გიორგი ონიანი

ნამდვილი ანალიზის საფუძვლები

გიორგი ონიანი
ნამდვილი ანალიზის საფუძვლები

ნამდვილი ანალიზის საფუძვლები

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

გიორგი ონიანი

ნამდვილი ანალიზის საფუძვლები

უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

წიგნი წარმოადგენს საუნივერსიტეტო სახელმძღვანელოს ნამდვილ ანალიზში. მასში თანამედროვე სამეცნიერო ტენდენციების გათვალისწინებითაა გადმოცემული ძირითადი საკითხები, დაკავშირებული ზომისა და ლებეგის ინტეგრალის კონსტრუქციებთან და მათ გამოყენებებთან. პარაგრაფების უმეტესობას თან ერთვის სხვადასხვა სირთულის თემატურ ამოცანათა ჯგუფი.

წიგნი გათვლილია მათემატიკის სპეციალობის სამივე აკადემიური საფეხურის სტუდენტებზე. ის აგრეთვე სასარგებლო იქნება მათემატიკური ანალიზის მიმართულებით მოღვაწე მკვლევართათვის.

რედაქტორი: საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის წევრი **ვახტანგ კოკილაშვილი**

რეცენზენტები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი **შაქრო ტეტუნაშვილი**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი **დუგლას უგულავა**

გამოცემულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადაწყვეტილებით.

ISBN 978-9941-13-812-6 (pdf)

შინაარსი

მამის, გიგლა ონიანის ხსოვნას
ვუძღვნი ამ წიგნს

წინასიტყვაობა

ნამდვილი ანალიზი შეისწავლის ფუნქციებს სხვადასხვა ანალიზური ოპერაციებისა და სტრუქტურული თვისებების მეშვეობით (დიფერენცირება, ინტეგრება, ტრიგონომეტრიულ მწკრივად გაშლა, უწყვეტობა, მონოტონურობა და ა.შ.), რაც ბუნებრივად იწვევს სიმრავლეთა შესწავლის აუცილებლობასაც, რადგან, როგორც ფუნქციის განსაზღვრისათვის, ასევე, მისი თვისებების შესრულების არეალის გამოსაკვეთად საჭიროა სიმრავლის ცნების გამოყენება.

არსებითია იმის ხაზგასმა, რომ, კლასიკური ანალიზისაგან განსხვავებით, ნამდვილ ანალიზში საქმე გვაქვს არა მხოლოდ გლუვ ფუნქციებთან და მარტივი აგებულების სიმრავლეებთან - განხილვის საგანი ხდება არარეგულარული ხასიათის ფუნქციები და სიმრავლეებიც.

აღნიშნული რთული სტრუქტურის ობიექტების მათემატიკური ლეგიტიმაცია წინააღმდეგობების ფონზე მოხდა. კოლიზიას ქმნიდა ის გარემოება, რომ კლასიკურ ანალიზში განხილული, ანალიზური გამოსახულებებით განსაზღვრული ფუნქციები და თვალსაჩინო გეომეტრიული მახასიათებლების მქონე სიმრავლეები ახდენდნენ რეალური ფიზიკური პროცესებისა და ობიექტების მათემატიკურ მოდელირებას, მაშინ, როცა იგივე საფუძველს მოკლებულნი იყვნენ, მაგალითად, ვაიერშტრასის არსად წარმოებადი უწყვეტი ფუნქცია, ანაც, კანტორის დისკონტინუალური სიმრავლე.

ნამდვილი ანალიზის ფარგლებში აღმოჩენილი უცნაური ფუნქციებისა და სიმრავლეების შესაბამისი ფიზიკური ფენომენები გამოვლინდა მოგვიანებით, მე-20 საუკუნეში - ბროუნის მოძრაობის, ფრაქტალურობის, დინამიკური სისტემების და ზოგიერთი სხვა ფიზიკური მოვლენის შესწავლის შედეგად. თუმცა, ამ დროს ნამდვილი ანალიზი უკვე იყო ჩამოყალიბებული სამეცნიერო მიმართულება. ზემოხსენებული წინააღმდეგობის დაძლევა მათემატიკის განვითარების შინაგანი ლოგიკის საფუძველზე მოხდა. უმნიშვნელოვანესი როლი ამ თვალსაზრისით შეასრულა ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა შესწავლამ. ასეთი ტიპის მწკრივების, როგორც ფუნქციის მარტივ კომპონენტებად დაშლის ეფექტური მექანიზმის, კვლევა წამოწყებული იყო ჟ. ფურიეს შრომებში.

აღმოჩნდა, რომ ისეთი კარგი ფუნქციების, როგორიც ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია, შეკრების შედეგი შეიძლება რთული ბუნების (წყვეტების მქონე) ფუნქციები იყვნენ. წყვეტილ ფუნქციათა ინტეგრების საჭიროებამ რიმანი მიიყვანა კოშის მიერ შემოღებული ინტეგრალის კონსტრუქციის გაუმჯობესებამდე. შემდეგ კი, რიმანის აზრით ინტეგრებადობისათვის ოპტიმალური პირობების კვლევამ კიდევ უფრო გაამდიდრა წყვეტილი ფუნქციებისა და არასტანდარტული სიმრავლეების შესახებ ცოდნა.

აქვე შევნიშნოთ, იგივე პერიოდში მომხდარი ერთი უმნიშვნელოვანესი მათემატიკური მოვლენის თაობაზე: ტრიგონომეტრიულ მწკრივად ფუნქციის გაშლის ერთადერთობის უზრუნველმყოფი სიმრავლეების კვლევის პროცესში გ. კანტორმა აღმოაჩინა უსასრულო სიმრავლეთა იერარქია რაოდენობრიობის და დალაგების სტრუქტურის თვალსაზრისით და შემდგომ შექმნა მთლიანად მათემატიკისათვის უმნიშვნელოვანესი მიმართულება - სიმრავლეთა თეორია. ეს თეორია მალევე მყარი დასაყრდენი გახდა ნამდვილი ანალიზისათვის.

მე-19 საუკუნის 80-იანი წლებისთვის ნამდვილი ანალიზი უკვე მიჩნეული იყო საინტერესო, თუმცა ჯერ კიდევ ჩამოყალიბების პროცესში მყოფ კვლევის სფეროდ. ჯ. პეანოს, კ. ჟორდანის, უ. დინის, ვ. ვოლტერას, ლ. შეფერის და სხვა მკვლევართა მიერ ამ პერიოდში შესრულებულ შრომებში გამოიკვეთა ის არსებითი პრობლემები, რომელთა შემდგომმა გადაწყვეტამ ნამდვილი ანალიზი მათემატიკის უმნიშვნელოვანეს დარგად აქცია. აღმოჩნდა, რომ რიმანის ინტეგრალს და ამოწურვის კლასიკურ სქემაზე დაფუძნებულ სიმრავლეთა გაზომვის მეთოდს რთული სტრუქტურის ფუნქციებისა და სიმრავლეების შესწავლისას ჰქონდათ გამოყენების შეზღუდული არეალი. კერძოდ, გამოიკვეთა პრობლემების შემდეგი წრე:

- უწყვეტ ფუნქციათა კლასის მიღმა, რიმანის ინტეგრალისათვის ირღვევა გაწარმოებისა და ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის კლასიკური პრინციპი. სახელდობრ, რიმანის ინტეგრალი, საზოგადოდ, ვერ იძლევა პირველყოფილის აღდგენის პრობლემის გადაწყვეტას შემოსაზღვრული წარმოებულის მქონე ფუნქციების შემთხვევაშიც კი (რაც იგივეა, რომ არსებობენ ფუნქციები, რომელთა წარმოებული შემოსაზღვრულია, მაგრამ არაა რიმანის აზრით ინტეგრებადი). ამასთანავე, წყვეტილი ფუნქციებისათვის გაუგებარია, თუ რა თვალსაზრისით უნდა იქნას მიჩნეული მისი რიმანის განუსაზღვრელი ინტეგრალი მისსავე პირველყოფილად;
- რიმანის ინტეგრალის მეშვეობით, საზოგადოდ, ვერ ხერხდება თვით ისეთი წირების სიგრძის გამოთვლა, რომელთაც აქვთ ყოველ წერტილში წარმოებადი საკოორდინატო ფუნქციები (გეომეტრიული ტერმინებით რომ ვთქვათ, ყოველ წერტილში აქვთ მხები);
- რიმანის ინტეგრალი, საზოგადოდ, ვერ უზრუნველყოფს ფუნქციური მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებას იმ შემთხვევაშიც კი, როცა: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ მწკრივი შედგება არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციებისაგან, მისი კერძო ჯამები ერთობლივ შემოსაზღვრულია და ამასთანავე, $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{[a,b]} f_k$ ინტეგრალების მწკრივი კრებადია;

- მონაკვეთების სასრული გაერთიანებების გამოყენებაზე დაფუძნებული ამოწურვის მეთოდით, საზოგადოდ, შეუძლებელია რთული აგებულების სიმრავლეთა თვით ყველაზე მსუბუქი ვერსიების - ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეების გაზომვა. შეუძლებელია, ასევე, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლისათვის ზომის მნიშვნელობის მინიჭება.

რიმანის ინტეგრალის არაეფექტურობა ზემოთ მოცემულ სიტუაციებში გაპირობებული იყო იმით, რომ მისი მექანიზმი გათვლილია უწყვეტ ან უწყვეტთან მიახლოებული ხასიათის ფუნქციებზე. მრავლობითი წყვეტების მქონე ფუნქციებისათვის კი, რიმანის ინტეგრალი არ იძლევა სასურველ შედეგებს. თუ ინტეგრებას მივიჩნევთ ფუნქციის გაზომვის მეთოდად (რაც სავსებით ლოგიკურია), მაშინ შეიძლება ითქვას, რომ ზემოთ აღწერილი გარემოებები დღის წესრიგში აყენებდა ფუნქციებისა და სიმრავლეების გაზომვის ახალი, უფრო ძლიერი მექანიზმების შექმნის საკითხს. ორივე მიმართულებით საკითხის ეფექტური გადაწყვეტა მოცემული იყო ა. ლებეგის მიერ 1902 წელს. აქვე უნდა აღინიშნოს ე. ბორელის მნიშვნელოვანი წვლილიც - სიმრავლეთა გაზომვის ლებეგის მეთოდი არსებითად იყენებს ცოტა ხნით ადრე ბორელის მიერ გამოთქმულ იდეებს.

ლებეგმა, ინტეგრალისა და ზომის თეორიების შექმნასთან ერთად, ეფექტურად გამოიყენა კიდეც ისინი ზემოჩამოთვლილ ამოცანებთან მიმართებაში. განსაკუთრებით აღსანიშნავია განუსაზღვრელი ინტეგრალის დიფერენცირებასთან დაკავშირებით მიღებული შედეგები, რომლითაც, უწყვეტ ფუნქციათა შემთხვევაში, კლასიკური ანალიზიდან ცნობილი დიფერენცირებისა და ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის პრინციპი გავრცელდა ლებეგის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა გაცილებით ფართო კლასზე.

საზოგადოდ, ლებეგის ინტეგრალის აპარატმა შესაძლებელი გახადა ცოდნის არსებითი გაფართოება ყველა იმ მიმართულებით, სადაც ადრე კვლევის საშუალებად რიმანის ინტეგრალი გამოიყენებოდა. ამ თვალსაზრისით, თვალსაჩინო მაგალითად შეიძლება გამოვყოთ ტრიგონომეტრიული და ზოგადი ორთოგონალური მწკრივების თეორია (ფურიეს ანალიზი).

მე-20 საუკუნის 20-იანი წლებისთვის ჯ. რადონმა, მ. ფრეშემ და კ. კარათეოდორმა ლებეგის ზომისა და ინტეგრალის კონსტრუქციები განაზოგადეს აბსტრაქტულ სივრცეებზე, რომლებშიც არანაირი ალგებრული და ტოპოლოგიური სტრუქტურა აპრიორულად არაა მოცემული. ზომისა და ლებეგის ინტეგრალის აბსტრაქტული მექანიზმები არსებითი საფუძველი აღმოჩნდა ალბათობის თეორიის აქსიომატიზაციისათვის და შემდგომ გადაიქცა ამ დარგის კვლევის უმთავრეს საშუალებად. აღსანიშნავია, აგრეთვე, მნიშვნელოვანი გამოყენებები ფუნქციონალურ ანალიზში (ჯამებად ფუნქციათა სივრცეების, ერგოდულობისა და სპექტრალური თეორიები).

წინამდებარე სახელმძღვანელოში გადმოცემულია ნამდვილი ანალიზის ძირითადი პრინციპები, რომლებიც დაკავშირებულია ზომისა და ლებეგის ინტეგრალის კონსტრუქციებთან და მათ გამოყენებებთან. თანაც, ეს კეთდება როგორც აბსტრაქტულ, ასევე კონკრეტულ - $\mathbb{R}^n$ სივრცეების სიტუაციებში. პარაგრაფების უმეტესობას თან ერთვის სხვადასხვა სირთულის თემატურ ამოცანათა ჯგუფი. წიგნს საფუძვლად უდევს სასწავლო კურსები, რომელთაც ბოლო 20 წლის განმავლობაში ვკითხულობდი აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის სპეციალობის სტუდენტებისთვის.

მინდა, ღრმა მადლიერება გამოვხატო რედაქტორის - ვახტანგ კოკილაშვილის და რეცენზენტების - შაქრო ტეტუნაშვილისა და დუგლას უგულავას მიმართ, რომელთაც გულდასმით წაიკითხეს წიგნის ხელნაწერი და მომცეს მთელი რიგი ფასეული შენიშვნებისა.

სხვადასხვა დროს, სახელმძღვანელოს თემატიკასთან და ხელნაწერთან დაკავშირებით სასარგებლო რჩევები მიმიღია კოლეგების - უშანგი გოგინავას, ლაშა ეფრემიძის, თამაზ ზერეკიძის, თენგიზ კოპალიანის, ლერი ბანცურის, კახა ჩუბინიძისა და ერეკლე ჯაფარიძისაგან. მაია კვინიკაძემ დიდი დახმარება გამიწია ტექსტის დაკაბადონების ეტაპზე. მათ, ყველას, დიდ მადლობას მოვახსენებ.

თ ა ვ ი 1

სიმრავლის სიმძლავრე

§ 1. სიმძლავრის ცნება

სიმძლავრეთა (კარდინალურ რიცხვთა) თეორიის შესწავლის საგანს წარმოადგენს სიმრავლეთა კლასიფიკაცია და შედარება იმისდა მიხედვით, თუ ელემენტთა რა მარაგს შეიცავენ ისინი. ერთი შეხედვით, უსასრულო სიმრავლეთათვის ამ საკითხების შესწავლა აზრს მოკლებულია, რადგანაც ყოველ მათგანში უსასრულო რაოდენობის ელემენტია და ამდენად, ელემენტების რაოდენობის მახასიათებლის მიხედვით ისინი ერთნაირი - უსასრულო არიან. მიუხედავად ამისა, არსებობს ბუნებრივი პრინციპები, რომლებიც კლასიფიკაციისა და შედარების საშუალებას იძლევა. მათი მეშვეობით ირკვევა, რომ უსასრულო სიმრავლეთა შორისაც არიან შედარებით ღარიბები და შედარებით მდიდრები.

დავიწყოთ იმ პრინციპის განსაზღვრით, რომელიც მოგვცემს კლასიფიცირების საშუალებას, ანუ იმის განსაზღვრით, თუ როდის უნდა ჩავთვალოთ სიმრავლეები ელემენტთა ერთნაირი მარაგის მქონეებად.

A და B სიმრავლეებს ეწოდებათ **ეკვივალენტური**, ან კიდევ **ერთნაირი სიმძლავრის**, თუ მათ შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

A და B სიმრავლეების ეკვივალენტობის ჩასაწერად გამოვიყენებთ $A \sim B$ აღნიშვნას.

ცხადია, რომ ორი სასრული სიმრავლე ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი ელემენტთა ერთსა და იმავე რაოდენობას შეიცავენ.

ასახვათა სტანდარტულ თვისებებზე დაყრდნობით მარტივად მტკიცდება, რომ სიმრავლეთა ეკვივალენტობის მიმართებას აქვს ზოგადი ეკვივალენტობის მიმართების დამახასიათებელი სამივე თვისება:

1) $A \sim A$ (რეფლექსურობა);

2) თუ $A \sim B$, მაშინ $B \sim A$ (სიმეტრიულობა);

3) თუ $A \sim B$ და $B \sim C$, მაშინ $A \sim C$ (ტრანზიტულობა).

როგორც ცნობილია, ყოველი ეკვივალენტობის მიმართება ობიექტთა ერთობლიობას ყოფს კლასებად, ისე, რომ ერთ კლასში ერთმანეთის ეკვივალენტური ობიექტები იყრიან თავს, რაც იძლევა ამ ობიექტთა კლასიფიკაციას

იმ ნიშნით, რომლის მიხედვითაც ეკვივალენტობის მიმართება არის განსაზღვრული. ამრიგად, თუ სიმრავლეთა ეკვივალენტობის მიმართების მიხედვით ყველა შესაძლო სიმრავლის ერთობლიობას დავყოფთ კლასებად, მივიღებთ სიმრავლეთა კლასიფიკაციას იმისდა მიხედვით, თუ ელემენტთა რა მარაგის შემცველები არიან ისინი, ანუ თითოეულ კლასს ექნება მხოლოდ მისთვის დამახასიათებელი ელემენტთა მარაგის ტიპი. ამ მსჯელობის ფორმალიზაციას იძლევა სიმრავლის სიმძლავრის (კარდინალური რიცხვის) ცნება:

ვთქვათ, სიმრავლეები განაწილებულია კლასებში ისე, რომ ორი სიმრავლე ერთ კლასში თავსდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი ეკვივალენტური არიან. სიმრავლეთა ყოველ K კლასს შევუსაბამოთ რაიმე α სიმბოლო ისე, რომ, განსხვავებულ კლასებს განსხვავებული სიმბოლოები შეესაბამებოდეთ და α-ს ვუწოდოთ K კლასის სიმრავლეების **სიმძლავრე** ან კიდევ, **კარდინალური რიცხვი**.

სასრული სიმრავლის სიმძლავრე, ბუნებრივია, მიჩნეულია მასში ელემენტების რაოდენობის ტოლად. ასე რომ, სიმძლავრის ცნება წარმოადგენს სასრულ სიმრავლეში ელემენტების რაოდენობის ცნების განზოგადებას.

A სიმრავლის სიმძლავრეს $\operatorname{card} A$ ან $\overline{\overline{A}}$ ჩანაწერით აღნიშნავენ.

სასრული სიმრავლე შეუძლებელია ეკვივალენტური იყოს მისი საკუთრივი ქვესიმრავლის. უსასრულო სიმრავლეთა შემთხვევში კი, ასეთ ფენომენს შეიძლება ადგილი ჰქონდეს, რასაც მოწმობს შემდეგი მაგალითები.

მაგალითი 1.1.1. $[0,1]$ და $[0,2]$ სეგმენტები ეკვივალენტურია. ურთიერთცალსახა შესაბამისობა მათ შორის მოიცემა $[0,1] \ni x \mapsto 2x \in [0,2]$ ასახვის მეშვეობით.

მაგალითი 1.1.2. ვთქვათ, M არის ყველა ლუწი რიცხვის სიმრავლე. ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ნატურალურ რიცხვთა $\mathbb{N}$ და ლუწ რიცხვთა M სიმრავლეებს შორის მოიცემა $\mathbb{N} \ni n \mapsto 2n \in M$ ასახვის მეშვეობით.

ამრიგად, უსასრულო სიმრავლეების შემთხვევაში, „ნაწილში" შეიძლება იმდენივე ელემენტი აღმოჩნდეს რამდენიც „მთელში". შემდგომში დადგენილი იქნება, რომ ასეთი რამ უსასრულო სიმრავლეთა მახასიათებელ თვისებას წარმოადგენს.

ამოცანები

1. ააგეთ ბიექცია $(0,1)$ ინტერვალსა და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს შორის.
2. ააგეთ ბიექცია $[0,1]$ სეგმენტსა და $(0,1)$ ინტერვალს შორის.
3. ააგეთ ბიექცია ღია ერთეულოვან წრესა და ჩაკეტილ ერთეულოვან წრეს შორის.
4. ააგეთ ბიექცია წრეწირსა და წრფეს შორის.
5. ააგეთ ბიექცია ერთ წერტილში გაჩხვლეტილ სფეროსა და სიბრტყეს შორის.
6. ააგეთ ბიექცია სფეროსა და სიბრტყეს შორის.

7. ააგეთ ბიექცია ნებისმიერ ორ ღია წრეს შორის.

§ 2. თვლადი სიმრავლეები

სიმრავლეს ეწოდება **თვლადი**, თუ ის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია.

თვლად სიმრავლეთა სიმძლავრეს a ასოთი აღნიშნავენ. აქვე შევნიშნავთ, რომ სასრულ ან თვლად სიმრავლეს **არაუმეტეს თვლადს** უწოდებენ.

თვლადი სიმრავლე შეიძლება დახასიათდეს, როგორც სიმრავლე, რომლის წარმოდგენა შესაძლებელია $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ სახით. ასეთ წარმოდგენაში სიმრავლის ელემენტები აღწერილია გარკვეული მიმდევრობის წევრების მეშვეობით.

თეორემა 1.2.1. ყოველი უსასრულო სიმრავლე შეიცავს თვლად ქვესიმრავლეს.

დამტკიცება. დავუშვათ A უსასრულო სიმრავლეა. ამოვარჩიოთ A სიმრავლიდან რაიმე a_1 ელემენტი. დარჩენილი $A \setminus \{a_1\}$ სიმრავლე კვლავ უსასრულო იქნება. $A \setminus \{a_1\}$ სიმრავლიდან ამოვარჩიოთ რაიმე a_2 ელემენტი. დარჩენილი $A \setminus \{a_1, a_2\}$ სიმრავლე კვლავ უსასრულო იქნება და ა.შ. თუ ამორჩევის აღწერილ პროცესს უსასრულოდ გავაგრძელებთ, მივიღებთ A სიმრავლის თვლად $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ქვესიმრავლეს. $\square$

თეორემა 1.2.2. თვლადი სიმრავლის ყოველი უსასრულო ქვესიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ და B მისი უსასრულო ქვესიმრავლეა. განვიხილოთ რიცხვი:

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \in B\},$$

შემდეგ რიცხვი:

$$n_2 = \min\{n \in \mathbb{N} : n > n_1, \;\; a_n \in B\},$$

და ა.შ. ამ ინდუქციური აგების პრინციპი ისაა, რომ თუ აგებულია $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ რიცხვები, მაშინ n_{k+1} განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} : n > n_k, \;\; a_n \in B\}.$$

ცხადია, რომ $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots\}$, საიდანაც გამომდინარეობს B სიმრავლის თვლადობა. $\square$

1.2.1 და 1.2.2 თეორემები გვიჩვენებენ, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს ყველაზე ღარიბს უსასრულო სიმრავლეთა შორის.

შედეგი 1.2.1. ვთქვათ, A თვლადი სიმრავლეა და B მისი სასრული ქვესიმრავლეა. მაშინ $A \setminus B$ თვლადია.

დამტკიცება. $A \setminus B$ არის თვლადი A სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლე. ამიტომ თეორემა 1.2.2-ის თანახმად $A \setminus B$ თვლადია. $\square$

თეორემა 1.2.3. ვთქვათ, A თვლადი, ხოლო B სასრული სიმრავლეა და $A \cap B = \varnothing$. მაშინ $A \cup B$ თვლადია.

დამტკიცება. დავუშვათ, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ და $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. მაშინ $A \cup B$ წარმოდგება შემდეგი სახით:

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_n, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

რაც ნიშნავს მის თვლადობას. $\square$

თეორემა 1.2.4. ვთქვათ, $A_1, A_2, , \ldots, A_n$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი თვლადი სიმრავლეებია. მაშინ $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. განვიხილოთ $n = 2$ შემთხვევა. დავუშვათ,

$$A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \ A_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

მაშინ $A_1 \cup A_2$ წარმოდგება სახით:

$$\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots\},$$

რაც ნიშნავს მის თვლადობას. ნებისმიერი $n > 2$-სთვის დამტკიცება ხდება მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით. ამასთან, ინდუქციის ბიჯის განხორციელებისას უნდა გამოვიყენოთ $n = 2$ შემთხვევაში დადგენილი დებულება. $\square$

თეორემა 1.2.5. ვთქვათ, A_n $(n \in \mathbb{N})$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი არაცარიელი სასრული სიმრავლეებია. მაშინ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. დავუშვათ,

$$A_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_{N_n}^{(n)}\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

თუ ჯერ ამოვწერთ A_1-ის ელემენტებს, შემდეგ A_2-ის და ა.შ., მივიღებთ $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლის წარმოდგენას ელემენტთა

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_{N_1}^{(1)}, \ldots, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_{N_k}^{(n)}, \ldots$$

მიმდევრობის მეშვეობით, რაც ნიშნავს მის თვლადობას. $\square$

თეორემა 1.2.6. ვთქვათ, A_n $(n \in \mathbb{N})$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი თვლადი სიმრავლეებია. მაშინ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. დავუშვათ,

$$A_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_k^{(n)}, \dots\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

განვალაგოთ $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლის ელემენტები ცხრილში შემდეგნაირად:

$$\begin{array}{l} a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_k^{(1)}, \dots \\ a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_k^{(2)}, \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_k^{(n)}, \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

ამ ცხრილის ელემენტები შეიძლება განვალაგოთ ერთ ჰორიზონტალში შემდეგი წესით: ჯერ ამოვიწეროთ ცხრილის პირველ დიაგონალზე მდგომი $a_1^{(1)}$ ელემენტი, შემდეგ მეორე დიაგონალზე მდგომი $a_1^{(2)}$ და $a_2^{(1)}$ ელემენტები და ა. შ. ცხადია, დიაგონალები ამოწურავენ განსახილავ ცხრილს, ამიტომ დიაგონალების თანმიმდევრობის მიხედვით ცხრილის წევრების დალაგების მითითებული წესი იძლევა $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლის წარმოდგენას მიმდევრობის წევრების მეშვეობით, რაც ნიშნავს ამ სიმრავლის თვლადობას. $\square$

შენიშვნა 1.2.1. შემდგომში ტერმინით - **სიმრავლეთა კლასი**, გამოხატული იქნება სიმრავლე, რომლის ელემენტებსაც სიმრავლეები წარმოადგენენ. განსხვავებული დატვირთვის მატარებელი იქნება ტერმინი - **სიმრავლეთა ოჯახი**. სახელდობრ, ვთქვათ, H წარმოადგენს სიმრავლეთა რაიმე არაცარიელ კლასს, ხოლო Γ არის რაიმე არაცარიელი სიმრავლე. მაშინ H კლასის სიმრავლეთა $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ოჯახი გაგებული იქნება, როგორც $f:\Gamma\to \mathrm{H}$ ასახვა, რომლისთვისაც $f(\gamma)=A_\gamma$ $(\gamma\in\Gamma)$. ცხადია, სიმრავლეთა ყოველი $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ მიმდევრობა იძლევა სიმრავლეთა ოჯახის მაგალითს.

სიმრავლეთა $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ოჯახის წევრთაგან შედგენილი $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ კლასი განისაზღვრება როგორც, ყველა იმ A სიმრავლის კლასი, რომელიც ემთხვევა ერთერთს მაინც A_γ $(\gamma\in\Gamma)$ სიმრავლეთა შორის. **სიმრავლეთა $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ოჯახის გაერთიანება** აღინიშნება $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ ჩანაწერით და განისაზღვრება როგორც, $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ კლასის სიმრავლეთა გაერთიანება. მსგავსად განისაზღვრება **სიმრავლეთა $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ოჯახის $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ თანაკვეთა.**

სიმრავლეთა ოჯახისა და მის წევრთაგან შედგენილი კლასის აღსანიშნად აგრეთვე გამოიყენება შესაბამისად $(A_\gamma:\gamma\in\Gamma)$ და $\{A_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ ჩანაწერები.

სიმრავლეთა $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ოჯახის სიმძლავრე გაიგივებული იქნება ინდექსთა Γ სიმრავლის სიმძლავრესთან. ცხადია, $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ოჯახისა და მის წევრთაგან შედგენილი $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ კლასის სიმძლავრეები საზოგადოდ განსხვავებულია. მაგალითად, თუ სიმრავლეთა $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ მიმდევრობის ყველა წევრი ერთი და

იგივეა, მაშინ $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ კლასის სიმძლავრე ერთია, ხოლო $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ოჯახის კი a-ს ტოლად მიიჩნევა.

თეორემა 1.2.7. ვთქვათ, A_n $(n\in\mathbb{N})$ თვლადი სიმრავლეებია. მაშინ $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ თვლადია, ე.ი. თვლად სიმრავლეთა თვლადი ოჯახის გაერთიანება თვლადია.

დამტკიცება. (A_n) მიმდევრობა გარდავქმნათ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წევრების მქონე (B_n) მიმდევრობად შემდეგი წესით:

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \quad (n>1).$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

აღვნიშნოთ

$$N_1 = \{n\in\mathbb{N} : B_n \text{ თვლადია}\},$$

$$N_2 = \{n\in\mathbb{N} : B_n \text{ არაცარიელია და სასრული}\}.$$

ცხადია,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Big(\bigcup_{n\in N_1} B_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\in N_2} B_n\Big).$$

შესაძლებელია შემთხვევები:

1) N_1 თვლადია, N_2 თვლადია;
2) N_1 თვლადია, N_2 სასრულია;
3) N_1 სასრულია, N_2 თვლადია;
4) N_1 სასრულია, N_2 სასრულია.

თითოეულ შემთხვევაში თეორემის დასკვნა გამომდინარეობს 1.2.3–1.2.6 თეორემების შესაბამისი კომბინირებით. მაგალითად, განვიხილოთ მეორე შემთხვევა. გვექნება, რომ: ა) $\bigcup\limits_{n\in N_1} B_n$ თვლადია თეორემა 1.2.6-ის ძალით; და ბ) $\bigcup\limits_{n\in N_2} B_n$ სასრულია როგორც სასრულ სიმრავლეთა სასრული ოჯახის გაერთიანება. ამის შემდეგ გამოვიყენებთ თეორემა 1.2.3-ს. □

შენიშვნა 1.2.2. თეორემა 1.2.6-ის მსგავსად, 1.2.3 და 1.2.4 თეორემები სამართლიანი რჩება მაშინაც, როცა არ ვითხოვთ სიმრავლეთა წყვილ-წყვილად თანაუკვეთობას. მარტივი დასანახია, რომ იგივეს ვერ ვიტყვით თეორემა 1.2.5-თან მიმართებაში.

შედეგი 1.2.2. მთელ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლე წარმოიდგინება შემდეგი სამი სიმრავლის გაერთიანების სახით: $\mathbb{N}$, $\{-1,-2,\dots,-n,\dots\}$ და $\{0\}$. პირველი და მეორე სიმრავლე თვლადია, ხოლო მესამე - სასრული. აქედან, 1.2.3 და 1.2.4 თეორემების გათვალისწინებით დავასკვნით $\mathbb{Z}$-ის თვლადობას. $\square$

შედეგი 1.2.3. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ თვლად სიმრავლეთა თვლადი ოჯახის გაერთიანების სახით, რაც, თეორემა 1.2.7-ის გათვალისწინებით, საკმარისია დებულების დასამტკიცებლად. განვიხილოთ სიმრავლეები:

$$A_n = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, რომ $A_n \sim \mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N})$. აქედან, $\mathbb{Z}$-ის თვლადობის გამო, ვასკვნით A_n სიმრავლეების თვლადობას. ცხადია აგრეთვე, რომ $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. ამით დებულება დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 1.2.8. ვთქვათ, $A_1, A_2, \dots, A_n$ თვლადი სიმრავლეებია. მაშინ მათი დეკარტული ნამრავლი $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ თვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი n-ის მიმართ. $n = 1$-სთვის დებულება ცხადია. დავაფუძნოთ ინდუქციის ბიჯი $n = m$-დან $n = m+1$-ზე გადასვლისას. ყოველი $a \in A_{m+1}$ ელემენტისათვის განვიხილოთ სიმრავლე

$$M(a) = \{(a_1, \dots, a_n, a) : (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \cdots \times A_m\}.$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ:

$$M(a) \sim A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m,$$
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m \times A_{m+1} = \bigcup_{a \in A_{m+1}} M(a).$$

აქედან, თეორემა 1.2.7-ის ძალით ვასკვნით დებულების სამართლიანობას $n = m+1$ შემთხვევაში. $\square$

შედეგი 1.2.4. ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის, $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ სიმრავლეები თვლადია.

შედეგი 1.2.5. მთელი კოეფიციენტების მქონე ყველა მრავალწევრის სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. განსახილველი სიმრავლე აღვნიშნოთ A-თი და ის წარმოვადგინოთ თვლად სიმრავლეთა თვლადი ოჯახის გაერთიანების სახით, რაც, თეორემა 1.2.7-ის გათვალისწინებით, საკმარისია დებულების დასამტკიცებლად. ამ მიზნით ყოველი ნატურალური n-სთვის განვიხილოთ არაუმეტეს $(n-1)$-სა

რიგის მქონე ყველა მრავალწევრის სიმრავლე, რომელსაც აღვნიშნავთ A_n-ით. თუ ფიქსირებული n-სთვის ყოველ $p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$ მრავალწევრს შევუსაბამებთ მის კოფიციენტთა $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ n-ეულს, ეს შესაბამისობა იქნება ბიექცია A_n სიმრავლიდან $\mathbb{Z}^n$ სიმრავლეში. შედეგად, A_n $(n \in \mathbb{N})$ თვლადია. მეორე მხრივ გვაქვს, რომ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. ამით დებულება დამტკიცებულია. $\square$

რიცხვს ეწოდება **ალგებრული**, თუ ის წარმოადგენს რაიმე მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ფესვს.

შედეგი 1.2.6. ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია.

დამტკიცება. A იყოს ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე, B კი ყველა მთელკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის სიმრავლე. $p \in B$ მრავალწევრისათვის S_p-თი აღვნიშნოთ ყველა მისი ფესვის სიმრავლე. გვაქვს, რომ: ა) S_p $(p \in B)$ სიმრავლე სასრულია; ბ) B თვლადია; და გ) $A = \bigcup_{p \in B} S_p$. ამრიგად, A წარმოვადგინეთ როგორც სასრულ სიმრავლეთა თვლადი ოჯახის გაერთიანება. თეორემა 1.2.5-ის გათვალისწინებით ადვილი დასანახია, რომ ასეთი სახის გაერთიანება სასრულია ან თვლადი. მეორე მხრივ, ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე A მოიცავს რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს, რის გამოც A უსასრულოა. უკანასკნელი ორი წინადადების ძალით ვასკვნით A-ს თვლადობას. $\square$

ამოცანები

1. აჩვენეთ, რომ თეორემა 1.2.6-ის დამტკიცებისას აღწერილ ბიექციას $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ და $\mathbb{N}$ სიმრავლეებს შორის აქვს შემდეგი სახე:
$$a_k^{(n)} \mapsto \frac{(n+k-2)(n+k-1)}{2} + n.$$
2. დაამტკიცეთ, რომ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალებისაგან შედგენილი ნებისმიერი კლასი არაუმეტეს თვლადია.
3. დაამტკიცეთ, რომ მონოტონური ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.
4. ვთქვათ, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ყოველ წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი. დაამტკიცეთ, რომ f-ის მიერ მიღებული მნიშვნელობების სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.
5. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^2$ სიმრავლე ისეთია, რომ მის ყოველ ორ წერტილს შორის მანძილი მეტია რაიმე ფიქსირებულ დადებით a რიცხვზე. დაამტკიცეთ, რომ E სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.

§ 3. ზოგიერთი პრინციპი, რომელიც უზრუნველყოფს სიმრავლეთა ეკვივალენტობას

1. შეწებების პრინციპი. შემდეგი თეორემა, რომელსაც „შეწებების“ პრინციპით მოიხსენიებენ, ხშირად გამოიყენება სიმრავლეთა ეკვივალენტობის გამაპირობებელი ბიექციის ასაგებად.

თეორემა 1.3.1. ვთქვათ, Ω არის ინდექსთა რაიმე არაცარიელი სიმრავლე და მოცემული გვაქვს სიმრავლეთა $(A_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ და $(B_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ ოჯახები შემდეგი თვისებებით: 1) $A_\alpha \sim B_\alpha$ ყოველი $\alpha\in\Omega$-სთვის; 2) $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$ და $B_\alpha \cap B_\beta = \varnothing$, როცა $\alpha \neq \beta$. მაშინ

$$\bigcup_{\alpha\in\Omega} A_\alpha \sim \bigcup_{\alpha\in\Omega} B_\alpha.$$

დამტკიცება. $f : \cup A_\alpha \to \cup B_\alpha$ ბიექცია აიგება $f_\alpha : A_\alpha \to B_\alpha$ ბიექციების „შეწებებით“, რაც გულისხმობს იმას, რომ f განისაზღვრება შემდეგნაირად: $f(x) = f_\alpha(x)$ $(\alpha \in \Omega,\ x \in A_\alpha)$. □

2. სიმრავლისა და მისი ქვესიმრავლის ეკვივალენტობის პირობები.

თეორემა 1.3.2. ვთქვათ, A და B უსასრულო სიმრავლეებია და $A \supset B$. თუ $A \setminus B$ სიმრავლე სასრული ან თვლადია, მაშინ $A \sim B$.

დამტკიცება. განვიხილოთ B სიმრავლის რაიმე თვლადი C ქვესიმრავლე. გვაქვს, რომ $A = (A\setminus B)\cup C \cup (B\setminus C)$ და $B = C \cup (B \setminus C)$. 1.2.3 და 1.2.4 თეორემების ძალით $(A\setminus B)\cup C \sim C$. აქედან გამომდინარე, შეწებების პრინციპის გამოყენებით ვასკვნით, რომ $A \sim B$. □

შედეგი 1.3.1. ვთქვათ, A არის უსასრულო სიმრავლე, ხოლო E არის სასრული ან თვლადი სიმრავლე. მაშინ $A \cup E \sim A$.

შედეგი 1.3.2. ვთქვათ, A არის უსასრულო სიმრავლე, ხოლო E არის მისი სასრული ან თვლადი ქვესიმრავლე. თუ $A\setminus E$ უსასრულო სიმრავლეა, მაშინ $A \setminus E \sim A$.

შედეგი 1.3.3. ვთქვათ, A არის უსასრულო სიმრავლე, ხოლო E არის მისი სასრული ქვესიმრავლე. მაშინ $A \setminus E \sim A$.

შედეგი 1.3.1-დან გამომდინარეობს უსასრულო სიმრავლეთა შემდეგი დახასიათება, რომელიც ეკუთვნის რ. დედეკინდს.

შედეგი 1.3.4. ვთქვათ, A რაიმე სიმრავლეა. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

1) A უსასრულოა;

2) მოიძებნება A-ს საკუთრივი ქვესიმრავლე, რომელიც A-ს ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაციას გვაძლევს შედეგი 1.3.1. სასრული სიმრავლე შეუძლებელია შეიცავდეს მისსავე ეკვივალენტურ საკუთრივ ნაწილს, საიდანაც გამომდინარეობს შებრუნებული 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია. $\square$

შემდეგი დებულება განაზოგადებს თეორემა 1.3.2-ს.

თეორემა 1.3.3. ვთქვათ, $A \supset B$. თუ მოიძებნებიან B სიმრავლის ქვესიმრავლეები - C_n $(n \in \mathbb{N})$, რომლებიც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $A \setminus B$ სიმრავლის ეკვივალენტურია, მაშინ A და B სიმრავლეები ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$D = B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

გვაქვს, რომ

$$A = (A \setminus B) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \cup D, \tag{1}$$

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \cup D. \tag{2}$$

ლემის პირობის ძალით $A \setminus B \sim C_1, C_1 \sim C_2, \ldots, C_n \sim C_{n+1}, \ldots$ ამავდროულად, $A \setminus B, C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია, საიდანაც შეწებების პრინციპის ძალით ვასკვნით, რომ

$$(A \setminus B) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

აქედან კი, (1) და (2) ტოლობების გათვალისწინებით და კვლავ შეწებების პრინციპის გამოყენებით მივიღებთ, რომ $A \sim B$. $\square$

3. თეორემა შუალედური სიმრავლის სიმძლავრის შესახებ. შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ორ ეკვივალენტურ სიმრავლეს შორის მოთავსებული სიმრავლე მათივე ეკვივალენტურია.

თეორემა 1.3.4. ვთქვათ, $A \supset B \supset C$ და $A \sim C$. მაშინ $A \sim B \sim C$.

$f : A \to A$ ასახვის n-ური ხარისხი აღვნიშნოთ $f^{(n)}$-ით, ე.ი. $f^{(n)} = f_n \circ \cdots \circ f_1$, სადაც $f_n = \cdots = f_1 = f$.

ლემა 1.3.1. ვთქვათ, $f : A \to A$ ინექციური ასახვაა და $E \subset A \setminus f(A)$. მაშინ $f^{(n)}(E)$ $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეები წარმოადგენენ $f(A)$-ს ქვესიმრავლეებს, რომლებიც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და E სიმრავლის ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. გვაქვს, რომ

$$A \supset f(A) \supset f^{(2)}(A) \supset \cdots \supset f^{(n)}(A) \cdots , \tag{3}$$

$$f^{(n)}(E) \subset f^{(n)}(A \setminus f(A)) = f^{(n)}(A) \setminus f^{(n+1)}(A) \ \ (n \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

(3) ცხადია, ხოლო (4)-ს მიიღება $f^{(n)}$ ასახვის ინექციურობის გათვალისწინებით.

(3) და (4) თანაფარდობებიდან ვასკვნით, რომ $f^{(n)}(E)$ სიმრავლეები წარმოადგენენ $f(A)$-ს ქვესიმრავლეებს, რომლებიც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია. აქედან, თუკი შევნიშნავთ, რომ f-ის ინექციურობის გამო $f^{(n)}(E)$ სიმრავლეები E სიმრავლის ეკვივალენტურია, დავასკვნით ლემის სამართლიანობას. $\square$

თეორემა 1.3.4-ის დამტკიცება. განვიხილოთ $f : A \to A$ ინექცია, რომლისთვისაც $f(A) = C$. მაშინ ლემა 1.3.1-ის ძალით $f(A \setminus B), f^{(2)}(A \setminus B), \ldots, f^{(n)}(A \setminus B), \ldots$ სიმრავლეები წარმოადგენენ C-ს ქვესიმრავლეებს, რომლებიც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და $A \setminus B$ სიმრავლის ეკვივალენტურია. $C \subset B$ ჩართვის გამო $f^{(n)}(A \setminus B)$ სიმრავლეები არიან B-ს ქვესიმრავლეებიც. ახლა, თუ გამოვიყენებთ თეორემა 1.3.3-ს, დავასკვნით, რომ $A \sim B$. $\square$

4. კანტორ-ბერნშტეინის თეორემა. შემდეგი თეორემა, რომელიც ეკუთვნის გ. კანტორს და ფ. ბერნშტეინს, წარმოადგენს ერთ-ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან დებულებას სიმძლავრეთა თეორიაში.

თეორემა 1.3.5. ვთქვათ, A სიმრავლე B სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლის ეკვივალენტურია, ხოლო B სიმრავლე A სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლის ეკვივალენტურია. მაშინ A და B სიმრავლეები ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A \sim B^* \subset B$ და $B \sim A^* \subset A$. განვიხილოთ $f : A \to B^*$ და $g : B \to A^*$ ბიექციები. აღვნიშნოთ $A^{**} = (g \circ f)(A)$. ცხადია, რომ $A \supset A^* \supset A^{**}$ და $A \sim A^{**}$. აქედან, თეორემა 1.3.4-ის ძალით გვექნება, რომ $A \sim A^*$. საიდანაც $A^* \sim B$ გათვალისწინებით, ვასკვნით $A \sim B$ ეკვივალენტობის სამართლიანობას. $\square$

შენიშვნა 1.3.1. რიგ შემთხვევებში კანტორ-ბერნშტეინის თეორემის გამოყენება მოსახერხებელია შემდეგი ფორმულირებით: ვთქვათ, α და β სიმძლავრეებია. თუ α სიმძლავრის A_1 სიმრავლე ეკვივალენტურია β სიმძლავრის B_1 სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლის და მეორე მხრივ, β სიმძლავრის B_2 სიმრავლე ეკვივალენტურია α სიმძლავრის A_2 სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლის, მაშინ α და β სიმძლავრეები ტოლია.

ამოცანები

1. კანტორ-ბერნშტეინის თეორემის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ:

ა) $[0,1]$ სეგმენტი და $(0,1)$ ინტერვალი ეკვივალენტურია;

ბ) ღია წრე და ჩაკეტილი წრე ეკვივალენტურია.

§ 4. კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეები

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ უსასრულო სიმრავლეთა ახალ ტიპს - კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეებს.

თეორემა 1.4.1. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე არათვლადია.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. დავუშვათ, რომ $\mathbb{R}$ თვლადია. მაშინ ის წარმოდგება $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ სახით. დავყოთ $[0,1]$ სამ ტოლ ნაწილად და დაყოფის სეგმენტებს შორის ამოვირჩიოთ ისეთი, რომელიც x_1 წერტილს არ შეიცავს და იგი აღვნიშნოთ Δ_1-ით. მეორე ეტაპზე Δ_1 დავყოთ სამ ტოლ სეგმენტად და დაყოფის სეგმენტებს შორის ამოვირჩიოთ ისეთი, რომელიც არ შეიცავს x_2-ს და იგი აღვნიშნოთ Δ_2-ით. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ უსასრულოდ, მივიღებთ (Δ_n) სეგმენტთა მიმდევრობას შემდეგი თვისებებით:

1) $x_n \notin \Delta_n \ (n \in \mathbb{N})$;

2) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$;

3) $|\Delta_n| = \frac{1}{3^n} \ (n \in \mathbb{N})$.

ჩალაგებულ სეგმენტთა პრინციპის ძალით, Δ_n სეგმენტების თანაკვეთა შედგება ერთი წერტილისაგან, რომელსაც აღვნიშნავთ x-ით. (Δ_n) მიმდევრობის 1) თვისებიდან გამომდინარე, x ვერ დაემთხვევა ვერცერთ x_n წერტილს, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას იმისა, რომ x_n წერტილები ამოწურავენ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით $\mathbb{R}$ არათვლადია. თეორემა დამტკიცებულია. □

სიმრავლეს ეწოდება **კონტინუუმის სიმძლავრის**, თუ ის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია.

კონტინუუმის სიმძლავრეს c ასოთი აღნიშნავენ.

