$4.4. \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} .$$

$$4.5. \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx .$$

$$4.6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin 5x dx .$$

$$4.7. \int_0^{\frac{t}{6}} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} .$$

$$4.8. \int_{-9}^{-3} \frac{dx}{x^2-1} .$$

$$4.9. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx .$$

$$4.10. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx .$$

$$4.11. \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx .$$

$$4.12. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx .$$

$$4.13. \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 \frac{x}{2} dx .$$

$$4.14. \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx .$$

ჩასმის ხერხით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები

$$4.15. \int_e^{e^3} \frac{dx}{x \ln x} .$$

$$4.16. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3} .$$

$$4.17. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx .$$

$$4.18. \int_0^1 x e^{-x^2} dx .$$

$$4.19. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} .$$

$$4.20. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx .$$

$$4.21. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx .$$

$$4.22. \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} .$$

4. განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი გამოყენება

$$4.23. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} .$$

$$4.24. \int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2} .$$

$$4.25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx .$$

$$4.26. \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} .$$

$$4.27. \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx .$$

$$4.28. \int_{-1}^0 \frac{x}{x^4+1} dx .$$

$$4.29. \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} .$$

$$4.30. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx .$$

$$4.31. \int_1^e \frac{(1+\sqrt{\ln x})^2}{x} dx .$$

$$4.32. \int_1^2 \frac{x^3}{x^4+4} dx .$$

ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები

$$4.33. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx .$$

$$4.34. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx .$$

$$4.35. \int_0^1 x e^{3x} dx .$$

$$4.36. \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx .$$

$$4.37. \int_1^2 x \log_2 x dx .$$

$$4.38. \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx .$$

$$4.39. \int_1^e \ln^2 x dx .$$

$$4.40. \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx .$$

$$4.41. \int_1^e \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx .$$

$$4.42. \int_0^1 x \cdot 5^x dx .$$

პასუხები

$$4.1. \frac{1}{5} .$$

$$4.2. \frac{5}{3} + 6\sqrt[3]{2} .$$

$$4.3. 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

$$4.4. \frac{\pi}{2} .$$

$$4.5. \frac{7}{3} .$$

$$4.6. \frac{2}{5} .$$

$$4.7. \frac{\pi}{18}.$$

$$4.8. \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}.$$

$$4.9. \sqrt{3} - 1.$$

$$4.10. \ln(\sqrt{2} + 1).$$

$$4.11. \frac{7}{4}.$$

$$4.12. \frac{4 - \pi}{4}.$$

$$4.13. \frac{\pi - 2}{2}.$$

$$4.14. \pi.$$

$$4.15. \ln 3.$$

$$4.16. \frac{7}{72}.$$

$$4.17. \ln \sqrt{2}.$$

$$4.18. \frac{e - 1}{2e}.$$

$$4.19. \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2.$$

$$4.20. \sqrt{2} - 1.$$

$$4.21. \frac{2}{3} \sqrt[4]{27}.$$

$$4.22. \frac{\pi}{6}.$$

$$4.23. \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$4.24. \frac{1}{5} \ln \frac{4}{3}.$$

$$4.25. \frac{1}{3}.$$

$$4.26. \frac{\pi}{18}.$$

$$4.27. \frac{1}{3}(e - 1).$$

$$4.28. -\frac{\pi}{8}.$$

$$4.29. \frac{\pi}{4}.$$

$$4.30. 1 - \frac{\pi}{4}.$$

$$4.31. \frac{17}{6}.$$

$$4.32. \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$4.33. 1.$$

$$4.34. \frac{\pi - 2}{8}.$$

$$4.35. \frac{1}{9}(2e^3 + 1).$$

$$4.36. \frac{9 - 3\sqrt[3]{e^2}}{4}.$$

$$4.37. 1 - \frac{3}{4 \ln 2}.$$

$$4.38. \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$4.39. e - 2.$$

$$4.40. 1.$$

$$4.41. 10\sqrt{e} - 16.$$

$$4.42. \frac{1}{\ln 5} \left(5 - \frac{4}{\ln 5} \right).$$

4.2. ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა

გამოთვალეთ იმ ფიგურათა ფართობები, რომლებიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით

$$4.43. y = \frac{(\ln x + 1)^2}{x}, x = 1, x = e,$$

$$y = 0.$$

$$4.44. y = \sqrt{x^4 + 1} \cdot x^3, x = 0, x = 1,$$

$$y = 0.$$

$$4.45. y = \frac{4}{x}, x = 1, x = 4, y = 0.$$

$$4.46. y = x^2, y = 4.$$

$$4.47. y = \sqrt{x}, y = x.$$

$$4.48. y = x^3, y = x.$$

$$4.49. \text{ა) } y = x^2, y = 2 - x, y = 0.$$

$$\text{ბ) } y = x^2, y = 2 - x.$$

$$4.50. y = x^2 + 1, y = 3 - x.$$

$$4.51. y = \frac{2}{x}, y = 3 - x.$$

$$4.52. y = x^2, y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 2.$$

$$4.53. y = 6x - x^2, y = 0.$$

$$4.54. y = 6 - x^2, y = 2.$$

$$4.55. y = \frac{1}{x}, x = 0, x = 1, y = 0, y = 3.$$

$$4.56. y = x^3, y = 8, x = 0.$$

$$4.57. y = x^2 + 4x + 5, x = 0, y = 1.$$

$$4.58. y = \ln x, x = e, y = 0.$$

$$4.59. y = \frac{6}{x}, y = -x + 7.$$

$$4.60. y = x^2 + 1, y = \frac{1}{2}x^2, y = 5.$$

$$4.61. y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{20}.$$

$$4.62. y = \frac{x^2}{4}, y = 2\sqrt{x}.$$

$$4.63. y = \frac{x^2}{9}, y = 3\sqrt{x}.$$

პასუხები

$$4.43. \frac{7}{3}.$$

$$4.44. \frac{1}{6}(\sqrt{8} - 1).$$

$$4.45. 4 \ln 4.$$

$$4.46. \frac{32}{3}.$$

$$4.47. \frac{1}{6}.$$

$$4.48. \frac{1}{4}.$$

$$4.49. \text{ა) } \frac{5}{6}; \quad \text{ბ) } 4.5.$$

$$4.50. 4.5.$$

$$4.51. \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$$

$$4.52. \frac{1}{3} + \ln 2.$$

$$4.53. 36.$$

$$4.54. \frac{32}{3}.$$

$$4.55. 1 + \ln 3.$$

$$4.56. 12.$$

$$4.57. \frac{8}{3}.$$

$$4.58. 1.$$

$$4.59. 17.5 - 6 \ln 6.$$

$$4.60. \frac{4}{3}(5\sqrt{10}-8). \quad 4.62. \frac{16}{3}.$$

$$4.61. 2 \operatorname{arctg} 2 - \frac{4}{15}. \quad 4.63. 27.$$

4.3. ბრუნვითი სხეულის მოცულობა

გამოთვალეთ შემდეგი წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის OX ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა

$$4.64. y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0.$$

$$4.71. y = \frac{1}{\sqrt{x}}, y = 0, x = 1, x = 4.$$

$$4.65. \text{ა) } y = x^2, y = x.$$

$$4.72. y = 2^x, y = 2, x = 0.$$

$$\text{ბ) } y = \sqrt{x}, y = x.$$

$$4.73. y = x^2, y = 2 - x.$$

$$4.66. y = x^3, x = 0, y = 1.$$

$$4.74. y = x^2, y = 2 - x, y = 0.$$

$$4.67. y = 5 - x^2, y = 1.$$

$$4.75. y = 4x - x^2, y = x.$$

$$4.68. y = x^2, y = \sqrt{x}.$$

$$4.76. y = 2\sqrt{x}, y = \frac{x^2}{4}.$$

$$4.69. y = \frac{2}{x}, y = 3 - x.$$

$$4.77. y = \sin x, x = 0, x = \pi, y = 0.$$

$$4.70. y = \sqrt{x}, y = 2 - x, y = 0.$$

$$4.78. y = e^{2x}, y = 0, x = 0, x = 1.$$

პასუხები

$$4.64. 8\pi.$$

$$4.72. \frac{4 \ln 4 - 3}{\ln 4} \pi.$$

$$4.65. \text{ა) } \frac{2}{15} \pi; \text{ ბ) } \frac{1}{6} \pi.$$

$$4.73. \frac{72}{5} \pi.$$

$$4.66. \frac{6}{7} \pi.$$

$$4.74. \frac{8}{15} \pi.$$

$$4.67. \frac{832}{15} \pi.$$

$$4.75. \frac{108}{5} \pi.$$

$$4.68. \frac{3}{10} \pi.$$

$$4.76. \frac{96}{5} \pi.$$

$$4.69. \frac{\pi}{3}.$$

$$4.77. \frac{\pi^2}{2}.$$

$$4.70. \frac{5}{6} \pi.$$

$$4.78. \frac{\pi}{4}(e^4 - 1).$$

$$4.71. \pi \ln 4.$$

5. დიფერენციალური განტოლებები

5.1. განცალვებად ცვლადებიანი პირველი რიგის

დიფერენციალური განტოლება

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები და სადაც მითითებულია, იპოვეთ ის კერძო ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ საწყის პირობას