თეორემა 1.4.2. ყოველი გადაუგვარებელი შუალედი კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. ვთქვათ $a < b$. შემდეგი ფუნქცია:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}x + \frac{1}{2},$$

გვაძლევს ბიექციას $\mathbb{R}$-სა და $(0,1)$ ინტერვალს შორის. თავის მხრივ, $g(x) = a+(b-a)x$ წრფივი ფუნქცია იძლევა ბიექციას $(0,1)$ და (a,b) ინტერვალებს შორის. შედეგად, (a,b) ინტერვალი კონტინუუმის სიმძლავრისაა. $[a,b]$, $[a,b)$, და $(a,b]$ შუალედები მიიღება (a,b) ინტერვალისათვის მისი ორივე ან ერთ-ერთი ბოლოს დამატებით. აქედან გამომდინარე, შედეგი 1.3.1-ის ძალით ისინიც კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეები არიან.

შევნიშნოთ, რომ $2^x + a$ ფუნქცია არის ბიექცია $\mathbb{R}$-სა და (a,∞) სხივს შორის, ხოლო $-2^x + a$ ფუნქცია კი, $\mathbb{R}$-სა და $(-\infty, a)$ სხივს შორის. აქედან, შედეგი 1.3.1-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ჩაკეტილი სხივი კონტინუუმის სიმძლავრისაა. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 1.4.3. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ირაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ სიმრავლე უსასრულოა, მაგალითად, $n\sqrt{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ რიცხვები ქმნიან ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლეს. ახლა, თუკი გავითვალისწინებთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, თეორემა 1.3.2-ის ძალით დავასკვნით $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ და $\mathbb{R}$ სიმრავლეების ეკვივალენტობას. $\square$

რიცხვს ეწოდება **ტრანსცენდენტული**, თუ ის არ არის ალგებრული.

როგორც ცნობილია, π და e ტრანსცენდენტული რიცხვები არიან. შევნიშნავთ, რომ კონსტრუქციული გზით ტრანსცენდენტული რიცხვის აგება არცთუ იოლი ამოცანაა. თუმცა, როგორც შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს ტრანსცენდენტული რიცხვი ძალიან ბევრია, კერძოდ, ,,იმდენივე“, რამდენიც ნამდვილი რიცხვი.

თეორემა 1.4.4. ტრანსცენდენტულ რიცხვთა სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. A-თი აღვნიშნოთ ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე.

შევნიშნოთ, რომ ტრანსცენდენტულ რიცხვთა $\mathbb{R}\setminus A$ სიმრავლე უსასრულოა, მაგალითად, $n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$ რიცხვები ქმნიან ტრანსცენდენტულ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლეს. ახლა, თუკი გავითვალისწინებთ, რომ ალგებრულ რიცხვთა A სიმრავლე თვლადია, თეორემა 1.3.2-ის ძალით დავასკვნით $\mathbb{R}\setminus A$ და $\mathbb{R}$ სიმრავლეების ეკვივალენტობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 1.4.5. კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი ოჯახის გაერთიანება კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. დამტკიცება ჩავატაროთ თვლადი ოჯახის შემთხვევაში. სასრული ოჯახის შემთხვევაში დამტკიცება ანალოგიურია. ვთქვათ, A_n $(n \in \mathbb{N})$

კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეებია. აღვნიშნოთ:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n; \;\; B_1 = A_1, \; B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \;\; (n \geq 2).$$

ცხადია, რომ B_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$. B_1 სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა, ხოლო ყოველი B_n $(n \geq 2)$ სიმრავლე წარმოადგენს კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლის ქვესიმრავლეს. ამის გამო, B_1 სიმრავლეს შეიძლება ურთიერთცალსახად შევუსაბამოთ $[0,1)$ შუალედი, ხოლო ყოველ B_n $(n \geq 2)$ სიმრავლეს - $[n-1, n)$ შუალედის რაიმე ქვესიმრავლე. რის შედეგადაც, შეწებების პრინციპის ძალით, A სიმრავლე აღმოჩნდება $\mathbb{R}$-ის გარკვეული ქვესიმრავლის ეკვივალენტური. მეორე მხრივ, $\mathbb{R}$ ეკვივალენტურია B_1 სიმრავლის, რომელიც A-ს ქვესიმრავლეს წარმოადგენს. აქედან გამომდინარე, კანტორ-ბერნშტეინის თეორემის ძალით, A კონტინუუმის სიმძლავრისაა. თეორემა დამტკიცებულია. □

კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლის თვისებების დასადგენად დაგვჭირდება შემდეგი თეორემა, რომელსაც დამოუკიდებელი მნიშვნელობაც აქვს.

თეორემა 1.4.6. ნატურალური რიცხვებისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო მიმდევრობის სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. A, B და C ასოებით აღვნიშნოთ შესაბამისად:

ნატურალური რიცხვებისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო მიმდევრობის სიმრავლე;

ნატურალური რიცხვებისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო ზრდადი მიმდევრობის სიმრავლე;

0 და 1 რიცხვებისაგან შედგენილი ყველა იმ მიმდევრობის სიმრავლე, რომლის ნულის ტოლი წევრების რაოდენობა უსასრულოა.

ჩვენ დავამტკიცებთ ეკვივალენტობათა შემდეგი ჯაჭვის სამართლიანობას: $[0,1) \sim C \sim B \sim A$.

ორობით წილადად რიცხვის წარმოდგენის თვისებებიდან გამომდინარე (იხ. დამატება 1), შემდეგი ასახვა:

$$C \ni (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in [0,1),$$

წარმოადგენს ურთიერთცალსახა თანადობას C და $[0,1)$ სიმრავლეებს შორის. ამრიგად, $[0,1) \sim C$.

განვიხილოთ ასახვა, რომელიც $(\varepsilon_n) \in C$ ელემენტს შეუსაბამებს $(p_n) \in B$ მიმდევრობას თვისებით $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} = \{k \in \mathbb{N} : \varepsilon_k = 0\}$, ანუ $(\varepsilon_n) \in C$

ელემენტს ვუსაბამებთ იმ n ინდექსებისაგან შედგენილ ზრდად მიმდევრობას, რომელთათვისაც $\varepsilon_n = 0$. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ასეთი ასახვა წარმოადგენს ბიექციას C და B სიმრავლეებს შორის. ამით $C \sim B$ ეკვივალენტობა დადგენილია.

$B \sim A$ ეკვივალენტობის დასადგენად განვიხილოთ ასახვა, რომელიც $(p_n) \in B$ მიმდევრობას შეუსაბამებს შემდეგ მიმდევრობას A სიმრავლიდან:

$$p_1, p_2 - p_1, \dots, p_n - p_{n-1}, \dots$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთი ასახვა წარმოადგენს ბიექციას B და A სიმრავლეებს შორის. შედეგად, $B \sim A$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 1.4.1. თეორემა 1.4.6 გვიჩვენებს, რომ თვლად სიმრავლეთა უსასრულო მიმდევრობის დეკარტული ნამრავლი, განსხვავებით სასრული მიმდევრობის შემთხვევისაგან (იხ. თეორემა 1.2.8), წარმოადგენს არათვლად, კერძოდ, კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეს.

თეორემა 1.4.7. თუ $A_1, \dots, A_n$ კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეებია, მაშინ მათი დეკარტული ნამრავლი - $A_1 \times \dots \times A_n$ კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. განვიხილოთ $n = 2$ შემთხვევა. M იყოს ნატურალურ რიცხვთა ყველა შესაძლო მიმდევრობის სიმრავლე. დავადგინოთ, რომ $A_1 \times A_2 \sim M$, საიდანაც თეორემა 1.4.6-ის გათვალისწინებით მივიღებთ სასურველ დასკვნას.

თეორემა 1.4.6-ის ძალით გვაქვს, რომ $A_1 \sim M$ და $A_2 \sim M$. განვიხილოთ $f_1 : A_1 \to M$, $f_2 : A_2 \to M$ ბიექციები და მათი მეშვეობით ავაგოთ $f : A_1 \times A_2 \to M$ ბიექცია. ავიღოთ რაიმე $a_1 \in A_1$ და $a_2 \in A_2$ ელემენტები. ვთქვათ,

$$f_1(a_1) = (p_1, p_2, \dots, p_k, \dots),$$
$$f_2(a_2) = (q_1, q_2, \dots, q_k, \dots).$$

მაშინ $f(a_1, a_2)$ განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$f(a_1, a_2) = (p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_k, q_k, \dots)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთნაირად აგებული $f : A_1 \times A_2 \to M$ ასახვა წარმოადგენს ბიექციას.

ნებისმიერი $n \geq 2$ რიცხვისათვის დამტკიცება ხდება ინდუქციური მსჯელობით, რომლის დროსაც საჭიროა $(A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$ და $A_1 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n$ სიმრავლეთა ეკვივალენტობის გათვალისწინება.

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 1.4.1. ნებისმიერი ნატურალური n-სთვის, $\mathbb{R}^n$ სივრცე და $[0, 1]^n$ ერთეულოვანი კუბი კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეებია.

შედეგი 1.4.1-ის თანახმად $[0,1]^2$ კვადრატი და $[0,1]$ მონაკვეთი ეკვივალენტურია, ანუ ,,კვადრატში იმდენივე ელემენტია, რამდენიც მის გვერდში". ეს ფაქტი კიდევ ერთხელ უსვამს ხაზს იმას, თუ რაოდენ მოულოდნელი შეიძლება იყოს დამოკიდებულება ,,მთელსა და ნაწილს შორის" უსასრულო სიმრავლეების შემთხვევაში.

თეორემა 1.4.8. თუ $A_1, A_2, \ldots$ კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეებია, მაშინ მათი დეკარტული ნამრავლი - $\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} A_n$ კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. M იყოს ნატურალურ რიცხვთა ყველა შესაძლო მიმდევრობის სიმრავლე, ხოლო g - რაიმე ბიექცია $\mathbb{N}$ და $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ სიმრავლეებს შორის.

თეორემა 1.4.6-ის ძალით გვაქვს, რომ $A_n \sim M \ (n \in \mathbb{N})$. განვიხილოთ $f_n : A_n \to M$ ბიექციები და მათი მეშვეობით ავაგოთ $f : \underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} A_n \to M$ ბიექცია, რაც თეორემა 1.4.6-ის გათვალისწინებით, საკმარისი იქნება თეორემის დასამტკიცებლად. ავიღოთ რაიმე $a_n \in A_n \ (n \in \mathbb{N})$ ელემენტები. ვთქვათ,

$$\begin{array}{l} f_1(a_1) = (p_{(1,1)}, p_{(1,2)}, \ldots, p_{(1,m)}, \ldots), \\ f_2(a_2) = (p_{(2,1)}, p_{(2,2)}, \ldots, p_{(2,m)}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(a_n) = (p_{(n,1)}, p_{(n,2)}, \ldots, p_{(n,m)}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

მაშინ $f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = (p_{g(1)}, p_{g(2)}, \ldots, p_{g(n)}, \ldots).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთნაირად აგებული $f : \underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} A_n \to M$ ასახვა წარმოადგენს ბიექციას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 1.4.2. ყველა შესაძლო რიცხვითი მიმდევრობის $\mathbb{R}^\infty$ სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{R}^\infty = \underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} A_n$, სადაც $A_n = \mathbb{R} \ (n \in \mathbb{N})$. ამის შემდეგ, თეორემა 1.4.8-ის გამოყენებით ვღებულობთ დასამტკიცებელ წინადადებას. $\square$

შედეგი 1.4.3. $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტი ფუნქციის $C[a,b]$ სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ეკვივალენტურია $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა მუდმივი ფუნქციის სიმრავლის, რომელიც, ცხადია, $C[a,b]$-ს ქვესიმრავლეს წარმოადგენს.

$[a,b]$ სეგმენტის რაციონალური რიცხვების სიმრავლე წარმოვადგინოთ მიმდევრობის წევრების მეშვეობით: $[a,b]\cap\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,\dots,r_n,\dots\}$. ყოველ $f\in C[a,b]$ ფუნქციას შევუსაბამოთ $(f(r_n))$ მიმდევრობა. მაშინ ყოველ ორ განსხვავებულ f და g ფუნქციებს შესაბამებული ექნებათ განსხვავებული $(f(r_n))$ და $(g(r_n))$ მიმდევრობები. ეს გამომდინარეობს იქედან, რომ, თუ ორი უწყვეტი ფუნქცია ერთმანეთს ემთხვევა რაციონალურ წერტილებში, მაშინ ისინი ერთმანეთს დაემთხვევიან უკლებლივ ყველა წერტილშიც. ამრიგად, $C[a,b]$ ეკვივალენტურია ყველა შესაძლო რიცხვითი მიმდევრობის $\mathbb{R}^\infty$ სიმრავლის გარკვეული ქვესიმრავლის. ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mathbb{R}^\infty$ კონტინუუმის სიმძლავრისაა, კანტორ-ბერნშტეინის თეორემის მეშვეობით (იხ. აგრეთვე შენიშვნა 1.3.1) მივიღებთ დასამტკიცებელ წინადადებას. □

შენიშვნა 1.4.2. როგორც მომდევნო პარაგრაფში დამტკიცდება, $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა ფუნქციის სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაგან განსხვავებული, კერძოდ, უფრო მეტი სიმძლავრისაა.

თეორემა 1.4.9. ყველა იმ მიმდევრობის სიმრავლე, რომელიც შედგება 0 და 1 რიცხვებისაგან, კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. A იყოს განსახილველი სიმრავლე, B იყოს A-ს ქვესიმრავლე, რომელიც შედგება ყველა იმ მიმდევრობისაგან, რომლის ნულის ტოლი წევრების რაოდენობა სასრულია. E იყოს $[0,1]$ სეგმენტის ყველა ორობითადრაციონალური წერტილის სიმრავლე, ე.ი.

$$E=\Big\{\frac{m}{2^n}:n\in\mathbb{N},1\le m\le 2^n\Big\}.$$

თვლად სიმრავლეთა ცნობილი თვისებების გამოყენებით მტკიცდება, რომ E თვლადია.

განვიხილოთ ასახვები:

$$B\ni(\varepsilon_n)\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2^n}\in[0,1),$$

$$A\setminus B\ni(\varepsilon_n)\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2^n}\in E.$$

ორობით წილადად რიცხვის წარმოდგენის თვისებებიდან გამომდინარე (იხ. დამატება 1), ორივე ასახვა არის ბიექცია. ამრიგად, B კონტინუუმის სიმძლავრისაა, ხოლო $A\setminus B$ თვლადია. აქედან, შედეგი 1.3.1-ის ძალით A კონტინუუმის სიმძლავრისაა. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 1.4.9-ის თანახმად ორელემენტიანი $\{0,1\}$ სიმრავლის თავის თავზე თვლადჯერ დეკარტული ნამრავლი - $\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty}\{0,1\}$ კონტინუუმის სიმძლავრისაა. შემდეგი დებულება გვიჩვენებს, რომ იგივე სამართლიანია ნებისმიერი ორელემენტიანი სიმრავლეების შემთხვევაშიც.

შედეგი 1.4.4. ვთქვათ, $A_1, A_2, \ldots$ ორელემენტიანი სიმრავლეებია. მაშინ მათი დეკარტული ნამრავლი - $\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

შედეგი 1.4.4-ის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ და $\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty}\{0,1\}$ სიმრავლეები ეკვივალენტურია.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის ნებისმიერი არაცარიელი ღია ქვესიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.
2. ვთქვათ, $A \subset \mathbb{R}$ თვლადი სიმრავლეა. დაამტკიცეთ, რომ მოიძებნება t რიცხვი, რომლისთვისაც $(A+t) \cap A = \emptyset$, სადაც $A + t = \{a + t : a \in A\}$.
3. დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყეზე ყველა შესაძლო წრის კლასი კონტინუუმის სიმძლავრისაა.
4. სიბრტყეზე T-სიმრავლე ვუწოდოთ ორი მონაკვეთის გაერთიანებას, რომლებიც ერთმანეთის მართობულია და ერთ-ერთის ცენტრი წარმოადგენს მეორე მათგანის ბოლოს. ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი T-სიმრავლეების რაიმე Ω კლასი (სიმრავლეების ზომები შეიძლება სხვადასხვა იყოს). შეიძლება თუ არა ასეთი Ω კლასი იყოს არათვლადი?
5. ვთქვათ, A და B სიმრავლეების გაერთიანება კონტინუუმის სიმძლავრისაა. დაამტკიცეთ, რომ A და B სიმრავლეებს შორის ერთ-ერთი მაინც კონტინუუმის სიმძლავრისაა.
6. ვთქვათ, A_n $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეების გაერთიანება კონტინუუმის სიმძლავრისაა. დაამტკიცეთ, რომ A_n სიმრავლეებს შორის ერთ-ერთი მაინც კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

§ 5. სიმძლავრეთა შედარება

ჩვენ უკვე განვიხილეთ უსასრულო სიმრავლეთა ორი ტიპი: თვლადი სიმრავლეები და კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეები. ბუნებრივად ისმის კითხვა: არსებობენ თუ არა, სიმძლავრის თვალსაზრისით, სხვა ტიპის სიმრავლეები, ე.ი. არსებობენ თუ არა a და c სიმძლავრეებისაგან განსხვავებული სიმძლავრეები? ამ საკითხის გადაწყვეტა უკავშირდება თავისთავად მნიშვნელოვან საკითხს სიმძლავრეთა შედარების შესახებ.

შემოვიღოთ დალაგების მიმართება სიმძლავრეთა შორის. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი α და β სიმძლავრე და ცნობილია, რომ $\alpha = \operatorname{card} A$ და

$\beta = \text{card}\, B$. ვიტყვით, რომ α **არ აღემატება** β-ს (ჩანაწერი: $\alpha \leq \beta$), თუ A ეკვივალენტურია B-ს რაიმე ქვესიმრავლის.

მარტივი შესამჩნევია, რომ სიმძლავრეების შედარებისას შედეგი არაა დამოკიდებული α სიმძლავრის A სიმრავლისა და β სიმძლავრის B სიმრავლის არჩევაზე (ე.ი., თუ A ეკვივალენტურია B-ს რაიმე ქვესიმრავლის, მაშინ იგივე მოხდება α სიმძლავრის ნებისმიერი A' სიმრავლისა და β სიმძლავრის ნებისმიერი B' სიმრავლის შემთხვევაში).

აღნიშნული წესით შემოღებულ სიმძლავრეთა შედარებას აქვს დალაგების მიმართებისთვის დამახასიათებელი რეფლექსურობის, ანტისიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისებები, ე.ი. ნებისმიერი α, β და γ სიმძლავრე-ებისათვის სრულდება პირობები:

$$\alpha \leq \alpha \quad (\text{რეფლექსურობა});$$

$$\text{თუ } \alpha \leq \beta \text{ და } \beta \leq \alpha, \text{ მაშინ } \alpha = \beta \text{ (ანტისიმეტრიულობა)};$$

$$\text{თუ } \alpha \leq \beta \text{ და } \beta \leq \gamma, \text{ მაშინ } \alpha \leq \gamma \text{ (ტრანზიტულობა)}.$$

რეფლექსურობა და ტრანზიტულობა მოწმდება უშუალოდ, ხოლო ანტისი-მეტრიულობა წარმოადგენს კანტორ-ბერნშტეინის თეორემის ეკვივალენტურ წინადადებას.

შევნიშნოთ, რომ $\alpha < \beta$ ნიშნავს შემდეგს: $\alpha \leq \beta$ და $\alpha \neq \beta$, ე.ი., თუ $\alpha = \text{card}\, A$ და $\beta = \text{card}\, B$, მაშინ $\alpha < \beta$ ნიშნავს იმას, რომ:

1) A არ არის B-ს ეკვივალენტური;

2) A ეკვივალენტურია B-ს რაიმე ქვესიმრავლის.

აქვე შევნიშნოთ, რომ $\mathrm{a} < \mathrm{c}$. მართლაც, როგორც ვიცით $\mathbb{R}$ არათვლადია, ე.ი. $\mathbb{R}$ არაა $\mathbb{N}$-ის ეკვივალენტური. მეორე მხრივ, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. რის შედეგადაც ვღებულობთ $\mathrm{a} < \mathrm{c}$ უტოლობას.

სიმძლავრეს ვუწოდოთ **სასრული (უსასრულო)**, თუ ის სასრულ (უსას-რულო) სიმრავლეთა სიმძლავრეს წარმოადგენს.

სასრული სიმძლავრეები ყოველთვის სადარია, ე.ი., თუ α და β სასრული სიმძლავრეებია, მაშინ ისინი ან ტოლია, ანაც მათ შორის ერთ-ერთი ნაკლებია მეორეზე. დაუმტკიცებლად აღვნიშნავთ, რომ სადარია ნებისმიერი ორი უსას-რულო სიმძლავრეც (დამტკიცებისათვის იხ., მაგალითად, [29] წიგნის მე-14 თავი). ეს მნიშვნელოვანი შედეგი ეკუთვნის ე. ცერმელოს.

ახლა დავუბრუნდეთ საკითხს a და c სიმძლავრეებისაგან განსხვავებული სიმძლავრეების არსებობის შესახებ. როგორც შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, ასეთი სიმძლავრე უამრავი არსებობს. უფრო მეტიც, როგორც ირკვევა, ნე-ბისმიერი სიმძლავრისთვის არსებობს მასზე დიდი სიმძლავრე.

A სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლისაგან შედგენილი კლასი აღ-ვნიშნოთ 2^A ჩანაწერით.

თეორემა 1.5.1. **ნებისმიერი A სიმრავლისათვის გვაქვს, რომ**

$$\text{card } A < \text{card } 2^A.$$

დამტკიცება. თუ A ცარიელია, მაშინ დებულება ცხადია.

განვიხილოთ არაცარიელი A სიმრავლის შემთხვევა. ჯერ დავადგინოთ, რომ A და 2^A არ არიან ეკვივალენტური. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, მოიძებნება $f : A \to 2^A$ ბიექცია. $a \in A$ ელემენტს დავარქვათ „კარგი“, თუ $a \in f(a)$, და დავარქვათ „ცუდი“, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე.ი. თუ $a \notin f(a)$.

E-თი აღვნიშნოთ ყველა „ცუდი“ $a \in A$ ელემენტის სიმრავლე და განვიხილოთ ის $a_0 \in A$ ელემენტი, რომლის ანასახიც არის E სიმრავლე, ე.ი. $f(a_0) = E$.

თუ a_0 ელემენტი „კარგია“ , მაშინ ის ეკუთვნის მის ანასახს - $f(a_0) = E$ სიმრავლეს. განსაზღვრის თანახმად, E შედგება „ცუდი“ ელემენტებისაგან, a_0 კი, როგორც ითქვა, მისი ელემენტია. შედეგად, a_0 „ცუდია“. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით a_0 შეუძლებელია იყოს „კარგი“.

თუ a_0 „ცუდია“, მაშინ ის არ ეკუთვნის მის ანასახს - $f(a_0) = E$ სიმრავლეს, მაგრამ, მეორე მხრივ, E-ს განსაზღვრის თანახმად, E სიმრავლე შეიცავს ყოველ „ცუდ“ ელემენტს, მათ შორის a_0-ს. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით, a_0 შეუძლებელია იყოს „ცუდი“.

ამრიგად, a_0 ელემენტი არც „კარგია“ და არც „ცუდი“ , რაც გვაძლევს წინააღმდეგობას, რომლის ძალითაც ვასკვნით A და 2^A სიმრავლეების არაეკვივალენტობას.

თუ A სიმრავლის ყოველ a ელემენტს შევუსაბამებთ მისგან შედგენილ ერთელემენტიან $\{a\}$ სიმრავლეს, მივიღებთ ბიექციას A სიმრავლესა და A-ს ყველა ერთელემენტიანი ქვესიმრავლის კლასს შორის. ამით $\text{card } A < \text{card } 2^A$ უტოლობა დადგენილია. □

თუ $\text{card } A = \alpha$, მაშინ 2^α ჩანაწერით აღნიშნავენ 2^A ოჯახის სიმძლავრეს.

თეორემა 1.5.2. $\text{card } 2^{\mathbb{N}} = \text{card } \mathbb{R}$, ე.ი. $2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$.

დამტკიცება. განვიხილოთ ასახვა, რომელიც $E \in 2^{\mathbb{N}}$ სიმრავლეს შეუსაბამებს შემდეგ (ε_n) მიმდევრობას: $\varepsilon_n = 1$, თუ $n \in E$ და $\varepsilon_n = 0$, თუ $n \notin E$. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ეს ასახვა არის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $2^{\mathbb{N}}$ კლასსა და 0 და 1 რიცხვებისაგან შედგენილი ყველა შესაძლო მიმდევრობის სიმრავლეს შორის. ეს უკანასკნელი სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა (იხ. თეორემა 1.4.9), საიდანაც ვასკვნით, რომ $\text{card } 2^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$. □

1877 წელს კანტორმა გამოთქვა **კონტინუუმის ჰიპოთეზის** სახელწოდებით ცნობილი მოსაზრება $\mathfrak{a}$ და $\mathfrak{c}$ სიმძლავრეებს შორის მოთავსებული სიმძლავრის არარსებობის შესახებ. ის ფიქრობდა, რომ თვლადზე მეტი უმცირესი

სიმძლავრე კონტინუუმის სიმძლავრეა. პრობლემის ამოხსნამ მოითხოვა მათემატიკის საფუძვლების უკიდურესად ღრმა ანალიზი. როგორც აღმოჩნდა, კონტინუუმის ჰიპოთეზის გადაწყვეტა შეუძლებელია სიმრავლეთა თეორიის ცერმელო-ფრენკელის აქსიომათა სისტემაში. კერძოდ, კ. გიოდელმა (1940) დაამტკიცა, რომ კონტინუუმის ჰიპოთეზა არ ეწინააღმდეგება ცერმელო-ფრენკელის აქსიომატიკას, ხოლო პ. კოენმა (1963) აჩვენა, რომ არც ჰიპოთეზის უარყოფა ეწინააღმდეგება ხსენებულ აქსიომატიკას.

თეორემა 1.5.3. გადაუგვარებელ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა ფუნქციის $F[a,b]$ სიმრავლე $2^{\mathfrak{c}}$ სიმძლავრისაა, ე.ი. $\operatorname{card} F[a,b] = \operatorname{card} 2^{\mathbb{R}}$.

დამტკიცება. ყოველ $f \in F[a,b]$ ფუნქციას შევუსაბამოთ მისი გრაფიკი $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$, რომელიც, ცხადია, წარმოადგენს $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ სიბრტყის ქვესიმრავლეს. ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება მისი გრაფიკის მეშვეობით, ანუ განსაზღვრული ასახვა ინექციაა $F[a,b]$-დან $2^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$-ში. შედეგად, $F[a,b]$ ეკვივალენტურია $2^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$-ის გარკვეული ქვესიმრავლის.

მეორე მხრივ, ყოველ $E \subset [a,b]$ სიმრავლეს შევუსაბამოთ მისი მახასიათებელი ფუნქცია χ_E, ე.ი. შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია: $\chi_E(x) = 1$, როცა $x \in E$ და $\chi_E(x) = 0$, როცა $x \in [a,b] \setminus E$. ასეთი ასახვა იქნება ინექცია $2^{[a,b]}$-დან $F[a,b]$-ში. შედეგად, $2^{[0,1]}$ ეკვივალენტურია $F[a,b]$-ს გარკვეული ქვესიმრავლის.

შევნიშნოთ, რომ $2^{\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \sim 2^{[a,b]}$. ეს გამომდინარეობს $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}\times\mathbb{R} \sim [a,b]$ ეკვივალენტობებიდან.

ახლა, თუ გამოვიყენებთ კანტორ-ბერნშტეინის თეორემას (იხ., აგრეთვე, შენიშვნა 1.3.1) დავასკვნით, რომ $F[a,b] \sim 2^{\mathbb{R}}$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. რა სიმძლავრისაა $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა მონოტონური ფუნქციის სიმრავლე?
2. ვთქვათ, სიმრავლეები აკმაყოფილებენ პირობებს: 1) $1 \leq \operatorname{card} A_n \leq \mathfrak{c}$ $(n \in \mathbb{N})$; 2) $\operatorname{card} A_n \geq 2$ უსასრულო რაოდენობის n-სთვის. აჩვენეთ, რომ ყველა იმ (a_n) მიმდევრობის სიმრავლე, რომლისთვისაც $a_n \in A_n$ $(n \in \mathbb{N})$, არის კონტინუუმის სიმძლავრის.
3. დაამტკიცეთ, რომ ყველა $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ბიექციის სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

თ ა ვ ი 2

ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები $\mathbb{R}^n$ სივრცეში

ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები მნიშვნელოვან კლასს ქმნიან. მათი მეშვეობით ხდება უფრო რთული ტიპის სიმრავლეთა კონსტრუირება და დახასიათება. ამ თავში შესწავლილი იქნება $\mathbb{R}^n$ სივრცის ღია და ჩაკეტილ სიმრავლეთა სტრუქტურა და ზოგიერთი სხვა თვისება.

§ 1. ღია და ჩაკეტილი წრფივი სიმრავლეების სტრუქტურა

რიცხვითი წრფის ანუ $\mathbb{R}$-ის ქვესიმრავლეებს **წრფივი სიმრავლეები** ვუწოდოთ.

თეორემა 2.1.1. ვთქვათ, G წრფივი არაცარიელი ღია სიმრავლეა. მაშინ G წარმოიდგინება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ან თვლადი კლასის გაერთიანების სახით, ამასთან, ასეთი წარმოდგენა ერთადერთია.

დამტკიცება. შემოვიღოთ ბინარული მიმართება G სიმრავლეში შემდეგნაირად: $x \sim y$, თუ მოიძებნება ამ წერტილების შემცველი (a, b) ინტერვალი ისეთი, რომ $(a, b) \subset G$. ეს მიმართება არის ეკვივალენტობის მიმართება, ანუ აქვს რეფლექსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისებები. რეფლექსურობა და სიმეტრიულობა ცხადია. ტრანზიტულობის დასადგენად შევნიშნოთ, რომ თუ ორი ინტერვალი ერთმანეთს კვეთს, მაშინ მათი გაერთიანება წარმოადგენს ინტერვალს. ახლა ვთქვათ, $x \sim y$ და $y \sim z$. მაშინ მოიძებნებიან (a, b) და (c, d) ინტერვალები ისეთები, რომ $x, y \in (a, b) \subset G$ და $y, z \in (c, d) \subset G$. გაკეთებული შენიშვნის ძალით $x, y, z \in (a, b) \cup (c, d) = (t, \tau) \subset G$, რაც ნიშნავს მიმართების ტრანზიტულობას.

G სიმრავლე დაიშლება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ეკვივალენტობის კლასებად, რომელთა ოჯახი აღვნიშნოთ Ω-თი. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი I ეკვივალენტობის კლასი წარმოადგენს ინტერვალს, რაც ტოლფასია $I = (\inf I, \sup I)$ ტოლობის. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ G-ს ღიაობიდან გამომდინარეობს I-ს ღიაობა. შედეგად, დავასკვნით $I \subset (\inf I, \sup I)$ ჩართვის სამართლიანობას. შებრუნებული ჩართვის დასადგენად საკმარისია

შევნიშნოთ, რომ $\inf I$-სთან ნებისმიერ სიახლოვეში მარჯვნიდან და $\sup I$-სთან ნებისმიერ სიახლოვეში მარცხნიდან შეიძლება შევარჩიოთ I სიმრავლის x და y წერტილები. ეკვივალენტობის განსაზღვრის თანახმად, მოიძებნება ინტერვალი (a,b) ისეთი, რომ $x,y \in (a,b) \subset G$. ცხადია, (a,b) ინტერვალის ყოველი წერტილი შედის განსახილავ I კლასში, ე.ი. $(a,b) \subset I$. აქედან კი, უშუალოდ ვასკვნით $(\inf I, \sup I) \subset I$ ჩართვის სამართლიანობას.

დავადგინოთ, რომ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალების ნებისმიერი Δ კლასი არაუმეტეს თვლადია, რითაც G სიმრავლის სასურველი თვისებების მქონე წარმოდგენის არსებობა დადგენილი იქნება. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ყველგან მკვრივობის გათვალისწინებით Δ კლასის ყოველ ინტერვალს შეიძლება შევუსაბამოთ ამავე ინტერვალში შემავალი რაიმე რაციონალური რიცხვი. მიღებული შესაბამისობა იქნება ბიექცია Δ კლასსა და $\mathbb{Q}$-ს რაიმე ქვესიმრავლეს შორის. თვლადი სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე არაუმეტეს თვლადია, რისი გათვალისწინებითაც ვასკვნით დებულების სამართლიანობას.

ინტერვალებისაგან შედგენილ Δ კლასს ვუწოდოთ G სიმრავლის წარმოდგენა, თუ მასში შემავალი ინტერვალები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $G = \bigcup_{I\in\Delta} I$. შევნიშნოთ, რომ ჩვენ უკვე ავაგეთ G სიმრავლის წარმოდგენა Ω კლასის სახით.

ვთქვათ, Δ არის G სიმრავლის რაიმე წარმოდგენა. შეუძლებელია, ორ თანაუკვეთ ინტერვალს შორის ერთ-ერთი შეიცავდეს მეორის რომელიმე ბოლოს, რისი გათვალისწინებითაც ვასკვნით, რომ წარმოდგენაში შემავალი ინტერვალების ბოლოები არ ეკუთვნიან G სიმრავლეს.

ახლა დავადგინოთ წარმოდგენის ერთადერთობა. დავუშვათ, Δ არის G სიმრავლის რაიმე წარმოდგენა. ვაჩვენოთ, რომ Δ ემთხვევა Ω წარმოდგენას. ავიღოთ რაიმე $I \in \Omega$ ინტერვალი. ცხადია, მოიძებნება I-ს თანამკვეთი $J \in \Delta$ ინტერვალი. იმის გათვალისწინებით, რომ I და J ინტერვალების ბოლოები არ ეკუთვნიან G სიმრავლეს, უშუალოდ გამომდინარეობს ამ ინტერვალების იგივურობა. ამრიგად, $\Omega \subset \Delta$. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $\Delta \subset \Omega$. შედეგად, $\Delta = \Omega$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

წრფივი არაცარიელი ღია G სიმრავლის წარმოდგენის ინტერვალებს G-ს **შემადგენელ ინტერვალებს** უწოდებენ.

შენიშვნა 2.1.1. თეორემა 2.1.1-ის დამტკიცებისას ჩვენ დავადგინეთ, რომ შემადგენელი ინტერვალების ბოლოები არ ეკუთვნიან G სიმრავლეს. აქვე შევნიშნოთ შემადგენელი ინტერვალების მეორე მნიშვნელოვანი თვისება: თუ რაიმე (a,b) ინტერვალი შედის G-ში, მაშინ მოიძებნება G-ს შემადგენელი ინტერვალი, რომელიც შეიცავს (a,b)-ს. მართლაც, განვიხილოთ G-ს შემადგენელი I ინტერვალი, რომლის თანაკვეთა (a,b)-სთან არაცარიელია. მაშინ

იმის გათვალისწინებით, რომ I-ს ბოლოები არ ეკუთვნიან G-ს, მარტივად ვასკვნით სასურველ $I \supset (a, b)$ ჩართვას.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ღია სიმრავლეების გაერთიანება ღია სიმრავლეა, 2.1.1 თეორემიდან მივიღებთ ღია წრფივ სიმრავლეთა შემდეგ დახასიათებას.

თეორემა 2.1.2. ვთქვათ, G წრფივი სიმრავლეა. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **G ღიაა;**
- **G წარმოდგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ან თვლადი კლასის გაერთიანების სახით.**

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ჩაკეტილი სიმრავლეები წარმოადგენენ ღია სიმრავლეების დამატებებს, 2.1.2 თეორემიდან მივიღებთ ჩაკეტილ წრფივ სიმრავლეთა შემდეგ დახასიათებას.

თეორემა 2.1.3. ვთქვათ, F წრფივი სიმრავლეა. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **F ჩაკეტილია;**
- **F მიიღება წრფიდან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ან თვლადი კლასის ამოგდებით.**

ჩაკეტილი F სიმრავლის დამატებითი $\mathbb{R} \setminus F$ სიმრავლის შემადგენელ ინტერვალებს **F-ის დამატებით ინტერვალებს** უწოდებენ.

$F \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს ეწოდება **სრულყოფილი**, თუ ის ჩაკეტილია და არ შეიცავს იზოლირებულ წერტილებს.

სამართლიანია წრფივი ჩაკეტილი სიმრავლის იზოლირებულ წერტილთა შემდეგი დახასიათება.

ლემა 2.1.1. ვთქვათ, F წრფივი ჩაკეტილი სიმრავლეა. $x \in F$ წერტილი იზოლირებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის წარმოადგენს F-ის რაიმე ორი დამატებითი ინტერვალის საერთო ბოლოს.

დამტკიცება. საკმარისობა ცხადია. რაც შეეხება აუცილებლობას. განვიხილოთ (a, x) და (x, b) ინტერვალები, რომლებიც ჩართულია F-ის დამატებაში. მაშინ მოიძებნებიან $\mathbb{R} \setminus F$ სიმრავლის შემადგენელი I და J ინტერვალები ისეთები, რომ $(a, x) \subset I$ და $(x, b) \subset J$. ცხადია, x წერტილი იქნება I და J ინტერვალების საერთო ბოლო, რითაც ლემა დადგენილია. $\square$

თეორემა 2.1.3-დან და ლემა 2.1.1-დან მიიღება სრულყოფილ წრფივ სიმრავლეთა შემდეგი დახასიათება.

თეორემა 2.1.4. ვთქვათ, F წრფივი სიმრავლეა. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **F სრულყოფილია;**
- **F მიიღება წრფიდან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და წყვილ-წყვილად საერთო ბოლოს არმქონე ინტერვალების სასრული ან თვლადი კლასის ამოგდებით.**

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ $[0,1]$ სეგმენტი შეუძლებელია წარმოვადგინოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ჩაკეტილი სიმრავლეების სასრული ან თვლადი კლასის გაერთიანების სახით.
2. დაამტკიცეთ, რომ $[0,1]$ სეგმენტი შეიძლება წარმოდგეს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სრულყოფილი სიმრავლეების კონტინუუმის სიმძლავრის კლასის გაერთიანების სახით.

§ 2. ღია სიმრავლის სტრუქტურა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში

ინტერვალის მრავალგანზომილებიან ანალოგებად შეიძლება ჩავთვალოთ **n-განზომილებიანი ინტერვალი**, **n-განზომილებიანი კუბური ინტერვალი** და **n-განზომილებიანი ღია ბირთვი**, რომლებიც, შესაბამისად, წარმოადგენენ შემდეგი სახის სიმრავლეებს:

- $\underset{k=1}{\overset{n}{\times}} I_k$, სადაც I_k სიმრავლეები არიან ერთგანზომილებიანი ინტერვა-ლები;
- $\underset{k=1}{\overset{n}{\times}} I_k$, სადაც I_k სიმრავლეები არიან ერთი და იგივე სიგრძის ერთ-განზომილებიანი ინტერვალები;
- $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x,y) < r\}$, სადაც $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ და ρ არის ევკლიდური მანძილი $\mathbb{R}^n$-ში, ე.ი. $\rho(x,y) = (\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2)^{1/2}$.

შეუძლებელია, ორი თანაუკვეთი ღია სიმრავლიდან ერთ-ერთი შეიცავდეს მეორის საზღვრის რაიმე წერტილს. ამ ფაქტის გათვალისწინებით მარტივი დასადგენია, რომ თუ $n > 1$, მაშინ n-განზომილებიანი კუბი შეუძლებელია წარმოვადგინოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი n-განზომილებიანი ბირთვების გაერთიანების სახით, ხოლო n-განზომილებიანი ბირთვი შეუძლებელია წარმოვადგინოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი n-განზომილებიანი ინტერვალების გაერთიანების სახით.

ასე რომ, მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში წრფივ ღია სიმრავლეთა დახასიათების სრულ ანალოგს ადგილი არა აქვს. თუმცა სამართლიანია ნაწილობრივი ანალოგები. ქვემოთ დამტკიცებული იქნება ასეთი ტიპის ორი დებულება.

თეორემა 2.2.1. ვთქვათ, $G \subset \mathbb{R}^n$ არაცარიელი ღია სიმრავლეა. მაშინ G წარმოიდგინება ღია ბირთვების სასრული ან თვლადი კლასის გაერთიანების სახით.

ლემა 2.2.1. ვთქვათ, x წარმოადგენს $G \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის შიგა წერტილს. მაშინ მოიძებნებიან $y \in \mathbb{Q}^n$ რაციონალური წერტილი და $r > 0$ რაციონალური რიცხვი ისეთები, რომ $x \in B(y, r) \subset G$.

დამტკიცება. განვიხილოთ $\varepsilon > 0$, რომლისთვისაც $B(x, \varepsilon) \subset G$. თუ ვისარგებლებთ $\mathbb{Q}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ სიმრავლის ყველგან მკვრივობით $\mathbb{R}^m$ სივრცეში, ვიპოვით $y \in \mathbb{Q}^n$ წერტილს და $r \in \mathbb{Q}$ რიცხვს შემდეგი თვისებებით: $\rho(x, y) < \varepsilon/4$ და $r \in (\varepsilon/4, \varepsilon/2)$. მაშინ მარტივი შესამოწმებელია, რომ $x \in B(y, r) \subset B(x, \varepsilon) \subset G$, რითაც ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 2.2.1-ის დამტკიცება. ლემა 2.2.1-ის ძალით ყოველი $x \in G$ წერტილისათვის მოიძებნება $B_x = B(y_x, r_x)$ ბირთვი ისეთი, რომ $y_x \in \mathbb{Q}^n$, $r_x \in \mathbb{Q}$ და $x \in B(y_x, r_x) \subset G$. თუ გავითვალისწინებთ $\mathbb{Q}^n$ და $\mathbb{Q}$ სიმრავლეების თვლადობას, თვლად სიმრავლეთა თვისებების საფუძველზე დავრწმუნდებით, რომ $\Omega = \{B_x\}_{x \in G}$ კლასი არაუმეტეს თვლადია. მეორე მხრივ,

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} B_x \subset G.$$

შედეგად,

$$G = \bigcup_{x \in G} B_x = \bigcup_{B \in \Omega} B.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

ვთქვათ, $k \in \mathbb{Z}$ და $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. აღვნიშნოთ

$$\Delta_k^m = \mathop{\times}_{i=1}^{n} \left(\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i + 1}{2^k} \right] \quad (k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n),$$

$$\Omega_k = \{\Delta_k^m : m \in \mathbb{Z}^n\} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k.$$

Ω კლასში შემავალ კუბებს - **ორობით კუბებს**, ხოლო Ω_k $(k \in \mathbb{Z})$ კლასში შემავალ კუბებს - **k-ური რიგის ორობით კუბებს** უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ:

- k-ური რიგის ორობითი კუბები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და ისინი ქმნიან $\mathbb{R}^n$ სივრცის დაყოფას $1/2^k$ სიგრძის წიბოს მქონე კუბებად. შედეგად, სივრცის ყოველი x წერტილისათვის მოიძებნება მისი შემცველი ერთადერთი k-ური რიგის კუბი;

- k-ური რიგის ორობითი კუბები მიიღებიან $k-1$ რიგის ორობითი კუბების დაყოფით 2^n ცალ ტოლ კუბად. შედეგად, k-ური რიგის კუბისათვის არსებობს მისი შემცველი ერთადერთი $k-1$ რიგის კუბი.

შემდეგი ლემა გამოხატავს ორობითი კუბების არსებით თვისებას.

ლემა 2.2.2. ორი ორობითი კუბი ან თანაუკვეთია, ან ერთ-ერთი მათგანი მოიცავს მეორეს.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ერთმანეთისაგან განსხვავებული I და J ორობითი კუბები. თუ I და J ერთი და იგივე რიგის არიან, მაშინ ისინი თანაუკვეთია. ასე რომ, განსახილავი გვრჩება შემთხვევა, როცა $I \in \Omega_p$, $J \in \Omega_q$, სადაც $p \neq q$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $p > q$. განვიხილოთ ის

$$\Delta_{p-1} \in \Omega_{p-1},\ \Delta_{p-2} \in \Omega_{p-2},\ \dots\ , \Delta_q \in \Omega_q$$

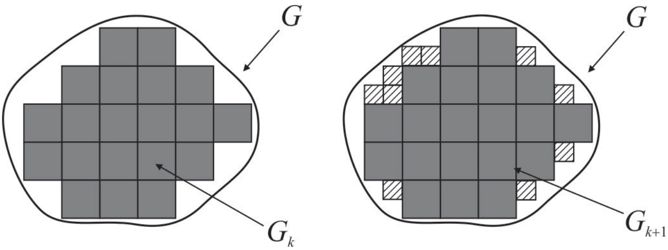
კუბები, რომელთათვისაც შესრულებული იქნება ჩართვები:

$$I \subset \Delta_{p-1} \subset \Delta_{p-2} \subset \cdots \subset \Delta_q.$$

შევნიშნოთ, რომ Δ_q და J წარმოადგენენ q რიგის მქონე ორობით კუბებს. რის გამოც, $\Delta_q \cap J = \emptyset$ ან $\Delta_q = J$. შესაბამისად, $I \cap J = \emptyset$ ან $I \subset J$. ამით ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 2.2.2. ვთქვათ, $G \subset \mathbb{R}^n$ არაცარიელი ღია სიმრავლეა. მაშინ G წარმოიდგინება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ორობითი კუბების გაერთიანების სახით.

დამტკიცება. ყოველი $k \in \mathbb{N}$-სთვის Π_k-თი აღვნიშნოთ ყველა იმ k-ური რიგის ორობითი კუბის კლასი, რომელიც შედის G სიმრავლეში, ხოლო G_k იყოს Π_k-ში შემავალი ორობითი კუბების გაერთიანება (ნახ. 2.1).



ნახ. 2.1.

თეორემის დამტკიცება ხდება (G_k) სიმრავლეთა მიმდევრობის შემდეგი სამი თვისების საფუძველზე:

- $G_1 \subset G_2 \subset \dots G_k \subset \dots$,
- $G_{k+1} \setminus G_k$ წარმოდგება $k+1$ რიგის მქონე ორობითი კუბების გარკვეული კლასის გაერთიანების სახით,
- (G_k) მიმდევრობა ამოწურავს G სიმრავლეს, ე.ი. $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$.

შევამოწმოთ ეს თვისებები. შევნიშნოთ, რომ $k+1$ რიგის მქონე ყოველი ორობითი კუბი იშლება k რიგის მქონე 2^n ცალი ორობითი კუბის გაერთიანებად. ამ ფაქტის გათვალისწინებით, Π_{k+1} კლასის კუბები დაიყოფიან ორ ჯგუფად: პირველი ტიპის კუბები აითვისებენ Π_k კლასის კუბების მიერ დაკავებულ არეალს, ე.ი. ეს კუბები შედიან G_k სიმრავლეში და მათი გაერთიანება გვაძლევს G_k-ს, ხოლო მეორე ტიპის კუბები მოთავსდებიან G_k სიმრავლის გარეთ. შედეგად, ვღებულობთ პირველ და მეორე თვისებებს.

მესამე თვისების დამტკიცებისათვის განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in G$ წერტილი. $I_k(x)$-ით აღვნიშნოთ k-ური რიგის ის ორობითი კუბი, რომელიც შეიცავს x წერტილს. x არის G-ს შიგა წერტილი, საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $I_k(x)$ კუბების წიბოს სიგრძეები მიისწრაფვიან ნულისაკენ, როცა $k \to \infty$, დავასკვნით $I_k(x) \subset G$ ჩართვის სამართლიანობას საკმარისად დიდი k-სათვის. შედეგად, $x \in G_k$ საკმარისად დიდი k-სათვის. ამით მესამე თვისება შემოწმებულია.

დადგენილი სამი თვისების საფუძველზე G სიმრავლე წარმოდგება G_1 სიმრავლისა და $G_{k+1} \setminus G_k$ $(k \in \mathbb{N})$ სიმრავლეების გაერთიანების სახით, ამასთან, ეს სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და თითოეული მათგანი, თავის მხრივ, წარმოადგენს ორობითი კუბების გარკვეულ გაერთიანებას. ამით ცხადია, თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

აქვე შემოვიღოთ სიმრავლეთა ზოგიერთი კლასი, რომლებიც განაზოგადებენ ღია და ჩაკეტილ სიმრავლეთა კლასებს.

ამბობენ, რომ სიმრავლე A არის G_δ **ტიპის**, თუ მოიძებნებიან ღია სიმრავლეები $A_1, A_2, \dots$ ისეთები, რომ $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

ამბობენ, რომ სიმრავლე არის F_σ **ტიპის**, თუ მოიძებნებიან ჩაკეტილი სიმრავლეები $A_1, A_2, \dots$ ისეთები, რომ $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

თუ A წარმოიდგინება $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ სახით, სადაც ყოველი A_k სიმრავლე არის F_σ ტიპის, მაშინ ამბობენ, რომ A არის $F_{\sigma\delta}$ **ტიპის**, ხოლო თუ A წარმოიდგინება $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ სახით, სადაც ყოველი A_k სიმრავლე არის G_δ ტიპის, მაშინ ამბობენ, რომ A არის $G_{\delta\sigma}$ **ტიპის**.

ზემოთ აღწერილი გზით ინდუქციურად შესაძლებელია $G_{\delta\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$, ... და $F_{\sigma\delta\sigma}, F_{\sigma\delta\sigma\delta}, \dots$ ტიპების სიმრავლეთა განსაზღვრაც.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ჩაკეტილი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე არის G_δ ტიპის, ხოლო ყოველი ღია $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე კი, F_σ ტიპის.

2. დაამტკიცეთ, რომ თვლად ყველგან მკვრივ $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს შეუძლებელია ჰქონდეს G_δ ტიპი.
3. ვთქვათ $A_1, A_2, \dots$ სიმრავლეები ყველგან მკვრივია. დაამტკიცეთ, რომ მათი თანაკვეთა ყველგან მკვრივია, თუ თითოეული A_k სიმრავლე ღიაა ან G_δ ტიპისაა.
4. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილთა სიმრავლეს აქვს G_δ ტიპი.
5. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი უწყვეტი $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციების მიმდევრობის კრებადობის წერტილთა სიმრავლე არის G_δ ტიპის.

§ 3. ჩაკეტილი სიმრავლის სიმძლავრე

თეორემა 2.3.1. **$\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველი არაცარიელი სრულყოფილი სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.**

თეორემა 2.3.1-ის დამტკიცებისას ტერმინ ბირთვის ქვეშ ვიგულისხმებთ ჩაკეტილ ბირთვს არანულოვანი რადიუსით.

B ბირთვის ცენტრი და რადიუსი აღვნიშნოთ, შესაბამისად, $c(B)$ და $r(B)$ ჩანაწერებით.

B ბირთვს ვუწოდოთ E სიმრავლეზე მიმაგრებული, თუ $c(B) \in E$.

ლემა 2.3.1. **ვთქვათ, E არაცარიელი სრულყოფილი სიმრავლეა და B არის E-ზე მიმაგრებული ბირთვი. მაშინ მოიძებნებიან B-ში შემავალი $B(0)$ და $B(1)$ ბირთვები, რომლებიც თანაუკვეთია და მიმაგრებულია E-ზე.**

დამტკიცება. ლემის პირობის ძალით, B ბირთვის ცენტრი $c(B)$ წარმოადგენს E სიმრავლის ზღვარით წერტილს, რის გამოც მოიძებნებიან B-ს შიგა წერტილები x_0 და x_1, რომლებიც ეკუთვნიან E სიმრავლეს. ცხადია, რომ $B(0)$ და $B(1)$ ბირთვების როლში შეიძლება ავიღოთ x_0 და x_1 წერტილებში ცენტრების მქონე საკმარისად მცირე რადიუსის ბირთვები. $\square$

შენიშვნა 2.3.1. ლემა 2.3.1-ში მოძებნილი $B(0)$ და $B(1)$ ბირთვები შეიძლება შევარჩიოთ ისე, რომ მათ ჰქონდეთ ნებისმიერი წინასწარ დასახელებული სიმცირის რადიუსები.

ლემა 2.3.1-ის მიხედვით B ბირთვისაგან $B(0)$ და $B(1)$ ბირთვების წარმოქმნას ვუწოდოთ B-ს დიქოტომია.

თეორემა 2.3.1-ის დამტკიცება. განვიხილოთ მოცემულ E სიმრავლეზე მიმაგრებული რაიმე B ბირთვი. ლემა 2.3.1-ის მეშვეობით განვსაზღვროთ B ბირთვით წამოწყებული დიქოტომიების მიმდევრობითი გამოყენებით აგებული $B(i_1, \dots, i_k)$ ბირთვების კლასი, სადაც k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია,

ხოლო i_k ინდექსები ღებულობენ 0-ის ან 1-ის ტოლ მნიშვნელობებს. სახელდობრ, აგების წესი შემდეგნაირია: პირველ ეტაპზე განიხილება B-ს დიქოტომიით მიღებული $B(0)$ და $B(1)$ ბირთვები, მეორე ეტაპზე - $B(0)$ და $B(1)$ ბირთვების დიქოტომიით მიღებული $B(0,0)$, $B(0,1)$ და $B(1,0)$, $B(1,1)$ ბირთვები. ამ პროცესის უსასრულოდ გაგრძელება გვაძლევს $B(i_1,\ldots,i_k)$ ბირთვების ზემოხსენებულ კლასს. ვიგულისხმოთ, რომ

$$r(B(i_1,\ldots,i_k)) < \frac{1}{k},$$

რისი მიღწევის საშუალებასაც აგება იძლევა (იხ. შენიშვნა 2.3.1).

ამრიგად, ყოველი ორობითი $i = (i_k)$ მიმდევრობისათვის გვაქვს ჩალაგებული და ნულისაკენ კრებადი რადიუსების მქონე ბირთვების მიმდევრობა:

$$B(i_1),\ B(i_1,i_2),\ \ldots,\ B(i_1,\ldots,i_k),\ \ldots$$

როგორც ცნობილია, ასეთ ბირთვთა მიმდევრობას აქვს ერთწერტილიანი თანაკვეთა. ეს წერტილი აღვნიშნოთ x_i-თი. შევნიშნოთ, რომ

$$c(B(i_1,\ldots,i_k)) \in E \ \ (k \in \mathbb{N}) \ \ \text{და} \ \ c(B(i_1,\ldots,i_k)) \to x_i \ \ (k \to \infty).$$

აქედან, E-ს ჩაკეტილობის გათვალისწინებით, ვასკვნით x_i წერტილის მიკუთვნებას E სიმრავლისადმი. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $i \mapsto x_i$ შესაბამისობა, რომელიც ყველა ორობითი მიმდევრობის სიმრავლეს ასახავს E სიმრავლეში, არის ინექცია. მართლაც, განვიხილოთ ერთმანეთისაგან განსხვავებული $i = (i_k)$ და $i' = (i'_k)$ ორობითი მიმდევრობები. k_0 იყოს მინიმალური იმ k ინდექსებს შორის, რომელთათვისაც $i_k \neq i'_k$. მაშინ $B(i_1,\ldots,i_{k_0})$ და $B(i'_1,\ldots,i'_{k_0})$ ბირთვები მიღებული იქნებიან $B(i_1,\ldots,i_{k_0-1})$ ბირთვის დიქოტომიით. რის გამოც ისინი გამოვლენ თანაუკვეთი. აქედან გამომდინარე, x_i და $x_{i'}$ წერტილები მოთავსებული იქნებიან თანაუკვეთ სიმრავლეებში. შედეგად, $x_i \neq x_{i'}$. ამით $i \mapsto x_i$ ასახვის ინექციურობა დადგენილია. ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყველა ორობითი მიმდევრობის სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა, მივიღებთ $\mathrm{card}E \geq c$ შეფასებას. მეორე მხრივ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ჩართვის გამო, $\mathrm{card}E \leq c$. საბოლოოდ, კანტორ-ბერნშტეინის თეორემის ძალით მივიღებთ $\mathrm{card}E = c$ ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. □

$x \in \mathbb{R}^n$ წერტილს ეწოდება $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის **კონდენსაციის წერტილი**, თუ x-ის ყოველი მიდამო შეიცავს E სიმრავლის არათვლად ქვესიმრავლეს.

თეორემა 2.3.2. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის არცერთი წერტილი არ წარმოადგენს მის კონდენსაციის წერტილს. მაშინ E არაუმეტეს თვლადია.

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mathbb{Q}^m$ ყველგან მკვრივია $\mathbb{R}^m$ სივრცეში, თეორემის პირობის ძალით, ყოველი $x \in E$-სთვის ვიპოვით რაციონალური ცენტრისა და რაციონალური რადიუსის მქონე ღია ბირთვს, რომელიც შეიცავს x წერტილს და ამასთან $B_x \cap E$ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია. ცხადია, $E \subset \bigcup\limits_{x\in E} B_x$. საიდანაც გვექნება,

$$E = \bigcup_{x\in E}(B_x \cap E).$$

ყოველი B_x $(x \in E)$ ბირთვი ცალსახად განისაზღვრება ორი პარამეტრით - ცენტრითა და რადიუსით, რომლებიც მიეკუთვნებიან თვლად სიმრავლეებს. აქედან, თვლად სიმრავლეთა ცნობილი თვისებების ძალით ვასკვნით, რომ $\{B_x : x \in E\}$ კლასი არაუმეტეს თვლადია. ამგვარად, E სიმრავლე წარმოდგა როგორც არაუმეტეს თვლად სიმრავლეთა არაუმეტეს თვლადი $\{B_x \cap E : x \in E\}$ კლასის გაერთიანება, საიდანაც ვასკვნით, რომ E არაუმეტეს თვლადია. □

შედეგი 2.3.1. ვთქვათ, P არის $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლეა. მაშინ $E \setminus P$ არაუმეტეს თვლადია.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $E \setminus P$ სიმრავლის არცერთი წერტილი არ წარმოადგენს მის კონდენსაციის წერტილს. მართლაც, თუ $x \in E \setminus P$ იქნება $E \setminus P$-ს კონდენსაციის წერტილი, მაშინ x მითუმეტეს იქნება E-ს კონდენსაციის წერტილიც. ამიტომ x მიეკუთვნება P-ს და შედეგად, $x \notin E \setminus P$, რაც ეწინააღმდეგება $x \in E \setminus P$ პირობას.

ახლა, თუ გამოვიყენებთ თეორემა 2.3.2-ს, დავასკვნით, რომ $E \setminus P$ არაუმეტეს თვლადია. □

თეორემა 2.3.3. ყოველი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლე სრულყოფილია.

დამტკიცება. თეორემა ტრივიალურია, თუ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია. ვთქვათ, E არათვლადია. მისი კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლე იყოს P. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ P ჩაკეტილია. ვთქვათ, P-ს წერტილთა (x_k) მიმდევრობა კრებადია x წერტილისაკენ. განვიხილოთ x წერტილის რაიმე B მიდამო. მაშინ B მიდამო იქნება მიმდევრობის საკმარისად დიდი ნომრის მქონე x_k წევრისთვისაც. $x_k \in P$ კონდენსაციის წერტილია E-სთვის, რის გამოც $B \cap E$ არათვლადია. შედეგად, x არის E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ P სრულყოფილია. ვთქვათ, $x \in P$ და B არის x-ის რაიმე მიდამო. მაშინ $B \cap E$ არათვლადია, ხოლო შედეგი 2.3.1-ის ძალით, $B \cap E$ სიმრავლის ყველა წერტილი, გარდა შესაძლოა წერტილთა არაუმეტეს

თვლადი სიმრავლისა, მისივე კონდენსაციის წერტილია. აქედან გამომდინარე, $B \cap E$ შეიცავს უსასრულოდ ბევრ მისსავე კონდენსაციის წერტილს, რომლებიც, იმავდროულად, იქნებიან E სიმრავლის კონდენსაციის წერტილებიც. ამგვარად, x-ის ნებისმიერ B მიდამოში ვიპოვეთ P სიმრავლის უსასრულოდ ბევრი წერტილი. რითაც დავადგინეთ, რომ P სრულყოფილია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი დებულება დამტკიცებული იყო გ. კანტორისა და ი. ბენდიქსონის მიერ.

თეორემა 2.3.4. ყოველი ჩაკეტილი $F \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე წარმოიდგინება ორი სიმრავლის გაერთიანების სახით, რომელთაგან ერთ-ერთი არის სრულყოფილი, ხოლო მეორე - არაუმეტეს თვლადი.

დამტკიცება. P-თი აღვნიშნოთ F-ის კონდენსაციის წერტილთა სიმრავლე. F ჩაკეტილია, ამიტომ მისი დამატება F-ის კონდენსაციის წერტილებს არ შეიცავს. შედეგად, $P \subset F$. ახლა, თუ გავითვალისწინებთ $E = P \cup (E \setminus P)$ წარმოდგენას და გამოვიყენებთ თეორემა 2.3.3-ს და შედეგი 2.3.1-ს, დავრწმუნდებით დასამტკიცებელი წინადადების სამართლიანობაში. $\square$

შემდეგი დებულება გამომდინარეობს 2.3.1 და 2.3.4 თეორემებიდან.

შედეგი 2.3.2. $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე ან სასრულია, ან თვლადი, ანაც კონტინუუმის სიმძლავრის.

§ 4. კანტორის სიმრავლე

A სიმრავლისათვის $\mathrm{int}A$-თი აღვნიშნოთ A-ს შიგა წერტილების სიმრავლე.

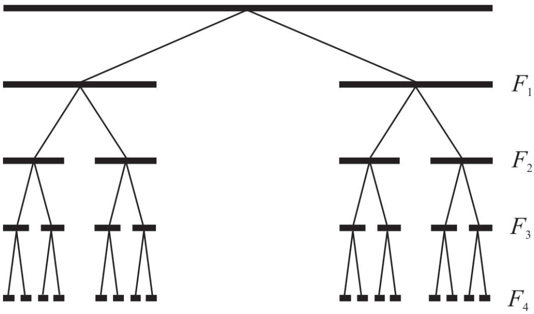
ვთქვათ, $\Delta \subset \mathbb{R}$ რაიმე სეგმენტია. დავყოთ Δ სამ ტოლ სეგმენტად და მიღებული სეგმენტები მათი დალაგების შესაბამისად აღვნიშნოთ $\Delta(0)$, $\Delta(1)$ და $\Delta(2)$-ით. $\mathrm{int}\Delta(1)$ ინტერვალს დავარქვათ Δ-ს შუა ნაწილი.

$\Delta \subset \mathbb{R}$ **სეგმენტის გაწყვეტა** დავარქვათ ოპერაციას, რომელიც Δ-ს შეუსაბამებს $\Delta(0)$ და $\Delta(2)$ სეგმენტების გაერთიანებას, ანუ Δ-ს „გაწყვეტს“ მისი შუა ნაწილის ამოგდების მეშვეობით.

საზოგადოდ, თუ F არის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ სეგმენტების გაერთიანება, მაშინ F**-ის გაწყვეტა** დავარქვათ ოპერაციას, რომელიც F-ს შეუსაბამებს $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ სეგმენტების გაწყვეტის შედეგად დარჩენილ $\bigcup_{k=1}^{n}(\Delta_k(0) \cup \Delta_k(2))$ სიმრავლეს.

კანტორის სიმრავლე (კანტორის დისკონტინუუმი) $\mathbb{D}$ განისაზღვრება, როგორც სიმრავლე, რომელიც რჩება $[0,1]$ სეგმენტისაგან მასზე გაწყვეტის

ოპერაციის რეკურენტული მოქმედებების შედეგად, სახელდობრ, როგორც სიმრავლე: $\mathbb{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, სადაც F_1 არის $[0,1]$-ის გაწყვეტა, F_2 არის F_1-ის გაწყვეტა და ა.შ. (ნახ. 2.2).



ნახ. 2.2.

ამრიგად, კანტორის სიმრავლის მისაღებად $[0,1]$ სეგმენტისაგან ჯერ უნდა ამოვაგდოთ მისი შუა ნაწილი, შემდეგ დარჩენილი $\Delta(0)$ და $\Delta(2)$ სეგმენტებისაგან უნდა ამოვაგდოთ მათი შუა ნაწილები და ა.შ. ამ პროცესის უსასრულოდ გაგრძელების შედეგად $[0,1]$ სეგმენტის ხელუხლებელი (ანუ არაამოგდებული) წერტილები ქმნიან კანტორის სიმრავლეს.

კანტორის $\mathbb{D}$ სიმრავლის ერთ-ერთი უმთავრესი თვისება იმაში გამოიხატება, რომ ის ივავებს $[0,1]$ სეგმენტის ძალიან უმნიშვნელო ნაწილს (მისი დამატებითი ინტერვალების სიგრძეთა ჯამი 1-ის ტოლია), მაგრამ, მიუხედავად ამისა, $\mathbb{D}$ სიმრავლეში ძალიან ბევრი წერტილია, კერძოდ, ის კონტინუუმის სიმძლავრისაა. ქვემოთ დადგენილი იქნება კანტორის სიმრავლის ეს და სხვა თვისებები.

ვთქვათ, $\Delta \subset \mathbb{R}$ რაიმე სეგმენტია. $n \geq 2$ და $i_1, \ldots, i_n \in \{0,1,2\}$ პარამეტრებისათვის $\Delta(i_1, \ldots, i_n)$ სეგმენტები განვსაზღვროთ ინდუქციურად შემდეგი ტოლობით:

$$\Delta(i_1, \ldots, i_n) = \Delta(i_1, \ldots, i_{n-1})(i_n),$$

თუ Δ-ს როლში ავიღებთ $[0,1]$ მონაკვეთს, გვექნება:

$$F_n = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n) \in \{0,2\}^n} \Delta(i_1, \ldots, i_n),$$

$$F_{n+1} = F_n \setminus \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n) \in \{0,2\}^n} \mathrm{int}\Delta(i_1, \ldots, i_n, 1).$$

შედეგად ვღებულობთ კანტორის სიმრავლის ორ წარმოდგენას:

$$\mathbb{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in\{0,2\}^n} \Delta(i_1,\dots,i_n),$$

$$\mathbb{D} = [0,1] \setminus \left(\mathrm{int}\Delta(1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in\{0,2\}^n} \mathrm{int}\Delta(i_1,\dots,i_n,1)\right)$$

თეორემა 2.4.1. კანტორის $\mathbb{D}$ სიმრავლეს აქვს შემდეგი თვისებები:

- **$\mathbb{D}$ სრულყოფილი სიმრავლეა;**
- **$\mathbb{D}$ არსად მკვრივია;**
- **$\mathbb{D}$-ს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე;**
- **$\mathbb{D}$-ს დამატებითი ინტერვალების სიგრძეთა ჯამი 1-ის ტოლია.**

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $F_0 = [0,1]$. შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{D}$ სიმრავლის აგების n-ურ ეტაპზე F_n სიმრავლიდან ვაგდებთ 2^{n-1} ცალ ინტერვალს სიგრძით $1/3^n$, რომლებიც F_n-ის დამატებითი სიმრავლისაგან დაშორებულია $1/3^n$ მანძილით. ამ შენიშვნაზე დაყრდნობით გვაქვს, რომ:

1) $\mathbb{D}$-ს დამატებითი ინტერვალები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და წყვილ-წყვილად საერთო ბოლოს არმქონეა;

2) $\mathbb{D}$-ს დამატებითი ინტერვალების ჯამური სიგრძე გამოისახება $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}/3^n$ მწკრივით, რომლის ჯამი 1-ის ტოლია;

3) $\mathbb{D}$ არაცარიელია, კერძოდ, შეიცავს თითოეული დამატებითი ინტერვალის ბოლოებს.

1)-დან თეორემა 2.2.1-ზე დაყრდნობით ვასკვნით, რომ $\mathbb{D}$ სრულყოფილია. შემდეგ კი, 3)-ის და თეორემა 2.3.1-ის ძალით ვღებულობთ, რომ $\mathbb{D}$ კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დასამტკიცებელი გვრჩება $\mathbb{D}$-ს არსად მკვრივობა, ე.ი. ნებისმიერი $I \subset [0,1]$ ინტერვალისათვის უნდა ვიპოვოთ $J \subset I$ ქვეინტერვალი, რომელიც არ შეიცავს $\mathbb{D}$-ს წერტილებს. თუ $J \cap \mathbb{D} = \emptyset$, მაშინ დებულება ცხადია. ვთქვათ, $J \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$. ავარჩიოთ რაიმე $x \in I \cap \mathbb{D}$ წერტილი. x არის I ინტერვალის შიგა წერტილი, რის გამოც საკმარისად დიდი n-ის შემთხვევაში, F_n-ის შემადგენელი ის $\Delta(i_1,\dots,i_n)$ სეგმენტი, რომელიც შეიცავს x-ს, აღმოჩნდება ჩართული I ინტერვალში. მაშინ $\Delta(i_1,\dots,i_n)$ სეგმენტის შუა $\mathrm{int}\Delta(i_1,\dots,i_n,1)$ ნაწილი იქნება კანტორის სიმრავლის დამატებითი ინტერვალი, რომელიც ჩართულია I-ში. აქედან გამომდინარე, J-ს როლში შეიძლება ავიღოთ $\mathrm{int}\Delta(i_1,\dots,i_n,1)$ ინტერვალი. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ააგეთ სრულყოფილი და არსად მკვრივი $E \subset [0,1]$ სიმრავლე, რომლის დამატებითი ინტერვალების სიგრძეთა ჯამი წინასწარ დასახელებული $a \in (0,1)$ რიცხვის ტოლია.
2. დაამტკიცეთ, რომ კანტორის სიმრავლეს აქვს შემდეგი არითმეტიკული სტრუქტურა: ის შედგება მხოლოდ და მხოლოდ იმ რიცხვებისაგან, რომლებიც შეიძლება წარმოდგეს ისეთი $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k/3^k$ სამობითი წილადის სახით, რომლის სამობით ε_k თანრიგებს შორის არცერთი არაა 1-ის ტოლი. ამ ფაქტზე დაყრდნობით დაამტკიცეთ, რომ კანტორის სიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.
3. დაამტკიცეთ, რომ $\{x_1 + x_2 : x_1, x_2 \in \mathbb{D}\} = [0,2]$.
4. ააგეთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ღია $Q_k \subset [0,1]^n$ კუბების მიმდევრობა, რომლის დამატებითი სიმრავლე $[0,1]^n$ კუბამდე სრულყოფილი და არსად მკვრივია.

თ ა ვ ი 3

სიმრავლეთა კლასები

სიმრავლეთა კლასებს, რომლებიც ჩაკეტილი არიან სხვადასხვა სიმრავლური ოპერაციების (სასრული გაერთიანება, თვლადი გაერთიანება, სხვაობა და ა.შ.) მიმართ, არსებითი დატვირთვა აქვთ ზომის თეორიაში. ამ თავში განხილული იქნება ამ ტიპის კლასები და მათი საბაზისო თვისებები.

§ 1. სიმრავლეთა კლასების ძირითადი ტიპები

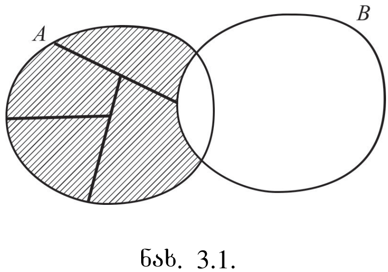
ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ X რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა და განვიხილავთ X-ის ქვესიმრავლეთა კლასებს.

ვთქვათ, $\mathrm{H} \subset 2^X$ სიმრავლეთა არაცარიელი კლასია. სიმრავლეთა $\Omega \subset 2^X$ კლასს ვუწოდოთ $A \subset X$ სიმრავლის **H-დაშლა** (**თვლადი H-დაშლა**), თუ: Ω სასრულია (თვლადია), Ω-ში შემავალი სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია, $\Omega \subset \mathrm{H}$ და $A = \bigcup_{B \in \Omega} B$.

სიმრავლეთა არაცარიელ $\mathrm{H} \subset 2^X$ კლასს ვუწოდოთ **ნახევარრგოლი**, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- თუ $A, B \in \mathrm{H}$, მაშინ $A \cap B \in \mathrm{H}$;
- თუ $A, B \in \mathrm{H}$, მაშინ არსებობს $A \setminus B$ სიმრავლის H-დაშლა.

ამრიგად, ნახევარრგოლი ჩაკეტილია თანაკვეთის ოპერაციის მიმართ. სხვაობის მიმართ ჩაკეტილობის ნაცვლად კი, მოითხოვება მისი შესუსტებული ფორმა - სხვაობა უნდა იშლებოდეს ნახევარრგოლის სიმრავლეთა სასრულ გაერთიანებად (ნახ. 3.1).



ნახ. 3.1.

შევნიშნოთ, რომ ცარიელი სიმრავლე ეკუთვნის ნახევარრგოლს. ეს გამომდინარეობს განსაზღვრების მეორე პირობიდან, თუ ავიღებთ $A = B$.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ნახევარრგოლი ჩაკეტილია სასრული თანაკვეთის ოპერაციის მიმართ, ე.ი. თუ $A_1, \ldots, A_n$ სიმრავლეები ეკუთვნიან H ნახევარრგოლს, მაშინ $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathrm{H}$.

ნახევარრგოლის მაგალითებს იძლევიან $\{\emptyset\}$ და 2^X კლასები. მათგან პირველი უღარიბესია ყველა შესაძლო $\mathrm{H} \subset 2^X$ ნახევარრგოლთა შორის, მეორე კი - უმდიდრესი. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ნახევარრგოლის მაგალითს იძლევა, აგრეთვე, შემდეგი კლასი:

$$\mathcal{I} = \{\emptyset\} \cup \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

ნახევრადღია მონაკვეთების $\mathcal{I}$ კლასს საბაზისო დატვირთვა აქვს ლებეგის ზომის კონსტრუქციაში.

სიმრავლეთა არაცარიელ $\mathrm{H} \subset 2^X$ კლასს ეწოდება **ნახევარალგებრა**, თუ ის ნახევარრგოლია და შეიცავს X-ს.

სიმრავლეთა არაცარიელ $\mathrm{H} \subset 2^X$ კლასს ეწოდება **რგოლი**, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- თუ $A, B \in \mathrm{H}$, მაშინ $A \cup B \in \mathrm{H}$;
- თუ $A, B \in \mathrm{H}$, მაშინ $A \setminus B \in \mathrm{H}$.

რგოლი ჩაკეტილია თანაკვეთის ოპერაციის მიმართ. ამის დასადგენად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. ამრიგად, რგოლი წარმოადგენს ნახევარრგოლსაც.

ცხადია, რგოლი ჩაკეტილია თანაკვეთის, სხვაობისა და გაერთიანების სასრული რაოდენობის ოპერაციების მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ ნახევრადღია მონაკვეთების $\mathcal{I}$ კლასი არ წარმოადგენს რგოლს.

სიმრავლეთა არაცარიელ $\mathrm{H} \subset 2^X$ კლასს ეწოდება **ალგებრა**, თუ ის რგოლია და შეიცავს X-ს.

სიმრავლეთა არაცარიელ $\mathrm{H} \subset 2^X$ კლასს ეწოდება σ-**რგოლი**, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- თუ $A_1, A_2, \dots \in \mathrm{H}$, მაშინ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathrm{H}$;
- თუ $A, B \in \mathrm{H}$, მაშინ $A \setminus B \in \mathrm{H}$.

მეორე თვისებიდან გამომდინარე, ცარიელი სიმრავლე ეკუთვნის σ-რგოლს, საიდანაც, პირველი თვისების მეშვეობით, მარტივად დავასკვნით, რომ σ-რგოლი ჩაკეტილია ორი სიმრავლის გაერთიანების ოპერაციის მიმართ. ამრიგად, σ-რგოლი იმავდროულად წარმოადგენს რგოლსაც.

შევნიშნოთ, რომ σ-რგოლი ჩაკეტილია თვლადი თანაკვეთის ოპერაციის მიმართაც, კერძოდ, თუ $\{A_1, A_2, \dots\} \subset \mathrm{H}$, მაშინ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathrm{H}$. ეს მტკიცდება შემდეგი სიმრავლური ტოლობის გათვალისწინებით:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n).$$

სიმრავლეთა არაცარიელ $\mathrm{H} \subset 2^X$ კლასს ეწოდება **σ-ალგებრა**, თუ ის σ-რგოლია და შეიცავს X-ს.

სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობას ეწოდება **ზრდადი**, თუ $A_n \subset A_{n+1}$ ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის. სიმრავლეთა **ზრდადი** (A_n) **მიმდევრობის ზღვარი** განისაზღვრება ტოლობით:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობას ეწოდება **კლებადი**, თუ $A_n \supset A_{n+1}$ ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის. სიმრავლეთა **კლებადი** (A_n) **მიმდევრობის ზღვარი** განისაზღვრება ტოლობით:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

სიმრავლეთა ზრდად და კლებად მიმდევრობებს **მონოტონური** ეწოდებათ.

სიმრავლეთა არაცარიელ $\mathrm{H} \subset 2^X$ კლასს ეწოდება **მონოტონური კლასი**, თუ H-ში შემავალ სიმრავლეთა ნებისმიერი მონოტონური მიმდევრობის წევრებთან ერთად H შეიცავს ამ მიმდევრობის ზღვარსაც.

თეორემა 3.1.1. ვთქვათ, $\mathrm{H} \subset 2^X$. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

1) H არის σ-რგოლი;

2) H არის მონოტონური რგოლი.

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია გამომდინარეობს σ-რგოლის თვისებებიდან.

დავადგინოთ შებრუნებული 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს რაიმე $A_n \in \mathrm{H}$ მიმდევრობა. H რგოლიცაა, რის გამოც, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathrm{H}$ ყოველი $n \in \mathbb{N}$-თვის. ამასთანავე, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k$ $(n \in \mathbb{N})$. აქედან, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ტოლობისა და 2) პირობის გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathrm{H}$. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ააგეთ სიმრავლეთა კლასი, რომელიც ჩაკეტილია თანაკვეთისა და გაერთიანების ოპერაციების მიმართ, მაგრამ არ წარმოადგენს ნახევარრგოლს.

2. დაამტკიცეთ, რომ ყველა რიცხვითი შუალედის კლასი არის ნახევარრგოლი.
3. დაამტკიცეთ, რომ წრფის ყველა შემოსაზღვრული სიმრავლის კლასი არის რგოლი, მაგრამ არ არის σ-რგოლი.
4. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი არათვლადი X სიმრავლისათვის, მისი ის ქვესიმრავლეები, რომლებიც ან არაუმეტეს თვლადია, ანაც აქვთ არაუმეტეს თვლადი დამატება, ქმნიან σ-ალგებრას.
5. ააგეთ H რგოლი, რომელიც არ წარმოადგენს σ-რგოლს, მაგრამ H-ის სიმრავლეთა ნებისმიერი თვლადი ოჯახის თანაკვეთა ეკუთვნის H-ს.
6. ვთქვათ, H რგოლია. აღვნიშნოთ $A + B = A \triangle B$, $A \cdot B = A \cap B$. დაამტკიცეთ, რომ ასეთი სახის შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების მიმართ H, როგორც ალგებრული სტრუქტურა, წარმოადგენს კომუტაციურ რგოლს.

§ 2. ნახევარრგოლის თვისებები

თეორემა 3.2.1. ვთქვათ, H ნახევარრგოლია. მაშინ ნებისმიერი $A, A_1, \ldots, A_n \in$ H სიმრავლეებისათვის არსებობს $A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ სიმრავლის H-დაშლა.

დამტკიცება. ვიმსჯელოთ ინდუქციით n-ის მიხედვით. $n = 1$ შემთხვევაში დებულება გამომდინარეობს ნახევარრგოლის განსაზღვრებიდან. ვთქვათ, $n > 1$ და დებულება დამტკიცებულია $n-1$ ცალი სიმრავლისათვის. განვიხილოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $C_1, \ldots, C_p \in H$ სიმრავლეები, რომელთათვისაც

$$A \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) = C_1 \cup \cdots \cup C_p.$$

გვექნება, რომ

$$A \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n) = (C_1 \setminus A_n) \cup \cdots \cup (C_p \setminus A_n).$$

ნახევარრგოლის მეორე თვისების გამოყენებით თითოეული $C_i \setminus A_n$ სიმრავლისათვის იარსებებს მისი H-დაშლა - Ω_i. ცხადია, რომ $\Omega_1, \ldots, \Omega_p$ კლასების გაერთიანება მოგვცემს $A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ სიმრავლის H-დაშლას. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 3.2.2. ვთქვათ, H ნახევარრგოლია. მაშინ ნებისმიერი $A_1, \ldots, A_n \in$ H სიმრავლეებისათვის არსებობს სიმრავლეთა Ω კლასი, ისეთი, რომ

1) Ω არის $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ სიმრავლის H-დაშლა;

2) ყოველი $k \in \overline{1,n}$-სთვის მოიძებნება $\Omega_k \subset \Omega$ ქვეკლასი, რომელიც არის A_k სიმრავლის H-დაშლა.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ გაერთიანების H-დაშლის არსებობა ადვილად გამომდინარეობს თეორემა 3.2.1-დან, თუმცა ეს არაა საკმარისი დამტკიცებისათვის, რადგანაც მოითხოვება ისეთი დაშლის აგება, რომელსაც ექნება 2) თვისებაც.

ვიმსჯელოთ ინდუქციით n-ის მიხედვით. $n = 1$ შემთხვევაში დებულება ცხადია. ვთქვათ, $n > 1$ და დებულება დამტკიცებულია $n-1$ ცალი სიმრავლისათვის. გამოვიყენოთ ინდუქციის დაშვება $A_1, A_2 \ , \dots, A_{n-1}$ სიმრავლეებისათვის და განვიხილოთ დებულების მიხედვით მათი შესაბამისი H-დაშლა, შედგენილი $C_1, C_2, \dots, C_p \in$ H სიმრავლეებისაგან.

$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ სიმრავლე დაიშლება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეების შემდეგ სამ ჯგუფად:

$$A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1});$$

$$C_1 \setminus A_n, \dots, C_p \setminus A_n;$$

$$C_1 \cap A_n, \dots, C_p \cap A_n.$$

თეორემა 3.2.1-ის გამოყენებით პირველი და მეორე ჯგუფის სიმრავლეებისათვის მოიძებნებიან მათი H-დაშლები: Δ, $\Delta_1, \dots, \Delta_p$ კლასების სახით, შესაბამისად. რაც შეეხება მესამე ჯგუფის სიმრავლეებს, ისინი ქმნიან H-ის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა სასრულ Δ^* კლასს. მარტივი დასანახია, რომ $\Delta \cup \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_p \cup \Delta^*$ გვაძლევს საძიებელ Ω კლასს. თეორემა დამტკიცებულია. □

ვთქვათ, $X_1, \dots, X_n$ არაცარიელი სიმრავლეებია. $\mathrm{H}_1 \subset 2^{X_1}, \dots, \mathrm{H}_n \subset 2^{X_n}$ არაცარიელი კლასების **დეკარტული ნამრავლი** ეწოდება $X_1 \times \dots \times X_n$-ის ქვესიმრავლეთა შემდეგ კლასს

$$\{A_1 \times \dots \times A_n : A_1 \in \mathrm{H}_1, \dots, A_n \in \mathrm{H}_n\}$$

და აღინიშნება $\mathrm{H}_1 \times \dots \times \mathrm{H}_n$ ჩანაწერით. როცა $\mathrm{H}_1 = \dots = \mathrm{H}_n = \mathrm{H}$, მაშინ $\mathrm{H}_1 \times \dots \times \mathrm{H}_n$ ნამრავლს ეწოდება H კლასის n**-ური ხარისხი** და აღინიშნება H^n ჩანაწერით.

თეორემა 3.2.3. თუ $\mathrm{H}_1 \subset 2^{X_1}, \dots, \mathrm{H}_n \subset 2^{X_n}$ წარმოადგენენ ნახევარრგოლებს, მაშინ მათი $\mathrm{H}_1 \times \dots \times \mathrm{H}_n$ ნამრავლი ნახევარრგოლია.

დამტკიცება. თავდაპირველად განვიხილოთ $n = 2$ შემთხვევა. განვიხილოთ $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$ კლასის ნებისმიერი ორი $A = A_1 \times A_2$ და $B = B_1 \times B_2$ წარმომადგენელი. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2); \tag{1}$$

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = [(A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2)] \cup$$
$$\cup \, [(A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \cap B_2)] \, \cup \, [(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)]. \tag{2}$$

თუ გავითვალიწინებთ, რომ H_1 და H_2 ნახევარრგოლებია, (1)-დან მივიღებთ $A \cap B \in \mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$ თანაფარდობას.

განვიხილოთ $A_1 \setminus B_1$ სიმრავლის H_1-დაშლა - $\{C_1, \ldots, C_p\}$, და $A_2 \setminus B_2$ სიმრავლის H_2-დაშლა - $\{D_1, \ldots, D_q\}$. მაშინ (2) ტოლობის გათვალისწინებით დავწერთ,

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) =$$
$$= \left[\bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q} (C_i \times D_j)\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{p} (C_i \times (A_2 \cap B_2))\right] \cup \left[\bigcup_{j=1}^{q} ((A_1 \cap B_1) \times D_j)\right].$$

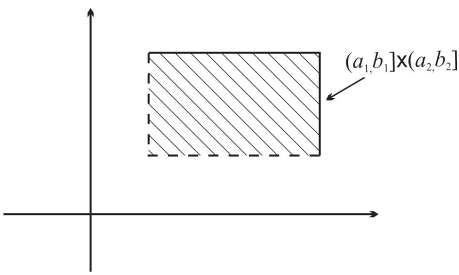
მიღებულ წარმოდგენაში მონაწილე სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და ისინი ეკუთვნიან $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$ კლასს. შედეგად, $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$ კლასი ნახევარრგოლია.

უკვე განხილული $n = 2$ შემთხვევა, ინდუქციური მსჯელობის გამოყენებით, საშუალებას იძლევა დებულება დავადგინოთ ნებისმიერი $n \geq 2$-სთვის. საამისოდ საკმარისია ინდუქციის ბიჯის განხორციელებისას $\mathrm{H}_1 \times \cdots \times \mathrm{H}_{n-1} \times \mathrm{H}_n$ და $(\mathrm{H}_1 \times \cdots \times \mathrm{H}_{n-1}) \times \mathrm{H}_n$ კლასების გაიგივება, რაც, თავის მხრივ მიიღწევა $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ და $((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$ ელემენტების გაიგივებით. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

განვიხილოთ $\mathcal{I}^n$ კლასი, რომელიც, როგორც ადვილი დასანახია, შედგება ცარიელი სიმრავლისა და ყველა შესაძლო მარცხნიდან ღია n-განზომილებიანი მონაკვეთისაგან (ნახ. 3.2), ე.ი.

$$\mathcal{I}^n = \{\emptyset\} \cup \left\{ \mathop{\times}_{k=1}^{n} (a_k, b_k] : a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n \right\}.$$

$\mathcal{I}$ ნახევარრგოლია, რის გამოც თეორემა 3.2.3-ის გათვალისწინებით მიიღება შემდეგი დებულება.



ნახ. 3.2.

შედეგი 3.2.1. ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის, $\mathcal{I}^n$ კლასი არის ნახევარრგოლი.

ამოცანები

1. არის თუ არა რგოლების ნამრავლი კვლავ რგოლი?

§ 3. წარმოქმნილი კლასები

ლემა 3.3.1. რგოლების ნებისმიერი ოჯახის თანაკვეთა რგოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს რგოლების $(\mathrm{H}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ოჯახი. დავუშვათ, $A, B \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{H}_\gamma$. მაშინ $A, B \in \mathrm{H}_\gamma$ ყოველი $\gamma \in \Gamma$-სთვის. შედეგად, $A \cup B, A \setminus B \in \mathrm{H}_\gamma$ ყოველი $\gamma \in \Gamma$-სთვის, ანუ $A \cup B, A \setminus B \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{H}_\gamma$. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 3.3.1. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ლემა 3.3.1-ის ანალოგიური დებულებები სამართლიანია ალგებრის, σ-რგოლის, σ-ალგებრის და მონოტონური კლასის შემთხვევებში და არაა სამართლიანი ნახევარრგოლის შემთხვევაში.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $\mathrm{H} \subset 2^X$ კლასისათვის არსებობს ერთი რგოლი მაინც, რომელიც მას შეიცავს, სახელდობრ, ასეთია 2^X კლასი. ამ შენიშვნისა და ლემა 3.3.1-ის გათვალისწინებით შესაძლებელია შემდეგი განსაზღვრების შემოღება: $\mathrm{H} \subset 2^X$ **კლასით წარმოქმნილი რგოლი** ეწოდება H-ის შემცველი ყველა შესაძლო $R \subset 2^X$ რგოლის თანაკვეთას და იგი აღინიშნება სიმბოლოთი $r(\mathrm{H})$. ცხადია, რომ $r(\mathrm{H})$ წარმოადგენს მინიმალურს H-ის შემცველ რგოლთა შორის.

$r(\mathrm{H})$ კლასის მსგავსად განისაზღვრებიან H **კლასით წარმოქმნილი ალგებრა, σ-რგოლი, σ-ალგებრა და მონოტონური კლასი**. ისინი, შესაბამისად, აღინიშნებიან $a(\mathrm{H})$, $\sigma r(\mathrm{H})$, $\sigma a(\mathrm{H})$ და $m(\mathrm{H})$ ჩანაწერებით.

საზოგადოდ, სიმრავლეთა მოცემული H კლასით წარმოქმნილი ამა თუ იმ ტიპის კლასის აღწერა საკმაოდ რთული საკითხია, თუმცა, ნახევარრგოლით წარმოქმნილი რგოლის შემთხვევაში, სამართლიანია შემდეგი მარტივი დახასიათება.

თეორემა 3.3.1. H ნახევარრგოლით წარმოქმნილი რგოლი წარმოადგენს H-ში შემავალ სიმრავლეთა ყველა შესაძლო სასრული გაერთიანებისაგან წარმოქმნილ კლასს, ე.ი.

$$r(\mathrm{H}) = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} A_k : n \in \mathbb{N},\ A_1, \dots, A_n \in \mathrm{H} \right\}.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$\mathrm{M} = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} A_k : n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{H} \right\}.$$

თუ შევნიშნავთ, რომ რგოლი ჩაკეტილია სასრული გაერთიანების ოპერაციის მიმართ, გავითვალისწინებთ, რომ $r(\mathrm{H})$ რგოლია და იგი შეიცავს H-ს, დავასკვნით $\mathrm{M} \subset r(\mathrm{H})$ ჩართვას. ახლა ვაჩვენოთ, რომ M რგოლია, რითაც დავადგენთ შებრუნებულ ჩართვას და შედეგად, თეორემას. დავუშვათ, $A, B \in \mathrm{M}$, ე.ი. ისინი წარმოდგებიან შემდეგი სახით:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i,$$

სადაც $A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{H}$ და $B_1, \ldots, B_m \in \mathrm{H}$. $A \cup B \in \mathrm{M}$ მიკუთვნება ცხადია. ვაჩვენოთ, რომ $A \setminus B \in \mathrm{M}$. გვაქვს,

$$A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} \left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B_i \right).$$

შემდეგ, თუ გამოვიყენებთ თეორემა 3.2.1-ს, ყოველი k-სთვის ვიპოვით წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ $C_{k,1}, \ldots, C_{k,q_k} \in \mathrm{H}$ სიმრავლეებს, ისეთებს, რომ

$$A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{q=1}^{q_k} C_{k,q}.$$

აქედან გამომდინარე, $C_{k,q}$ $(k \in \overline{1,n}; q \in \overline{1,q_k})$ სიმრავლეები ქმნიან $A \setminus B$ სიმრავლის წარმოდგენას H კლასის სიმრავლეთა სასრული გაერთიანების სახით, ე.ი. $A \setminus B \in \mathrm{M}$. ამრიგად, M რგოლია. თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 3.3.2. თეორემა 3.2.2-ის ძალით ნახევარრგოლის სიმრავლეთა ყოველი სასრული გაერთიანება წარმოდგება ამავე ნახევარრგოლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა სასრული გაერთიანების სახით. ამის გათვალისწინებით ვრწმუნდებით, რომ სამართლიანია თეორემა 3.3.1-ის შემდეგი ვარიანტი: H ნახევარრგოლით წარმოქმნილი რგოლი წარმოადგენს H-ში შემავალ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა ყველა შესაძლო სასრული გაერთიანებისაგან წარმოქმნილ კლასს.

ქვემოთ დამტკიცებული ორი თეორემა დაგვჭირდება მეხუთე თავში, ზომის გაგრძელების ერთადერთობის საკითხის განხილვისას.

თეორემა 3.3.2. რგოლით წარმოქმნილი σ-რგოლი და მონოტონური კლასი ერთმანეთს ემთხვევიან, ე.ი. თუ H რგოლია, მაშინ $\sigma r(\mathrm{H}) = m(\mathrm{H})$.

დამტკიცება. თავიდან შევნიშნოთ, რომ რადგან $\sigma r(\mathrm{H})$ წარმოადგენს მონოტონურ კლასს, ამიტომ $\sigma r(\mathrm{H}) \supset m(\mathrm{H})$.

დავამტკიცოთ, რომ $m(\mathrm{H})$ რგოლია. მაშინ თეორემა 3.1.1-ის ძალით $m(\mathrm{H})$ იქნება σ-რგოლიც. აქედან კი, დავასკვნით, რომ $m(\mathrm{H}) \supset \sigma r(\mathrm{H})$, რაც შედეგად მოგვცემს $m(\mathrm{H}) = \sigma r(\mathrm{H})$ ტოლობას.

A და B სიმრავლეებს $m(\mathrm{H})$ კლასიდან ვუწოდოთ თანხმობაში მყოფი, თუ მათთან ერთად $A \cup B$, $A \setminus B$ და $B \setminus A$ სიმრავლეებიც ეკუთვნიან $m(\mathrm{H})$ კლასს. ჩვენი მიზანია, დავადგინოთ, რომ $m(\mathrm{H})$ კლასის ნებისმიერი ორი სიმრავლე არის თანხმობაში.