5.1. $y' = 3x^2 - 2x + 1, x = 1, y = 2.$

5.2. $xy' - y = 0, x = \frac{1}{2}, y = 2.$

5.3. $y' = y, x = -2, y = 2.$

5.4. $y' = y^2 \ln x.$

5.5. $\sqrt{1-x^2} y' = y^2.$

5.6. $xy^2 y' = x^3 - 1.$

5.7. $xy^2 y' = 1 + x^2.$

5.8. $3xy^2 y' = 1 + \sqrt{x}, x = 1, y = 0.$

5.9. $y' = xy^2 e^x.$

5.10. $(1+x^2)y' = xy.$

5.11. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0.$

5.12. $(1+y^2)dx + xy dy = 0.$

5.13. $xyy' = 1 - x^2.$

5.14. $y' \operatorname{tg} x = y.$

5.15. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0.$

5.16. $(1+y^2)x dx + (1+x^2)dy = 0.$

5.17. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0.$

5.18. $yy' = \frac{1-2x}{y}.$

5.19. $xy' + y = y^2.$

5.20. $y' = 10^{x+y}.$

პასუხები

5.1. $y = x^3 - x^2 + x + c,$

$y = x^3 - x^2 + x + 1.$

5.2. $y = cx, y = 4x.$

5.3. $y = ce^x, y = 2e^{x+2}.$

5.4. $y = \frac{1}{x \ln \frac{e}{x} + c}.$

5.5. $y = \frac{1}{c - \arcsin x}.$

5.6. $y^3 = x^3 - 3 \ln|x| + c.$

5.7. $y^3 = 3 \ln|x| + \frac{3}{2}x^2 + c.$

5.8. $y^3 = \ln x + 2\sqrt{x} + c,$

$y^3 = \ln x + 2\sqrt{x} - 2.$

5.9. $\frac{1}{y} = e^x(1-x) + c.$

5.10. $y = c\sqrt{1+x^2}.$

5.11. $|x-1||y-1| = c.$

5.12. $x\sqrt{1+y^2} = c.$

5.13. $x^2 + y^2 = \ln(x^2 c).$

5.14. $y = c \sin x.$

5.15. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c.$

$$5.16. \ln \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} y = c.$$

$$5.17. 1 + y^2 = c(x^2 - 1).$$

$$5.18. y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + c}.$$

$$5.19. \frac{y-1}{y} = cx.$$

$$5.20. 10^x + 10^{-y} = c.$$

5.2. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები

$$5.21. y' + 2y = 4x.$$

$$5.22. y' + \frac{1}{x}y - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

$$5.23. y' = x + y.$$

$$5.24. y' + \frac{2}{x}y = x^3.$$

$$5.25. y' + xy + 4x = 0.$$

$$5.26. y' + y = \cos x.$$

$$5.27. y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

$$5.28. (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2.$$

$$5.29. 2xy' + x^2 - 6y = 0.$$

$$5.30. (1+x^2)dy = (\operatorname{arctg} x - y)dx.$$

პასუხები

$$5.21. y = 2x - 1 + ce^{-2x}.$$

$$5.22. y = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{c}{x}.$$

$$5.23. y = ce^x - x - 1.$$

$$5.24. y = \frac{c}{x^2} + \frac{x^4}{6}.$$

$$5.25. y = ce^{\frac{x^2}{2}} - 4.$$

$$5.26. y = ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

$$5.27. y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + c \right).$$

$$5.28. y = (1+x^2)(x+c).$$

$$5.29. y = \frac{x^2}{2} + cx^3.$$

$$5.30. y = \operatorname{arctg} x - 1 + ce^{-\operatorname{arctg} x}.$$

5.3. მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება

ამოხსენით შემდეგი განტოლებები

$$5.31. y'' + y' - 2y = 0.$$

$$5.32. y'' - 4y' = 0.$$

$$5.33. y'' - 3y' = 4y.$$

$$5.34. y'' - 2y' - 8y = 0.$$

$$5.35. y'' - 5y' + 6y = 0.$$

$$5.36. y'' - 3y' + 2y = 0.$$

$$5.37. y'' - 2y' + y = 0.$$

$$5.38. 4y'' - 12y' + 9y = 0.$$

5.39. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

5.40. $y'' + 10y' + 25y = 0$.

5.41. $y'' + 6y' + 13y = 0$.

5.42. $y'' + 4y' + 29y = 0$.

5.43. $y'' + 8y' + 25y = 0$.

5.44. $2y'' + 10y' + 17y = 0$.

პასუხები

5.31. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.

5.32. $y = c_1 + c_2 e^{4x}$.

5.33. $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$.

5.34. $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}$.

5.35. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$.

5.36. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

5.37. $y = e^x (c_1 + c_2 x)$.

5.38. $y = e^{\frac{3}{2}x} (c_1 + c_2 x)$.

5.39. $y = e^{3x} (c_1 + c_2 x)$.

5.40. $y = e^{-5x} (c_1 + c_2 x)$.

5.41. $y = e^{-3x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.

5.42. $y = e^{-2x} (c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$.

5.43. $y = e^{-4x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$.

5.44. $y = e^{-\frac{5}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{3}{2}x + c_2 \sin \frac{3}{2}x \right)$.

ლიტერატურა

1. პ. ზერაგია, უმაღლესი მათემატიკა, ტ.1,2 თსუ, 1984.
2. მ. გელაშვილი, ქ. კიკვაძე, ქ. ლოსაბერიძე, ლ. მალრაძე, რ. მესხია, ნ. სვანიძე, უმაღლესი მათემატიკა, თსუ, 2004.
3. Крамер Н.Ш. , Высшая математика для экономистов, М., 2006.
4. დ.ბალაშვილი, მ.ბედოშვილი, ზ.ბლიაძე, ე.გობრონიძე, ლ.სკამკოჩაიშვილი, ზ.ჯიქია, უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, თსუ, 2001.
5. გ. ლობჯანიძე, ნ. მჭედლიშვილი, ნ. სხირტლაძე, თ. ჯანგველაძე, კალკულუსი, თბილისი, 2015.
6. James Stewart, Calculus, Early Transcendentals, Eighth Editions, USA, 2014.

გარეკანის დიზაინი
კომპ. უზრუნველყოფა
გამოცემის მენეჯერი

ნინო ებრალიძე
ლალი კურდღელაშვილი
მარია ერქომაიშვილი

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14
14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel: 995(32) 2251432
www.press.tsu.edu.ge