$A \in m(\mathrm{H})$-სთვის მასთან თანხმობაში მყოფი ყველა $B \in m(\mathrm{H})$ სიმრავლის კლასი აღვნიშნოთ Ω_A-თი. დავამტკიცოთ შემდეგი წინადადება:

(I) ყოველი $A \in m(\mathrm{H})$-სთვის Ω_A წარმოადგენს $m(\mathrm{H})$-ის მონოტონურ ქვეკლასს.

ვთქვათ, $B_n \in \Omega_A$ ზრდადი მიმდევრობაა. ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის გვექნება: $B_n \cup A, B_n \setminus A, A \setminus B_n \in m(\mathrm{H})$. შევნიშნოთ, რომ $B_n \cup A$ და $B_n \setminus A$ მიმდევრობები ზრდადია, ხოლო $A \setminus B_n$ - კლებადი. საიდანაც, $m(\mathrm{H})$ კლასის მონოტონურობის გათვალისწინებით დავწერთ:

1) $A \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A \cup B_n) \in m(\mathrm{H})$;

2) $\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \setminus A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A) \in m(\mathrm{H})$;

3) $A \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (A \setminus B_n) \in m(\mathrm{H})$.

ამრიგად, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Omega_A$. ანალოგიური მსჯელობით დავადგენთ, რომ კლებადი $B_n \in m(\mathrm{H})$ მიმდევრობის შემთხვევაში ადგილი აქვს $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \Omega_A$ მიკუთვნებას. აქედან გამომდინარე, Ω_A მონოტონური კლასია.

სამართლიანია, აგრეთვე, შემდეგი წინადადება:

(II) თუ $A \in m(\mathrm{H})$ სიმრავლისათვის Ω_A კლასი აღმოჩნდება H-ის შემცველი, მაშინ იგი დაემთხვევა $m(\mathrm{H})$ კლასს.

ეს წინადადება გამომდინარეობს (I) წინადადებიდან, $m(\mathrm{H})$ კლასის განსაზღვრის გათვალისწინებით.

ცხადია, H რგოლის ნებისმიერი ორი სიმრავლე თანხმობაშია, რის გამოც ყოველი $A \in \mathrm{H}$ სიმრავლისათვის Ω_A კლასი შეიცავს H-ს, და შედეგად, (II) წინადადების ძალით, $\Omega_A = m(\mathrm{H})$. ამრიგად, ნებისმიერი სიმრავლე H კლასიდან თანხმობაშია ნებისმიერ სიმრავლესთან $m(\mathrm{H})$ კლასიდან. ეს კი ნიშნავს, რომ ყოველი $B \in m(\mathrm{H})$-სთვის Ω_B მოიცავს H-ს. შედეგად, კვლავ (II) წინადადების ძალით ვასკვნით $\Omega_B = m(\mathrm{H})$ ტოლობას. რაც, თავის მხრივ ნიშნავს, რომ $m(\mathrm{H})$ კლასის ნებისმიერი ორი სიმრავლე თანხმობაშია. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შემდეგი დებულება გამომდინარეობს თეორემა 3.3.2-დან.

შედეგი 3.3.1. ალგებრით წარმოქმნილი მონოტონური კლასი და σ-ალგებრა ერთმანეთს ემთხვევიან.

სიმრავლეთა H კლასისა და E სიმრავლისათვის $\mathrm{H} \cap E$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ H **კლასის კვალი** E **სიმრავლეში**, ე.ი. შემდეგი კლასი

$$\mathrm{H} \cap E = \{A \cap E : A \in \mathrm{H}\}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ, თუ H კლასი σ-ალგებრაა, მაშინ σ-ალგებრაა $\mathrm{H} \cap E$ კლასიც. ანალოგიური დებულებები სამართლიანია სხვა ტიპის კლასების (ნახევარრგოლი, რგოლი და ა.შ.) შემთხვევაშიც.

თეორემა 3.3.3. ნებისმიერი H კლასისა და E სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა: $\sigma a(\mathrm{H}) \cap E = \sigma a(\mathrm{H} \cap E)$.

დამტკიცება. ცხადია, $\mathrm{H} \cap E \subset \sigma a(\mathrm{H}) \cap E$. საიდანაც, იმის საფუძველზე, რომ $\sigma a(\mathrm{H}) \cap E$ კლასი σ-ალგებრაა, ვწერთ,

$$\sigma a(\mathrm{H} \cap E) \subset \sigma a(\mathrm{H}) \cap E. \tag{1}$$

დავამტკიცოთ (1)-ის შებრუნებული ჩართვა. საამისოდ დაგვჭირდება $\sigma a(\mathrm{H} \cap E)$ კლასის შემდეგი Ω გაფართოების განხილვა: Ω იყოს კლასი, რომელიც შედგება $A \cup B$ სახის სიმრავლეებისაგან, სადაც $A \in \sigma a(\mathrm{H} \cap E)$ და $B \in \sigma a(\mathrm{H} \cap \overline{E})$. აქ $\overline{E}$ აღნიშნავს E სიმრავლის დამატებას, ე.ი. $X \setminus E$ სიმრავლეს.

Ω კლასს აქვს თვისებები: 1) Ω არის σ-ალგებრა და 2) $\mathrm{H} \subset \Omega$. პირველი თვისება ადვილად მოწმდება იმის საფუძველზე, რომ $\sigma a(\mathrm{H} \cap E)$ და $\sigma a(\mathrm{H} \cap \overline{E})$ კლასები წარმოადგენენ σ-ალგებრებს. მეორე თვისების დასამტკიცებლად კი საკმარისია გავითვალისწინოთ $A = (A \cap E) \cup (A \cap \overline{E})$ წარმოდგენა ნებისმიერი $A \in \mathrm{H}$ სიმრავლისათვის.

Ω კლასის აღნიშნული თვისებებიდან ვღებულობთ $\sigma a(\mathrm{H}) \subset \Omega$ ჩართვას. რის შემდეგაც, თუ გავითვალისწინებთ შემდეგ ცხად ტოლობას: $\Omega \cap E = \sigma a(\mathrm{H} \cap E)$, მივიღებთ, რომ

$$\sigma a(\mathrm{H}) \cap E \subset \Omega \cap E = \sigma a(\mathrm{H} \cap E).$$

ამრიგად,

$$\sigma a(\mathrm{H}) \cap E \subset \sigma a(\mathrm{H} \cap E). \tag{2}$$

(1) და (2) ჩართვების ძალით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. მიუთითეთ მაგალითი ორი ნახევარრგოლისა, რომელთა თანაკვეთა არ წარმოადგენს ნახევარრგოლს.
2. აღწერეთ სიმრავლეთა ნებისმიერი არაცარიელი კლასით წარმოქმნილი რგოლის სტრუქტურა.

§ 4. ბორელის σ-ალგებრა

(X,d) მეტრიკული სივრცის ყველა კომპაქტური ქვესიმრავლის კლასისაგან წარმოქმნილ σ-ალგებრას (X,d) **სივრცის ბორელის σ-ალგებრა** ეწოდება და იგი აღინიშნება $\mathcal{B}(X,d)$ სიმბოლოთი. $\mathcal{B}(X,d)$-ში შემავალ სიმრავლეებს (X,d) **სივრცის ბორელის სიმრავლეებს** უწოდებენ.

განვიხილოთ სიმრავლეთა შემდეგი ოთხი კლასი : $\mathrm{H}_1 = \{E \subset \mathbb{R}^n : E$ ჩაკეტილია$\}$, $\mathrm{H}_2 = \{E \subset \mathbb{R}^n : E$ ღიაა$\}$, $\mathrm{H}_3 = \mathcal{I}^n$ და $\mathrm{H}_4 = \left\{ \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} (-\infty, b_i] : b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$. ამ კლასებისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 3.4.1. თითოეული $\sigma a(\mathrm{H}_1)$, $\sigma a(\mathrm{H}_2)$, $\sigma a(\mathrm{H}_3)$ და $\sigma a(\mathrm{H}_4)$ კლასებს შორის ტოლია $\mathbb{R}^n$ სივრცის ბორელის σ-ალგებრის.

წარმოქმნილი σ-ალგებრის განსაზღვრების გათვალისწინებით მარტივად მოწმდება შემდეგი ლემის სამართლიანობა.

ლემა 3.4.1. ვთქვათ, სიმრავლეთა Ω_1 და Ω_2 კლასები ისეთია, რომ $\Omega_1 \subset \sigma a(\Omega_2)$ და $\Omega_2 \subset \sigma a(\Omega_1)$. მაშინ $\sigma a(\Omega_1) = \sigma a(\Omega_2)$.

თეორემა 3.4.1-ის დამტკიცება. აღვნიშნოთ $\mathrm{H} = \{E \subset \mathbb{R}^n : E$ კომპაქტურია$\}$. საჩვენებელი გვაქვს, რომ $\sigma a(\mathrm{H}) = \sigma a(\mathrm{H}_i)$ ყოველი $i \in \overline{1,4}$-სთვის.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ კომპაქტური სიმრავლე ჩაკეტილია, მივიღებთ $\mathrm{H} \subset \sigma a(\mathrm{H}_1)$ ჩართვას.

$\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე წარმოდგება კომპაქტურ სიმრავლეთა მიმდევრობის გაერთიანების სახით. ასეთი წარმოდგენისათვის საკმარისია განვიხილოთ მოცემული სიმრავლის თანაკვეთები უსასრულობისაკენ კრებადი რადიუსების მქონე კონცენტრულ ჩაკეტილ ბირთვებთან. ამ ფაქტის საფუძველზე ვასკვნით $\mathrm{H}_1 \subset \sigma a(\mathrm{H})$ ჩართვას. შედეგად, ლემა 3.4.1-ის ძალით $\sigma a(\mathrm{H}) = \sigma a(\mathrm{H}_1)$.

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები ურთიერთდამატებითი არიან, ლემა 3.4.1-ის საფუძველზე მივიღებთ ტოლობას: $\sigma a(\mathrm{H}_1) = \sigma a(\mathrm{H}_2)$.

ყოველი $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \in \mathrm{H}_3$ მონაკვეთი შემდეგნაირად წარმოდგება ღია სიმრავლეთა მიმდევრობის თანაკვეთის სახით:

$$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i + 1/k).$$

შედეგად, $\mathrm{H}_3 \subset \sigma a(\mathrm{H}_2)$. მეორე მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველი არაცარიელი ღია სიმრავლე წარმოდგება $\mathcal{I}^n$ კლასის მონაკვეთების თვლადი გაერთიანების სახით (იხ. თეორემა 2.2.2), მივიღებთ, რომ $\mathrm{H}_2 \subset \sigma a(\mathrm{H}_3)$. შედეგად, ლემა 3.4.1-ის ძალით $\sigma a(\mathrm{H}_2) = \sigma a(\mathrm{H}_3)$.

ყოველი $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}(-\infty, b_i] \in \mathrm{H}_4$ სიმრავლისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}(-\infty, b_i] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}(b_i - k, b_i].$$

შედეგად, $\mathrm{H}_4 \subset \sigma a(\mathrm{H}_3)$. მეორე მხრივ, ნებისმიერი $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \in \mathrm{H}_3$ მონაკვეთისათვის გვაქვს,

$$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i] = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}(-\infty, b_i] \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \Delta_{i,j}, \tag{1}$$

სადაც $\Delta_{i,j} = (-\infty, b_i]$, თუ $i \neq j$ და $\Delta_{i,i} = (-\infty, a_i]$. (1)-დან ვასკვნით, რომ $\mathrm{H}_3 \subset \sigma a(\mathrm{H}_4)$. საიდანაც, ლემა 3.4.1-ის თანახმად მიიღება $\sigma a(\mathrm{H}_3) = \sigma a(\mathrm{H}_4)$ ტოლობა. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 3.4.1. თეორემა 3.4.1-ის დამტკიცებისას გამოყენებული სქემით დგინდება, რომ

$$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}(-\infty, b_i), \ \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}[a_i, \infty), \ \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}(a_i, \infty)$$

სახის n-განზომილებიანი სხივების შემთხვევებში წარმოქმნილი σ-ალგებრები აგრეთვე $\mathbb{R}^n$ სივრცის ბორელის σ-ალგებრის ტოლია.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ (X, d) მეტრიკული სივრცის ბორელის σ-ალგებრა შეიცავს ნებისმიერ არაუმეტეს თვლად სიმრავლეს.
2. ვთქვათ, H წარმოადგენს (X, d) მეტრიკული სივრცის ყველა ღია ბირთვის კლასს. ყოველთვის ემთხვევა თუ არა H კლასით წარმოქმნილი σ-ალგებრა (X, d) სივრცის ბორელის σ-ალგებრას?
3. ვთქვათ, (X, d) სეპარაბელური მეტრიკული სივრცეა. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს მის ქვესიმრავლეთა არაუმეტეს თვლადი H კლასი, რომლით წარმოქმნილი σ-ალგებრა ემთხვევა (X, d) სივრცის ბორელის σ-ალგებრას.

თ ა ვ ი 4

ზომა

ზომის ცნება განაზოგადებს ისეთი რეალური ფიზიკური ბუნების მქონე სიდიდეებს, როგორიცაა სიგრძე, ფართობი, მოცულობა და მასა. ამ თავში განიხილება ზომის საბაზისო თვისებები და მაგალითები.

§ 1. ზომა და კვაზიზომა

1. სიმრავლის ფუნქციის ზოგიერთი ტიპი. ვთქვათ, X - რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა. ზომის თეორიის შესწავლის ძირითად ობიექტებს წარმოადგენენ გარკვეული ტიპის $\mu : \mathrm{H} \to (-\infty, \infty]$ სიმრავლის ფუნქციები, სადაც H არის X-ის ქვესიმრავლეთა რაიმე არაცარიელი კლასი.

შევთანხმდეთ, რომ $\infty + \infty = \infty$, $\infty + \infty + \cdots = \infty$ და $a + \infty = \infty + a = \infty$ $(a \in \mathbb{R})$.

$\mu : \mathrm{H} \to (-\infty, +\infty]$ სიმრავლის ფუნქციას ეწოდება:

- **ნახევრადადიციური**, თუ

$$\left(A \in \mathrm{H},\ n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{H},\ A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k);$$

- **ადიციური**, თუ

$$\left(A \in \mathrm{H},\ n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{H},\ A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j),\ A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k);$$

- **თვლადად ნახევრადადიციური** (ან კიდევ, σ-**ნახევრადადიციური**), თუ

$$\left(A \in \mathrm{H},\ A_1, A_2, \cdots \in \mathrm{H},\ A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k);$$

- **თვლადად ადიციური** (ან კიდევ, σ**-ადიციური**), თუ

$$\left(A \in \mathrm{H},\ A_1, A_2, \dots \in \mathrm{H},\ A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j),\ A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k);$$

- **ზრდადი**, თუ

$$(A, B \in \mathrm{H},\ \ A \subset B) \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B);$$

- **სასრული**, თუ $\mu(A) < \infty$ ყოველი $A \in \mathrm{H}$-სთვის;
- **შემოსაზღვრული**, თუ $\sup\{|\mu(A)| : A \in \mathrm{H}\} < \infty$;
- σ-**შემოსაზღვრული**, თუ X შეიძლება დაიშალოს ისეთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ $X_n \in \mathrm{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეებად, რომელთათვისაც $\sup\{|\mu(A)| : A \in \mathrm{H}, A \subset X_n\} < \infty$ ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის.

შენიშვნა 4.1.1. ვთქვათ, μ ნახევარრგოლზე განსაზღვრული ნახევრადადიციური ფუნქციაა და დამატებით ცნობილია, რომ μ ზრდადია. მაშინ

$$\left(A \in \mathrm{H},\ n \in \mathbb{N},\ A_1, \dots, A_n \in \mathrm{H},\ A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

მართლაც, ზრდადობისა და ნახევრადადიციურობის თვისებების ძალით გვექნება,

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \cap A) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

ანალოგიურად, თუ μ ნახევარრგოლზე განსაზღვრული თვლადად ნახევრადადიციური ფუნქციაა და დამატებით ცნობილია, რომ μ ზრდადია, მაშინ

$$\left(A \in \mathrm{H},\ A_1, A_2, \dots \in \mathrm{H},\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

2. ზომის და კვაზიზომის ცნებები. ნახევარრგოლზე განსაზღვრულ μ ფუნქციას ეწოდება **ზომა**, თუ მას აქვს შემდეგი თვისებები:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- μ არაუარყოფითია;
- μ თვლადად ადიციურია.

შენიშვნა 4.1.2. $\mu(\varnothing) = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით, ზომის თვლადად ადიციურობიდან მარტივად გამომდინარეობს მისი ადიციურობა. მართლაც, აღნიშნულის დასადგენად $A_1, \dots, A_n$ სიმრავლეები, რომლებიც ფიგურირებენ

ადიციურობის განსაზღვრებაში, ცარიელი სიმრავლის მეშვეობით უნდა შევავსოთ $A_1, \ldots, A_n, \emptyset, \emptyset, \ldots$ მიმდევრობამდე და შემდეგ გამოვიყენოთ ზომის მესამე და პირველი თვისებები.

მოვიყვანოთ ზომის რამდენიმე მარტივი მაგალითი:

1) X რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა, $\mathrm{H} = 2^X$ და $\mu(A) = 0$ $(A \in \mathrm{H})$;

2) X რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა, $\mathrm{H} = 2^X$ და ყოველი $A \in \mathrm{H}$ სიმრავლისათვის $\mu(A) = \mathrm{card}A$, თუ A სასრულია და $\mu(A) = \infty$, თუ A უსასრულოა. ასეთ ზომას დამთვლელ ზომას უწოდებენ;

3) $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathrm{H} = 2^X$, $p_1, \ldots, p_n \geq 0$ და

$$\mu(A) = \sum_{\{k : x_k \in A\}} p_k \quad (A \in \mathrm{H}).$$

ცოტა მოგვიანებით განხილული იქნება ზომის უმნიშვნელოვანესი მაგალითები: მონაკვეთის სიგრძე, მართკუთხედის ფართობი და მრავალგანზომილებიანი მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა.

ნახევარრგოლზე განსაზღვრულ μ ფუნქციას ეწოდება **კვაზიზომა**, თუ მას აქვს შემდეგი თვისებები:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- μ არაუარყოფითია;
- μ ადიციურია.

შენიშვნა 4.1.3. ზომის ადიციურობიდან გამომდინარე, ყოველი ზომა, იმავდროულად, არის კვაზიზომაც. შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ შებრუნებული დებულება, საზოგადოდ, სამართლიანი არაა. ვთქვათ, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\varphi(x) = 0$, თუ $x \leq 0$ და $\varphi(x) = 1$, თუ $x > 0$; ხოლო μ არის $\mathcal{I}$ ნახევარრგოლზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია: $\mu(\emptyset) = 0$ და $\mu((a, b]) = \varphi(b) - \varphi(a)$ $((a, b] \in \mathcal{I})$. მარტივი შესამოწმებელია, რომ μ კვაზიზომაა. ამასთან μ არაა ზომა, ვინაიდან $(1/2^n, 1/2^{n-1}]$ შუალედების მიმდევრობისათვის დარღვეულია თვლადად ადიციურობის პირობა. კერძოდ, გვაქვს, რომ

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (1/2^n, 1/2^{n-1}]\right) = \mu((0, 1]) = 1.$$

მეორე მხრივ კი,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu((1/2^n, 1/2^{n-1}]) = 0.$$

ამოცანები

1. ვთქვათ, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, $\mathrm{H} = 2^X$, $p_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ და

$$\mu(A) = \sum_{\{n\colon x_n \in A\}} p_n \qquad (A \in \mathrm{H}).$$

დაამტკიცეთ, რომ μ არის ზომა.

§ 2. ზომისა და კვაზიზომის გაგრძელება ნახევარრგოლიდან რგოლზე

არსებობს მარტივი კონსტრუქცია, რომელიც საშუალებას იძლევა, ნახევარრგოლზე მოცემული ზომა გავაგრძელოთ ამ ნახევარრგოლის შემცველ მინიმალურ რგოლზე, კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.2.1. ვთქვათ, μ არის H ნახევარრგოლზე განსაზღვრული ზომა. მაშინ არსებობს H-ით წარმოქმნილ $r(\mathrm{H})$ რგოლზე განსაზღვრული ერთადერთი ზომა, რომელიც წარმოადგენს μ-ს გაგრძელებას.

დამტკიცება. ნაბიჯი I: გაგრძელების განსაზღვრა. ვთქვათ, $A \in r(\mathrm{H})$. თეორემა 3.3.1-ის ძალით არსებობს A სიმრავლის H-დაშლა - $\{C_1, \dots, C_n\}$. $\nu(A)$ განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i).$$

ν ფუნქციის განსაზღვრა კორექტულია. მართლაც, განვიხილოთ A-ს რაიმე სხვა H-დაშლა - $\{D_1, \dots, D_n\}$. შევნიშნოთ, რომ ყოველი $i \in \overline{1,n}$-სთვის $\{C_i \cap D_1, \dots, C_i \cap D_m\}$ კლასი არის C_i სიმრავლის H-დაშლა, ხოლო ყოველი $j \in \overline{1,m}$-სთვის $\{C_1 \cap D_j, \dots, C_n \cap D_j\}$ კლასი არის D_j სიმრავლის H-დაშლა. აღნიშნულის გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(C_i \cap D_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i \cap D_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(D_j),$$

რაც ნიშნავს ν-ს განსაზღვრის კორექტულობას.

ცხადია, რომ ν ფუნქცია არაუარყოფითია და წარმოადგენს μ-ს გაგრძელებას $r(\mathrm{H})$ რგოლზე.

ნაბიჯი II: ν ფუნქციის თვლადად ადიციურობა. ვთქვათ, $A, A_1, A_2, \dots \in r(\mathrm{H})$, $A_1, A_2, \dots$ სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. განვიხილოთ A სიმრავლის H-დაშლა - $\{C_1, \dots, C_n\}$, ხოლო ყოველი $i \in \mathbb{N}$-სთვის განვიხილოთ A_i სიმრავლის H-დაშლა - $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,n_i}\}$. შევნიშნოთ, რომ:

1) ყოველი $j \in \overline{1,n}$-სთვის, $C_{i,p} \cap C_j$ $(i \in \mathbb{N}, p \in \overline{1,n_i})$ სიმრავლეები ქმნიან C_j სიმრავლის თვლად H-დაშლას;

2) ყოველი $i \in \mathbb{N}$ და $p \in \overline{1,n_i}$ ინდექსებისათვის, $C_{i,p} \cap C_j$ $(j \in \overline{1,n})$ სიმრავლეები ქმნიან $C_{i,p}$ სიმრავლის H-დაშლას.

ამ ორი შენიშვნის ძალით და μ ზომის თვლადად ადიციურობის გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(C_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n_i} \mu(C_{i,p} \cap C_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n} \mu(C_{i,p} \cap C_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n_i} \mu(C_{i,p}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).$$

ამით ν ფუნქციის თვლადად ადიციურობა დადგენილია. ამრიგად, ν ფუნქციას აქვს ზომის თვისებები.

ნაბიჯი III: გაგრძელების ერთადერთობა. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ν არის ერთადერთი შესაძლო ზომა, რომელიც წარმოადგენს μ-ს გაგრძელებას $r(\mathrm{H})$ რგოლზე. ვთქვათ, λ არის $r(\mathrm{H})$-ზე განსაზღვრული ზომა, რომელიც წარმოადგენს μ-ს გაგრძელებას. საჭიროა ვაჩვენოთ λ და ν ფუნქციების ტოლობა. ნებისმიერი $A \in r(\mathrm{H})$-სთვის განვიხილოთ მისი რაიმე H-დაშლა - $\{C_1, \ldots, C_n\}$. გვექნება, რომ

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(C_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) = \nu(A).$$

რითაც λ და ν ფუნქციების იგივურობა ნაჩვენებია.

ზემოთ დადგენილი თვისებებიდან გამომდინარე, ν არის ერთადერთი ზომა, რომელიც წარმოადგენს μ-ს გაგრძელებას $r(\mathrm{H})$ რგოლზე. თეორემა დამტკიცებულია. □

სამართლიანია თეორემა 4.2.1-ის შემდეგი ანალოგი კვაზიზომის გაგრძელების შესახებ.

თეორემა 4.2.2. ვთქვათ, μ არის H ნახევარრგოლზე განსაზღვრული კვაზიზომა. მაშინ არსებობს H-ით წარმოქმნილ $r(\mathrm{H})$ რგოლზე განსაზღვრული ერთადერთი კვაზიზომა, რომელიც წარმოადგენს μ-ს გაგრძელებას.

თეორემა 4.2.2-ის დამტკიცება ხდება თეორემა 4.2.1-ის დამტკიცების ანალოგიურად.

§ 3. ზომისა და კვაზიზომის ზოგიერთი ელემენტარული თვისება

თეორემა 4.3.1. ვთქვათ, μ არის H ნახევარრგოლზე განსაზღვრული კვაზიზომა. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- თუ $A, A_1, A_2, \dots \in$ H, $A_1, A_2, \dots \subset A$ და $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, მაშინ $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A)$. შედეგად, μ ზრდადია;
- თუ $A, B, B \setminus A \in$ H, $A \subset B$ და $\mu(A) < \infty$, მაშინ $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;
- თუ $A, B, A \cup B \in$ H, და $\mu(A)$, $\mu(B)$ რიცხვებს შორის ერთ-ერთი მაინც სასრულია, მაშინ $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$;
- μ ნახევრადადიციურია.

დამტკიცება. თეორემა 4.2.2-ის გათვალისწინებით, ადვილი დასანახია, რომ შეიძლება შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევის განხილვით, როცა H რგოლია.

პირველი და მეორე წინადადებები: კვაზიზომის არაუარყოფითობისა და ადიციურობის გათვალისწინებით ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის გვექნება:

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) + \mu\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n).$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის პირველი და მეორე წინადადებები.

მესამე წინადადება: გვაქვს, რომ $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, საიდანაც, კვაზიზომის ადიციურობის ძალით: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. კვაზიზომის ზრდადობის გამო გვექნება: $\mu(A \cap B) \leq \min(\mu(A), \mu(B)) < \infty$. აქედან, თავის მხრივ, მეორე წინადადების საფუძველზე დავწერთ,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

მეოთხე წინადადება: ვთქვათ, $A \in$ H$, n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in$ H და $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. აღვნიშნოთ

$$B_1 = A_1, \;\; B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \;\; (2 \leq k \leq n).$$

ცხადია, $B_1, \dots, B_n$ სიმრავლეები ეკუთვნიან H-ს, ისინი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. აქედან კვაზიზომის ზრდადობისა და ადიციურობის გათვალისწინებით ვწერთ,

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 4.3.2. ყოველი ზომა თვლადად ნახევრადადიციურია.

დამტკიცება. თეორემა 4.2.1-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ H რგოლზე განსაზღვრული μ ზომის შემთხვევის განხილვით.

ვთქვათ, $A, A_1, A_2, \dots \in$ H და $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. აღვნიშნოთ

$$B_1 = A_1, \ \ B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \ \ (n \geq 2).$$

ცხადია, რომ (B_n) მიმდევრობა წარმოადგენს A სიმრავლის თვლად H-დაშლას. აქედან ზომის თვლადად ადიციურობისა და ზრდადობის ძალით დავწერთ, რომ

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 4.3.3. ვთქვათ, μ არის H ნახევარრგოლზე განსაზღვრული ფუნქცია. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

1) μ ზომაა;

2) μ კვაზიზომაა და თვლადად ნახევრადადიციურია.

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია მიიღება თეორემა 4.3.2-ის გათვალისწინებით, ხოლო შებრუნებული იმპლიკაციის დასადგენად უნდა გავითვალისწინოთ თეორემა 4.3.1-ის პირველი დასკვნა. □

ამოცანები

1. ვთქვათ, μ არის H σ-რგოლზე განსაზღვრული ზომა. დავუშვათ, $A_n \in$ H და $\mu(A_n) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. აჩვენეთ, რომ $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = 0$.
2. ვთქვათ, μ არის H σ-ალგებრაზე განსაზღვრული ზომა და $\mu(X) = 1$. დავუშვათ, $A_n \in$ H და $\mu(A_n) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. აჩვენეთ, რომ $\mu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big) = 1$.
3. ვთქვათ, μ არის H ალგებრაზე განსაზღვრული კვაზიზომა და $\mu(X) = 1$. დავუშვათ, $A_1, \dots, A_n \in$ H და $\mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) > n - 1$. აჩვენეთ, რომ $\mu\big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\big) > 0$.
4. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული კვაზიზომა. განვიხილოთ H-ში შემდეგნაირად განსაზღვრული ბინარული მიმართება: $A, B \in$ H სიმრავლეებისათვის $A \sim B \Leftrightarrow \mu(A \bigtriangleup B) = 0$. დაამტკიცეთ, რომ: a) აღნიშნული მიმართება არის ეკვივალენტობის მიმართება, ე.ი. აქვს რეფლექსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისებები; b) თუ $A \sim B$, მაშინ $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cap B)$; c) ყველა იმ $A \in$ H სიმრავლის კლასი, რომელიც ცარიელი სიმრავლის ეკვივალენტურია, არის რგოლი.
5. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული კვაზიზომა. განვიხილოთ ფუნქცია: $d(A, B) = \mu(A \bigtriangleup B)$ $(A, B \in$ H). აჩვენეთ, რომ: a) d არის „ნახევარმანძილი“, ე.ი. აქვს თვისებები: $d(A, B) \geq 0$, $d(A, B) = d(B, A)$

და $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$; b) თუ $A_1 \sim B_1$ და $A_2 \sim B_2$, მაშინ $d(A_1, B_1) = d(A_2, B_2)$.

§ 4. ზომის უწყვეტობა

ვთქვათ, H სიმრავლეთა რაიმე არაცარიელი კლასია და $\mu : \mathrm{H} \to [0, \infty]$ რაიმე ზრდადი ფუნქციაა. μ ფუნქციას ეწოდება:

- **ქვემოდან უწყვეტი** $A \in \mathrm{H}$ **სიმრავლეზე**, თუ H კლასის სიმრავლეთა ყოველი ზრდადი (A_n) მიმდევრობისათვის, რომლის ზღვარი არის A, სრულდება ტოლობა: $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$;
- **ზემოდან უწყვეტი** $A \in \mathrm{H}$ **სიმრავლეზე**, თუ H კლასის სიმრავლეთა ყოველი კლებადი (A_n) მიმდევრობისათვის, რომლის ზღვარი არის A და რომლის ერთი წევრი მაინც აკმაყოფილებს $\mu(A_n) < \infty$ პირობას, სრულდება ტოლობა: $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$;
- **ქვემოდან უწყვეტი**, თუ ქვემოდან უწყვეტია ყოველ $A \in \mathrm{H}$ სიმრავლეზე;
- **ზემოდან უწყვეტი**, თუ ზემოდან უწყვეტია ყოველ $A \in \mathrm{H}$ სიმრავლეზე.

თეორემა 4.4.1. ყოველი ზომა უწყვეტია ქვემოდან.

დამტკიცება. ვთქვათ, μ - H ნახევარრგოლზე განსაზღვრული ზომაა, $A \in \mathrm{H}$, (A_n) - H-ის სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობაა და $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

თეორემა 4.2.1-ის ძალით საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა H კლასი წარმოადგენს რგოლს.

თუ არსებობს N ისეთი, რომ $\mu(A_N) = \infty$, მაშინ ზომის ზრდადობის ძალით, $\mu(A) \geq \mu(A_N) = \infty$ და $\mu(A_n) \geq \mu(A_N) = \infty$ $(n \geq N)$, საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის დასკვნა.

განსახილავი რჩება შემთხვევა, როცა $\mu(A_n) < \infty$ ყოველი n-სთვის. (A_n) მიმდევრობის ზრდადობის გამო,

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \ldots .$$

$A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus A_2, \ldots$ სიმრავლეების წყვილ-წყვილად თანაუკვეთობისა და ზომის თვლადად ადიციურობის თვისების ძალით,

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_3 \setminus A_2) + \ldots . \tag{1}$$

უკანასკნელი მწკრივის n-ური კერძო ჯამი, თეორემა 4.3.1-ის მეორე დასკვნის ძალით, შემდეგი გამოსახულების ტოლია:

$$\mu(A_1) + [\mu(A_2) - \mu(A_1)] + [\mu(A_3) - \mu(A_2)] + \cdots + [\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})],$$

რომელიც, თავის მხრივ, $\mu(A_n)$-ის ტოლია. ამრიგად, $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 4.4.2. ყოველი ზომა უწყვეტია ზემოდან.

დამტკიცება. ვთქვათ, μ - H ნახევარრგოლზე განსაზღვრული ზომაა, $A \in$ H, (A_n) - H-ის სიმრავლეთა კლებადი მიმდევრობაა, ისეთი, რომ $\mu(A_n) < \infty$ რომელიმე n-სთვის და $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

თეორემა 4.2.1-ის ძალით, საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა H კლასი წარმოადგენს რგოლს.

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\mu(A_1) < \infty$. თეორემა 4.4.1-ის ძალით ვწერთ:

$$\mu(A_1 \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n=2}^{\infty}(A_1 \setminus A_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n).$$

თუ ვისარგებლებთ $\mu(A_1) < \infty$ პირობით და თეორემა 4.3.1-ის მეორე დასკვნით, გვექნება, რომ

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)),$$

რითაც სასურველი ზღვარითი ტოლობა დადგენილია. თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 4.4.1. თეორემა 4.4.2 სამართლიანი არ რჩება, თუ ზემოდან უწყვეტობის განსაზღვრებაში არ მოვითხოვთ მიმდევრობის წევრთა შორის ერთ-ერთისათვის მაინც $\mu(A_n) < \infty$ პირობის შესრულებას. მოვიყვანოთ შესაბამისი მაგალითი. ვთქვათ, μ არის დამთვლელი ზომა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში. განვიხილოთ $A_n = \{n, n+1, \dots\}$ $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეთა მიმდევრობა. ცხადია, (A_n) კლებადი მიმდევრობაა და $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \varnothing$. ერთი მხრივ გვაქვს, რომ $\mu\big(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\big) = \mu(\varnothing) = 0$, ხოლო მეორე მხრივ, A_n სიმრავლეები უსასრულოა, რის გამოც, $\mu(A_n) = \infty$ ყოველი n-სთვის, და შედეგად, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty$.

სასრული ზომა შეიძლება დახასიათდეს კვაზიზომისა და უწყვეტობის ტერმინებში. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 4.4.3. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

1) μ ზომაა;

2) μ კვაზიზომაა და ქვემოდან უწყვეტია;

3) μ კვაზიზომაა და ზემოდან უწყვეტია;

4) μ კვაზიზომაა და ზემოდან უწყვეტია ცარიელ სიმრავლეზე.

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2), 1) $\Rightarrow$ 3) და 1) $\Rightarrow$ 4) იმპლიკაციები გამომდინარეობენ 4.4.1 და 4.4.2 თეორემებიდან, ხოლო 3) $\Rightarrow$ 4) ცხადია. ასე რომ, დებულების დასამტკიცებლად გვჭირდება დავადგინოთ 2) $\Rightarrow$ 1) და 4) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაციები.

ვთქვათ, შესრულებულია 2) პირობა. დავუშვათ $A, A_1, A_2, \dots \in \mathrm{H}$, A_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. აღვნიშნოთ $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ $(n \in \mathbb{N})$. (B_n) არის H რგოლის სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობა და $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = A$, ამიტომ μ-ს ქვემოდან უწყვეტობისა და ადიციურობის ძალით გვექნება,

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

ამით μ-ს თვლადად ადიციურობა დადგენილია, ე.ი. μ ზომაა.

ვთქვათ, შესრულებულია 4) პირობა. დავუშვათ $A, A_1, A_2, \dots \in \mathrm{H}$, A_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. აღვნიშნოთ $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ და $C_n = A \setminus B_n$ $(n \in \mathbb{N})$. μ-ს ადიციურობის ძალით ყოველი n-სთვის გვექნება, რომ

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) + \mu(C_n). \tag{2}$$

(C_n) არის H რგოლის სიმრავლეთა კლებადი მიმდევრობა და $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \emptyset$, ამიტომ ცარიელ სიმრავლეზე μ-ს ზემოდან უწყვეტობის გამო, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0$. შედეგად, (2)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ,

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) + \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

ამით μ-ს თვლადად ადიციურობა დადგენილია, ე.ი. μ ზომაა. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობის ზედა ზღვარი ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომელიც შედის (A_n) მიმდევრობის წევრთა უსასრულო რაოდენობაში. სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობის ზედა ზღვარი აღინიშნება $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ ანაც $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ ჩანაწერით.

სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობის ქვედა ზღვარი ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომელიც შედის (A_n) მიმდევრობის ყველა წევრში, გარდა შესაძლოა წევრთა სასრული რაოდენობისა. სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობის ქვედა ზღვარი აღინიშნება $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ ანაც $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ ჩანაწერით.

მარტივი შესამოწმებელია, რომ სიმრავლეთა ნებისმიერი (A_n) მიმდევრობისათვის სამართლიანია ტოლობები:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

სიმრავლეთა (A_n) მიმდევრობას ეწოდება **კრებადი**, თუ მისი ზედა და ქვედა ზღვრები ერთმანეთის ტოლია.

კრებადი სიმრავლეთა მიმდევრობის ზღვარი აღინიშნება $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ ჩანაწერით და ეწოდება მისი ზედა და ქვედა ზღვრების საერთო მნიშვნელობას.

ადვილი დასანახია, რომ მონოტონური სიმრავლეთა მიმდევრობები კრებადია და მათი ზღვრების ადრე შემოღებული განსაზღვრებები თანხმობაშია კრებადი სიმრავლეთა მიმდევრობის ზღვრის განსაზღვრებასთან.

შემდეგი თეორემა მოიხსენიება ბორელ-კანტელის ლემის სახელწოდებით.

თეორემა 4.4.4. ვთქვათ, μ არის H σ-ალგებრაზე განსაზღვრული ზომა. თუ $A_n \in \mathrm{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეთა მიმდევრობა ისეთია, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, მაშინ $\mu\big(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\big) = 0$.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ $(n \in \mathbb{N})$. ადვილი დასანახია, რომ:

1) (B_n) კლებადი მიმდევრობაა;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$;

3) $B_n \in \mathrm{H}\,(n \in \mathbb{N})$ და $\mu(B_n) \le \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k)$.

ამის შემდეგ, თუ ვისარგებლებთ ზომის ზემოდან უწყვეტობის თვისებით და გავითვალისწინებთ $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ მწკრივის კრებადობას, დავწერთ,

$$\mu\big(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\big) = \mu\big(\lim_{n\to\infty} B_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ვთქვათ, μ არის H σ-ალგებრაზე განსაზღვრული ზომა და $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{H}$. დაამტკიცეთ, რომ $\mu\big(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\big) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mu(A_n)$.
2. ვთქვათ, μ არის H σ-ალგებრაზე განსაზღვრული ზომა, $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{H}$ და მოიძებნება n, რომლისთვისაც $\mu\big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big) < \infty$. დაამტკიცეთ, რომ $\mu\big(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\big) \ge \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mu(A_n)$.
3. ვთქვათ, μ არის H σ-ალგებრაზე განსაზღვრული ზომა, $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{H}$ და მოიძებნება n, რომლისთვისაც $\mu\big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big) < \infty$. დავუშვათ, გარდა ამისა, (A_n) მიმდევრობა კრებადია. დაამტკიცეთ, რომ $\mu\big(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\big) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

§ 5. მოცულობა

$\mathrm{v} = \mathrm{v}_n$-ით აღვნიშნოთ n-განზომილებიანი მონაკვეთების $\mathcal{I}^n$ კლასზე განსაზღვრული **მოცულობა**, ე.ი. ფუნქცია, რომელიც მოქმედებს შემდეგი წესით: $\mathrm{v}(\emptyset) = 0$ და ყოველი n-განზომილებიანი $\underset{k=1}{\overset{n}{\times}}(a_k, b_k] \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთისათვის,

$$\mathrm{v}\Big(\underset{k=1}{\overset{n}{\times}}(a_k, b_k]\Big) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k).$$

ერთ და ორგანზომილებიან შემთხვევებში v ფუნქციას, შესაბამისად, მოიხსენიებენ, როგორც სიგრძეს და ფართობს. შევთანხმდეთ, რომ განზომილების მიუხედავად, v ფუნქციას ვუწოდოთ მოცულობა.

ჩვენი მიზანია, ვაჩვენოთ, რომ მოცულობას აქვს ზომის თვისებები. თავდაპირველად დავადგინოთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა 4.5.1. ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$-სთვის მოცულობა არის კვაზიზომა.

თეორემა 4.5.1 ცხადია ერთგანზომილებიან შემთხვევაში, თუმცა ნებისმიერი n-სთვის მისი დამტკიცება არაა ტრივიალური და ეფუძნება ნახევარრგოლებისა და კვაზიზომების დეკარტული ნამრავლის თვისებებს, რომლებიც ქვემოთ იქნება განხილული.

ვთქვათ, X_1 არის რაიმე არაცარიელი სიმრავლე, H_1 - X_1-ის ქვესიმრავლეების რაიმე ნახევარრგოლი, ხოლო μ_1 - H_1-ზე განსაზღვრული კვაზიზომა. განვიხილოთ, აგრეთვე, მსგავსი სახით ერთმანეთთან დაკავშირებული X_2 სიმრავლე, H_2 ნახევარრგოლი და μ_2 კვაზიზომა.

როგორც ვიცით, H_1 და H_2 კლასების დეკარტული ნამრავლი წარმოადგენს ნახევარრგოლს. განვიხილოთ $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$ ნახევარრგოლზე შემდეგნაირად განსაზღვრული $\mu_1 \times \mu_2$ ფუნქცია:

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad (A_1 \in \mathrm{H}_1, A_2 \in \mathrm{H}_2).$$

$\mu_1 \times \mu_2$ ფუნქციას μ_1 **და** μ_2 **კვაზიზომების დეკარტული ნამრავლი** ეწოდება.

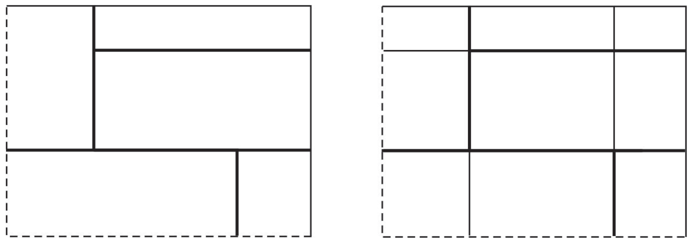
თეორემა 4.5.2. კვაზიზომების დეკარტული ნამრავლი არის კვაზიზომა.

ვთქვათ, H_1 და H_2 ნახევარრგოლებია. Π კლასს ვუწოდოთ $A_1 \times A_2 \in \mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$ **სიმრავლის ბადისებური** $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$**-დაშლა**, თუ Π წარმოდგება სახით: $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$, სადაც Π_1 არის A_1 სიმრავლის რაიმე H_1-დაშლა, ხოლო Π_2 კი - A_2 სიმრავლის რაიმე H_2-დაშლა, ე.ი. $A_1 \times A_2$ სიმრავლის ბადისებური დაშლა წარმოდგება A_1 და A_2 თანამამრავლების დაშლათა ნამრავლის სახით.

ლემა 4.5.1. ვთქვათ, H_1 და H_2 ნახევარრგოლებია. დავუშვათ, $A_1 \times A_2 \in \mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$ და $\Omega = \{P_1 \times Q_1, \ldots, P_n \times Q_n\}$ არის $A_1 \times A_2$ სიმრავლის $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$-დაშლა. მაშინ არსებობს Π კლასი, ისეთი, რომ:

* **Π არის $A_1 \times A_2$ სიმრავლის ბადისებური $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$-დაშლა;**
* **ყოველი $k \in \overline{1,n}$-სთვის არსებობს Π-ს ქვეკლასი Π_k, რომელიც არის $P_k \times Q_k$ სიმრავლის ბადისებური $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$-დაშლა.**

ნახ. 4.1-ზე მოცემულია ლემა 4.5.1-ის შესაბამისი ილუსტრაცია $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2 = \mathcal{I}^2$ შემთხვევაში.



ნახ. 4.1.

დამტკიცება. მარტივი შესამოწმებელია, რომ

$$\bigcup_{k=1}^{n} P_k = A_1, \quad \bigcup_{k=1}^{n} Q_k = A_2. \tag{1}$$

თუ $\{P_1, \ldots, P_n\}$ და $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ კლასებისათვის გამოვიყენებთ თეორემა 3.2.2-ს და გავითვალისწინებთ (1)-ს, ვიპოვით Λ_1 და Λ_2 კლასებს, ისეთებს, რომ:

a) Λ_1 არის A_1 სიმრავლის H_1-დაშლა;

b) ყოველი $k \in \overline{1,n}$-სთვის მოიძებნება $\Lambda_{1,k} \subset \Lambda_1$ ქვეკლასი, რომელიც არის P_k სიმრავლის H_1-დაშლა;

c) Λ_2 არის A_2 სიმრავლის H_2-დაშლა;

d) ყოველი $k \in \overline{1,n}$-სთვის მოიძებნება $\Lambda_{2,k} \subset \Lambda_2$ ქვეკლასი, რომელიც არის Q_k სიმრავლის H_2-დაშლა.

Π კლასის როლში ავიღოთ Λ_1 და Λ_2 კლასების ნამრავლი, ე.ი. $\Pi = \Lambda_1 \times \Lambda_2$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ლემის პირველი დასკვნა გამომდინარეობს a) და c) პირობებიდან, ხოლო მეორე დასკვნა კი - b) და d) პირობებიდან. ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 4.5.2-ის დამტკიცება. დავადგინოთ $\mu_1 \times \mu_2$ ფუნქციის ადიციურობა. კვაზიზომის სხვა თვისებები, ცხადია, შესრულებულია. ვთქვათ, $A_1 \in \mathrm{H}_1$, $A_2 \in \mathrm{H}_2$ და Ω კლასი არის $A_1 \times A_2$ სიმრავლის $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$-დაშლა. ჩვენი მიზანია, დავადგინოთ, რომ

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \sum_{E \in \Omega} (\mu_1 \times \mu_2)(E).$$

თავდაპირველად განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა Ω კლასი არის $A_1 \times A_2$ სიმრავლის ბადისებური $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$-დაშლა, ე.ი. $\Omega = \Lambda_1 \times \Lambda_2$, სადაც $\Lambda_1 = \{P_1, \ldots, P_n\}$ არის A_1 სიმრავლის H_1-დაშლა, ხოლო $\Lambda_2 = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ კი - A_2 სიმრავლის H_2-დაშლა.

კვაზიზომის თვისებების გათვალისწინებით დავწერთ, რომ

$$\sum_{E \in \Omega} (\mu_1 \times \mu_2)(E) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\mu_1 \times \mu_2)(P_i \times Q_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu_1(P_i) \mu_2(Q_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_1(P_i) \sum_{j=1}^{m} \mu_2(Q_j) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2).$$

ახლა განვიხილოთ ზოგადი სიტუაცია. ვთქვათ,

$$\Omega = \{P_1 \times Q_1, \ldots, P_n \times Q_n\}$$

არის $A_1 \times A_2$ სიმრავლის რაიმე $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$-დაშლა. Π კლასი და Π_k $(k \in \overline{1,n})$ კლასები შევარჩიოთ ლემა 4.5.1-ის მიხედვით. თუ ვისარგებლებთ უკვე განხილული შემთხვევით და გავითვალისწინებთ, რომ Π_k კლასები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება Π-ს ტოლია, დავწერთ,

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \sum_{E \in \Pi} (\mu_1 \times \mu_2)(E) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{E \in \Pi_k} (\mu_1 \times \mu_2)(E) = \sum_{k=1}^{n} (\mu_1 \times \mu_2)(P_k \times Q_k) = \sum_{E \in \Omega} (\mu_1 \times \mu_2)(E).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 4.5.1-ის დამტკიცება. თეორემა მტკიცდება ინდუქციით n-ის მიხედვით. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $n = 1$ შემთხვევაში დებულება მარტივად მოწმდება, ინდუქციის ბიჯის განხორციელება კი ხდება თეორემა 4.5.2-ის მეშვეობით, იმის გათვალისწინებით, რომ n-განზომილებიანი v_n მოცულობა შეიძლება გავაიგივოთ $\mathrm{v}_{n-1} \times \mathrm{v}_1$ დეკარტულ ნამრავლთან $(x_1, \ldots, x_n)$ და $((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$ სახის ელემენტების გაიგივების მეშვეობით. □

შემდეგი დებულება განაზოგადებს თეორემა 4.5.1-ს და გვიჩვენებს, რომ მოცულობას აქვს ზომის თვისებები.

თეორემა 4.5.3. ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$-სთვის მოცულობა არის ზომა.

დამტკიცება. თეორემა 4.5.1-ის და თეორემა 4.3.3-ის გათვალისწინებით, საკმარისია დავადგინოთ v ფუნქციის თვლადად ნახევრადადიციურობა.

ქვემოთ $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის ჩაკეტვა და ყველა შიგა წერტილის სიმრავლე, შესაბამისად, აღნიშნული იქნება $\mathrm{cl}(E)$ და $\mathrm{int}(E)$ ჩანაწერებით.

ვთქვათ, მოცემულია $\mathcal{I}^n$ კლასში შემავალი $I, I_1, I_2, \ldots$ მონაკვეთები, ისეთები, რომ $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. ჩვენი მიზანია, დავამტკიცოთ შეფასება:

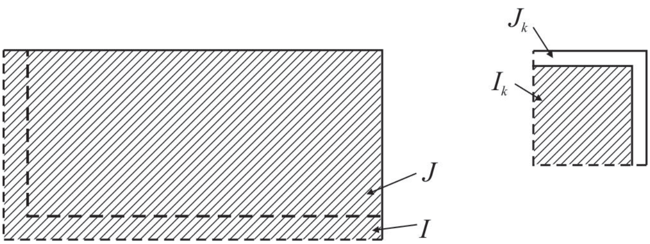
$$\mathrm{v}(I) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{v}(I_k). \tag{2}$$

განვიხილოთ რაიმე $\varepsilon > 0$ რიცხვი. შევამციროთ I მონაკვეთი $J \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთამდე ისე, რომ სრულდებოდეს პირობები:

$$\mathrm{cl}(J) \subset I, \quad \mathrm{v}(I) < \mathrm{v}(J) + \varepsilon; \tag{3}$$

ხოლო ყოველი $k \in \mathbb{N}$-სთვის I_k მონაკვეთი გავზარდოთ $J_k \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთამდე ისე, რომ (ნახ. 4.2)

$$I_k \subset \mathrm{int}(J_k), \quad \mathrm{v}(J_k) < \mathrm{v}(I_k) + \varepsilon/2^k. \tag{4}$$



ნახ. 4.2.

გვექნება

$$\mathrm{cl}(J) \subset I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{int}(J_k).$$

ამრიგად, ჩაკეტილი და შემოსაზღვრული $\mathrm{cl}(J)$ სიმრავლე დაფარულია ღია $\mathrm{int}(J_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ სიმრავლეების მეშვეობით. ასეთ შემთხვევაში ჰაინე-ბორელის ლემის გამოყენებით შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული ქვედაფარვა, ე.ი. ვიპოვოთ $m \in \mathbb{N}$ რიცხვი, ისეთი, რომ

$$\mathrm{cl}(J) \subset \bigcup_{k=1}^{m} \mathrm{int}(J_k).$$

აქედან გამომდინარე,

$$J \subset \bigcup_{k=1}^{m} J_k,$$

საიდანაც (3) და (4) თანაფარდობების, v-ს ნახევრადადიციურობისა და ზრდადობის გათვალისწინებით ვწერთ,

$$\mathrm{v}(I) < \mathrm{v}(J) + \varepsilon \le \sum_{k=1}^{m} \mathrm{v}(J_k) + \varepsilon < \sum_{k=1}^{m} [\mathrm{v}(I_k) + \varepsilon/2^k] + \varepsilon < \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{v}(I_k) + 2\varepsilon.$$

აქედან, $\varepsilon > 0$-ის ნებისმიერობის გათვალისწინებით, ვასკვნით (2)-ის სამართლიანობას. $\square$

თეორემა 4.5.3-ის დამტკიცების ანალიზი ცხადყოფს, რომ დამატებითი არგუმენტი, რომლის მეშვეობითაც v კვაზიზომამ თვისებები გაიუმჯობესა და გახდა ზომა, უკავშირდება ჰაინე-ბორელის ლემის გამოყენებას. ქვემოთ მოცემული იქნება აღნიშნული მოვლენის გამომხატველი ზოგადი პრინციპი.

ვთქვათ, μ არის H ნახევარრგოლზე განსაზღვრული კვაზიზომა, ხოლო Π და Λ სიმრავლეთა არაცარიელი კლასებია. შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრებები:

- μ-ს ვუწოდოთ **შიგნიდან რეგულარული** Π **კლასის მიმართ**, თუ ყოველი $A \in$ H-სთვის და ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნებიან $A' \in$ H და $E \in \Pi$ სიმრავლეები, ისეთები, რომ: $A' \subset E \subset A$ და $\mu(A') > \mu(A) - \varepsilon$;
- μ-ს ვუწოდოთ **გარედან რეგულარული** Λ **კლასის მიმართ**, თუ ყოველი $A \in$ H-სთვის და ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნებიან $A' \in$ H და $E \in \Lambda$ სიმრავლეები, ისეთები, რომ: $A \subset E \subset A'$ და $\mu(A') < \mu(A) + \varepsilon$;
- μ-ს ვუწოდოთ **რეგულარული** (Π, Λ) **წყვილის მიმართ**, თუ μ შიგნიდან რეგულარულია Π-ის მიმართ და გარედან რეგულარულია Λ კლასის მიმართ;
- (Π, Λ) **წყვილს** ვუწოდოთ **კომპაქტური**, თუ

$$\left(A \in \Pi, A_k \in \Lambda \ (k \in \mathbb{N}),\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \Rightarrow \left(\exists m \in \mathbb{N} : A \subset \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right),$$

  ე.ი. ნებისმიერი $A \in \Pi$ სიმრავლისათვის, Λ კლასის სიმრავლეების მეშვეობით, მისი ნებისმიერი თვლადი დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა.

თეორემა 4.5.4. თუ μ კვაზიზომა რეგულარულია რაიმე კომპაქტური წყვილის მიმართ, მაშინ μ არის ზომა.

დამტკიცება. თეორემა 4.5.4-ის დამტკიცება თეორემა 4.5.3-ის დამტკიცების ანალოგიურია და იგი მოგვყავს გადმოცემის სისრულისათვის.

თეორემა 4.3.3-ის გათვალისწინებით, საკმარისია დავადგინოთ μ კვაზიზომის თვლადად ნახევრადადიციურობა.

ვთქვათ, μ განსაზღვრულია H კლასზე, ხოლო (Π, Λ) არის ის კომპაქტური წყვილი, რომლის მიმართაც რეგულარულია μ.

განვიხილოთ H კლასში შემავალი $A, A_1, A_2, \ldots$ სიმრავლეები, ისეთები, რომ $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ შეფასება:

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{5}$$

განვიხილოთ რაიმე $\varepsilon > 0$ რიცხვი. ავიღოთ $A' \in \mathrm{H}$ და $E \in \Pi$ სიმრავლეები, ისეთები, რომ სრულდებოდეს პირობები:

$$A' \subset E \subset A, \;\; \mu(A') > \mu(A) - \varepsilon; \tag{6}$$

ხოლო ყოველი $k \in \mathbb{N}$-სთვის ავიღოთ $A'_k \in \mathrm{H}$ და $E_k \in \Lambda$ სიმრავლეები, ისეთები, რომ

$$A_k \subset E_k \subset A'_k, \;\; \mu(A'_k) < \mu(A_k) + \varepsilon/2^k. \tag{7}$$

გვექნება,

$$E \subset A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

(Π, Λ) წყვილის კომპაქტურობის ძალით ვიპოვით $m \in \mathbb{N}$ რიცხვს, ისეთს, რომ

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{m} E_k.$$

აქედან გამომდინარე,

$$A' \subset \bigcup_{k=1}^{m} A'_k,$$

საიდანაც (6) და (7) თანაფარდობების, μ-ს ნახევრადადიციურობისა და ზრდადობის გათვალისწინებით ვწერთ,

$$\mu(A) < \mu(A') + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{m} \mu(A'_k) + \varepsilon < \sum_{k=1}^{m} [\mu(A_k) + \varepsilon/2^k] + \varepsilon < \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + 2\varepsilon.$$

აქედან, $\varepsilon > 0$-ის ნებისმიერობის გათვალისწინებით, ვასკვნით (5)-ის სამართლიანობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 6. მონაკვეთების $\mathcal{I}^n$ კლასზე განსაზღვრული სასრული და ადიციური ფუნქციების დახასიათება

მონაკვეთების $\mathcal{I}^n$ კლასზე განსაზღვრული სასრული და ადიციური ფუნქციები შეიძლება დავახასიათოთ „წერტილის“ (ანუ $\mathbb{R}^n$-ზე განსაზღვრული) ფუნქციების მეშვეობით, შერეული ნაზრდის ცნების გამოყენების საფუძველზე.

თავდაპირველად განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი სიტუაცია. ვთქვათ, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ რაიმე ფუნქციაა და $I = (a, b] \in \mathcal{I}$. შემდეგ გამოსახულებას:

$$\Delta(\varphi, I) = \varphi(b) - \varphi(a)$$

ეწოდება φ **ფუნქციის ნაზრდი** I **მონაკვეთზე**. ჩავთვალოთ, რომ $\Delta(\varphi, \emptyset) = 0$. $\Delta(\varphi, I)$ გამოსახულება, როგორც I-ს ფუნქცია, აღვნიშნოთ v_φ სიმბოლოთი.

ერთგანზომილებიან შემთხვევაში, მონაკვეთის სასრული და ადიციური ფუნქციების დახასიათება მოიცემა შემდეგი დებულებით:

ვთქვათ, μ **არის** $\mathcal{I}$ **კლასზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:**

- μ **ადიციურია;**
- **მოიძებნება** $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **ფუნქცია, ისეთი, რომ** $\mu = \mathrm{v}_\varphi$.

მარტივი შესამოწმებელია, რომ მეორე წინადადებიდან გამომდინარეობს პირველი. შებრუნებული იმპლიკაციის დასადგენად უნდა განვიხილოთ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mu((0, x]), & \text{როცა} \quad x > 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x = 0, \\ -\mu((x, 0]), & \text{როცა} \quad x < 0. \end{cases}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\mu = \mathrm{v}_\varphi$.

ქვემოთ დადგენილი იქნება მონაკვეთის სასრული და ადიციური ფუნქციების დახასიათება ნებისმიერი განზომილების შემთხვევაში, რაც, უნდა აღინიშნოს, რომ, ერთგანზომილებიანი სიტუაციისაგან განსხვავებით, ტექნიკური თვალსაზრისით საკმაოდ დატვირთულ მსჯელობას მოითხოვს.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$(a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_n) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n;$$

$$(a, b] = \mathop{\times}_{k=1}^{n} (a_k, b_k] \quad (a, b \in \mathbb{R}^n, \;\; a < b);$$

$$xy = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n);$$

$$|x| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad (x \in \mathbb{R}^n);$$

$$\Gamma_n = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}\}.$$

ვთქვათ, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ რაიმე ფუნქციაა და $I = (a,b] \in \mathcal{I}^n$. შემდეგ გამოსახულებას

$$\Delta(\varphi, I) = \sum_{\varepsilon \in \Gamma_n} (-1)^{n-|\varepsilon|} \varphi(a + \varepsilon(b-a))$$

ეწოდება φ **ფუნქციის შერეული ნაზრდი** I **მონაკვეთზე**. $\Delta(\varphi, I)$ გამოსახულება როგორც I-ს ფუნქცია, აღვნიშნოთ v_φ სიმბოლოთი.

$n = 1$ და $n = 2$ შემთხვევებში, შესაბამისად, შერეული ნაზრდისათვის გვექნება:

$$\Delta(\varphi, I) = \varphi(b) - \varphi(a);$$

$$\Delta(\varphi, I) = \varphi(b_1, b_2) - \varphi(a_1, b_2) - \varphi(b_1, a_2) + \varphi(a_1, a_2).$$

თეორემა 4.6.1. ყოველი $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის მისი შერეული ნაზრდი - v_φ არის სასრული და ადიციური ფუნქცია.

ლემა 4.6.1. ნებისმიერი $n \geq 2$-სთვის სამართლიანია $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციის შერეული ნაზრდის შემდეგი წარმოდგენა:

$$\Delta(\varphi, I) = \Delta(\varphi_{b_n}, I') - \Delta(\varphi_{a_n}, I'),$$

სადაც $I = \overset{n}{\underset{k=1}{\times}} (a_k, b_k]$, φ_t $(t \in \mathbb{R})$ არის შემდეგნაირად განსაზღვრული $n-1$ ცვლადის ფუნქცია: $\varphi_t(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ და $I' = \overset{n-1}{\underset{k=1}{\times}} (a_k, b_k]$.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ:

$$a' = (a_1, \ldots, a_{n-1}), \quad b' = (b_1, \ldots, b_{n-1});$$

$$\varepsilon' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \quad (\varepsilon \in \Gamma_n).$$

თუ $\varepsilon \in \Gamma_n$ ისეთია, რომ $\varepsilon_n = 1$, მაშინ შესრულდება ტოლობა

$$(-1)^{n-|\varepsilon|} \varphi(a + \varepsilon(b-a)) = (-1)^{n-1-|\varepsilon'|} \varphi_{b_n}(a' + \varepsilon'(b'-a')), \qquad (1)$$

ხოლო, თუ $\varepsilon \in \Gamma_n$ ისეთია, რომ $\varepsilon_n = 0$, მაშინ

$$(-1)^{n-|\varepsilon|} \varphi(a + \varepsilon(b-a)) = -(-1)^{n-1-|\varepsilon'|} \varphi_{a_n}(a' + \varepsilon'(b'-a')) \qquad (2)$$

(1) და (2) ტოლობებიდან გამომდინარე ვწერთ,

$$\Delta(\varphi, I) = \sum_{\delta \in \Gamma_{n-1}} (-1)^{n-1-|\delta|} \varphi_{b_n}(a' + \delta(b'-a')) -$$

$$- \sum_{\delta \in \Gamma_{n-1}} (-1)^{n-1-|\delta|} \varphi_{a_n}(a' + \delta(b'-a')) = \Delta(\varphi_{b_n}, I') - \Delta(\varphi_{a_n}, I').$$

ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 4.6.2. ვთქვათ, ყოველი $t \in \mathbb{R}$-სთვის μ_t არის H ნახევარრგოლზე განსაზღვრული სასრული და ადიციური ფუნქცია. მაშინ $\mathrm{H} \times \mathcal{I}$ ნახევარრგოლზე შემდეგნაირად განსაზღვრული μ ფუნქცია:

$$\mu(A \times (a, b]) = \mu_b(A) - \mu_a(A) \qquad (A \in \mathrm{H},\ (a, b] \in \mathcal{I}),$$

არის სასრული და ადიციური.

დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ μ ფუნქციის სასრულობა ცხადია.

ვთქვათ, $A \in \mathrm{H}, I = (a, b] \in \mathcal{I}$ და Ω კლასი არის $A \times I$ სიმრავლის $\mathrm{H} \times \mathcal{I}$-დაშლა. ჩვენი მიზანია, დავადგინოთ ტოლობა:

$$\mu(A \times I) = \sum_{E \in \Omega} \mu(E),$$

რაც ნიშნავს μ-ს ადიციურობას.

თავდაპირველად განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა Ω კლასი არის $A \times I$ სიმრავლის ბადისებური $\mathrm{H} \times \mathcal{I}$-დაშლა, ე.ი. $\Omega = \Delta \times \Lambda$, სადაც $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ არის A სიმრავლის H-დაშლა, ხოლო $\Lambda = \{I_1, \dots, I_m\}$ კი - $I = (a, b]$ მონაკვეთის $\mathcal{I}$-დაშლა. რიცხვების სასრული ჯამი არ იცვლება წევრთა გადანაცვლებით, რის გამოც შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $I_1, \dots, I_m$ მონაკვეთები განლაგებულია ერთმანეთის მიყოლებით, მარცხნიდან მარჯვნივ, ე.ი. $I_1 = (c_0, c_1], I_1 = (c_1, c_2], \dots,\ I_m = (c_{m-1}, c_m]$, სადაც $a = c_0 < c_1 < \dots < c_m = b$.

μ ფუნქციის განსაზღვრისა და μ_t ფუნქციების ადიციურობის გათვალისწინებით დავწერთ, რომ

$$\sum_{E \in \Omega} \mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \times I_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\mu_{c_j}(A_i) - \mu_{c_{j-1}}(A_i)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu_{c_j}(A_i) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu_{c_{j-1}}(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{c_j}(A) - \sum_{j=1}^{m} \mu_{c_{j-1}}(A) =$$

$$= \mu_b(A) - \mu_a(A) = \mu(A \times I).$$

ახლა განვიხილოთ ზოგადი სიტუაცია. ვთქვათ, $\Omega = \{A_1 \times I_1, \dots, A_n \times I_n\}$ არის $A \times I$ სიმრავლის რაიმე $\mathrm{H} \times \mathcal{I}$-დაშლა. Π კლასი და Π_k $(k \in \overline{1, n})$ კლასები შევარჩიოთ ლემა 4.5.1-ის მიხედვით. თუ ვისარგებლებთ უკვე განხილული შემთხვევით, ამასთან გავითვალისწინებთ, რომ Π_k კლასები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება არის Π, დავწერთ,

$$\mu(A \times I) = \sum_{E \in \Pi} \mu(E) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{E \in \Pi_k} \mu(E) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \times I_k) = \sum_{E \in \Omega} \mu(E).$$

ამით ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 4.6.1-ის დამტკიცება. დამტკიცება მოვახდინოთ ინდუქციით n-ის მიმართ. $n = 1$ შემთხვევაში დებულება მარტივი დასადგენია. დავუშვათ, დებულება სამართლიანია $(n-1)$-ის შემთხვევაში. ყოველი $t \in \mathbb{R}$-სთვის განვიხილოთ $\mathcal{I}^{n-1}$ კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული μ_t ფუნქცია:

$$\mu_t(J) = \Delta(\varphi_t, J) \quad (J \in \mathcal{I}^{n-1}).$$

ინდუქციის დაშვების თანახმად, μ_t ადიციურია. შემდეგ, თუ გამოვიყენებთ 4.6.1 და 4.6.2 ლემებს, დავასკვნით, რომ v_φ ფუნქცია ადიციურია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 4.6.2. *$\mathcal{I}^n$ კლასზე განსაზღვრული ყოველი სასრული და ადიციური μ ფუნქციისათვის მოიძებნება $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $\mu = \mathrm{v}_\varphi$.*

ლემა 4.6.3. *ვთქვათ, μ_1 და μ_2 არიან $\mathcal{I}^n$-ზე განსაზღვრული სასრული ადიციური ფუნქციები, რომლებიც ერთმანეთს ემთხვევიან ყოველ ისეთ $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთზე, რომლის ერთ-ერთი წვერო მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში. მაშინ $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ ნებისმიერი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთისათვის.*

დამტკიცება. აღვნიშნოთ:

$$\langle a, b\rangle = (\min(a,b), \max(a,b)] \;\; (a, b \in \mathbb{R}, a \neq b);$$

$$\langle a, b\rangle = \mathop{\times}_{k=1}^{n} \langle a_k, b_k\rangle \;\; (a, b \in \mathbb{R}^n, \;\; a_k \neq b_k \;\; (k \in \overline{1,n})).$$

ყოველი $A \subset \overline{1,n}$ სიმრავლისათვის აღვნიშნოთ

$$\Omega_A = \{\langle 0, x\rangle : \operatorname{sign}(x_k) = 1 \quad (k \in A)\}.$$

აღვნიშნოთ აგრეთვე, $\Omega^{(0)} = \Omega_{\overline{1,n}}$. ყოველი $m \in \overline{1,n}$-სთვის განვიხილოთ მონაკვეთების $\Omega^{(m)}$ კლასი, რომელშიც შედის ის n-განზომილებიანი $\mathop{\times}_{k=1}^{n} I_k$ მონაკვეთები, რომელთათვისაც $I_1, \ldots, I_m$ შუალედებს აქვთ სახე: $I_1 = (a_1, b_1]$, …, $I_m = (a_m, b_m]$, სადაც $0 < a_1 < b_1, \ldots, 0 < a_m < b_m$; ხოლო $I_{m+1}, \ldots, I_n$ შუალედებს კი აქვთ სახე: $I_{m+1} = (0, b_{m+1}], \ldots, I_n = (0, b_n]$. ცხადია,

$$\Omega^{(0)} \subset \Omega^{(1)} \subset \cdots \subset \Omega^{(n)}.$$

ამასთან, მარტივი შესამოწმებელია, რომ ყოველი $I \in \Omega^{(m)}$ მონაკვეთი წარმოდგება $\Omega^{(m-1)}$ კლასის ორი მონაკვეთის სხვაობის სახით. ამ ფაქტისა და μ_1, μ_2 ფუნქციების ადიციურობის გათვალისწინებით დავასკვნით: რადგან μ_1 და μ_2 ემთხვევიან $\Omega^{(0)}$ კლასზე, ამიტომ ისინი ერთმანეთს დაემთხვევიან $\Omega^{(1)}$-ზე, აქედან გამომდინარე, დამთხვევა მოხდება $\Omega^{(2)}$-ზე და ა.შ. $\Omega^{(n)}$-ზე.

ნებისმიერი $A \subset \overline{1,n}$-სთვის მსგავსი მსჯელობით დავრწმუნდებით, რომ μ_1-ის და μ_2-ის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან Ω_A კლასზე. აქედან,

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ნებისმიერი $I \in \mathcal{I}^n$ იშლება Ω_A კლასებში შემავალი მონაკვეთების გაერთიანებად, დავასკვნით μ_1-ის და μ_2-ის მნიშვნელობების ტოლობას ნებისმიერი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთისათვის. $\square$

თეორემა 4.6.2-ის დამტკიცება. $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის $\nu(x)$-ით აღვნიშნოთ x-ის უარყოფითი კოორდინატების რაოდენობა.

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: $\varphi(x) = (-1)^{\nu(x)}\mu(\langle 0, x\rangle)$, როცა $x_1 \cdots x_n \neq 0$ და $\varphi(x) = 0$, როცა $x_1 \cdots x_n = 0$.

ვაჩვენოთ, რომ μ და v_φ ფუნქციების მნიშვნელობები ტოლია ყოველ ისეთ $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთზე, რომლის ერთ-ერთი წვერო მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში. ამის შემდეგ კი, თეორემა 4.6.1-ისა და ლემა 4.6.2-ის ძალით დავასკვნით μ და v_φ ფუნქციების მნიშვნელობების ტოლობას ნებისმიერი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთისათვის.

ამრიგად, ჩვენი მიზანია, ვაჩვენოთ, რომ $x \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \cdots x_n \neq 0$, წერტილისათვის,

$$\mathrm{v}_\varphi(\langle 0, x\rangle) = \mu(\langle 0, x\rangle).$$

$\langle 0, x\rangle$ მონაკვეთის „კიდურა“ წვეროები იქნებიან

$$a = (\min(0, x_1), \ldots, \min(0, x_n)),$$

და

$$b = (\max(0, x_1), \ldots, \max(0, x_n))$$

წერტილები. ცხადია, $b - a = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$. შევნიშნოთ, რომ $\langle 0, x\rangle$ მონაკვეთის ყველა წვეროზე, გარდა x-ისა, φ ფუნქციის მნიშვნელობა ნულის ტოლია. შედეგად, $\mathrm{v}_\varphi(\langle 0, x\rangle)$ შერეული ნაზრდის განმსაზღვრელ ჯამში დაგვრჩება მხოლოდ ის

$$(-1)^{n-|\varepsilon|}\varphi(a + \varepsilon(b - a))$$

წევრი, რომლისთვისაც $a + \varepsilon(b - a) = x$. φ-ს განსაზღვრებიდან გამომდინარე, $\varphi(a+\varepsilon(b-a)) = (-1)^{\nu(x)}\mu(\langle 0, x\rangle)$. გავარკვიოთ, თუ რისი ტოლია $(-1)^{n-|\varepsilon|}$. გვაქვს, რომ $\min(0, x_k) + \varepsilon_k|x_k| = \max(0, |x_k|)$ $(k \in \overline{1, n})$. შედეგად, $\varepsilon_k = 1$, როცა $x_k > 0$ და $\varepsilon_k = 0$, როცა $x_k < 0$, ე.ი. $n - |\varepsilon|$ გამოსახავს x წერტილის უარყოფითი კოორდინატების რაოდენობას, ანუ უდრის $\nu(x)$-ს. აქედან გამომდინარე,

$$\mathrm{v}_\varphi(\langle 0, x\rangle) = (-1)^{n-|\varepsilon|}\varphi(a + \varepsilon(b - a)) =$$
$$= (-1)^{\nu(x)}(-1)^{\nu(x)}\mu(\langle 0, x\rangle) = \mu(\langle 0, x\rangle).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 4.6.1. თეორემა 4.6.2-ის დამტკიცებისას დადგინდა არა მარტო წარმომქმნელი (ე.ი. $\mu = \mathrm{v}_\varphi$ ტოლობის დამაკმაყოფილებელი) φ ფუნქციის არსებობა, უფრო მეტიც, ნაპოვნი იქნა φ ფუნქციის ზუსტი სახე: $\varphi(x) =$

$(-1)^{\nu(x)}\mu(\langle 0,x\rangle)$. აქედან, მაგალითად ვღებულობთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა μ არის მოცულობა, წარმომქმნელ ფუნქციას აქვს სახე: $\varphi(x) = x_1 \dots x_n$.

4.6.1 და 4.6.2 თეორემებიდან ვღებულობთ მონაკვეთის ადიციურ ფუნქციათა შემდეგ დახასიათებას.

შედეგი 4.6.1. ვთქვათ, μ არის $\mathcal{I}^n$-ზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **μ ადიციურია;**
- **მოიძებნება $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $\mu = \mathrm{v}_\varphi$.**

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება **ვიტალის აზრით ზრდადი**, თუ $\Delta(\varphi, I) \geq 0$ ყოველი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთისათვის.

ცხადია, რომ ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ვიტალის აზრით ზრდადობა იგივეა, რაც ჩვეულებრივი ზრდადობა.

სამართლიანია მონაკვეთების $\mathcal{I}^n$ კლასზე განსაზღვრული სასრული კვაზიზომების შემდეგი დახასიათება, რომელიც გამომდინარეობს შედეგი 4.6.1-დან.

შედეგი 4.6.2. ვთქვათ, μ არის $\mathcal{I}^n$-ზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **μ კვაზიზომაა;**
- **მოიძებნება ვიტალის აზრით ზრდადი $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $\mu = \mathrm{v}_\varphi$.**

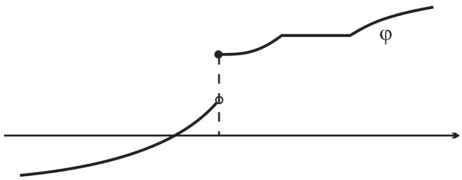
§ 7. მონაკვეთების $\mathcal{I}^n$ კლასზე განსაზღვრული სასრული ზომების დახასიათება

როგორც ვიცით (იხ. შედეგი 4.6.2), მონაკვეთების $\mathcal{I}^n$ კლასზე განსაზღვრული სასრული კვაზიზომები ხასიათდებიან ვიტალის აზრით ზრდადი წერტილის ფუნქციების მეშვეობით. ბუნებრივია კითხვა: როგორია ანალოგიური დახასიათება კვაზიზომის ნაცვლად ზომის განხილვის შემთხვევაში?

ერთგანზომილებიან სიტუაციაში დახასიათება მოიცემა შემდეგი დებულებით:

ვთქვათ, μ არის $\mathcal{I}$ კლასზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **μ ზომაა;**
- **მოიძებნება ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქცია ისეთი, რომ $\mu = \mathrm{v}_\varphi$** (ნახ. 4.3).



ნახ. 4.3.

პირველი წინადადებიდან მეორე მიიღება 4.6.2 და 4.4.2 თეორემების საფუძველზე. შებრუნებული იმპლიკაციის დასამტკიცებლად უნდა გავითვალისწინოთ თეორემა 4.6.1, რომლის ძალითაც v_φ ფუნქცია ადიციურია. შემდეგ, მარტივად დავადგენთ, რომ v_φ რეგულარულია იმ კომპაქტური წყვილის მიმართ, რომლის პირველი კომპონენტია ყველა ჩაკეტილი მონაკვეთის კლასი, ხოლო მეორე კი - ყველა ღია მონაკვეთის კლასი. ამის შემდეგ, თეორემა 4.5.4-ის ძალით მივიღებთ, რომ v_φ არის ზომა.

ქვემოთ დადგენილი იქნება აღნიშნულის მსგავსი დახასიათება ნებისმიერი განზომილებისათვის.

ვთქვათ, μ არის $\mathcal{I}^n$ კლასზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. μ-ს ვუწოდოთ **მარჯვნიდან უწყვეტი** $x \in \mathbb{R}^n$ **წერტილში**, თუ

$$\mu((x, x+h]) \to 0$$

ყოველთვის, როცა $h_1, \ldots, h_n > 0$ კოორდინატებს შორის ერთი ან რამდენიმე მიისწრაფვის ნულისაკენ, ხოლო დანარჩენები ფიქსირებულია. ვიტყვით, რომ μ **მარჯვნიდან უწყვეტია**, თუ ის მარჯვნიდან უწყვეტია ყოველ x წერტილში.

თეორემა 4.7.1. ვთქვათ, μ არის $\mathcal{I}^n$ კლასზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- μ **ზომაა;**
- μ **კვაზიზომაა და უწყვეტია მარჯვნიდან.**

დამტკიცება. პირველი წინადადებიდან მეორის მისაღებად საკმარისია გამოვიყენოთ თეორემა 4.4.2. გადავიდეთ შებრუნებული იმპლიკაციის დამტკიცებაზე. Π-ს როლში ავიღოთ ყველა ჩაკეტილი n-განზომილებიანი მონაკვეთის კლასი, ხოლო Λ-ს როლში კი ყველა ღია n-განზომილებიანი მონაკვეთის კლასი. ჰაინე-ბორელის ლემის თანახმად, (Π, Λ) წარმოადგენს კომპაქტურ წყვილს.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\mu((a, b+h]) \to \mu((a, b]) \quad \text{და} \quad \mu((a+h, b]) \to \mu((a, b]),$$

როცა $h \to 0,\ h_1, \dots, h_n > 0$. ამ თანაფარდობებიდან შემდეგი ჩართვების გათვალისწინებით:

$$(a, b] \subset (a, b+h) \subset (a, b+h], \quad (a+h, b] \subset [a+h/2, b] \subset (a, b],$$

უშუალოდ დავასკვნით, რომ μ რეგულარულია (Π, Λ) წყვილის მიმართ. ამის შემდეგ კი, თეორემა 4.5.4-ის მეშვეობით დავადგენთ, რომ μ ზომაა.

ყოველი $m \in \overline{1, n}$ ინდექსისათვის $I_{m,h}$-ით აღვნიშნოთ მონაკვეთი, რომელიც წარმოადგენს შემდეგნაირად განსაზღვრული ერთგანზომილებიანი Δ_1, $\dots$, Δ_n მონაკვეთების დეკარტულ ნამრავლს: $\Delta_k = (a_k, b_k]$, როცა $k \neq m$ და $\Delta_m = (b_m, b_m + h_m]$. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ფიქსირებული h-სთვის,

$$(a, b+h] \setminus (a, b] \subset \bigcup_{m=1}^{n} I_{m,h}.$$

აქედან გამომდინარე, კვაზიზომის ნახევრადადიციურობისა და ზრდადობის ძალით,

$$\mu((a, b+h]) \leq \mu((a, b]) + \sum_{m=1}^{n} \mu(I_{m,h}). \tag{1}$$

μ ფუნქციის მარჯვნიდან უწყვეტობის გამო, $\mu(I_{m,h}) \to 0$, როცა $h \to 0$, $h_1, \dots, h_n > 0$. საიდანაც, (1)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ

$$\mu((a, b+h]) \to \mu((a, b]).$$

ანალოგიური მსჯელობით, დავრწმუნდებით $\mu((a+h, b]) \to \mu((a, b])$ თანაფარდობის სამართლიანობაში. შევნიშნავთ, რომ ამ შემთხვევაში დაგვჭირდება ჩართვა:

$$(a, b] \setminus (a+h, b] \subset \bigcup_{m=1}^{n} J_{m,h},$$

სადაც $J_{m,h}$-ით აღნიშნულია მონაკვეთი, რომელიც წარმოადგენს შემდეგნაირად განსაზღვრული ერთგანზომილებიანი $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ მონაკვეთების დეკარტულ ნამრავლს: $\Delta_k = (a_k, b_k]$, როცა $k \neq m$ და $\Delta_m = (a_m, a_m + h_m]$. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ვუწოდოთ **მარჯვნიდან უწყვეტი ვიტალის აზრით**, თუ მისი შერეული ნაზრდი - v_φ მარჯვნიდან უწყვეტია.

ცხადია, ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ვიტალის აზრით მარჯვნიდან უწყვეტობა ემთხვევა ჩვეულებრივი მარჯვნიდან უწყვეტობის ცნებას.

შედეგი 4.6.2-ის და თეორემა 4.7.1-ის საფუძველზე ვღებულობთ მონაკვეთების $\mathcal{I}^n$ კლასზე განსაზღვრული სასრული ზომების შემდეგ დახასიათებას.

თეორემა 4.7.2. ვთქვათ, μ არის $\mathcal{I}^n$-ზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- μ ზომაა;
- მოიძებნება ვიტალის აზრით ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $\mu = \mathrm{v}_\varphi$.

თ ა ვ ი 5

ზომის გაგრძელება

სიმრავლის მიერ სივრცეში დაკავებული ადგილის გაზომვა ისტორიულად იყო ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მათემატიკური ამოცანა. ამ მიმართულებით საბაზისო დატვირთვისაა n-განზომილებიანი მონაკვეთის მოცულობის ცნება. მონაკვეთზე უფრო რთული სტრუქტურის სიმრავლეების გაზომვისათვის საჭირო ახალი მეთოდების განვითარება. საინტერესო მიდგომები შემოთავაზებული იქნა ჯერ კიდევ ანტიკურ ეპოქაში, როცა წარმატებით ახერხებდნენ წრის, ბირთვის, პარაბოლური სეგმენტისა და ზოგიერთი სხვა მრუდწირული საზღვრის მქონე ფიგურების ფართობისა თუ მოცულობის გამოთვლას. ამ მიდგომების არსებითი განვითარება მოხდა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის შექმნის შედეგად. კერძოდ, შესაძლებელი გახდა უწყვეტი ფუნქციების გრაფიკებით შემოსაზღვრული ფიგურების გაზომვა. ეს მაშინდელი მათემატიკისათვის საკითხის დამაკმაყოფილებელ გადაწყვეტად მიიჩნეოდა, თუმცა მე-19 საუკუნის მეორე ნახევარში, მთელი რიგი მნიშვნელოვანი ამოცანების კვლევისას წარმოიშვა კიდევ უფრო რთული აგებულების სიმრავლეთა გაზომვის აუცილებლობა. კ. ჟორდანის, ჯ. პეანოსა და ე. ბორელის იდეების განვითარების გზით, გადამწყვეტი ნაბიჯი საკითხის კვლევაში გადადგმული იყო ა. ლებეგის მიერ (1902).

ამ თავში გავეცნობით ლებეგის კონსტრუქციის აბსტრაქტულ ვარიანტს, რომელიც ცოტა მოგვიანებით შემუშავდა ჯ. რადონის (1913) და კ. კარათეოდორის (1918) შრომებში.

§ 1. გარე ზომა

ლებეგის მიერ $\mathbb{R}^n$ სივრცის სიმრავლეთა გასაზომად შემოთავაზებული მეთოდი წარმატებით მუშაობს არა მხოლოდ მონაკვეთების კლასზე მოცემული ზომის - მოცულობის გაგრძელებისას, არამედ ნებისმიერი X სივრცის ქვესიმრავლეთა რაიმე ნახევარრგოლზე მოცემული ზომის შემთხვევაშიც. ამ თავში ზომის გაგრძელების მეთოდი გადმოცემული იქნება ზოგად სიტუაციაში, ხოლო მომდევნო თავში მოხდება აბსტრაქტული თეორიის გამოყენება $\mathbb{R}^n$ სივრცის სიმრავლეთა გაზომვის ამოცანისათვის.

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ X რაიმე ფიქსირებული არაცარიელი სიმრავლეა და განვიხილავთ X-ის ქვესიმრავლეთა კლასებს.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 4.2.1-ის ძალით ზომის გაგრძელების ამოცანის ზოგადობა არ შეიზღუდება, თუ მას შევისწავლით რგოლზე მოცემული საწყისი ზომის შემთხვევაში.

ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. ლებეგის კონსტრუქციაში არსებით როლს ასრულებს μ **ზომით წარმოქმნილი (ინდუცირებული) გარე ზომის** ცნება, რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება: დავუშვათ, A არის X-ის რაიმე ქვესიმრავლე. თუ არსებობს H რგოლის სიმრავლეთა ერთი მაინც (A_n) მიმდევრობა, რომელიც ფარავს A სიმრავლეს (ე.ი. $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$), მაშინ A-ს გარე ზომა - $\mu^*(A)$ განვსაზღვროთ, როგორც შემდეგი ინფიმუმი:

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) : A_n \in \mathrm{H}\ (n \in \mathbb{N}),\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\},$$

ხოლო აღნიშნული თვისების (A_n) მიმდევრობის არარსებობის შემთხვევაში, $\mu^*(A)$ მივიჩნიოთ ∞-ის ტოლად.

ამრიგად, μ^* გარე ზომა განსაზღვრულია X-ის ყველა ქვესიმრავლისათვის. ცხადია, რომ μ^* არაუარყოფითი ზრდადი ფუნქციაა და $\mu^*(\emptyset) = 0$.

შენიშვნა 5.1.1. რადგან H რგოლია, ამიტომ ნებისმიერი $A_n \in \mathrm{H}$ მიმდევრობისათვის არსებობს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წევრების მქონე $B_n \in \mathrm{H}$ მიმდევრობა, ისეთი, რომ $B_n \subset A_n (n \in \mathbb{N})$ და $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. აქედან გამომდინარე, მარტივი დასანახია, რომ $\mu^*(A)$-ს მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ მის განსაზღვრებაში დამატებით მოვითხოვთ დამფარავი A_n სიმრავლეების წყვილ-წყვილად თანაუკვეთობას.

შენიშვნა 5.1.2. მარტივი შესამოწმებელია, რომ თუ ალგებრაზე (რგოლზე) განსაზღვრული μ ზომა არის შემოსაზღვრული (σ-შემოსაზღვრული), მაშინ μ^* გარე ზომაც არის შემოსაზღვრული (σ-შემოსაზღვრული).

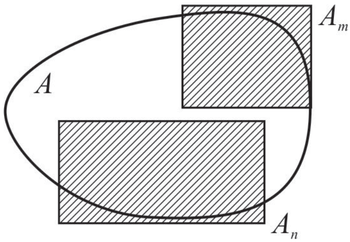
შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ μ^* ფუნქცია წარმოადგენს μ ფუნქციის გაგრძელებას.

თეორემა 5.1.1. ყოველი $A \in \mathrm{H}$ სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა: $\mu^*(A) = \mu(A)$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A \in \mathrm{H}$. $A \subset A \cup \varnothing \cup \varnothing \dots$ ჩართვიდან გამომდინარე გვაქვს, რომ $\mu^*(A) \leq \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \cdots = \mu(A)$. მეორე მხრივ, თუ $A_n \in \mathrm{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ ნებისმიერი მიმდევრობაა, რომლისთვისაც $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, მაშინ ზომის თვლადად ნახევრადადიციურობისა და ზრდადობის

ძალით: $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. აქედან, A_n მიმდევრობის ნებისმიერობის გამო, ვასკვნით $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ შეფასების სამართლიანობას. ამრიგად, $\mu^*(A) = \mu(A)$. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

$A \subset X$ სიმრავლის გარე ზომა, უხეშად რომ ვთქვათ, გვიჩვენებს, სულ მცირე, რა რაოდენობის მასალა უნდა დაიხარჯოს A სიმრავლის დასაფარად. აქ მასალად გაიგება H რგოლის სიმრავლეები, ხოლო მათი დანახარჯის გასაზომად კი გამოიყენება μ ზომა (ნახ. 5.1).



ნახ. 5.1.

გარე ზომის კონსტრუქცია საკმაოდ ბუნებრივ გზად ჩანს სიმრავლეთა გასაზომად. მაშინ რა გვიშლის ხელს, μ^* მივიჩნიოთ μ ზომის საძიებელ გაგრძელებად? ხელშემშლელი გარემოება ძნელი მისათითებელი არაა: სადაა გარანტია იმისა, რომ μ^* ფუნქციას ექნება ზომის თვისებები, კერძოდ, თვლადად ადიციურობის თვისება? სწორედ აღნიშნული სირთულე იწვევს აუცილებლობას იმისა, რომ გარე ზომის სახით შემოთავაზებული სიმრავლეთა გაზომვის მეთოდის მოქმედების არეალი შევზღუდოთ შედარებით ვიწრო სიმრავლეთა კლასზე საიმისოდ, რომ შემცირებული კლასის ფარგლებში მიღწეული იქნეს ზომის თვისებების შესრულება. ასეთი სახის შეზღუდვის მეთოდი მოცემული იქნება მომდევნო პარაგრაფში.

როგორც მოგვიანებით ვნახავთ, ზომით წარმოქმნილ გარე ზომას, საზოგადოდ, არა აქვს არა მხოლოდ თვლადად ადიციურობის, არამედ ადიციურობის თვისებაც კი (იხ. თეორემა 6.4.3), თუმცა სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.1.2. **μ^* ფუნქციას აქვს თვლადად ნახევრადადიციურობის თვისება.**

დამტკიცება. ვთქვათ, $A, A_1, A_2, \dots$ არიან X-ის ქვესიმრავლეები და $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. თუ $\mu^*(A_n) = \infty$ რომელიმე n-სთვის, მაშინ ცხადია, რომ $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. ამრიგად, განსახილავი რჩება ის შემთხვევა, როცა

$\mu^*(A_n) < \infty$ ყოველი n-სთვის. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. μ^*-ის განსაზღვრის ძალით ყოველი n-სთვის მოიძებნებიან შემდეგი პირობების დამაკმაყოფილებელი $B_{n,m} \in \mathrm{H}$ $(m \in \mathbb{N})$ სიმრავლეები:

$$A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{n,m}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_{n,m}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

აქედან, μ^*-ის განსაზღვრისა და $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{n,m}$ ჩართვის გათვალისწინებით გვექნება,

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_{n,m}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

საიდანაც, ε-ის ნებისმიერობიდან გამომდინარე ვღებულობთ საჭირო შეფასებას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ზომით წარმოქმნილი გარე ზომის თვისებები საფუძვლად ედება აბსტრაქტული გარე ზომის განსაზღვრებას: X-ის ყველა ქვესიმრავლის კლასზე განსაზღვრულ λ ფუნქციას ეწოდება **გარე ზომა X-ში**, თუ მას აქვს შემდეგი თვისებები:

- $\lambda(\emptyset) = 0$;
- λ არაუარყოფითია;
- λ ზრდადია;
- λ თვლადად ნახევრადადიციურია.

შენიშვნა 5.1.3. მარტივი დასანახია, რომ გარე ზომას აქვს ნახევრადადიციურობის თვისებაც.

ამოცანები

1. ააგეთ მაგალითი გარე ზომისა, რომელსაც არა აქვს ადიციურობის თვისება.

§ 2. ზომის გაგრძელების ლებეგის მეთოდი

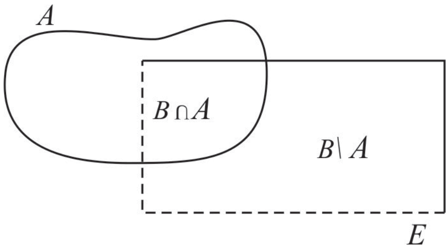
ვთქვათ, μ არის რაიმე H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. ჩვენი მიზანია, **ვიპოვოთ სიმრავლეთა რაც შეიძლება დიდი S კლასი, რომლის ფარგლებშიც μ ზომით წარმოქმნილ μ^* გარე ზომას ექნება ზომის თვისებები.** ბუნებრივია, S კლასს მოვთხოვოთ, რომ მან გააფართოოს H რგოლი და თავადაც წარმოადგენდეს რგოლს ან კიდევ უფრო მდიდარი სტრუქტურის მქონე რაიმე კლასს.

პრინციპი, რომლის მეშვეობითაც ლებეგმა გამოყო S კლასი ეფუძნება შემდეგ ბუნებრივ მოსაზრებას: **S კლასიდან აღებულმა A სიმრავლემ H**

რგოლის ნებისმიერი B სიმრავლე უნდა დაშალოს ადიციურობის თვისებასთან თანხმობაში მყოფ ნაწილებად, ე.ი. $B \cap A$ **და** $B \setminus A$ **სიმრავლეებისათვის უნდა სრულდებოდეს ტოლობა**:

$$\mu(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

მართლაც, თუ $\mathrm{S} \supset \mathrm{H}$, S რგოლია და $\mu^*|_{\mathrm{S}}$ ზომაა, მაშინ სამივე - B, $B \cap A$ და $B \setminus A$ სიმრავლე უნდა შედიოდეს S კლასში და ზომის ადიციურობის თვისების ძალით უნდა გვქონდეს, რომ $\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B) = \mu(B)$ (ნახ. 5.2).



ნახ. 5.2.

S კლასისათვის ნაპოვნი აუცილებელი პირობის საფუძველზე შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრება:

$A \subset X$ სიმრავლეს ვუწოდოთ **ლებეგის აზრით ზომადი** μ **ფუძის მიხედვით** (მოკლედ, **ლებეგის აზრით ზომადი**), თუ ყოველი $B \in \mathrm{H}$ სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\mu(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ლებეგის აზრით ზომადობის პირობა არსებით შედეგს იძლევა დასახული ამოცანის გადაწყვეტის თვალსაზრისით.

თეორემა 5.2.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. მაშინ ლებეგის აზრით ზომადი ყველა სიმრავლის S კლასს აქვს შემდეგი თვისებები:

- **$\mathrm{S} \supset \mathrm{H}$;**
- **S არის σ-ალგებრა;**
- **μ^* გარე ზომის შეზღუდვა S კლასზე არის ზომა.**

თეორემა 5.2.1 აფუძნებს რგოლზე განსაზღვრული μ ზომის გაგრძელების ლებეგის მეთოდს, რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობს: **ჯერ აიგება μ ზომით წარმოქმნილი μ^* გარე ზომა, ხოლო შემდეგ, μ^* გარე ზომა იზღუდება ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასზე**. ასეთი წესით

მიღებულ გაგრძელებას μ ზომის **ლებეგისეულ გაგრძელებას** უწოდებენ და მას $\overline{\mu}$ ჩანაწერით აღნიშნავენ.

ახლა ჩვენ არ დავამტკიცებთ თეორემა 5.2.1-ს, რადგანაც მომდევნო პარაგრაფში დადგენილი იქნება კიდევ უფრო ზოგადი თეორემა, რომელიც ეკუთვნის კ. კარათეოდორს.

შენიშვნა 5.2.1. იმ შემთხვევაში, როცა μ ზომა არის მოცულობა (განსაზღვრული ნახევრადღია მონაკვეთების სასრული გაერთიანებების $r(\mathcal{I}^n)$ რგოლზე), თეორემა 5.2.1 დამტკიცებული იყო ლებეგის მიერ. ზოგადი შემთხვევა კი ეკუთვნის ფრეშეს.

შენიშვნა 5.2.2. თეორემა 5.2.1-ის ძალით ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეების S კლასი წარმოადგენს H რგოლის შემცველ σ-ალგებრას. შედეგად, S შეიცავს H რგოლით წარმოქმნილ σ-ალგებრასაც, ე.ი. $\mathrm{S} \supset \sigma a(\mathrm{H})$.

შენიშვნა 5.2.3. წინა პარაგრაფის პირველი შენიშვნის გათვალისწინებით გვაქვს, რომ: თუ ალგებრაზე (რგოლზე) განსაზღვრული μ ზომა შემოსაზღვრულია (σ-შემოსაზღვრულია), მაშინ შემოსაზღვრულია (σ-შემოსაზღვრულია) მისი ლებეგისეული $\overline{\mu}$ გაგრძელებაც.

შენიშვნა 5.2.4. შემდგომში ნაჩვენები იქნება, რომ (იხ. ამოცანა 5.2.1 და თეორემა 5.3.1) ზომის ლებეგისეული გაგრძელების განმეორებითი გამოყენება, ზომის გაგრძელების თვალსაზრისით, ახალს არაფერს იძლევა, ე.ი. $\overline{\overline{\mu}} = \overline{\mu}$.

ვთქვათ, μ არის რაიმე ზომა, ხოლო H კლასი არის მისი განსაზღვრის არე. μ ზომას ეწოდება **სრული**, თუ ნულზომიანი სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე ზომადია, ე.ი.

$$(A \in \mathrm{H},\ \mu(A) = 0,\ A' \subset A) \ \Rightarrow\ A' \in \mathrm{H}.$$

ცხადია, რომ ზომის სისრულის შემთხვევაში, ნულზომიანი სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე ასევე ნულზომიანი სიმრავლე იქნება.

თეორემა 5.2.2. ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებას აქვს სისრულის თვისება.

თეორემა 5.2.2 გამომდინარეობს შემდეგი დებულებიდან.

თეორემა 5.2.3. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. თუ $A \subset X$ სიმრავლეს აქვს ნულის ტოლი გარე ზომა, ე.ი. $\mu^*(A) = 0$, მაშინ A არის ლებეგის აზრით ზომადი.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $B \in \mathrm{H}$ სიმრავლე. გარე ზომის ზრდადობის გამო: $\mu^*(B \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$. შედეგად, $\mu^*(B \cap A) = 0$. საიდანაც, გარე ზომის ზრდადობისა და ნახევრადადიციურობის თვისებების

ძალით გვექნება: $\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B)$. ამრიგად, $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$. აქედან გამომდინარე, ვასკვნით, რომ A სიმრავლე არის ლებეგის აზრით ზომადი. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ვთქვათ, μ არის რგოლზე განსაზღვრული ზომა. დაამტკიცეთ, რომ μ ზომის ლებეგისეული გაგრძელებით წარმოქმნილი გარე ზომა ემთხვევა μ ზომით წარმოქმნილ გარე ზომას, ე.ი. $\overline{\mu}^* = \mu^*$.

§ 3. გარე ზომის მეშვეობით ზომის წარმოქმნის კარათეოდორის მეთოდი

ვთქვათ, λ არის აბსტრაქტული გარე ზომა X სიმრავლეში. **შესაძლებელია თუ არა რაიმე წესით X-ის ქვესიმრავლეთა ფართო S კლასის გამოყოფა, რომლის ფარგლებში λ გარე ზომას ექნება ზომის თვისებები**?

ლებეგის მიდგომა ასეთ ზოგად სიტუაციაზე გაავრცელა კ. კარათეოდორმა, რომლის კონსტრუქცია ეფუძნება შემდეგ განსაზღვრებას:

ვთქვათ, λ არის გარე ზომა X სიმრავლეში. $A \subset X$ სიმრავლეს ვუწოდოთ **კარათეოდორის აზრით ზომადი λ ფუძის მიხედვით** (მოკლედ, **კარათეოდორის აზრით ზომადი**), თუ ყოველი $B \subset X$ სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\lambda(B) = \lambda(B \cap A) + \lambda(B \setminus A).$$

შენიშვნა 5.3.1. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\overline{A} = X \setminus A$, მაშინ ცხადია, $B \setminus A = B \cap \overline{A}$. შედეგად, კარათეოდორის აზრით ზომადობის განსაზღვრებაში მოცემული ტოლობა შემდეგი სახით შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\lambda(B) = \lambda(B \cap A) + \lambda(B \cap \overline{A}).$$

შენიშვნა 5.3.2. $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ ტოლობისა და გარე ზომის ნახევრადადიციურობის ძალით, ყოველთვის სრულდება უტოლობა:

$$\lambda(B) \leq \lambda(B \cap A) + \lambda(B \setminus A).$$

შენიშვნა 5.3.3. როგორც ვხედავთ, განსხვავებით ლებეგის აზრით ზომადობის განსაზღვრებისაგან, მოითხოვება, რომ კარათეოდორის აზრით ზომადმა A სიმრავლემ X სივრცის ნებისმიერი B ქვესიმრავლე დაშალოს ადიციურობასთან თანხმობაში მყოფ $B \cap A$ და $B \setminus A$ ნაწილებად. ზოგად სიტუაციაში არა გვაქვს ზომად სიმრავლეთა საწყისი H კლასი, რის გამოც ეს მოთხოვნა გონივრულ გზად ჩანს ზომადი A სიმრავლეების (ე.ი. S კლასის) გამოყოფის მიზნით.

შემდეგი თეორემის თანახმად, ლებეგისა და კარათეოდორის აზრით ზომადობის ცნებები ერთმანეთს ემთხვევა იმ სიტუაციაში, როცა λ გარე ზომა წარმოქმნილია რაიმე μ ზომით, ე.ი. $\lambda = \mu^*$.

თეორემა 5.3.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. მაშინ ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისათვის შემდეგი წინადადებები ტოლფასია:

- **A ლებეგის აზრით ზომადია μ ფუძის მიხედვით;**
- **A კარათეოდორის აზრით ზომადია μ^* ფუძის მიხედვით.**

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ $A \subset X$ სიმრავლის ლებეგის აზრით ზომადობა μ ფუძის მიხედვით იწვევს A-ს კარათეოდორის აზრით ზომადობას μ^* ფუძის მიხედვით. შებრუნებული იმპლიკაცია ცხადია.

ამრიგად, დასამტკიცებელი გვაქვს ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლისათვის $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$ ტოლობის სამართლიანობა. შენიშვნა 5.3.2-ის თანახმად, $\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$. დავადგინოთ შებრუნებული შეფასება:

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A). \tag{1}$$

თუ $\mu^*(B) = \infty$, მაშინ (1) ცხადია. დავუშვათ $\mu^*(B) < \infty$. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. μ^* გარე ზომის განსაზღვრის საფუძველზე შეგვიძლია ვიპოვოთ H რგოლის სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{და} \quad \mu^*(B) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

თუ E_n სიმრავლეებისათვის გამოვიყენებთ A სიმრავლის ლებეგის აზრით ზომადობას μ ფუძის მიხედვით და გავითვალისწინებთ გარე ზომის თვლადად ნახევრადადიციურობის თვისებას გვექნება,

$$\mu^*(B) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n \setminus A) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

საიდანაც, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის საფუძველზე ვასკვნით (1) შეფასების სამართლიანობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

კარათეოდორმა დაამტკიცა თეორემა 5.2.1-ის შემდეგი განზოგადება.

თეორემა 5.3.2. ვთქვათ, λ არის გარე ზომა X სიმრავლეში. მაშინ კარათეოდორის აზრით ზომადი ყველა სიმრავლის S კლასს აქვს შემდეგი თვისებები:

- **S არის σ-ალგებრა;**

- λ **გარე ზომის შეზღუდვა S კლასზე არის ზომა;**
- **თუ დამატებით ცნობილია, რომ λ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომით წარმოქმნილი გარე ზომა, მაშინ S $\supset$ H.**

ლემა 5.3.1. ვთქვათ, λ არის გარე ზომა X სიმრავლეში. მაშინ კარათეოდორის აზრით ზომადი ყველა სიმრავლის S კლასი არის ალგებრა.

დამტკიცება. სიმოკლისათვის კარათეოდორის აზრით ზომადი სიმრავლეები მოვიხსენიოთ, როგორც ზომადი სიმრავლეები.

ნაბიჯი I: $\varnothing$ და X არიან ზომადი სიმრავლეები. მართლაც, $\lambda(\varnothing) = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით, ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლისათვის გვექნება,

$$\lambda(B \cap \varnothing) + \lambda(B \cap \overline{\varnothing}) = \lambda(\varnothing) + \lambda(B) = \lambda(B),$$

$$\lambda(B \cap X) + \lambda(B \cap \overline{X}) = \lambda(B) + \lambda(\varnothing) = \lambda(B).$$

ნაბიჯი II: თუ $A \subset X$ სიმრავლე ზომადია, მაშინ ზომადია მისი დამატებითი $\overline{A}$ სიმრავლეც. მართლაც, A-ს ზომადობის გათვალისწინებით, ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლისათვის შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\lambda(B \cap \overline{A}) + \lambda(B \cap \overline{\overline{A}}) = \lambda(B \cap \overline{A}) + \lambda(B \cap A) = \lambda(B).$$

ნაბიჯი III: თუ G და F სიმრავლეები არიან ზომადი, მაშინ ზომადია მათი გაერთიანებაც. განვიხილოთ ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლე. G-ს ზომადობის გათვალისწინებით გვექნება,

$$\lambda(B \cap (G \cup F)) = \lambda(B \cap (G \cup F) \cap G) + \lambda(B \cap (G \cup F) \cap \overline{G}) =$$

$$\lambda(B \cap G) + \lambda(B \cap F \cap \overline{G}). \tag{2}$$

მეორე მხრივ, F-ის ზომადობის საფუძველზე დავწერთ,

$$\lambda(B \cap (\overline{G \cup F})) = \lambda(B \cap \overline{G} \cap \overline{F}) = \lambda(B \cap \overline{G}) - \lambda(B \cap \overline{G} \cap F). \tag{3}$$

ახლა, თუ შევკრებთ (2) და (3) ტოლობებს და გავითვალისწინებთ G-ს ზომადობას მივიღებთ, რომ

$$\lambda(B \cap (G \cup F)) + \lambda(B \cap (\overline{G \cap F})) = \lambda(B \cap G) + \lambda(B \cap \overline{G}) = \lambda(B).$$

ნაბიჯი IV: თუ G და F სიმრავლეები არიან ზომადი, მაშინ ზომადია მათი სხვაობაც. ამ წინადადების დასადგენად საკმარისია გავითვალისწინოთ ზემოთ ნაჩვენები II და III წინადადებები და შემდეგი ტოლობები: $G \setminus F = G \cap \overline{F}$, $G \cap \overline{F} = \overline{\overline{G} \cup F}$.

I, III და IV წინადადებების ძალით დადგენილია, რომ ყველა ზომადი სიმრავლის S კლასი არის ალგებრა. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 5.3.2. ვთქვათ, λ არის გარე ზომა X სიმრავლეში. თუ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და კარათეოდორის აზრით ზომადი სიმრავლეებია, მაშინ ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლისათვის,

$$\lambda\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(B \cap A_k).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $n = 2$ შემთხვევა. ვთქვათ, $B \subset X$. A_2 სიმრავლის ზომადობისა და $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ პირობის ძალით დავწერთ,

$$\lambda(B \cap (A_1 \cup A_2)) = \lambda(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_2) + \lambda(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap \overline{A}_2) =$$

$$\lambda(B \cap A_2) + \lambda(B \cap A_1).$$

ამის შემდეგ, ნებისმიერი n-სთვის წინადადება მარტივად მტკიცდება ინდუქციით n-ის მიმართ. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 5.3.2-ის დამტკიცება. ნაბიჯი I: S არის σ-ალგებრა. დავუშვათ, A_n $(n \in \mathbb{N})$ არიან ზომადი სიმრავლეები. ჩვენი მიზანია, ვაჩვენოთ მათი გაერთიანების ზომადობა. ლემა 5.3.1-ის თანახმად, S არის ალგებრა. ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ A_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია. განვიხილოთ ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლე. S ალგებრაა, ამიტომ $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ სიმრავლე ზომადია. აქედან, ლემა 5.3.2-ის და გარე ზომის ზრდადობის გათვალისწინებით გვექნება,

$$\lambda(B) = \lambda\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \lambda\left(B \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}\right) \geq$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(B \cap A_k) + \lambda\left(B \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}\right).$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ n-ის ნებისმიერობასა და გარე ზომის თვლადად ნახევრადადიციურობას, დავწერთ

$$\lambda(B) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B \cap A_k) + \lambda\left(B \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}\right) \geq$$

$$\geq \lambda\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \lambda\left(B \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}\right). \tag{4}$$

აქედან, შენიშვნა 5.3.2-ის გათვალისწინებით მივიღებთ ტოლობას:

$$\lambda(B) = \lambda\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \lambda\left(B \cap \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}\right).$$

შედეგად, ვასკვნით, რომ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in$ S.

ნაბიჯი II: λ-ს შეზღუდვა S-ზე არის ზომა. დასადგენი გვაქვს $\lambda|_S$ ფუნქციის თვლადად ადიციურობა. ვთქვათ, A_n $(n \in \mathbb{N})$ არიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და ზომადი სიმრავლეები. თუ (4)-ის პირველ შეფასებაში B როლში ავიღებთ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლეს, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) + \lambda(\emptyset) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

საიდანაც, გარე ზომის თვლადად ნახევრადადიციურობის გათვალისწინებით ვასკვნით $\lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$ ტოლობას.

ნაბიჯი III: თუ λ არის H რგოლზე განსაზღვრული μ ზომით წარმოქმნილი გარე ზომა, მაშინ S $\supset$ H.

ვთქვათ, $A \in$ H. უნდა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $B \subset X$ სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap \overline{A}). \tag{5}$$

$\mu^*(B) = \infty$ შემთხვევაში (5) ტოლობა მიიღება შენიშვნა 5.3.2-ის საფუძველზე. დავუშვათ, $\mu^*(B) < \infty$. μ^*-ის განსაზღვრის ძალით ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება H რგოლის სიმრავლეების (E_n) მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{და} \quad \mu^*(B) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

აქედან გამომდინარე, μ ზომის ადიციურობისა და μ^* გარე ზომის განსაზღვრის გათვალისწინებით ვწერთ,

$$\mu^*(B) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap \overline{A}) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap \overline{A}).$$

აქედან, თავის მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ ε-ის ნებისმიერობასა და შენიშვნა 5.3.2-ს, დავასკვნით (5) ტოლობის სამართლიანობას.

თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 5.3.2 საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრება: ვთქვათ, λ არის გარე ზომა X სიმრავლეში. მაშინ λ-ს შეზღუდვას კარათეოდორის აზრით ზომადი ყველა სიმრავლის S კლასზე ეწოდება λ **გარე ზომით წარმოქმნილი (ინდუცირებული) ზომა** და იგი აღინიშნება $\overline{\lambda}$ ჩანაწერით.

თეორემა 5.2.3-ის მსგავსად მტკიცდება შემდეგი დებულება.

თეორემა 5.3.3. ვთქვათ, λ არის X სიმრავლეში განსაზღვრული გარე ზომა. თუ $A \subset X$ სიმრავლეს აქვს ნულის ტოლი გარე ზომა, ე.ი. $\lambda(A) = 0$, მაშინ A არის კარათეოდორის აზრით ზომადი.

შედეგი 5.3.1. გარე ზომით წარმოქმნილ ზომას აქვს სისრულის თვისება.

ამოცანები

1. ვთქვათ, λ გარე ზომაა X-ში. აჩვენეთ, რომ $\{\emptyset, X\} \subset \mathrm{S} \subset 2^X$ (აქ და ქვემოთ S აღნიშნავს კარათეოდორის აზრით ზომადი სიმრავლეების კლასს).
2. ააგეთ მაგალითი λ გარე ზომისა, რომლისთვისაც $\mathrm{S} = \{\emptyset, X\}$.
3. ააგეთ მაგალითი λ გარე ზომისა, რომლისთვისაც $\mathrm{S} = 2^X$.
4. თუ $\mathrm{card}(X) \geq 2$, მაშინ ააგეთ მაგალითი λ გარე ზომისა, რომლისთვისაც სრულდება მკაცრი ჩართვები: $\{\emptyset, X\} \subset \mathrm{S} \subset 2^X$.

§ 4. ზომის ბორელისეული გაგრძელება და მისი კავშირი ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებასთან

ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. როგორც ვიცით, ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეების S კლასი შეიცავს H რგოლით წარმოქმნილ σ-ალგებრას, ე.ი. $\mathrm{S} \supset \sigma a(\mathrm{H})$. შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ $\sigma a(\mathrm{H})$ კლასი ძალიან ახლოს დგას S კლასთან.

თეორემა 5.4.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. თუ A არის ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლე და $\mu^*(A) < \infty$, მაშინ A წარმოიდგინება სახით: $A = M \cup N$, სადაც $M \cap N = \emptyset$, $M \in \sigma a(\mathrm{H})$ და N არის სიმრავლე, რომლისთვისაც მოიძებნება E სიმრავლე, ისეთი, რომ: $E \in \sigma a(\mathrm{H})$, $E \supset N$ და $\mu^*(E) = 0$. თუ დამატებით ცნობილია, რომ μ ზომა არის σ-შემოსაზღვრული, მაშინ იგივე დასკვნა სამართლიანია ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი A სიმრავლისათვის.

ლემა 5.4.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. თუ $A \subset X$ და $\mu^*(A) < \infty$, მაშინ მოიძებნება $B \in \sigma a(\mathrm{H})$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $B \supset A$ და $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.

დამტკიცება. ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის განვიხილოთ სიმრავლეთა $A_{n,k} \in \mathrm{H}$ $(k \in \mathbb{N})$ მიმდევრობა შემდეგი თვისებებით:

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}.$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ B სიმრავლის როლში შეიძლება ავიღოთ $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}$ სიმრავლე. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 5.4.2. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი A სიმრავლისათვის მოიძებნება $B \in \sigma a(H)$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $B \supset A$ და $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.

დამტკიცება. განვიხილოთ H კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა (X_n) მიმდევრობა თვისებებით: $\mu(X_n) < \infty$ და $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. აღვნიშნოთ $A_n = A \cap X_n$. ცხადია, $\mu(A_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$. თუ ვისარგებლებთ ლემა 5.4.1-ით, ყოველი n-სთვის ვიპოვით $B_n \in \sigma a(\mathrm{H})$ სიმრავლეს, რომლისთვისაც: $B_n \supset A_n$ და $\mu^*(B_n) = \mu^*(A_n)$. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $B_n \subset X_n$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში B_n-ის ნაცვლად განვიხილავდით $B_n \cap X_n$ სიმრავლეს). აღვნიშნოთ $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. მაშინ გვექნება: $B \in \sigma a(\mathrm{H})$, $B \supset A$ და

$$\mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \setminus A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n \setminus A_n) = 0.$$

აქ ვითვალისწინებთ, რომ A_n და B_n სიმრავლეთა ზომადობის გამო, $\mu^*(B_n \setminus A_n) = \mu^*(B_n) - \mu^*(A_n) = 0$.

ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 5.4.1-ის დამტკიცება. ლემა 5.4.1-ის საფუძველზე ვიპოვოთ $B \in \sigma a(\mathrm{H})$ სიმრავლე, რომლისთვისაც $B \supset A$ და $\mu^*(B) = \mu^*(A)$. A და B სიმრავლეების ზომადობის გამო ადგილი ექნება $\mu^*(B \setminus A) = 0$ ტოლობას. შემდეგ, კვლავ გამოვიყენოთ ლემა 5.4.1 და ვიპოვოთ $E \in \sigma a(\mathrm{H})$ სიმრავლე, თვისებებით: $E \supset B \setminus A$ და $\mu^*(E) = \mu^*(B \setminus A) = 0$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $M = B \setminus E$ და $N = A \setminus M$ სიმრავლეები აკმაყოფილებენ საჭირო პირობებს.

σ-შემოსაზღვრული ზომის შემთხვევაში დამტკიცება სავსებით ანალოგიურია, ოღონდ ლემა 5.4.1-ის ნაცვლად უნდა გამოვიყენოთ ლემა 5.4.2. თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 5.4.1. ლემა 5.4.1-ის, ლემა 5.4.2-ისა და თეორემა 5.4.1-ის დამტკიცებების გათვალისწინებით, B, M და E სიმრავლეების შესახებ შეგვიძლია ვთქვათ უფრო მეტი, სახელდობრ ის, რომ ამ სიმრავლეებს აქვთ სახე:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k},$$

სადაც $A_{n,k} \in \mathrm{H}$ $(n, k \in \mathbb{N})$.

მარტივი შესამოწმებელია შემდეგი თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა 5.4.2. ვთქვათ, μ არის T σ-რგოლზე განსაზღვრული ზომა. განვიხილოთ $M \cup N$ სახის სიმრავლეთა $\widetilde{\mathrm{T}}$ კლასი, სადაც $M \cap N = \emptyset$,

$M \in \mathrm{T}$ **და** N **არის** T**-ში შემავალი რაიმე ნულზომიანი სიმრავლის ქვესიმრავლე. მაშინ:**

- $\widetilde{\mathrm{T}}$ **კლასი არის** σ**-რგოლი;**
- **არსებობს ერთადერთი ზომა, რომელიც ახდენს** μ**-ს გაგრძელებას** $\widetilde{\mathrm{T}}$ **კლასზე. ეს ზომა მოიცემა ტოლობით:** $\widetilde{\mu}(M \cup N) = \mu(M)$**;**
- $\widetilde{\mu}$ **არის სრული ზომა.**

თეორემა 5.4.2-ში განსაზღვრულ $\widetilde{\mu}$ ზომას μ **ზომის შევსება** ეწოდება.

ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. μ^* გარე ზომის შეზღუდვას $\sigma a(\mathrm{H})$ კლასზე ეწოდება μ **ზომის ბორელისეული გაგრძელება**.

ცხადია, ბორელისეული გაგრძელება არის ზომის გაგრძელების უფრო სუსტი ვარიანტი, ვიდრე ლებეგისეული გაგრძელება.

5.4.1 და 5.4.2 თეორემებიდან ვღებულობთ შემდეგ დებულებას.

თეორემა 5.4.3. σ**-შემოსაზღვრული ზომის ლებეგისეული გაგრძელება წარმოადგენს მისი ბორელისეული გაგრძელების შევსებას.**

§ 5. ზომის გაგრძელების ერთადერთობა

თეორემა 5.5.1. ვთქვათ, μ **არის** H **რგოლზე განსაზღვრული** σ**-შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ** μ**-ს ბორელისეული გაგრძელება წარმოადგენს ერთადერთ ზომას, რომელიც ახდენს** μ**-ს გაგრძელებას** $\sigma a(\mathrm{H})$ **კლასზე.**

დამტკიცება. ვთქვათ, ν არის μ ზომის ბორელისეული გაგრძელება (ე.ი. $\nu = \mu^*|_{\sigma a(\mathrm{H})}$), ხოლო λ არის μ-ს რაიმე გაგრძელება $\sigma a(\mathrm{H})$ კლასზე. უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\lambda(A) = \nu(A)$ ყოველი $A \in \sigma a(\mathrm{H})$ სიმრავლისათვის.

ჯერ თეორემა დავამტკიცოთ იმ შემთხვევაში, როცა H ალგებრაა და μ შემოსაზღვრული ზომაა. ცხადია, $\nu(X) = \lambda(X) = \mu(X) < \infty$. ამრიგად, ν და λ შემოსაზღვრული ზომებია. აღვნიშნოთ

$$\mathrm{Q} = \{A \in \sigma a(\mathrm{H}) : \lambda(A) = \nu(A)\}.$$

ცხადია, $\mathrm{H} \subset \mathrm{Q} \subset \sigma a(\mathrm{H})$. ვაჩვენოთ, რომ Q წარმოადგენს მონოტონურ კლასს. ვთქვათ, $A_n \in \mathrm{Q}$ ზრდადი მიმდევრობაა. მაშინ ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისების ძალით ვწერთ,

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

შედეგად, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathrm{Q}$. ანალოგიურად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ν და λ ზომები შემოსაზღვრული არიან და ვისარგებლებთ ზომის ზემოდან უწყვეტობის

თვისებით, დავასკვნით, რომ ყოველი კლებადი $A_n \in \mathrm{Q}$ მიმდევრობისათვის: $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathrm{Q}$. ამრიგად, Q მონოტონური კლასია. შედეგად, $m(\mathrm{H}) \subset \mathrm{Q} \subset \sigma a(\mathrm{H})$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ალგებრით წარმოქმნილი მონოტონური კლასი და σ-ალგებრა ერთმანეთს ემთხვევა (იხ. შედეგი 3.3.1), გვექნება: $m(\mathrm{H}) = \sigma a(\mathrm{H}) = \mathrm{Q}$. ამით განსახილავ შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა $X_n \in \mathrm{H}$ მიმდევრობა ისეთია, რომ: $\mu(X_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ და $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. თუ ნებისმიერი n-სთვის გავითვალისწინებთ თეორემა 3.3.3-ს და გამოვიყენებთ თეორემის უკვე დამტკიცებულ ნაწილს $\mathrm{H} \cap X_n$ ალგებრისათვის და $\mu|_{\mathrm{H}\cap X_n}, \nu|_{\sigma a(\mathrm{H}\cap X_n)}$, $\lambda|_{\sigma a(\mathrm{H}\cap X_n)}$ ზომებისათვის, დავასკვნით, რომ ν და λ ზომები ერთმანეთს ემთხვევა $\sigma a(\mathrm{H}) \cap X_n$ კლასზე ყოველი n-სთვის. აქედან კი უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ν და λ ზომები ერთმანეთს ემთხვევა $\sigma a(\mathrm{H})$ კლასზეც. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

დამტკიცებული თეორემიდან და თეორემა 5.4.1-დან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 5.5.2. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ μ-ს ლებეგისეული გაგრძელება წარმოადგენს ერთადერთ ზომას, რომელიც ახდენს μ-ს გაგრძელებას ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა S კლასზე.

§ 6. ზომადობის კრიტერიუმი საწყისი რგოლის სიმრავლეთა მეშვეობით მიახლოების ტერმინებში

ზომის ლებეგისეული გაგრძელების აგებისას, კლასი, რომლის ფარგლებში გარე ზომას აქვს ზომის თვისებები, გამოყოფილი იქნა საწყისი რგოლის სიმრავლეთა „წესიერ" ნაწილებად დაჭრის თვისების საფუძველზე. საკმაოდ ზოგად პირობებში არსებობს საკითხის გადაწყვეტის სხვა ეკვივალენტური მიდგომებიც. ამ პარაგრაფში გავეცნობით ერთ-ერთ ასეთ მეთოდს, რომელიც ზომად სიმრავლეთა კლასს გამოყოფს საწყისი რგოლის სიმრავლეებით მიახლოებადობის თვისების საფუძველზე.

თეორემა 5.6.1. ვთქვათ, μ არის H ალგებრაზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **A არის ლებეგის აზრით ზომადი;**
- **ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $B \in \mathrm{H}$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.**

შენიშვნა 5.6.1. გამომდინარე იქედან, რომ $A\triangle B$ გამოხატავს A და B სიმრავლეებს შორის განსხვავებას, ხოლო $\mu^*(A\triangle B)$ შეიძლება განვიხილოთ, როგორც აღნიშნული განსხვავების რაოდენობრივი მახასიათებელი, თეორემა 5.6.1-ის მეორე პირობა მართლაც ასახავს A სიმრავლის მიახლოების შესაძლებლობას საწყისი H რგოლის სიმრავლეების მეშვეობით.

ლემა 5.6.1. ვთქვათ, μ **არის** H **რგოლზე განსაზღვრული ზომა. მაშინ ნებისმიერი** $A, B \subset X$ **სიმრავლეებისათვის სრულდება შეფასება:**

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\triangle B).$$

დამტკიცება. მარტივი შესამოწმებელია შემდეგი ჩართვების სამართლიანობა: $A \subset B \cup (A\triangle B)$ და $B \subset A \cup (A\triangle B)$. აქედან, გარე ზომის ნახევრადადიციურობის ძალით, გვექნება,

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A\triangle B), \quad \mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A\triangle B),$$

ამ შეფასებებიდან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი უტოლობა. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 5.6.1-ის დამტკიცება. თავდაპირველად დავადგინოთ 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია. აქ 1) და 2) შესაბამისად აღნიშნავენ თეორემის პირველ და მეორე წინადადებებს. იმის გათვალისწინებით, რომ $\mu^*(A) < \infty$, შეგვიძლია ვიპოვოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $A_n \in$ H $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეები, ისეთები, რომ:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

თუ გამოვიყენებთ ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისებას $\overline{\mu}$ ლებეგისეული გაგრძელებისათვის, ვიპოვით $N \in \mathbb{N}$ რიცხვს, ისეთს, რომ

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

B-ს როლში ავიღოთ $\bigcup_{n=1}^{N} A_n$ სიმრავლე. თუ ვისარგებლებთ ზომის თვისებებით $\overline{\mu}$ ზომის შემთხვევაში, გვექნება:

$$\mu^*(A \setminus B) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

და

$$\mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \mu^*(A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ $\mu^*(A\triangle B) < \varepsilon$. ამით 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია დადგენილია.

ვაჩვენოთ შებრუნებული 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია. ვთქვათ, $C \in \mathrm{H}$ რაიმე სიმრავლეა. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და მისთვის ვიპოვოთ $B \in \mathrm{H}$ სიმრავლე ისეთი, რომ $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. მარტივი შესამოწმებელია შემდეგი ჩართვების სამართლიანობა:

$$(C \cap A) \triangle (C \cap B) \subset A \triangle B, \quad (C \cap \overline{A}) \triangle (C \cap \overline{B}) \subset A \triangle B.$$

საიდანაც ლემა 5.6.1-ის ძალით ვასკვნით, რომ:

$$|\mu^*(C \cap A) - \mu^*(C \cap B)| \le \mu^*(A \triangle B) < \varepsilon,$$

$$|\mu^*(C \cap \overline{A}) - \mu^*(C \cap \overline{B})| \le \mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ B და C სიმრავლეები ეკუთვნიან H რგოლს, დავწერთ,

$$\mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap \overline{A}) \le \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \cap \overline{B}) + 2\varepsilon =$$

$$= \mu(C \cap B) + \mu(C \cap \overline{B}) + 2\varepsilon = \mu(C) + 2\varepsilon.$$

შედეგად, ε-ის ნებისმიერობის გამო, ვღებულობთ, რომ

$$\mu(C) \ge \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap \overline{A}).$$

უკანასკნელი უტოლობა, როგორც ვიცით, საკმარისია $\mu(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap \overline{A})$ ტოლობის დასადგენად. ამრიგად, A სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია. ამით 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

სამართლიანია თეორემა 5.6.1-ის შემდეგი გაძლიერება.

თეორემა 5.6.2. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა, $Q \in \mathrm{H}$ და $\mu(Q) < \infty$. მაშინ ნებისმიერი $A \subset Q$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **A არის ლებეგის აზრით ზომადი;**
- **ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $B \in \mathrm{H}, B \subset Q$, სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.**

ლემა 5.6.2. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. თუ $A \subset X$, $B \in \mathrm{H}$ და $A \cap B = \emptyset$, მაშინ $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu(B)$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ H კლასისადმი მიკუთვნების გამო, B სიმრავლე იქნება ლებეგის აზრით ზომადი და შედეგად, კარათეოდორის აზრით ზომადიც. თუ B სიმრავლის ამ უკანასკნელ თვისებას გამოვიყენებთ $A \cup B$ სიმრავლის მიმართ, მაშინ $A \cap B = \emptyset$ პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ,

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap B) + \mu^*((A \cup B) \setminus B) =$$

$$= \mu^*(B) + \mu^*(A) = \mu(B) + \mu^*(A).$$

ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 5.6.3. **ვთქვათ,** μ **არის** H **რგოლზე განსაზღვრული ზომა და** $Q \in \mathrm{H}$**. მაშინ ნებისმიერი** $A \subset Q$ **სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:**

- A **არის ლებეგის აზრით ზომადი;**
- **ყოველი** $C \in \mathrm{H}, C \subset Q,$ **სიმრავლისათვის სრულდება** $\mu(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \setminus A)$ **ტოლობა.**

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია ცხადია. დავამტკიცოთ შებრუნებული იმპლიკაცია: 2) პირობის შესრულება იწვევს იმას, რომ ნებისმიერი $B \in \mathrm{H}$ სიმრავლისათვის,

$$\mu(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

$A \subset Q$ ჩართვისა და 2) პირობის ძალით დავწერთ,

$$\mu^*(B \cap A) = \mu^*((B \cap Q) \cap A) = \mu(B \cap Q) - \mu^*((B \cap Q) \setminus A). \qquad (1)$$

$A \subset Q$ ჩართვისა და ლემა 5.6.2-ის საფუძველზე კი გვექნება,

$$\mu^*(B \setminus A) = \mu(B \setminus Q) + \mu^*((B \cap Q) \setminus A). \qquad (2)$$

(1) და (2) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ, რომ

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu(B \cap Q) + \mu(B \setminus Q).$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარე კი B და Q სიმრავლეების H კლასისადმი მიკუთვნების გამო $\mu(B)$-ს ტოლია. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 5.6.2-ის დამტკიცება. განვიხილოთ $\mathrm{H} \cap Q$ კლასი და მასზე μ ზომის შეზღუდვა აღვნიშნოთ μ_Q-თი. ცხადია, $\mathrm{H} \cap Q$ არის ალგებრა, ხოლო μ_Q არის შემოსაზღვრული ზომა. თუ Q-ს მივიჩნევთ ძირითად სამოქმედო სივრცედ და თეორემა 5.6.2-ს გამოვიყენებთ $\mathrm{H} \cap Q$ ალგებრისა და μ_Q ზომისათვის, მაშინ დავასკვნით, რომ ნებისმიერი $A \subset Q$ სიმრავლისათვის შემდეგი წინადადებები ტოლფასია:

$1')$ A არის ლებეგის აზრით ზომადი μ_Q ფუძის მიხედვით;

$2')$ ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $B \in \mathrm{H}, B \subset Q,$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mu_Q^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

აქ μ_Q^* არის Q-ში განსაზღვრული გარე ზომა, რომელიც წარმოქმნილია μ_Q ზომით.

შემდეგ შევნიშნოთ, რომ ყოველი $E \subset Q$ სიმრავლისათვის ადგილი აქვს მარტივად შესამოწმებელ ტოლობას:

$$\mu_Q^*(E) = \mu^*(E). \qquad (3)$$

(3) ტოლობის გათვალისწინებით ვრწმუნდებით, რომ $2')$ წინადადება იგივეა, რაც თეორემის მეორე წინადადება, ხოლო კვლავ (3) ტოლობისა და

ლემა 5.6.3-ის ძალით კი ვასკვნით 1′) წინადადებისა და თეორემის პირველი წინადადების ტოლფასობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 5.6.3. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **A არის ლებეგის აზრით ზომადი;**
- **ყოველი $Q \in \mathrm{H}$, $\mu(Q) < \infty$, სიმრავლისა და დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება $B \in \mathrm{H}$, $B \subset Q$, სიმრავლე ისეთი, რომ $\mu^*((A \cap Q) \triangle B) < \varepsilon$.**

თეორემა 5.6.3 წარმოადგენს თეორემა 5.6.2-ის და ქვემოთ მოცემული ლემის შედეგს.

ლემა 5.6.4. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ $A \subset X$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **A არის ლებეგის აზრით ზომადი;**
- **$A \cap Q$ არის ლებეგის აზრით ზომადი ყოველი $Q \in \mathrm{H}$, $\mu(Q) < \infty$, სიმრავლისათვის.**

დამტკიცება. $1) \Rightarrow 2)$ იმპლიკაცია მიიღება იმის გათვალისწინებით, რომ ყოველი $Q \in \mathrm{H}$ სიმრავლე ზომადია და ზომად სიმრავლეთა S კლასი წარმოადგენს σ-ალგებრას. შებრუნებული იმპლიკაციის დასადგენად X უნდა წარმოვადგინოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სასრული ზომის $X_n \in \mathrm{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეების გაერთიანებად. შემდეგ უნდა გავითვალისწინოთ $A \cap X_n \in \mathrm{H}$ სიმრავლეების ზომადობა და ის, რომ ზომად სიმრავლეთა S კლასი წარმოადგენს σ-ალგებრას. ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 5.6.4. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ ნებისმიერი $A \subset X, \mu^*(A) < \infty$, სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **A არის ლებეგის აზრით ზომადი;**
- **ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $B \in \mathrm{H}$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.**

დამტკიცება. $2) \Rightarrow 1)$ იმპლიკაცია მარტივად მიიღება თეორემა 5.6.3-ის საფუძველზე. შებრუნებული დასკვნის დასადგენად X წარმოვადგინოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სასრული ზომის $X_n \in \mathrm{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეების გაერთიანებად. განვიხილოთ A სიმრავლე, რომელიც ლებეგის აზრით ზომადია

და $\mu^*(A) < \infty$. მაშინ გვექნება, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap X_n) = \mu^*(A) < \infty.$$

შედეგად, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ $N \in \mathbb{N}$, რომლისთვისაც

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu^*(A \cap X_n) < \varepsilon/2. \tag{4}$$

აღვნიშნოთ $Q = \bigcup_{n=1}^{N} X_n$. ცხადია, $Q \in \mathrm{H}$ და $\mu(Q) < \infty$. შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A \cap Q$ სიმრავლე არის ლებეგის აზრით ზომადი და გამოვიყენებთ თეორემა 5.6.2-ს, ვიპოვით ისეთ $B \in \mathrm{H}, B \subset Q$, სიმრავლეს, რომლისთვისაც

$$\mu^*((A \cap Q) \triangle B) < \varepsilon/2. \tag{5}$$

საბოლოოდ, (4) და (5) შეფასებებისა და

$$A \triangle B \subset ((A \cap Q) \triangle B) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} (A \cap X_n)$$

ჩართვის ძალით ვღებულობთ, რომ

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

რითაც 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 7. ზომადობის კრიტერიუმი საწყისი რგოლის სიმრავლეთა თვლადი გაერთიანებების მეშვეობით მიახლოების ტერმინებში

ამ პარაგრაფში დადგენილ შედეგებს აქვთ გარკვეული დამოუკიდებელი მნიშვნელობა, თუმცა მათი მთავარი დანიშნულება დაკავშირებულია მომდევნო თავში განხილულ ლებეგის კლასიკური ზომის შესწავლასთან. კერძოდ, ქვემოთ დამტკიცებული დებულებები გამოყენებული იქნება ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეების ტერმინებში $\mathbb{R}^n$ სივრცის ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეების დასახასიათებლად.

სიმრავლეთა H კლასისათვის $\sigma(\mathrm{H})$-ით აღვნიშნოთ H-ის სიმრავლეთა ყველა შესაძლო თვლადი გაერთიანებისაგან შედგენილი კლასი, ე.ი.

$$\sigma(\mathrm{H}) = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \mathrm{H}\ (n \in \mathbb{N}) \right\}.$$

შენიშვნა 5.7.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. მაშინ $\sigma(\mathrm{H})$ კლასის სიმრავლეები იქნებიან ლებეგის აზრით ზომადი. ეს დასკვნა გამომდინარეობს საწყისი H რგოლის სიმრავლეთა ლებეგის აზრით ზომადობიდან და კიდევ იქედან, რომ ზომად სიმრავლეთა კლასი არის σ-ალგებრა.

შენიშვნა 5.7.2. თუ H რგოლია, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ ყოველი $G \in \sigma(\mathrm{H})$ სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $A_n \in \mathrm{H}$ $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეების გაერთიანების სახით.

ქვემოთ დადგენილი იქნება თეორემები, რომლებიც გვაძლევენ ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა დახასიათებას $\sigma(\mathrm{H})$ კლასის სიმრავლეების მეშვეობით ზემოდან მიახლოების ტერმინებში.

თეორემა 5.7.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა, $Q \in \mathrm{H}$ და $\mu(Q) < \infty$. მაშინ ნებისმიერი $A \subset Q$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **A არის ლებეგის აზრით ზომადი;**
- **ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $G \in \sigma(\mathrm{H})$, $G \subset Q$, სიმრავლე, ისეთი, რომ $G \supset A$ და $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$.**

დამტკიცება. თეორემის პირველი და მეორე წინადადებები აღნიშნული იქნება შესაბამისად 1)-ით და 2)-ით.

1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია: ადვილი შესამოწმებელია, რომ მოიძებნებიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $A_n \in \mathrm{H}$, $A_n \subset Q$ $(n \in \mathbb{N})$, სიმრავლეები, ისეთები, რომ

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

G-ს როლში ავიღოთ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლე. ცხადია, $G \in \sigma(\mathrm{H}), G \subset Q$ და $G \supset A$. A_n და A სიმრავლეების ზომადობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\mu^*(G \setminus A) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) =$$

$$= \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \mu^*(A) < \varepsilon.$$

ამით იმპლიკაცია დადგენილია.

2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია: ვთქვათ, $\varepsilon > 0$ და G მისი შესაბამისი სიმრავლეა 2) წინადადებიდან. G წარმოვადგინოთ როგორც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $A_n \in \mathrm{H}$, $A_n \subset Q$ $(n \in \mathbb{N})$, სიმრავლეების გაერთიანება. გვაქვს, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu^*(G) \le \mu(Q) < \infty.$$

განვიხილოთ $N \in \mathbb{N}$, რომლისთვისაც

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon.$$

B-თი აღვნიშნოთ $\bigcup_{n=1}^{N} A_n$ სიმრავლე. ცხადია, $B \in \mathrm{H}$ და $B \subset Q$. $B \subset G$ ჩართვიდან გამომდინარე,

$$\mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(G \setminus A) < \varepsilon.$$

მეორე მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A \setminus B \subset \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$, დავწერთ,

$$\mu^*(A \setminus B) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon.$$

შედეგად,

$$\mu^*(A \bigtriangleup B) < 2\varepsilon.$$

საიდანაც თეორემა 5.6.2-ის ძალით ვასკვნით, რომ A სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია. ამით 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 5.7.2. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული ზომა. მაშინ ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **A არის ლებეგის აზრით ზომადი;**
- **ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $G \in \sigma(\mathrm{H})$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $G \supset A$ და $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$.**

დამტკიცება. განვიხილოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ $X_n \in \mathrm{H}$ სიმრავლეთა მიმდევრობა, ისეთი, რომ $\mu(X_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ და $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია: თუ A ლებეგის აზრით ზომადია, მაშინ ზომადი იქნება $A \cap X_n$ სიმრავლეც ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$. თეორემა 5.7.1-ის ძალით ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის მოიძებნება $G_n \in \sigma(\mathrm{H})$, $G_n \subset X_n$, სიმრავლე თვისებებით: $G_n \supset A_n$ და $\mu^*(G_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^n$, სადაც $A_n = A \cap X_n$. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ სიმრავლე ეკუთვნის $\sigma(\mathrm{H})$ კლასს, $G \supset A$ და

$$\mu^*(G \setminus A) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(G_n \setminus A_n) < \varepsilon.$$

ამით იმპლიკაცია დადგენილია.

2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია: განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. $G \in \sigma(\mathrm{H})$ იყოს სიმრავლე, რომლისთვისაც $G \supset A$ და $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$. აღვნიშნოთ: $G_n = G \cap X_n$ და $A_n = A \cap X_n$ $(n \in \mathbb{N})$. ცხადია, რომ $G_n \in \sigma(H), G_n \subset$

$X_n, G_n \supset A_n$ და $\mu^*(G_n \setminus A_n) \leq \mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$. აქედან თეორემა 5.7.1-ის გათვალისწინებით დავასკვნით A_n სიმრავლის ზომადობას ნებისმიერი n-სთვის. საიდანაც თავის მხრივ გამომდინარეობს A სიმრავლის ზომადობა. ამით $2) \Rightarrow 1)$ იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 5.7.3. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული ზომა, $\mathrm{G} \subset 2^X$ და F იყოს G-ში შემავალ სიმრავლეთა დამატებების კლასი, ე.ი.

$$\mathrm{F} = \{X \setminus G : G \in \mathrm{G}\}.$$

დავუშვათ, G კლასი ისეთია, რომ ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

1) A არის ლებეგის აზრით ზომადი;

2) ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $G \in \mathrm{G}$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $G \supset A$ და $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$.

ასეთ პირობებში შესაძლებელია ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა დახასიათება F კლასის სიმრავლეების მეშვეობით შიგნიდან მიახლოების ტერმინებში. სახელდობრ, ადგილი ექნება შემდეგ დებულებას: **ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:**

1) A არის ლებეგის აზრით ზომადი;

3) ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $F \in \mathrm{F}$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $F \subset A$ და $\mu^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

ამ დებულების დასამტკიცებლად უნდა გავითვალისწინოთ, რომ:

ა) $A \subset X$ სიმრავლისათვის 2) წინადადება სამართლიანია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X \setminus A$ სიმრავლისათვის სამართლიანია 3) წინადადება;

ბ) $A \subset X$ სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ლებეგის აზრით ზომადია $X \setminus A$ სიმრავლე.

§ 8. ზომით წარმოქმნილი გარე ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისება

თეორემა 5.8.1. ვთქვათ, μ არის H რგოლზე განსაზღვრული ზომა. მაშინ μ^* გარე ზომა ქვემოდან უწყვეტია.

დამტკიცება. ვთქვათ, (A_n) არის სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობა და $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. μ^*-ის ზრდადობის გამო გვექნება, რომ

$$\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2) \leq \cdots \leq \mu^*(A). \tag{1}$$

შედეგად,

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(A). \tag{2}$$

დავამტკიცოთ (2)-ის შებრუნებული შეფასება:

$$\mu^*(A) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n). \tag{3}$$

თუ მოიძებნება n, რომლისთვისაც $\mu^*(A_n) = \infty$, მაშინ (1)-ის ძალით, $\mu^*(A) = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(A_n)$. ამრიგად, განსახილავი გვრჩება ის შემთხვევა, როცა $\mu^*(A_n) < \infty$ ყოველი n-სთვის.

ნებიმიერი n-სთვის შევარჩიოთ H რგოლის სიმრავლეთა (A_k^n) მიმდევრობა, რომელიც ფარავს A_n სიმრავლეს და აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k^n) < \mu^*(A_n) + \frac{1}{n}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^n, \qquad C_n = B_n \cap B_{n+1} \cap \dots$$

B_n და C_n სიმრავლეები ლებეგის აზრით ზომადია და მათ აქვთ შემდეგი თვისებები:

$$A_n \subset C_n \subset B_n; \tag{4}$$

$$\overline{\mu}(C_n) \leq \overline{\mu}(B_n) < \mu^*(A_n) + \frac{1}{n}. \tag{5}$$

ცხადია, (C_n) სიმრავლეთა მიმდევრობა ზრდადია. მისი ზღვარი აღვნიშნოთ C-თი. მაშინ (4)-ის ძალით გვექნება, რომ

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C.$$

შემდეგ, თუ სიმრავლეთა (C_n) მიმდევრობისა და $\overline{\mu}$ ზომისათვის გამოვიყენებთ ზომის უწყვეტობის თვისებას და გავითვალისწინებთ (5) შეფასებას, დავწერთ,

$$\mu^*(A) \leq \overline{\mu}(C) = \lim_{n\to\infty} \overline{\mu}(C_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n).$$

ამით (3) შეფასება და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 5.8.1. მოგვიანებით (იხ. თეორემა 6.4.5) დადგენილი იქნება, რომ μ^* გარე ზომას საზოგადოდ არა აქვს ზემოდან უწყვეტობის თვისება.

შენიშვნა 5.8.2. თეორემა 5.8.1 არ ვრცელდება ნებისმიერ გარე ზომაზე. მართლაც, λ იყოს $2^{\mathbb{N}}$-ზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია: $\lambda(\emptyset) = 0$, $\lambda(\mathbb{N}) = 2$ და $\lambda(E) = 1$, როცა $E \neq \emptyset$ და $E \neq \mathbb{N}$. მაშინ ადვილი შესამოწმებელია, რომ λ არის გარე ზომა და ამასთანავე,

$$E_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

სიმრავლეთა მიმდევრობისათვის არ სრულდება ქვემოდან უწყვეტობის პირობა.

თ ა ვ ი 6

ზოგიერთი კლასიკური ზომა

ამ თავის ძირითადი შესწავლის საგანია ლებეგის ზომა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, რომელიც არსებითად აფართოებს მონაკვეთის მოცულობის ცნებას. ასევე განხილულია ლებეგ-სტილტიესისა და ჰაუსდორფის ტიპის ზომები.

აღსანიშნავია, რომ გადმოცემა ეფუძნება წინა თავში განვითარებულ აბსტრაქტულ თეორიას.

§ 1. ლებეგის ზომა

როგორც ვიცით, n-განზომილებიანი $\mathrm{v} = \mathrm{v}_n$ მოცულობა არის ნახევრადღია მონაკვეთების $\mathcal{I}^n$ ნახევარრგოლზე განსაზღვრული ზომა. თეორემა 4.2.1-ის თანახმად, მოცულობა შეიძლება მივიჩნიოთ $\mathcal{I}^n$ კლასით წარმოქმნილ $r(\mathcal{I}^n)$ რგოლზე განსაზღვრულ ზომადაც.

ლებეგის ზომა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში ეწოდება v_n მოცულობის ლებეგისეულ გაგრძელებას. ლებეგის ზომა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში აღნიშნული იქნება $\mathrm{m} = \mathrm{m}_n$-ით.

ლებეგის ზომის განსაზღვრის არეში შემავალ სიმრავლეებს (ე.ი. v_n ფუძის მიხედვით ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეებს) **ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეები** ეწოდებათ. ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასი აღნიშნული იქნება $\mathcal{L} = \mathcal{L}_n$-ით.

შევნიშნოთ, რომ ზომის ლებეგისეული გაგრძელების თვისებებიდან გამომდინარე:

- ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასი σ-ალგებრაა;
- ლებეგის ზომას აქვს სისრულის თვისება;
- ლებეგის ზომა σ-შემოსაზღვრულია;
- ყოველი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთი ლებეგის აზრით ზომადია და $\mathrm{m}(I) = \mathrm{v}(I)$.

თეორემა 6.1.1. **$\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველი ბორელის სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია.**

დამტკიცება. ზომის ლებეგისეული გაგრძელების თვისებებიდან გამომდინარე, $\sigma a(\mathcal{I}^n) \subset \mathcal{L}_n$. მეორე მხრივ, თეორემა 3.4.1-ის თანახმად, $\sigma a(\mathcal{I}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

იმის გათვალისწინებით, რომ ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები წარმოადგენენ ბორელის სიმრავლეებს (იხ. თეორემა 3.4.1), თეორემა 6.1.1-დან ვღებულობთ შემდეგ დებულებას.

თეორემა 6.1.2. $\mathbb{R}^n$ **სივრცის ყოველი ღია და ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია.**

თეორემა 6.1.3. ვთქვათ, $I_1, \dots, I_n$ **სასრული სიგრძის გადაუგვარებელი მონაკვეთებია წრფეზე. მაშინ** $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ **მონაკვეთი ლებეგის აზრით ზომადია და**

$$\mathrm{m}(I) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k),$$

სადაც $a_k = \inf I_k,\ b_k = \sup I_k\ \ (k \in \overline{1,n})$.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $a = (a_1, \dots, a_n),\ b = (b_1, \dots, b_n)$ და

$$(a,b) = \mathop{\times}_{k=1}^{n} (a_k, b_k), \ \ [a,b] = \mathop{\times}_{k=1}^{n} [a_k, b_k].$$

(a,b) ღია, ხოლო $[a,b]$ ჩაკეტილი სიმრავლეა. საიდანაც თეორემა 6.1.2-ის ძალით ვასკვნით (a,b) და $[a,b]$ მონაკვეთების ლებეგის აზრით ზომადობას. განვიხილოთ n-ეულების მიმდევრობა $\varepsilon_i = (\frac{b_1 - a_1}{2^i}, \dots, \frac{b_n - a_n}{2^i})$ $(i \in \mathbb{N})$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$(a,b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a, b - \varepsilon_i], \ \ [a,b] = \bigcap_{i=1}^{\infty} (a - \varepsilon_i, b].$$

აქედან გამომდინარე, თუ ვისარგებლებთ ზომის ზემოდან და ქვემოდან უწყვეტობის თვისებებით, მივიღებთ,

$$\mathrm{m}((a,b)) = \mathrm{m}([a,b]) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

გვაქვს, რომ $I = (a,b) \cup (I \setminus (a,b))$. $[a,b] \setminus (a,b)$ ნულზომიანი სიმრავლეა, ამიტომ $I \setminus (a,b) \subset [a,b] \setminus (a,b)$ ჩართვისა და ლებეგის ზომის სისრულის ძალით $I \setminus (a,b)$ სიმრავლე ზომადია და

$$\mathrm{m}(I) = \mathrm{m}((a,b)) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 6.1.4. $\mathbb{R}^n$ **სივრცის წერტილთა ყოველი სასრული ან თვლადი სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია და მისი ზომა ნულის ტოლია.**

დამტკიცება. ერთი წერტილისაგან შედგენილი სიმრავლე ჩაკეტილია და შედეგად, ზომადია. ცხადია, ის შეიძლება მოვათავსოთ რაგინდ მცირე ზომის $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთში, საიდანაც ვასკვნით ერთწერტილიანი სიმრავლის ზომის ნულთან ტოლობას. აქედან კი, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ნულზომიან სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი გაერთიანება ზომადია და მისი ზომა ნულის ტოლია, მივიღებთ საჭირო დასკვნას. თეორემა დამტკიცებულია. □

ბორელის ზომა $\mathbb{R}^n$ **სივრცეში** ეწოდება v_n მოცულობის ბორელისეულ გაგრძელებას. ბორელის ზომა აღვნიშნოთ $\mathrm{m}_{\mathcal{B}} = \mathrm{m}_{\mathcal{B},n}$ ჩანაწერით.

თეორემა 5.4.3-ის ძალით, ლებეგის ზომა წარმოადგენს ბორელის ზომის შევსებას. აქვე შევნიშნოთ, რომ თეორემა 3.4.1-ის ძალით, ბორელის ზომის განსაზღვრის არე წარმოადგენს ბორელის სიმრავლეთა $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ კლასს.

შენიშვნა 6.1.1. ქვემოთ მოცემული იქნება მცირე ისტორიული ექსკურსი იმის შესახებ, თუ რა ნაბიჯები იყო გადადგმული ზომის თეორიაში ლებეგის ზომის შემოღებამდე.

ჯ. პეანომ (1887) და კ. ჟორდანმა (1892) შემდეგნაირად განსაზღვრეს გაზომვადი სიმრავლეები და მათი გაზომვის წესი. Δ იყოს $\mathbb{R}^n$ სივრცის მონაკვეთების ყველა შესაძლო სასრული გაერთიანების კლასი. $\mathrm{v}^\star$ **გარე მოცულობა** და $\mathrm{v}_\star$ $\mathrm{v}^\star$ **შიგა მოცულობა** განისაზღვრება ტოლობებით:

$$\mathrm{v}^\star(A) = \inf\{\mathrm{v}(I) : I \in \Delta,\ I \supset A\},$$

$$\mathrm{v}_\star(A) = \sup\{\mathrm{v}(I) : I \in \Delta,\ I \subset A\}.$$

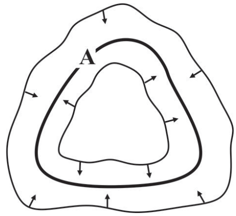
$A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს ეწოდება **პეანო-ჟორდანის აზრით ზომადი**, თუ მისი შიგა და გარე მოცულობები ტოლია, ე.ი. $\mathrm{v}_\star(A) = \mathrm{v}^\star(A)$, და მისი პეანო-ჟორდანის $\mathrm{m}_{\mathcal{P}}(A)$ ზომა განისაზღვრება, როგორც შიგა და გარე მოცულობების საერთო მნიშვნელობა: $\mathrm{m}_{\mathcal{P}}(A) = \mathrm{v}_\star(A) = \mathrm{v}^\star(A)$.

$A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის პეანო-ჟორდანის აზრით ზომადობა ეკვივალენტურია შემდეგი პირობის: ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნებიან მონაკვეთების სასრული გაერთიანებები I და J ისეთები, რომ:

$$I \subset A \subset J \quad \text{და} \quad \mathrm{v}(J) - \mathrm{v}(I) < \varepsilon.$$

ამრიგად, პეანო-ჟორდანის თეორიაში სიმრავლის გაზომვა ეფუძნება შიგნიდან და გარედან ერთდროულ მიახლოებას ისეთი სიმრავლეებით, რომელთა გაზომვის წესი წინასწარ ცნობილია (ნახ. 6.1).

ასეთ მიდგომას **ამოწურვის მეთოდს** უწოდებენ და მას მთელ რიგ კონკრეტულ შემთხვევებში წარმატებით იყენებდნენ ჯერ კიდევ ანტიკურ ეპოქაში.



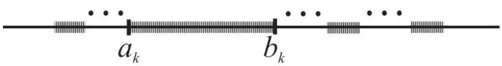
ნახ. 6.1.

კერძოდ, ამოწურვის მეთოდის მეშვეობით გამოთვლილი იქნა წრის, პარაბოლური სეგმენტის, ბირთვის, პირამიდის და ზოგიერთი სხვა ფიგურისა და სხეულის ზომები.

რიმანის ინტეგრალის თეორიაში მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის გამოსათვლელად აგრეთვე ამოწურვის მეთოდი გამოიყენება. ამაში დარწმუნებისთვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ დარბუს ქვედა და ზედა ჯამები წარმოადგენენ მრუდწირული ტრაპეციის შიგნიდან და გარედან მიმაახლოებელი საფეხუროვანი ტრაპეციების ფართობებს.

პეანო-ჟორდანის ზომის თეორია მოხერხებული ინტრუმენტი აღმოჩნდა ინტეგრების რიმანის პროცესის გეომეტრიული გააზრებისათვის, თუმცა ის ვერ წყვეტდა ზოგიერთი მნიშვნელოვანი სიმრავლის გაზომვის საკითხს. მაგალითად, $[0,1]$ მონაკვეთის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არ გამოდის გაზომვადი (შიგა მოცულობა ნულია, გარე კი - ერთი!). საზოგადოდ, გაზომვადი არ გამოდის არც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთების თვლადი გაერთიანება.

შემდგომი წინსვლა ზომის თეორიაში განახორციელა ე. ბორელმა (1894). ახალი მიდგომით წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წრფივი მონაკვეთების თვლადი გაერთიანების გასაზომად უარი ითქვა პეანო-ჟორდანის სქემაზე. ასეთი სახის გაერთიანება უშუალოდ ჩაითვალა ზომადად და მას ზომის მნიშვნელობად განესაზღვრა შემადგენელი მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამი (ნახ. 6.2).



$$G=\bigcup_k (a_k,b_k),\quad m(G)=\sum_k (b_k-a_k)$$

ნახ. 6.2.

უფრო კონკრეტულად, ბორელმა ჩამოაყალიბა ახალ-ახალი ზომადი სიმრავლეების მიღების შემდეგი ორი წესი, დაფუძნებული თვლადი გაერთიანებისა და სხვაობის სიმრავლურ ოპერაციებზე:

- ვთქვათ, მოცემული გვაქვს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეები: $A_1, A_2, \ldots$, რომელთა გაზომვის წესი უკვე ცნობილია. მაშინ ზომადად უნდა მივიჩნიოთ მათი $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ გაერთიანება და A-ს ზომა უნდა ჩავთვალოთ A_k სიმრავლეების ზომათა ჯამის ტოლად;
- ვთქვათ, მოცემული გვაქვს A_1 და A_2 სიმრავლეები თვისებით: $A_1 \subset A_2$, ამასთან, მათი გაზომვის წესი უკვე ცნობილია. მაშინ ზომადად უნდა მივიჩნიოთ მათი $A = A_2 \setminus A_1$ სხვაობა და A-ს ზომა უნდა ჩავთვალოთ A_2 და A_1 სიმრავლეების ზომათა სხვაობის ტოლად.

თუ ზომად სიმრავლეთა საწყის ეგზემპლარებად აღებული იქნება მონაკვეთები, მაშინ ბორელის პირველი და მეორე ოპერაციების რიგ-რიგობით განხორციელებით მივაღწევთ შემდეგი ტიპის სიმრავლეთა თანდათანობით შემოყვანას ზომად სიმრავლეთა კლასში: ღია სიმრავლეები, ჩაკეტილი სიმრავლეები, F_σ ტიპის სიმრავლეები, G_δ ტიპის სიმრავლეები, $G_{\delta\sigma}$ ტიპის სიმრავლეები, $F_{\sigma\delta}$ ტიპის სიმრავლეები, და ა. შ. ამით ბორელმა, ფაქტობრივად, მიუთითა $\mathrm{m}_{\mathcal{B}}$ ზომის აგების იტერაციული სქემა.

ბორელის კონსტრუქციას აქვს შემდეგი ნაკლოვანებები: 1) არაა გამოკვეთილი მარტივი პრინციპი, თუ როდისაა მიჩნეული კონკრეტული სიმრავლე ზომადად და ზომადობის შემთხვევაში არაა მითითებული სიმრავლის ზომის განსაზღვრის მარტივი წესი; 2) ბორელის ზომა არ ახდენს პეანო-ჟორდანის ზომის გაგრძელებას (მტკიცდება, რომ ბორელის აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასის სიმძლავრე კონტინუუმია, მაშინ, როცა პეანო-ჟორდანის აზრით ზომადი სიმრავლეები ქმნიან ჰიპერკონტინუუმის (ე.ი. $2^{\mathfrak{c}}$) სიმძლავრის კლასს).

პეანო-ჟორდანისა და ბორელის მიდგომების სინთეზირების მეშვეობით ლებეგმა შექმნა ზომის თეორია, რომელიც დაზღვეულია ზემოთ აღნიშნული ნაკლოვანებებისაგან. კერძოდ, პეანოსა და ჟორდანის მსგავსად, ლებეგმა $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის გარე ზომა - $\mathrm{v}^*(A)$ განსაზღვრა მონაკვეთების მეშვეობით წარმოქმნილი დაფარვების საფუძველზე, ოღონდ შეიტანა ერთი არსებითი ცვლილება: დაფარვები მოახდინა მონაკვეთების თვლადი კლასებით, ნაცვლად სასრული კლასებისა, თანაუკვეთი მონაკვეთების თვლადი კლასის გაერთიანება კი გაზომა ბორელის მიდგომის მიხედვით - შეკრიბა შემადგენელი მონაკვეთების სიგრძეთა მწკრივი. სიმრავლის ზომადობის პირობად აიღო ზომის ადიციურობის თვისებით ნაკარნახევი მოთხოვნა: $\mathrm{v}(I) = \mathrm{v}^*(A \cap I) + \mathrm{v}^*(I \setminus A)$ ყოველი I მონაკვეთისათვის.

ფიქსირებულ $I \subset \mathbb{R}^n$ მონაკვეთში მოთავსებული სიმრავლეებისათვის ლებეგის ზომა შეიძლება შემოღებული იქნას უშუალოდ ამოწურვის (ე.ი. პეანო-ჟორდანის) მეთოდის გამოყენებითაც. ამაზე საუბარი გვექნება მომდევნო პარაგრაფის ბოლოს.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ ქვესივრცე ნული ზომისაა.
2. დაამტკიცეთ, რომ კანტორის დისკონტინუუმის ზომა ნულის ტოლია.
3. ვთქვათ, $0 < \alpha < 1$. ააგეთ $[0,1]$-ის სრულყოფილი და არსად მკვრივი ქვესიმრავლე, რომლის ზომა α-ს ტოლია.
4. დაამტკიცეთ, რომ ნული ზომის ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ ჩაკეტილი სიმრავლე არსად მკვრივია.
5. ვთქვათ, $A \subset \mathbb{R}$ ზომადი სიმრავლეა, $\mathrm{m}(A) = \alpha > 0$ და $0 < \beta < \alpha$. ააგეთ ისეთი ზომადი $B \subset A$ სიმრავლე, რომ $\mathrm{m}(B) = \beta$.
6. ვთქვათ, $A \subset [0,1]$ დადებითი ზომის სიმრავლეა. დაამტკიცეთ, რომ A-ში მოიძებნება ორი ისეთი წერტილი, რომელთა შორის მანძილი ირაციონალურია.
7. ვთქვათ, $A \subset [0,1]$ დადებითი ზომის სიმრავლეა. დაამტკიცეთ, რომ A-ში მოიძებნება ორი ისეთი წერტილი, რომელთა შორის მანძილი რაციონალურია.
8. დაამტკიცეთ, რომ წრფის ყველა ზომადი ქვესიმრავლის კლასის სიმძლავრე წრფის ყველა ქვესიმრავლის კლასის სიმძლავრის ტოლია.
9. დაამტკიცეთ, რომ კანტორის $\mathbb{D}$ სიმრავლე ზომადია პეანო-ჟორდანის აზრით.
10. დაამტკიცეთ, რომ წრფის ყველა პეანო-ჟორდანის აზრით ზომადი ქვესიმრავლის კლასის სიმძლავრე წრფის ყველა ქვესიმრავლის კლასის სიმძლავრის ტოლია.
11. დაამტკიცეთ, რომ თუ $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე პეანო-ჟორდანის აზრით ზომადია, მაშინ ის ზომადია ლებეგის აზრითაც და $\mathrm{m}(A) = \mathrm{m}_{\mathcal{P}}(A)$.

§ 2. ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა დახასიათება მარტივი სტრუქტურის სიმრავლეთა მეშვეობით

$A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს ვუწოდოთ **ელემენტარული**, თუ ის წარმოდგება $\mathcal{I}^n$ კლასის მონაკვეთების სასრული გაერთიანების სახით (ე.ი. ეკუთვნის $r(\mathcal{I}^n)$ რგოლს).

თეორემა 5.6.3-დან გამომდინარეობს ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეების შემდეგი დახასიათება ელემენტარული სიმრავლეების მეშვეობით მიახლოების ტერმინებში.

თეორემა 6.2.1. ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **A არის ლებეგის აზრით ზომადი;**
- **ყოველი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთისა და ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება ელემენტარული სიმრავლე B, ისეთი, რომ $\mathrm{v}^*(A \cap I) \triangle B) < \varepsilon$.**

შედეგი 6.2.1. ნებისმიერი შემოსაზღვრული $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- A **არის ლებეგის აზრით ზომადი;**
- **ყოველი** $\varepsilon > 0$**-სთვის მოიძებნება ელემენტარული სიმრავლე** B**, ისეთი, რომ** $\mathrm{v}^*(A\triangle B) < \varepsilon$.

თეორემა 5.7.2-ის საფუძველზე შესაძლებელია ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა დახასიათება $\mathcal{I}^n$ კლასის მონაკვეთების თვლადი გაერთიანებების მეშვეობით მიახლოების ტერმინებში, თუმცა ანალოგიური დახასიათება უფრო მოხერხებულია ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეების ტერმინებში, რომელიც მოიცემა შემდეგი თეორემით.

თეორემა 6.2.2. ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ **სიმრავლისთვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:**
- A **არის ლებეგის აზრით ზომადი;**
- **ყოველი** $\varepsilon > 0$**-სთვის მოიძებნება ღია** $G \subset \mathbb{R}^n$ **სიმრავლე, ისეთი, რომ** $G \supset A$ **და** $\mathrm{v}^*(G \setminus A) < \varepsilon$;
- **ყოველი** $\varepsilon > 0$**-სთვის მოიძებნება ჩაკეტილი** $F \subset \mathbb{R}^n$ **სიმრავლე, ისეთი, რომ** $F \subset A$ **და** $\mathrm{v}^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

ლემა 6.2.1. ვთქვათ, $E \in \sigma(\mathcal{I}^n)$**. მაშინ ყოველი** $\varepsilon > 0$**-სთვის მოიძებნება ღია** $G \subset \mathbb{R}^n$ **სიმრავლე, ისეთი, რომ** $G \supset E$ **და** $\mathrm{m}(G \setminus E) < \varepsilon$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, სადაც $I_k \in \mathcal{I}^n$ $(k \in \mathbb{N})$. ყოველი $k \in \mathbb{N}$-სთვის ღია n-განზომილებიანი მონაკვეთი J_k შევარჩიოთ ისე, რომ სრულდებოდეს $\mathrm{m}(J_k \setminus I_k) < \varepsilon/2^k$ შეფასება. განვიხილოთ $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ ღია სიმრავლე. გვექნება, რომ

$$G \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (J_k \setminus I_k).$$

საიდანაც ვწერთ,

$$\mathrm{m}(G \setminus E) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 6.2.2-ის დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ $\sigma(\mathcal{I}^n) = \sigma(r(\mathcal{I}^n))$.

1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია: თეორემა 5.7.2-ის ძალით მოიძებნება $E \in \sigma(\mathcal{I}^n)$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mathrm{v}^*(E \setminus A) < \varepsilon/2$. მეორე მხრივ, ლემა 6.2.1-ის თანახმად მოიძებნება ღია სიმრავლე G, რომლისთვისაც $G \supset E$ და $\mathrm{v}^*(G \setminus E) = \mathrm{m}(G \setminus E) < \varepsilon/2$. მაშინ გვექნება, რომ $G \supset A$ და

$$\mathrm{v}^*(G \setminus A) \leq \mathrm{v}^*(G \setminus E) + \mathrm{v}^*(E \setminus A) < \varepsilon.$$

ამით 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია დამტკიცებულია.

2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია: თეორემა 3.2.2-ის თანახმად, ყოველი ღია სიმრავლე წარმოიდგინება $\mathcal{I}^n$ კლასის მონაკვეთების თვლადი გაერთიანების სახით. შედეგად, ყოველი ღია სიმრავლე ეკუთვნის $\sigma(\mathcal{I}^n)$ კლასს. საიდანაც, თეორემა 5.7.2-ის ძალით ვასკვნით 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაციის სამართლიანობას.

ამრიგად, პირველი და მეორე წინადადებების ეკვივალენტობა დადგენილია. ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები ურთიერთდამატებითია და გამოვიყენებთ 5.7.3 შენიშვნას, დავასკვნით მესამე წინადადების ეკვივალენტობას პირველი და მეორე წინადადებებისადმი. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შედეგი 6.2.2. ნებისმიერი ლებეგის აზრით ზომადი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის სამართლიანია ტოლობები:

$$\mathrm{m}(A) = \inf\{\mathrm{m}(G) : G \supset A, G \textbf{ ღიაა}\} = \sup\{\mathrm{m}(F) : F \subset A, F \textbf{ ჩაკეტილია}\}.$$

აქვე დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა, რომელიც გვიჩვენებს, რომ v^* გარე ზომის განსაზღვრისას შეიძლება შემოვიფარგლოთ დამფარავ სიმრავლეებად ღია სიმრავლეების განხილვით.

თეორემა 6.2.3. ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისთვის,

$$\mathrm{v}^*(A) = \inf\{\mathrm{m}(G) : G \supset A, G \textbf{ ღიაა}\}.$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $\mathrm{v}^*(A)$ გარე ზომა ტოლია $\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{v}(I_k)$ სახის ჯამების ინფიმუმის, სადაც I_k წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებია $\mathcal{I}^n$ კლასიდან, რომლებიც ფარავენ A სიმრავლეს.

აღვნიშნოთ $\alpha = \inf\{\mathrm{m}(G) : G \supset A, G \text{ ღიაა}\}$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველი ღია სიმრავლე წარმოდგება $\mathcal{I}^n$ კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთების თვლადი გაერთიანების სახით (იხ. თეორემა 3.2.2), მარტივად დავასკვნით $\mathrm{v}^*(A) \le \alpha$ შეფასების სამართლიანობას. დავამტკიცოთ შებრუნებული უტოლობა. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ვიპოვოთ A-ს დამფარავი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი I_k $(k \in \mathbb{N})$ მონაკვეთები $\mathcal{I}^n$ კლასიდან, რომელთათვისაც

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{v}(I_k) < \mathrm{v}^*(A) + \varepsilon.$$

ლემა 6.2.1-ის ძალით მოიძებნება ისეთი ღია სიმრავლე G, რომ

$$G \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \mathrm{m}\left(G \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) < \varepsilon.$$

შედეგად გვექნება,

$$\alpha \le \mathrm{m}(G) \le \mathrm{m}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) + \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{v}(I_k) + \varepsilon < \mathrm{v}^*(A) + 2\varepsilon.$$

საიდანაც $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის გათვალისწინებით ვასკვნით შებრუნებული $\alpha \leq \mathrm{v}^*(A)$ შეფასების სამართლიანობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 6.2.1. ფიქსირებულ $I \subset \mathbb{R}^n$ მონაკვეთში მოთავსებული სიმრავლეებისათვის ლებეგის ზომა შეიძლება შემოღებული იქნას უშუალოდ ამოწურვის (ე.ი. პეანო-ჟორდანის) მეთოდის გამოყენებითაც. განვიხილოთ წრფივი ერთეულოვანი $I = (0, 1)$ მონაკვეთის შემთხვევა. შესაძლებელია დამტკიცდეს, რომ $A \subset (0, 1)$ სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $1 = \mathrm{v}^*(A) + \mathrm{v}^*(I \setminus A)$, ე.ი. როცა

$$1 - \mathrm{v}^*(I \setminus A) = \mathrm{v}^*(A). \tag{1}$$

$1 - \mathrm{v}^*(I \setminus A)$ სიდიდეს შეიძლება შევხედოთ როგორც $\mathrm{v}^*(A)$ სიმრავლის შიგა $\mathrm{v}_*(A)$ ზომას.

მაშინ A სიმრავლის ლებეგის აზრით ზომადობის პირობა ღებულობს შიგა და გარე ზომების ტოლობის სახეს: $\mathrm{v}_*(A) = \mathrm{v}^*(A)$. სწორედ ასეთი იყო ლებეგის ორიგინალური განსაზღვრება (1902 წ.).

ახლა დავუბრუნდეთ საკითხს იმის შესახებ, თუ რატომ შეიძლება, $1 - \mathrm{v}^*(I \setminus A)$ სიდიდეს შევხედოთ, როგორც A-ს შიგა ზომას.

გარე ზომის განსაზღვრისას შეიძლება შემოვიფარგლოთ მხოლოდ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ღია მონაკვეთების მეშვეობით მიღებული დაფარვებით (იხ. თეორემა 6.2.3). მონაკვეთების ასეთი გაერთიანებები ქმნიან ღია სიმრავლეებს. ყოველი ღია G სიმრავლე ბორელის პირველი პრინციპის გამოყენებით (იხ. შენიშვნა 6.1.1) მივიჩნიოთ ზომადად და მას ზომის მნიშვნელობად განვუსაზღვროთ შემადგენელი მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამი: $\mathrm{m}(G) = \sum_k (b_k - a_k)$. ბორელის მეორე პრინციპის თანახმად, ზომადად შეიძლება მივიჩნიოთ ყოველი $F \subset (0, 1)$ ჩაკეტილი სიმრავლეც, როგორც ღია $I \setminus F$ სიმრავლის დამატება და მის ზომად ჩაითვლება $1 - \mathrm{m}(I \setminus F)$ რიცხვი. ამგვარად, ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები ხდებიან გაზომვადი. რა მოხდება, თუ მათი გამოყენებით მოვახდენთ სიმრავლეთა ამოწურვას? ვაჩვენოთ, რომ შედეგად მივიღებთ ლებეგის ზომას.

I მონაკვეთის ღია და ჩაკეტილი ქვესიმრავლეების კლასები აღვნიშნოთ, შესაბამისად, G და F სიმბოლოებით. შესაძლებელია დამტკიცდეს, რომ ნებისმიერი $A \subset I$ სიმრავლისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\sup_{E \subset A,\ E \in \mathrm{G} \cup \mathrm{F}} \mathrm{m}(E) = \sup_{E \subset A,\ E \in \mathrm{F}} \mathrm{m}(E),$$

$$\inf_{E \supset A,\ E \in \mathrm{G} \cup \mathrm{F}} \mathrm{m}(E) = \inf_{E \supset A,\ E \in \mathrm{G}} \mathrm{m}(E),$$

$$1 - \inf_{E \supset I \setminus A,\ E \in \mathrm{G}} \mathrm{m}(E) = \sup_{E \subset A,\ E \in \mathrm{F}} \mathrm{m}(E).$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარე, $\mathrm{G} \cup \mathrm{F}$ ოჯახის სიმრავლეების მეშვეობით წარმოქმნილი A სიმრავლის შიგა და გარე ზომები ტოლი არიან შესაბამისად $1 - \mathrm{v}^*(I \setminus A)$ და $\mathrm{v}^*(A)$ რიცხვების. შედეგად, (1)-ის გათვალისწინებით, ასეთი სახის შიგა და გარე ზომების ტოლობა ტოლფასია A სიმრავლის ლებეგის აზრით ზომადობის.

ამრიგად, **ღია და ჩაკეტილ სიმრავლეებზე ზომის გავრცელება და შემდეგ მათი მეშვეობით ამოწურვის მეთოდის გამოყენება იძლევა ლებეგის ზომას I მონაკვეთზე**. ასეთნაირად დანახული ლებეგის ზომის კონსტრუქცია ჰგავს პეანო-ჟორდანის თეორიას იმით, რომ ისიც იყენებს ამოწურვის მეთოდს იმ სიმრავლეებით, რომელთა გაზომვის წესი უკვე ცნობილია. განსხვავება კი იმაშია, რომ ამოწურვისათვის გამოყენებული საწყისი კლასი შედგება ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეებისაგან, ნაცვლად მონაკვეთების სასრულ გაერთიანებათა ღარიბი კლასისა. ღია და ჩაკეტილ სიმრავლეთა გაზომვა, როგორც ითქვა, ხდება ბორელის მიდგომის მიხედვით. აღნიშნულიდან კიდევ ერთხელ ნათლად ჩანს, რომ ლებეგის ზომის თეორია შეიქმნა პეანოს, ჟორდანისა და ბორელის იდეების სინთეზის საფუძველზე.

შევნიშნავთ, რომ ლებეგის ზომის აგება ღია და ჩაკეტილ სიმრავლეთა გამოყენებაზე დაფუძნებული ამოწურვის მეთოდით გადმოცემულია, მაგალითად, [29] და [34] სახელმძღვანელოებში.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის ნებისმიერი დადებითი ზომის ქვესიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

§ 3. ლებეგის ზომის ძვრის მიმართ ინვარიანტულობა

თეორემა 6.3.1. ლებეგის აზრით ზომადი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის ნებისმიერი $A + x$ ძვრა ასევე ლებეგის აზრით ზომადია და $\mathrm{m}(A + x) = \mathrm{m}(A)$.

ლემა 6.3.1. გარე ზომა ინვარიანტულია ძვრის მიმართ, ე.ი. ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის, $\mathrm{v}^*(A + x) = \mathrm{v}^*(A)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთისათვის $I + x$ ასევე $\mathcal{I}^n$ კლასის მონაკვეთია და $\mathrm{v}(I + x) = \mathrm{v}(I)$.

შევნიშნოთ რომ, თუ $I_k \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთები ფარავენ A სიმრავლეს, მაშინ $I_k + x \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთები დაფარავენ $A + x$ სიმრავლეს და $\sum_k \mathrm{v}(I_k + x) = \sum_k \mathrm{v}(I_k)$. საიდანაც, უშუალოდ ვღებულობთ შეფასებას:

$$\mathrm{v}^*(A + x) \leq \mathrm{v}^*(A). \tag{1}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ (1) შეფასებაში სიმრავლე და მისი ძვრა ნებისმიერია, შეგვიძლია ასევე დავწეროთ:

$$\mathrm{v}^*(A) = \mathrm{v}^*((A+x)+(-x)) \leq \mathrm{v}^*(A+x).$$

საიდანაც, (1)-ის გათვალისწინებით ვასკვნით $\mathrm{v}^*(A+x) = \mathrm{v}^*(A)$ ტოლობას. ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 6.3.1-ის დამტკიცება. ნაბიჯი I: ვთქვათ, $G \subset \mathbb{R}^n$ რაიმე არაცარიელი ღია სიმრავლეა. ცხადია, $G+x$ ასევე ღია სიმრავლეა. წარმოვადგინოთ G სიმრავლე, როგორც წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $I_k \in \mathcal{I}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ მონაკვეთების გაერთიანება. მაშინ $G+x$ წარმოდგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $I_k + x$ $(k \in \mathbb{N})$ მონაკვეთების გაერთიანების სახით. საიდანაც, $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთებისათვის ლებეგის ზომის ძვრის მიმართ ინვარიანტულობის გათვალისწინებით დავწერთ, რომ

$$\mathrm{m}(G+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(I_k + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(I_k) = \mathrm{m}(G).$$

ნაბიჯი II: დავუშვათ ახლა, რომ $A \subset \mathbb{R}^n$ ნებისმიერი ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეა. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. თეორემა 6.2.2-ის ძალით მოიძებნება ღია $G \supset A$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mathrm{v}^*(G \setminus A) < \varepsilon$. მაშინ $G+x$ ასევე ღია სიმრავლეა, $G+x \supset A+x$ და ლემა 6.3.1-ის გათვალისწინებით გვაქვს: $\mathrm{v}^*((G+x) \setminus (A+x)) < \varepsilon$. აქედან, თეორემა 6.2.2-ის საფუძველზე ვასკვნით $A+x$ სიმრავლის ლებეგის აზრით ზომადობას. გარდა ამისა, კვლავ ლემა 6.3.1-ის გათვალისწინებით გვაქვს, რომ $\mathrm{m}(A+x) = \mathrm{v}^*(A+x) = \mathrm{v}^*(A) = \mathrm{m}(A)$.

თეორემა დამტკიცებულია. □

ამოცანები

1. ვთქვათ, $A \subset \mathbb{R}^n$ ზომადი სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $t > 0$-სთვის $tA = \{tx : x \in A\}$ სიმრავლე ზომადია და $\mathrm{m}(tA) = t^n \mathrm{m}(A)$.
2. ვთქვათ, $A \subset \mathbb{R}^n$ ზომადი სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი T მობრუნებისათვის $\mathbb{R}^n$ სივრცეში $T(A)$ სიმრავლე ზომადია და $\mathrm{m}(T(A)) = \mathrm{m}(A)$.
3. ვთქვათ, $A \subset \mathbb{R}^n$ ზომადი სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ წრფივი ასახვისათვის $T(A)$ სიმრავლე ზომადია და $\mathrm{m}(T(A)) = |\alpha| \mathrm{m}(A)$, სადაც α არის T ასახვის იაკობიანი.
4. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი სიმრავლე, რომელიც ჩართულია $\mathbb{R}^n$ სივრცის n-ზე დაბალი განზომილების ქვესივრცეში, ზომადია და მისი ზომა ნულის ტოლია.

5. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცეში ღია ბირთვების ნებისმიერი სასრული Ω კლასიდან შეიძლება გამოვყოთ Ω^* ქვეკლასი, რომელიც შედგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ბირთვებისაგან და

$$\mathrm{m}\Big(\bigcup_{B\in\Omega^*} B\Big) \geq \frac{1}{3^n}\,\mathrm{m}\Big(\bigcup_{B\in\Omega} B\Big).$$

§ 4. ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლე

თეორემა 6.4.1. არსებობს ლებეგის აზრით არაზომადი $A\subset\mathbb{R}$ სიმრავლე.

დამტკიცება. $(-1,1)$-ში შემოვიღოთ ეკვივალენტობის მიმართება შემდეგნაირად: x და y რიცხვები მივიჩნიოთ ეკვივალენტურად, თუ მათი სხვაობა რაციონალურია. მარტივი შესამოწმებელია, რომ განსაზღვრება კორექტულია, ე.ი. ასეთი მიმართება მართლაც ეკვივალენტობის მიმართებაა.

განვიხილოთ ყველა ეკვივალენტობის კლასი, რომლებადაც დაიშლება $(-1,1)$ ინტერვალი და მათი ოჯახი აღვნიშნოთ Π-თი. ვისარგებლოთ ცერმელოს აქსიომით ამორჩევის შესახებ და განვიხილოთ A სიმრავლე, რომელიც შედგება ეკვივალენტობის კლასებისაგან ამორჩეული თითო-თითო ელემენტისაგან, ე.ი. $A\subset(-1,1)$ და $A\cap E$ ერთელემენტიანი სიმრავლეა ყოველი $E\in\Pi$ ეკვივალენტობის კლასისათვის.

შევნიშნოთ რომ, თუ r_1 და r_2 განსხვავებული რაციონალური რიცხვებია, მაშინ

$$(A+r_1)\cap(A+r_2)=\varnothing. \tag{1}$$

მართლაც, თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს, მაშინ ვიპოვით A სიმრავლის x_1 და x_2 ელემენტებს, რომელთათვისაც $x_1+r_1=x_2+r_2$. უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ x_1 და x_2 ელემენტები ეკვივალენტურია. შედეგად, A სიმრავლეში აღმოჩნდება ერთმანეთის ეკვივალენტური ორი განსხვავებული ელემენტი, რაც ეწინააღმდეგება A სიმრავლის განსაზღვრას.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ

$$(-1,1)\subset\bigcup_{r\in(-2,2)\cap\mathbb{Q}}(A+r)\subset(-3,3). \tag{2}$$

მართლაც, თუ ნებისმიერი $x\in(-1,1)$-სთვის განვიხილავთ A სიმრავლის იმ x^* ელემენტს, რომელიც x-ის ეკვივალენტურია და r-ის როლში ავიღებთ $x-x^*$ რიცხვს, გვექნება: $r\in(-2,2)\cap\mathbb{Q}$ და $x\in A+r$. რაც ნიშნავს მარცხენა ჩართვის სამართლიანობას. მარჯვენა ჩართვის დასადგენად კი საკმარისია გავითვალისწინოთ, რომ $A\subset(-1,1)$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ A სიმრავლე არ არის ლებეგის აზრით ზომადი. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, A ზომადია. მაშინ ლებეგის ზომის

ძვრის მიმართ ინვარიანტულობის თვისების ძალით ყოველი t-სთვის, ზომადი იქნება $A+t$ სიმრავლე. აქედან, A სიმრავლის (1) და (2) თვისებების გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\mathrm{m}((-1,1)) \leq \sum_{r\in(-2,2)\cap\mathbb{Q}} \mathrm{m}(A+r) \leq \ \mathrm{m}((-3,3)).$$

საიდანაც $\mathrm{m}(A+t)=\mathrm{m}(A)$ $(t\in\mathbb{R})$ ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ,

$$2 \leq \mathrm{m}(A)+\mathrm{m}(A)+\cdots \leq 6.$$

მაშინ მარცხენა შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathrm{m}(A)>0$, ხოლო მარჯვენა შეფასება იწვევს საწინააღმდეგო პირობის: $\mathrm{m}(A)=0$ ტოლობის, შესრულებას. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით ვასკვნით A სიმრავლის არაზომადობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 6.4.1. ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლის ზემოთ მოცემული მაგალითი აგებული იყო ვიტალის მიერ 1905 წელს. როგორც ვხედავთ, მისი აგება იყენებს ცერმელოს ამორჩევის აქსიომას. საკმაოდ ინტენსიური კვლევის საგანი იყო საკითხი იმის შესახებ, შესაძლებელია თუ არა არაზომადი სიმრავლის აგება ამორჩევის აქსიომის გამოყენების გარეშე. ამ მიმართულებით 1970 წ. რ. სოლოვეიმ [15] მიიღო ძალზე მნიშვნელოვანი შედეგი, რომელიც აჩვენებს ამორჩევის აქსიომის არსებით როლს არაზომადი სიმრავლის აგებისას.

სამართლიანია თეორემა 6.4.1-ის შემდეგი განზოგადება.

თეორემა 6.4.2. ყოველი დადებითი ზომის $E\subset\mathbb{R}$ სიმრავლე შეიცავს ლებეგის აზრით არაზომად ქვესიმრავლეს.

თეორემა 6.4.2-ის დამტკიცება იმეორებს თეორემა 6.4.1-ის დამტკიცებისას ჩატარებულ მსჯელობებს, იმ განსხვავებით, რომ: ჯერ უნდა ვიპოვოთ $t>0$ რიცხვი, რომლისთვისაც $E\cap(-t,t)$ დადებითი ზომისაა, მერე ეკვივალენტობის მიმართება შემოვიღოთ $E\cap(-t,t)$ სიმრავლეში, ხოლო არაზომადობის დამტკიცებისთვის ვისარგებლოთ შემდეგი ჩართვებით:

$$E\cap(-t,t) \subset \bigcup_{r\in(-2t,2t)\cap\mathbb{Q}} (A+r) \subset (-3t,3t).$$

თეორემა 6.4.3. v^* **გარე ზომას არა აქვს ადიციურობის თვისება.**

თეორემა 6.4.3 მიიღება თეორემა 6.4.1-დან, შემდეგი დებულების საფუძველზე.

თეორემა 6.4.4. ვთქვათ, X არაცარიელი სიმრავლეა და μ წარმოადგენს რაიმე $H\subset 2^X$ რგოლზე განსაზღვრულ ზომას. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **μ^* გარე ზომა ადიციურია;**
- **ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია μ ფუძის მიხედვით.**

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ X სიმრავლეში განსაზღვრული ნებისმიერი λ გარე ზომისათვის შემდეგი წინადადებები ტოლფასია:

a) λ ადიციურია;

b) ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლე კარათეოდორის აზრით ზომადია λ ფუძის მიხედვით.

ამის შემდეგ, თუ λ-ს როლში ავიღებთ μ^* გარე ზომას და მხედველობაში მივიღებთ, რომ კარათეოდორის აზრით ზომადობა μ^* ფუძის მიხედვით და ლებეგის აზრით ზომადობა μ ფუძის მიხედვით ტოლფასი მოთხოვნებია (იხ. თეორემა 5.3.1), დავასკვნით თეორემის პირობაში მითითებული წინადადებების ეკვივალენტურობას. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 6.4.5. v* **გარე ზომას არა აქვს ზემოდან უწყვეტობის თვისება.**

დამტკიცება. განვიხილოთ თეორემა 6.4.1-ის დამტკიცებისას აგებული არაზომადი A სიმრავლე. A-ს აქვს შემდეგი თვისებები:

$$(A + r_1) \cap (A + r_2) = \emptyset \qquad (r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ r_1 \neq r_2);$$

$$(-1, 1) \subset \bigcup_{r \in (-2,2) \cap \mathbb{Q}} (A + r) \subset (-3, 3).$$

გადავნომროთ $(-2, 2) \cap \mathbb{Q}$ სიმრავლის ელემენტები: $(-2, 2) \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$ და A_k-ით აღვნიშნოთ $A + r_k$ სიმრავლე. მაშინ, ზემოთ მოცემული თანაფარდობებიდან გამომდინარე,

$$A_k \cap A_m = \emptyset \quad (k \neq m); \tag{3}$$

$$(-1, 1) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset (-3, 3); \tag{4}$$

გარე ზომის ძვრის მიმართ ინვარიანტულობის ძალით (იხ. ლემა 6.3.1) გვაქვს,

$$\mathrm{v}^*(A_k) = \mathrm{v}^*(A) \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{5}$$

თეორემა 5.2.3-ის თანახმად ნულის ტოლი გარე ზომის მქონე სიმრავლე ზომადია. რის გამოც გვექნება, რომ

$$\mathrm{v}^*(A) > 0. \tag{6}$$

ახლა განვიხილოთ სიმრავლეთა შემდეგი მიმდევრობა:

$$E_k = A_k \cup A_{k+1} \cup \dots \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, (E_k) კლებადი მიმდევრობაა და (3)-ის ძალით მისი ზღვარი არის ცარიელი სიმრავლე. ამასთან, (4)-დან გამომდინარე,

$$\mathrm{v}^*(E_1) \leq \mathrm{v}^*((-3,3)) = 6 < \infty.$$

შევნიშნოთ, რომ (5)-ის ძალით: $\mathrm{v}^*(E_k) \geq \mathrm{v}^*(A_k) = \mathrm{v}^*(A)$. შედეგად, (6)-ის საფუძველზე მივიღებთ,

$$\mathrm{v}^*(\emptyset) = 0 < \mathrm{v}^*(A) \leq \lim_{k\to\infty} \mathrm{v}^*(E_k).$$

ამრიგად, (E_k) მიმდევრობის მაგალითზე ვრწმუნდებით v^* გარე ზომისათვის ზემოდან უწყვეტობის თვისების შეუსრულებლობაში. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ 6.4.1 და 6.4.2 თეორემების ანალოგები $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ სივრცისათვის.
2. ვთქვათ, $A \subset \mathbb{R}$ და $B \subset \mathbb{R}$ ზომადი სიმრავლეებია. დაამტკიცეთ, რომ $A \times B$ სიმრავლე ზომადია (ე.ი. ზომადია ორგანზომილებიანი ლებეგის ზომის მიხედვით).

§ 5. ლებეგ-სტილტიესის ზომები

ვთქვათ, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ არის ვიტალის აზრით ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. v_φ ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებას ეწოდება φ **ფუნქციით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის ზომა**, რომელიც აღნიშნული იქნება m_φ ჩანაწერით. m_φ-ზომის განსაზღვრის არეში შემავალ სიმრავლეთა კლასი (ე.ი. v_φ ფუძის მიხედვით ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასი) აღვნიშნოთ $\mathcal{L}_\varphi$ ჩანაწერით. შემდგომში, სიმოკლისათვის, $A \in \mathcal{L}_\varphi$ სიმრავლეებს ვუწოდოთ m_φ-ზომადი.

ცხადია, $\varphi(x) = x_1 \ldots x_n$ შემთხვევაში m_φ წარმოადგენს ლებეგის m ზომას.

ყოველ ლებეგ-სტილტიესის m_φ ზომას აქვს ლებეგის ზომის მსგავსი ზოგიერთი თვისება. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი წინადადებები (რომელთა დამტკიცებები ლებეგის ზომისათვის ცნობილი შესაბამისი დებულებების დამტკიცებათა ანალოგიურია):

- $\mathcal{L}_\varphi$ კლასი არის σ-ალგებრა;
- m_φ-ს აქვს სისრულის თვისება;
- ნებისმიერი $I \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთი m_φ-ზომადია და $\mathrm{m}_\varphi(I) = \mathrm{v}_\varphi(I) < \infty$;
- m_φ არის σ-შემოსაზღვრული;

- $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველი ბორელის სიმრავლე არის m_φ-ზომადი, ე.ი. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_\varphi$. შედეგად, $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველი ღია, ყოველი ჩაკეტილი და ყოველი სასრული ან თვლადი სიმრავლე არის m_φ-ზომადი;
- სამართლიანია m_φ-ზომადობის კრიტერიუმები ელემენტარული, ჩაკეტილი და ღია სიმრავლეების ტერმინებში, რომლებიც 6.2.1 და 6.2.2 თეორემების ანალოგიურია.

შენიშვნა 6.5.1. ყოველი ლებეგ-სტილტიესის ზომა არის $r(\mathcal{I}^n)$ რგოლზე განსაზღვრული გარკვეული სასრული ზომის ლებეგისეულ გაგრძელება. თეორემა 4.7.2-ის ძალით სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც: ნებისმიერი ზომა, რომელიც არის $r(\mathcal{I}^n)$ რგოლზე განსაზღვრული რაიმე სასრული ზომის ლებეგისეული გაგრძელება, წარმოადგენს გარკვეული φ ფუნქციით წარმოქმნილ ლებეგ-სტილტიესის ზომას.

შენიშვნა 6.5.2. ლებეგ-სტილტიესის ზომა შეიძლება დავუკავშიროთ ნებისმიერ ზრდად $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქციასაც. საამისოდ φ უნდა შევასწოროთ ისე, რომ გახდეს მარჯვნიდან უწყვეტი, კერძოდ, უნდა განვიხილოთ $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x+0)$ ტოლობით განსაზღვრული $\widetilde{\varphi}$ ფუნქცია. მაშინ $\mathrm{m}_{\widetilde{\varphi}}$ მიიჩნევა φ ფუნქციით წარმოქმნილ ლებეგ-სტილტიესის m_φ ზომად.

შენიშვნა 6.5.3. 5.4.2 და 5.4.3 თეორემების ძალით ნებისმიერი ლებეგ-სტილტიესის m_φ ზომა ცალსახად განისაზღვრება ბორელის სიმრავლეთა $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ კლასზე მიღებული მნიშვნელობებით, სახელდობრ, m_φ მიიღება $\mathrm{m}_\varphi|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ ზომის შევსების მეშვეობით. აღნიშნულიდან გამომდინარე, m_φ-ზომადი სიმრავლეების $\mathcal{L}_\varphi$ კლასს ცალსახად განსაზღვრავს შემდეგი კლასი:

$$\mathcal{E}_\varphi = \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \mathrm{m}_\varphi(E) = 0\}.$$

კერძოდ, ადგილი აქვს $\mathcal{L}_\varphi$-ს შემდეგ წარმოდგენას:

$$\mathcal{L}_\varphi = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{N}_\varphi,$$

სადაც

$$\mathcal{N}_\varphi = \bigcup_{E \in \mathcal{E}_\varphi} 2^E,$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{N}_\varphi = \{M \cup N : M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ N \in \mathcal{N}_\varphi\}.$$

ამრიგად, m_φ ზომისა და $\mathcal{L}_\varphi$ კლასის შესახებ სრულყოფილ წარმოდგენას შევიქმნით, თუ, შესაბამისად, გვეცოდინება m_φ-ს მნიშვნელობები ბორელის სიმრავლეებზე და ნაპოვნი გვექნება $\mathcal{E}_\varphi$ კლასი.

მიუხედავად გარკვეული მსგავსებებისა, ლებეგ-სტილტიესის ზომას შეიძლება ჰქონდეს ლებეგის ზომისაგან არსებითად განსხვავებული ხასიათი. მოვიყვანოთ ამის დამადასტურებელი მაგალითი. ვთქვათ, $t \in \mathbb{R}$ და $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

არის შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad -\infty < x < t, \\ 1, & \text{თუ} \quad t \le x < \infty. \end{cases}$$

ყოველი $(a,b]$ მონაკვეთისათვის გვექნება,

$$\mathrm{m}_\varphi((a,b]) = \varphi(b) - \varphi(a) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad t \notin (a,b], \\ 1, & \text{თუ} \quad t \in (a,b]. \end{cases} \tag{1}$$

განვიხილოთ ბორელის კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ν ფუნქცია: ნებისმიერი $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ სიმრავლისათვის,

$$\nu(E) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad t \notin E, \\ 1, & \text{თუ} \quad t \in E. \end{cases}$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ ასეთი ფუნქცია წარმოადგენს ზომას $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ კლასზე. ამის შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ (1) ტოლობას და 5.5.1 თეორემას ზომის გაგრძელების ერთადერთობის შესახებ, დავასკვნით, რომ ნებისმიერი $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ სიმრავლისათვის,

$$\mathrm{m}_\varphi(E) = \nu(E) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad t \notin E, \\ 1, & \text{თუ} \quad t \in E. \end{cases} \tag{2}$$

როგორც ვხედავთ, $\mathcal{E}_\varphi$ კლასში შედის $(-\infty, t)$ და (t, ∞) მონაკვეთები. აქედან კი, შენიშვნა 6.5.2-ის საფუძველზე გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $E \subset \mathbb{R}$ ქვესიმრავლე m_φ-ზომადია და $\mathrm{m}_\varphi(E)$ გამოითვლება (2) ტოლობით მოცემული წესით.

ჩვენ მიერ განხილულ m_φ ზომას δ_t ჩანაწერით აღნიშნავენ და უწოდებენ t **წერტილში საყრდენის მქონე დირაკის ზომას**.

დირაკის ზომის შემთხვევაში, სივრცის მთლიანი მასა თავმოყრილია ერთადერთ წერტილში, განსხვავებით ლებეგის ზომისაგან, რომელიც მასას თანაბრად ანაწილებს რიცხვით ღერძზე.

განვიხილოთ საკითხი m_φ-არაზომადი სიმრავლის არსებობის შესახებ. თუ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქცია მუდმივია, მაშინ ცხადია, $\mathcal{L}_\varphi = 2^{\mathbb{R}}$. ამიტომ საკითხი საინტერესოა არამუდმივი φ ფუნქციის შემთხვევაში. ამ მიმართულებით სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 6.5.1. ვთქვათ, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ არის ზრდადი და უწყვეტი ფუნქცია, $a < b$ და $\varphi(a) < \varphi(b)$. მაშინ არსებობს $A \subset [a,b]$ სიმრავლე, რომელიც არაა ზომადი m_φ ზომის მიხედვით.

დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ φ ფუნქციის უწყვეტობის გამო ყოველი $x \in \mathbb{R}$ წერტილისათვის, $\mathrm{m}_\varphi(\{x\}) = 0$. შედეგად, ყოველი სასრული ან თვლადი $A \subset \mathbb{R}$ სიმრავლისათვის, $\mathrm{m}_\varphi(A) = 0$.

ცნობილია, რომ (იხ. მაგ., [10], თავი 2, ან [11], თავი 5) არსებობს $A \subset [a, b]$ სიმრავლე თვისებით: არცერთი A და $[a, b] \setminus A$ სიმრავლეებს შორის არ შეიცავს არათვლად ჩაკეტილ ქვესიმრავლეს. ასეთი A სიმრავლე **ბერნშტეინის ტიპის** სიმრავლის ტერმინით მოიხსენიება.

ვაჩვენოთ, რომ ბერნშტეინის ტიპის $A \subset [a, b]$ სიმრავლე არაა m_φ-ზომადი. დავუშვათ საწინააღმდეგო: A არის m_φ-ზომადი. მაშინ A და $[a, b] \setminus A$ სიმრავლეებს შორის ერთ-ერთი მაინც დადებითი ზომის იქნება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\mathrm{m}_\varphi(A) > 0$. როგორც აღვნიშნეთ, ლებეგ-სტილტიესის ზომებისათვის შესაძლებელია ზომადი სიმრავლის შიგნიდან მიახლოება ჩაკეტილი სიმრავლეების მეშვეობით (ე.ი. m_φ-სთვის ადგილი აქვს თეორემა 6.2.2-ის ანალოგს). აღნიშნულის ძალით იარსებებს A-ს ჩაკეტილი ქვესიმრავლე F, რომლისთვისაც $\mathrm{m}_\varphi(F) > 0$. საიდანაც, დამტკიცების დასაწყისში გაკეთებული შენიშვნის გათვალისწინებით დავასკვნით F სიმრავლის არათვლადობას. ამრიგად, F არის A-ს არათვლადი და ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ასეთი რამ კი შეუძლებელია, რადგანაც A ბერნშტეინის ტიპის სიმრავლეა. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ლებეგ-სტილტიესის ზომები უფრო სიღრმისეულად შესწავლილი იქნება მე-13 თავში.

ამოცანები

1. ვთქვათ, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ არის ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. აჩვენეთ, რომ $\mathrm{m}_\varphi(\{x\}) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა φ არის უწყვეტი x წერტილში.
2. ვთქვათ, l რაიმე წრფეა სიბრტყეზე. ააგეთ ლებეგ-სტილტიესის არანულოვანი ზომა სიბრტყეზე, ისეთი, რომ ყოველ ერთწერტილიან სიმრავლესა და l წრფის გარეთ მდებარე ყოველ სიმრავლეს ჰქონდეს ნულის ტოლი ზომა.

§ 6. ჰაუსდორფის ზომები და ჰაუსდორფის განზომილება

ლებეგის ზომა იძლევა მექანიზმს იმისა, თუ როგორ შეიძლება გავზომოთ სიმრავლის მიერ სივრცეში დაკავებული ადგილი n-განზომილებიანი განფენილობის თვალსაზრისით, მაგრამ არ იძლევა საშუალებას, გავზომოთ დაბალგანზომილებიანი სიმრავლეები, კერძოდ, წირის სიგრძე ანაც ზედაპირის ფართობი. ასეთი საკითხი წყდება ჰაუსდორფის ზომების მეშვეობით. კერძოდ, ჰაუსდორფის ერთგანზომილებიანი ზომა იძლევა წირის და სხვა „ერთგანზომილებიანი" სიმრავლეების სიგრძის პოვნის საშუალებას, ორგანზომილებიანი ზომა - ზედაპირის და სხვა „ორგანზომილებიანი" სიმრავლეების ფართობის პოვნის საშუალებას. საზოგადოდ, d-განზომილებიანი ჰაუსდორფის ზომა ახდენს სივრცის „d-განზომილებიანი" ქვესიმრავლეების გაზომვას. ჰაუსდორფის

ზომისა და განზომილების ცნებებს ფუნდამენტური მნიშვნელობა აქვს ზომის გეომეტრიულ თეორიაში.

ვთქვათ, $d \geq 0$ და $\varepsilon > 0$. H_d^ε-თი აღვნიშნოთ ფუნქცია, რომელიც ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$H_d^\varepsilon(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_k)^d : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ \operatorname{diam} A_k < \varepsilon\ (k \in \mathbb{N}) \right\}.$$

H_d^ε ფუნქციას აქვს გარე ზომის თვისებები. მართლაც, ნახევრად ადიციურობა მოწმდება თეორემა 5.1.2-ის მსგავსად, ხოლო დანარჩენი თვისებები ცხადია. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ თუ ε-ს შევამცირებთ, მაშინ ინფიმუმი აიღება დაფარვების უფრო შეზღუდული კლასის მიმართ, რის გამოც $H_d^\varepsilon(A)$ გამოსახულების მნიშვნელობა იზრდება. აღნიშნულის ძალით, ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი $\lim_{\varepsilon\to 0} H_d^\varepsilon(A)$, რაც საშუალებას იძლევა შემოვიღოთ ფუნქცია:

$$H_d^*(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_d^\varepsilon(A) \qquad (A \subset \mathbb{R}^n).$$

ცხადია, $H_d^*(A)$ შეიძლება განვსაზღვროთ $\sup_{\varepsilon>0} H_d^\varepsilon(A)$ გამოსახულების მეშვეობითაც.

თეორემა 6.6.1. **H_d^* ($d \geq 0$) ფუნქცია წარმოადგენს გარე ზომას.**

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ H_d^* არის არაუარყოფითი, ზრდადი და $H_d^*(\emptyset) = 0$.

შევამოწმოთ H_d^* ფუნქციის თვლადად ნახევრადადიციურობა. დავუშვათ, $A, A_1, A_2, \ldots$ არიან $\mathbb{R}^n$-ის ქვესიმრავლეები და $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველი დადებითი ε-სთვის H_d^ε არის გარე ზომა, გვექნება,

$$H_d^*(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_d^\varepsilon(A) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} H_d^\varepsilon(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} H_d^*(A_k).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

H_d^* ფუნქციას ეწოდება **ჰაუსდორფის d-განზომილებიანი გარე ზომა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში**.

$d \geq 0$ რიცხვისათვის, **ჰაუსდორფის d-განზომილებიანი ზომა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში** ეწოდება H_d^* გარე ზომით წარმოქმნილ ზომას. ჰაუსდორფის d-განზომილებიანი ზომა აღვნიშნოთ H_d-თი.

შენიშვნა 6.6.1. ჰაუსდორფის ზომა, განსხვავებით ლებეგ-სტილტიესის ზომებისაგან, არაა წარმოქმნილი რაიმე რგოლზე წინასწარ მოცემული ზომის ლებეგისეული გაგრძელების შედეგად. ჰაუსდორფის ზომის კონსტრუქცია ეფუძნება ზომის წარმოქმნის კარათეოდორის მეთოდს.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ ჰაუსდორფის ზომებისა და გარე ზომების ზოგიერთი თვისება:

- H_0 წარმოადგენს დამთვლელ ზომას;
- H_n ზომა ლებეგის m_n ზომის პროპორციულია, ე.ი. ზომად სიმრავლეთა კლასები ერთიდაიგივეა აღნიშნული ზომების თვალსაზრისით და $H_n(A) = c_n \mathrm{m}_n(A)$ ყოველი $A \in \mathcal{L}_n$ სიმრავლისათვის, სადაც c_n არის დადებითი მუდმივი;
- თუ $d > n$, მაშინ H_d^* ტრივიალურია, სახელდობრ, ყოველი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის $H_d^*(A) = 0$;
- ყოველი ბორელის სიმრავლე H_d-ზომადია, ანუ შედის H_d-ს განსაზღვრის არეში;
- თუ $H_d^*(A) > 0$, მაშინ ყოველი $s < d$-სთვის, $H_s^*(A) = \infty$;
- თუ $H_d^*(A) < \infty$, მაშინ ყოველი $s > d$-სთვის, $H_s^*(A) = 0$.

$A \subset \mathbb{R}^n$ **სიმრავლის ჰაუსდორფის განზომილება** ეწოდება რიცხვს:

$$\inf \{d \geq 0 : H_d^*(A) = 0\}.$$

ჰაუსდორფის განზომილება აღინიშნება $\dim_H A$ ჩანაწერით.

შენიშვნა 6.6.2. ადვილი შესამოწმებელია, რომ წერტილის ჰაუსდორფის განზომილება - ნულის, ხოლო მონაკვეთის - ერთის ტოლია. არსებობენ არამთელი განზომილების სიმრავლეები, რომელთა ყველაზე ცნობილი მაგალითია კანტორის $\mathbb{D}$ სიმრავლე. $\mathbb{D}$-ს ჰაუსდორფის განზომილება $\ln 2/\ln 3$-ის ტოლია.

შენიშვნა 6.6.3. H_d^* გარე ზომების ზემოთ მოცემული მე-5 და მე-6 თვისებების საფუძველზე გვაქვს, რომ: $H_d^*(A) = 0$, თუ $d > \dim_H A$ და $H_d^*(A) = \infty$, თუ $0 < d < \dim_H A$. $d = \dim_H A$ შემთხვევაში საზოგადოდ არ გამოირიცხება არცერთი $H_d^*(A) = 0$, $0 < H_d^*(A) < \infty$ და $H_d^*(A) = \infty$ შესაძლებლობებს შორის.

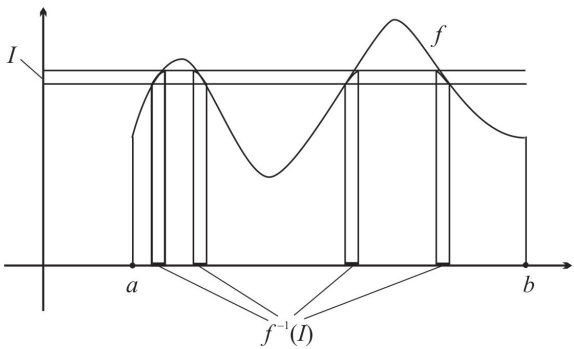
ამოცანები

1. დაამტკიცეთ ჰაუდორფის ზომებისა და გარე ზომების ზემოთ მოცემული თვისებები.
2. აჩვენეთ, რომ კანტორის სიმრავლის ჰაუსდორფის განზომილება $\ln 2/\ln 3$-ის ტოლია.
3. ააგეთ ლებეგის აზრით ნული ზომის სიმრავლე წრფეზე, რომლის ჰაუსდორფის განზომილება ერთის ტოლია.
4. ააგეთ კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლე წრფეზე, რომლის ჰაუსდორფის განზომილება ნულის ტოლია.

თ ა ვ ი 7

ზომადი ფუნქციები

ლებეგის ინტეგრალის კონსტრუქცია ეფუძნება ზომადად წოდებული ფუნქციების, ანუ ისეთი ფუნქციების განხილვას, რომელთათვისაც უზრუნველყოფილია $f^{-1}(I)$ სახის სიმრავლეების (ნახ. 7.1) ზომადობა, სადაც I რიცხვითი ღერძის რაიმე მონაკვეთია.



ნახ. 7.1.

ეს თავი ეთმობა ზომად ფუნქციათა თვისებების შესწავლას.

§ 1. ზომადი ფუნქციის ცნება

გაფართოებულ რიცხვით $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ ღერძზე მონაკვეთი განისაზღვრება ისევე, როგორც ჩვეულებრივ რიცხვით ღერძზე, ე.ი. ეწოდება სიმრავლეს, რომელიც თავის ნებისმიერ ორ წერტილთან ერთად შეიცავს მათ შორის მოთავსებულ ნებისმიერ წერტილსაც. აქვე შევნიშნოთ, რომ **$\overline{\mathbb{R}}$-ის ბორელის σ-ალგებრა** განისაზღვრება, როგორც A, $A \cup \{-\infty\}$, $A \cup \{\infty\}$ და $A \cup \{-\infty, \infty\}$ სახის ყველა სიმრავლის კლასი, სადაც A რიცხვითი ღერძის ნებისმიერი ბორელის სიმრავლეა.

შემდგომში განვიხილავთ ფუნქციებს, რომლებიც შეიძლება უსასრულო მნიშვნელობებს ღებულობდნენ. თუ ფუნქცია ყოველ წერტილში სასრულ მნიშვნელობას ღებულობს, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემული გვაქვს **სასრული ფუნქცია**.

ზომიანი სივრცე ეწოდება სამეულს (X, S, μ), სადაც X არის არაცარიელი სიმრავლე, S არის X-ის ქვესიმრავლეთა რაიმე σ-ალგებრა, ხოლო μ კი, S-ზე განსაზღვრული რაიმე ზომა. $E \in \mathrm{S}$ სიმრავლეებს **μ-ზომადი** (მოკლედ, **ზომადი**) სიმრავლეები ეწოდებათ.

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა და განვიხილავთ X-ზე განსაზღვრულ ფუნქციებს.

f ფუნქციას ეწოდება **μ-ზომადი** (მოკლედ, **ზომადი**), თუ გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ნებისმიერი I მონაკვეთის $f^{-1}(I)$ წინასახე μ-ზომადი სიმრავლეა.

ფუნქციის ზომადობა სავსებით ანალოგიურად ფორმულირდება X-ის ზომად E ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციების შემთხვევაში. შევნიშნოთ, რომ $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ფუნქციის ზომადობას შეიძლება შევხედოთ, როგორც $(E, \mathrm{S} \cap E, \mu|_{\mathrm{S} \cap E})$ სივრცეზე ზომადობას.

არსებობს ფუნქციის ზომადობის სხვა განსაზღვრებებიც, რომელთა ეკვივალენტობას ადგენს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.1.1. ნებისმიერი f ფუნქციისათვის შემდეგი წინადადებები ტოლფასია:

- **f ზომადია;**
- **ყოველი $I = [a, \infty]$ სახის მონაკვეთისათვის, $f^{-1}(I) \in \mathrm{S}$;**
- **ყოველი $I = (a, \infty]$ სახის მონაკვეთისათვის, $f^{-1}(I) \in \mathrm{S}$;**
- **ყოველი $I = [-\infty, a]$ სახის მონაკვეთისათვის, $f^{-1}(I) \in \mathrm{S}$;**
- **ყოველი $I = [-\infty, a)$ სახის მონაკვეთისათვის, $f^{-1}(I) \in \mathrm{S}$;**
- **გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ყოველი ბორელის A ქვესიმრავლისათვის, $f^{-1}(A) \in \mathrm{S}$.**

ზომადი სივრცე ეწოდება (X, S) წყვილს, სადაც X რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო S არის X-ის ქვესიმრავლეთა რაიმე σ-ალგებრა.

ლემა 7.1.1. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა. მაშინ ნებისმიერი $f : X \to Y$ ასახვისათვის,

$$\mathrm{H}_f = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathrm{S}\}$$

კლასი წარმოადგენს σ-ალგებრას.

დამტკიცება. H_f კლასის საჭირო თვისებები უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობებიდან:

$$f^{-1}(Y) = X,\ \ f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n),$$

სადაც A, B და A_n $(n \in \mathbb{N})$ წარმოადგენენ H_f-ის ნებისმიერ ქვესიმრავლეებს. □

ვთქვათ, X და Y არაცარიელი სიმრავლეებია, S და T შესაბამისად წარმოადგენენ X-ის და Y-ის ქვესიმრავლეთა რაიმე კლასებს. $f : X \to Y$ ასახვას ეწოდება (S, T)-**ზომადი**, თუ ყოველი $A \in \mathrm{T}$ სიმრავლის $f^{-1}(A)$ წინასახე ეკუთვნის S კლასს.

შევნიშნოთ, რომ ზომიან (X, S, μ) სივრცეზე განსაზღვრული f ფუნქციის ზომადობა ნიშნავს მის (S, T)-ზომადობას, სადაც T არის გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ყველა შესაძლო მონაკვეთის კლასი.

ლემა 7.1.2. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, Y არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო H_1 და H_2 არიან Y-ის ქვესიმრავლეთა კლასები, ისეთები, რომ $\sigma a(\mathrm{H}_1) = \sigma a(\mathrm{H}_2)$. მაშინ ნებისმიერი $f : X \to Y$ ასახვისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **f ასახვა $(\mathrm{S}, \mathrm{H}_1)$-ზომადია;**
- **f ასახვა $(\mathrm{S}, \mathrm{H}_2)$-ზომადია.**

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ f ასახვა $(\mathrm{S}, \mathrm{H}_1)$-ზომადია. ცხადია, $\mathrm{H}_1 \subset \mathrm{H}_f$. საიდანაც, ლემა 7.1.1-ის ძალით მივიღებთ, რომ $\sigma a(\mathrm{H}_1) \subset \mathrm{H}_f$. აქედან, ლემის პირობის გათვალისწინებით გვექნება: $\mathrm{H}_2 \subset \sigma a(\mathrm{H}_2) = \sigma a(\mathrm{H}_1) \subset \mathrm{H}_f$. რაც ცხადია, იწვევს f ასახვის $(\mathrm{S}, \mathrm{H}_2)$-ზომადობას. ანალოგიურად ვაჩვენებთ შებრუნებული იმპლიკაციის სამართლიანობას. ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 7.1.1-ის დამტკიცება. H_1 იყოს გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ყველა შესაძლო მონაკვეთის კლასი, ხოლო H_i $(i \in \overline{2, 6})$ იყოს რიგით i-ურ წინადადებაში მითითებული ყველა იმ სიმრავლის კლასი, რომელთათვისაც გარანტირებულია წინასახეთა ზომადობა (მაგალითად, H_3 იქნება ყველა $I = (a, \infty]$ სახის მონაკვეთის კლასი).

§3.4-ში დადგენილი შედეგების საფუძველზე ადვილი შესამოწმებელია, რომ H_i $(i \in \overline{1, 6})$ კლასებით წარმოქმნილი σ-ალგებრები ერთი და იგივეა და ტოლია $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ბორელის σ-ალგებრისა. საიდანაც, ლემა 7.1.2-ის ძალით ვასკვნით ექვსივე წინადადების ეკვივალენტურობას. თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 7.1.1. საზოგადოდ, თუ ვიცით, რომ გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ქვესიმრავლეთა H კლასით წარმოქმნილი σ-ალგებრა ემთხვევა $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ბორელის σ-ალგებრას, მაშინ f ფუნქციის ზომადობა ტოლფასია შემდეგი პირობის: ყოველი $A \in \mathrm{H}$ სიმრავლისათვის, $f^{-1}(A) \in \mathrm{S}$.

$A \subset X$ **სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია** X **სიმრავლეში** (მოკლედ, **მახასიათებელი ფუნქცია**) აღინიშნება χ_A სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ} \quad x \in A, \\ 0, & \text{თუ} \quad x \in X \setminus A. \end{cases}$$

შემდგომში სიმოკლისათვის $\{f > a\}$-თი აღვნიშნავთ $f^{-1}((a, \infty)) = \{x \in X : f(x) > a\}$ სიმრავლეს. მსგავსად იქნება გაგებული $\{f \geq a\}$, $\{f < a\}$ და ა.შ. აღნიშვნები.

თეორემა 7.1.2. $A \subset X$ **სიმრავლის მახასიათებელი** χ_A **ფუნქცია ზომადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზომადია** A **სიმრავლე.**

დამტკიცება. განვიხილოთ $(a, \infty]$ სახის მონაკვეთების წინასახეები χ_A ფუნქციის მოქმედებისას. გვექნება, რომ

$$\{\chi_A > a\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{თუ} \quad a \geq 1, \\ A, & \text{თუ} \quad 0 \leq a < 1, \\ X, & \text{თუ} \quad a < 0. \end{cases}$$

საიდანაც, თეორემა 7.1.1-ის ძალით ვასკვნით დასამტკიცებელი დებულების სამართლიანობას. $\square$

ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეა. $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ფუნქციას ეწოდება **ლებეგის აზრით ზომადი**, თუ გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ნებისმიერი I მონაკვეთის $f^{-1}(I)$ წინასახე ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეა.

ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ბორელის სიმრავლეა. $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ფუნქციას ეწოდება **ბორელის აზრით ზომადი**, თუ გაფართოებული რიცხვითი ღერძის ნებისმიერი I მონაკვეთის $f^{-1}(I)$ წინასახე ბორელის კლასის სიმრავლეა.

ცხადია, ყოველი ბორელის აზრით ზომადი ფუნქცია ზომადია ლებეგის აზრითაც.

არაცარიელ $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრული სასრული f ფუნქციის უწყვეტობა გაიგება E სიმრავლეში ბუნებრივი მანძილის მიხედვით.

თეორემა 7.1.3. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ **ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეა და** $f : E \to \mathbb{R}$ **უწყვეტი ფუნქციაა. მაშინ** f **ლებეგის აზრით ზომადია.**

დამტკიცება. განვიხილოთ (a, ∞) სახის მონაკვეთების წინასახეები f ფუნქციის მოქმედებისას. უწყვეტ ასახვათა მახასიათებელი თვისება მდგომარეობს იმაში, რომ (იხ. დანართი 2) ღია სიმრავლის წინასახე ასევე ღია სიმრავლეა. ამ თვისების ძალით, $f^{-1}((a, \infty))$ არის E-ს ღია ქვესიმრავლე E-ში არსებული ბუნებრივი მანძილის მიხედვით. შედეგად (იხ. დანართი 2), $f^{-1}((a, \infty))$ წარმოდგება $G \cap E$ სახით, სადაც G არის ღია სიმრავლე $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mathbb{R}^n$-ის ნებისმიერი ღია სიმრავლე ლებეგის აზრით ზომადია, თეორემა 7.1.1-ის ძალით დავასკვნით f ფუნქციის ლებეგის აზრით ზომადობას. თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 7.1.2. დირიხლეს ფუნქციის, ანუ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქციის მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქცია შეიძლება ყველა წერტილში წყვეტილი იყოს.

თეორემა 7.1.3-ის მსგავსად მტკიცდება შემდეგი დებულება.

თეორემა 7.1.4. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ბორელის სიმრავლეა და $f : E \to \mathbb{R}$ უწყვეტი ფუნქციაა. მაშინ f ბორელის აზრით ზომადია.

აქვე შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ორი მარტივად შესამოწმებელი წინადადება: 1) რიცხვითი ღერძის ლებეგის აზრით ზომად ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი მონოტონური ფუნქცია ლებეგის აზრით ზომადია; 2) რიცხვითი ღერძის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი მონოტონური ფუნქცია ბორელის აზრით ზომადია.

ამოცანები

1. აჩვენეთ, რომ თუ f ზომადი ფუნქციაა, მაშინ $\{f = a\}$ სიმრავლე ზომადია ნებისმიერი $a \in \overline{\mathbb{R}}$-სთვის. არის თუ არა სამართლიანი შებრუნებული წინადადება?
2. აჩვენეთ, რომ თუ $\{f > r\}$ სიმრავლე ზომადია ყოველი რაციონალური r რიცხვისათვის, მაშინ f ფუნქცია ზომადია.

§ 2. ზომადი ასახვების კომპოზიცია

თეორემა 7.2.1. ვთქვათ, ყოველი $k \in \overline{1,3}$-სთვის X_k არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო S_k არის X_k-ს ქვესიმრავლეთა რაიმე არაცარიელი კლასი. თუ $f : X_1 \to X_2$ ასახვა $(\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2)$-ზომადია, ხოლო $g : X_2 \to X_3$ ასახვა კი $(\mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3)$-ზომადი, მაშინ მათი $g \circ f$ კომპოზიცია არის $(\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_3)$-ზომადი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A \in \mathrm{S}_3$. მაშინ g-ს $(\mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3)$-ზომადობის ძალით, $g^{-1}(A) \in \mathrm{S}_2$. შემდეგ კი, f-ის $(\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2)$-ზომადობის ძალით გვექნება, რომ

$f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathrm{S}_1$. საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$ ტოლობას, დავასკვნით $g \circ f$ ასახვის $(\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_3)$-ზომადობას. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 7.2.2. ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, $f_k : X \to \mathbb{R}$ $(k \in \overline{1,n})$ μ-ზომადი ფუნქციებია, ხოლო $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ბორელის აზრით ზომადი ფუნქციაა. მაშინ შემდეგნაირად განსაზღვრული $F(f_1, \ldots, f_n)$ ფუნქცია:

$$X \ni x \mapsto F(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in \mathbb{R},$$

არის μ-ზომადი.

დამტკიცება. Φ-თი აღვნიშნოთ შემდეგი ასახვა:

$$X \ni x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

ცხადია, $F(f_1, \ldots, f_n) = F \circ \Phi$. ვაჩვენოთ, რომ Φ არის (S, Δ_n)-ზომადი, სადაც Δ_n აღნიშნავს $\mathbb{R}^n$ სივრცეში $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{n} (a_k, \infty)$ სახის ყველა n-განზომილებიანი მონაკვეთის კლასს. მართლაც, f_k ფუნქციების ზომადობის საფუძველზე გვექნება,

$$\Phi^{-1}\Big(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} (a_k, \infty)\Big) = \Big\{x \in X : (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} (a_k, \infty)\Big\} =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{n} \{x \in X : f_k(x) > a_k\} \in \mathrm{S}.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ Δ_n კლასით წარმოქმნილი σ-ალგებრა ემთხვევა $\mathbb{R}^n$ სივრცის ბორელის σ-ალგებრას (იხ. §3.4), მაშინ ლემა 7.1.2-ის საფუძველზე დავასკვნით Φ ასახვის $(\mathrm{S}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$-ზომადობას.

ამრიგად, Φ ასახვა არის $(\mathrm{S}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$-ზომადი, ხოლო F ფუნქცია კი, $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-ზომადი. შედეგად, თეორემა 7.2.1-ის ძალით $F(f_1, \ldots, f_n)$ ფუნქცია იქნება ზომადი. თეორემა დამტკიცებულია. □

შედეგი 7.2.1. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}$ ლებეგის აზრით ზომადი არაცარიელი სიმრავლეა, $f : E \to \mathbb{R}$ ფუნქცია ლებეგის აზრით ზომადია, ხოლო $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქცია კი არის ბორელის აზრით ზომადი. მაშინ $F \circ f$ ფუნქცია ლებეგის აზრით ზომადია.

შენიშვნა 7.2.1. შემდგომში (იხ. §7.4) ნაჩვენები იქნება, რომ ლებეგის აზრით ზომადი ორი ფუნქციის კომპოზიცია შეიძლება არ იყოს ლებეგის აზრით ზომადი.

§ 3. მოქმედებები ზომად ფუნქციებზე

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა და განვიხილავთ X-ზე განსაზღვრულ ფუნქციებს.

როგორც შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, არითმეტიკული ხასიათის ოპერაციებს არ გამოვყავართ ზომად ფუნქციათა კლასიდან.

თეორემა 7.3.1. ვთქვათ, f და g ზომადი სასრული ფუნქციებია. მაშინ შემდეგი ფუნქციები ზომადია: cf $(c \in \mathbb{R})$, $f+g$, fg, $1/g$ (თუ $0 \notin g(X)$), $\min(f,g)$, $\max(f,g)$, $|f|$.

დამტკიცება. დასამტკიცებელი წინადადებები გამომდინარეობენ თეორემა 7.2.2-დან, თუ მას შესაბამისად გამოვიყენებთ შემდეგი ფუნქციებისათვის:

$$F_1(t) = ct; \;\; F_2(t_1, t_2) = t_1 + t_2; \;\; F_3(t_1, t_2) = t_1 t_2;$$

$$F_4(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{როცა } \; t \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } \; t = 0; \end{cases}$$

$$F_5(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2); \;\; F_6(t_1, t_2) = \max(t_1, t_2); \;\; F_7(t) = |t|.$$

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 7.2.2-ის გამოყენების საფუძველია F_k ფუნქციების ბორელის აზრით ზომადობა, რაც $k \neq 4$ შემთხვევებში გამომდინარეობს F_k ფუნქციების უწყვეტობიდან, ხოლო $k = 4$ შემთხვევაში კი, F_4 ფუნქციის უწყვეტობიდან $(-\infty, 0)$ და $(0, \infty)$ სხივებზე.

თეორემა დამტკიცებულია. □

შევთანხმდეთ, რომ: $\infty + a = a + \infty = \infty$ $(a \in \mathbb{R})$, $-\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$ $(a \in \mathbb{R})$, $\infty + \infty = \infty - (-\infty) = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty + (-\infty) = -\infty$, $\infty - \infty = -\infty - (-\infty) = 0$, $a \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times a = \pm\infty$ $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$, $a \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times a = \mp\infty$ $(a \in \mathbb{R}, a < 0)$, $0 \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times 0 = 0$, $\infty \times \infty = (-\infty) \times (-\infty) = \infty$, $(-\infty) \times \infty = \infty \times (-\infty) = -\infty$, $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ $(a \in \mathbb{R})$, $-\infty < a < \infty$ $(a \in \mathbb{R})$.

თეორემა 7.3.1-ის მსგავსი დებულება სამართლიანია ნებისმიერი (არა აუცილებლად სასრული) ფუნქციებისთვისაც.

თეორემა 7.3.2. ვთქვათ, f და g ზომადი ფუნქციებია. მაშინ შემდეგი ფუნქციები ზომადია: cf $(c \in \mathbb{R})$, $f+g$, fg, $1/g$ (თუ $0 \notin g(X)$), $\min(f,g)$, $\max(f,g)$, $|f|$.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ fg ნამრავლის ზომადობა. დანარჩენი შემთხვევები ანალოგიურია.

ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი დებულების სამართლიანობა: დავუშვათ, h რაიმე ფუნქციაა X-ზე, ხოლო $A_1, \ldots, A_n$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი

ზომადი სიმრავლეებია, რომელთა გაერთიანება X-ის ტოლია. მაშინ h ფუნქციის ზომადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია ზომადი იყოს თითოეული $h|_{A_1}, \dots, h|_{A_n}$ ფუნქციებს შორის.

ნებისმიერი h ფუნქციისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები: $A_1(h) = \{0 < |h| < \infty\}$, $A_2(h) = \{h = \infty\}$, $A_3(h) = \{h = -\infty\}$, $A_4(h) = \{h = 0\}$.

ზემოთ მოცემული დებულების ძალით, fg ფუნქციის ზომადობა დადგენილი იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ თითოეული $(fg)|_{A_i(f)\cap A_j(g)}$ $(i, j \in \overline{1,4})$ შეზღუდვებს შორის არის ზომადი. ეს ფაქტი უშუალოდ მოწმდება, თუ ერთ-ერთი მაინც i და j ინდექსებს შორის არ უდრის 1-ს. რაც შეეხება $i = 1, j = 1$ შემთხვევას: ზემოთ მოცემული დებულების ძალით, $f|_{A_1(f)\cap A_1(g)}$ და $g|_{A_1(f)\cap A_1(g)}$ ფუნქციები ზომადია, საიდანაც თუ გავითვალისწინებთ

$$(fg)|_{A_1(f)\cap A_1(g)} = f|_{A_1(f)\cap A_1(g)}\, g|_{A_1(f)\cap A_1(g)}$$

ტოლობას და გამოვიყენებთ თეორემა 7.3.1-ს, დავასკვნით $(fg)|_{A_1(f)\cap A_1(g)}$ ფუნქციის ზომადობას. ამით fg ნამრავლის ზომადობა დადგენილია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

არითმეტიკულ ოპერაციებთან ერთად ზომად ფუნქციათა კლასი ჩაკეტილია ზღვარითი ოპერაციების მიმართაც, კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.3.3. თუ (f_n) ზომადი ფუნქციების მიმდევრობაა, მაშინ შემდეგი ფუნქციები ზომადია:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \varliminf_{n\to\infty} f_n,\ \varlimsup_{n\to\infty} f_n.$$

კერძოდ, თუ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ფუნქცია ზომადია.

დამტკიცება. ნებისმიერი $a \in \overline{\mathbb{R}}$-სთვის გვაქვს, რომ:

$$\left\{x : \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \ge a\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x : f_n(x) \ge a\} \in \mathrm{S};$$

$$\left\{x : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \le a\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x : f_n(x) \le a\} \in \mathrm{S}.$$

ამით $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ და $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ფუნქციების ზომადობა დადგენილია.

თუ გავითვალისწინებთ ტოლობებს: $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left[\inf\limits_{k\ge n} f_k\right]$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\left[\sup\limits_{k\ge n} f_k\right]$, მაშინ ზომად ფუნქციათა სუპრემუმისა და ინფიმუმის ზომადობის უკვე დადგენილი თვისებიდან გამომდინარე, დავასკვნით $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$ და $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$ ფუნქციების ზომადობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. აჩვენეთ, რომ თუ f^3 ზომადი ფუნქციაა, მაშინ f ზომადია. არის თუ არა იგივე დასკვნა სამართლიანი f^2-ის ზომადობის შემთხვევაში?
2. აჩვენეთ, რომ თუ Ω ზომად ფუნქციათა არათვლადი კლასია, მაშინ $\inf\limits_{f \in \Omega} f(x)$ და $\sup\limits_{f \in \Omega} f(x)$ შეიძლება არაზომადი ფუნქციები იყვნენ.
3. აჩვენეთ, რომ თუ Ω არის $[0,1]$-ზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა არაცარიელი კლასი, მაშინ $\inf\limits_{f \in \Omega} f(x)$ და $\sup\limits_{f \in \Omega} f(x)$ ფუნქციები ლებეგის აზრით ზომადი არიან.
4. ვთქვათ, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ფუნქცია ლებეგის აზრით ზომადია. აჩვენეთ, რომ ყველა იმ წერტილის A სიმრავლე, რომელშიც არსებობს f-ის სასრული წარმოებული, არის ლებეგის აზრით ზომადი. აჩვენეთ აგრეთვე, რომ f', როგორც A სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია, არის ლებეგის აზრით ზომადი.

§ 4. კანტორის ფუნქცია

ქვემოთ მოცემული აგება მიზნად ისახავს ნამდვილი ანალიზის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ობიექტის - კანტორის ფუნქციის განსაზღვრას.

Π_n-ით აღვნიშნოთ კანტორის სიმრავლის აგების n-ურ ეტაპზე $[0,1]$ სეგმენტიდან ამოგდებული ყველა ინტერვალის კლასი, ხოლო Λ_n იყოს $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ კლასების გაერთიანება.

Λ_n შედგება $2^n - 1$ ცალი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალისაგან: $\Lambda_n = \{I_1, \ldots, I_{2^n-1}\}$, ხოლო Π_{n+1} შედგება 2^n ცალი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალისაგან: $\Pi_{n+1} = \{J_1, \ldots, J_{2^n}\}$. ვიგულისხმოთ, რომ როგორც I_k, ასევე J_k ინტერვალები გადანომრილია მათი მდებარეობის მარცხნიდან მარჯვნივ გადანაცვლების შესაბამისად. შევნიშნოთ, რომ Π_{n+1} კლასის ინტერვალები ლაგდებიან Λ_n კლასის ინტერვალებს შორის, სახელდობრ, J_1 მოთავსებულია $x = 0$ წერტილსა და I_1 ინტერვალს შორის, J_2 მოთავსებულია I_1 და I_2 ინტერვალებს შორის, და ა.შ. J_{2^n} მოთავსებულია I_{2^n-1} ინტერვალსა და $x = 1$ წერტილს შორის. ამრიგად, Λ_n-დან Λ_{n+1}-ზე გადასვლისას ხდება კლასის გაფართოება, რომლის დროსაც შემომატებული ინტერვალები იკავებენ კენტნომრიან $1, 3, \ldots, 2^{n+1} - 1$ პოზიციებს, ხოლო Λ_n-ში შემავალი ძველი ინტერვალები გადადიან ლუწნომრიან: $2, 4, \ldots, 2^{n+1} - 2$ პოზიციებზე.

θ_n იყოს ფუნქცია, რომელიც Λ_n კლასის $I_1, I_2, \ldots, I_{2^n-1}$ ინტერვალებზე შესაბამისად ღებულობს $\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}$ მნიშვნელობებს.

იმის გათვალისწინებით, თუ როგორ ხდება Λ_n-დან Λ_{n+1}-ზე გადასვლისას შემომატებული და მანამდე არსებული ინტერვალების გადანომვრა, ადვილი დასანახია, რომ ყოველი n-სთვის θ_{n+1} წარმოადგენს θ_n-ის გაგრძელებას. ეს

უკანასკნელი გარემოება საშუალებას იძლევა შემოვიღოთ θ^* ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია კანტორის სიმრავლის ყველა დამატებით ინტერვალზე (ე.ი. $[0,1]\setminus\mathbb{D}$ სიმრავლეზე) და ყოველი n-სთვის წარმოადგენს θ_n ფუნქციის გაგრძელებას. კერძოდ, θ^* ფუნქციის განსაზღვრისათვის უნდა მოვიქცეთ შემდეგნაირად: კანტორის სიმრავლის ნებისმიერი დამატებითი I ინტერვალისათვის უნდა განვიხილოთ ყველა ის $n, n+1, \ldots$ ნომერი, რომელთათვისაც $I \in \Lambda_n$ და θ^* ფუნქციას I ინტერვალზე უნდა მივანიჭოთ $\theta_n, \theta_{n+1}, \ldots$ ფუნქციების მიერ I-ზე მიღებული საერთო მნიშვნელობა. მარტივი დასანახია, რომ: θ^* ზრდადია თავის განსაზღვრის არეზე, მუდმივია კანტორის სიმრავლის ყოველ დამატებით ინტერვალზე და ღებულობს $\frac{k}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N},\ \ k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1)$ სახის ყველა მნიშვნელობას.

$\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: $\theta(0) = 0$ და

$$\theta(x) = \sup\{\theta^*(y) : y \le x,\ y \in [0,1]\setminus\mathbb{D}\} \quad (0 < x \le 1).$$

ცხადია, θ ზრდადია, ხოლო θ^* ფუნქციის ზრდადობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ θ წარმოადგენს θ^*-ის გაგრძელებას. ამრიგად, θ ზრდადი ფუნქციაა, რომლის მიერ მიღებული მნიშვნელობების სიმრავლე ყველგან მკვრივია $[0,1]$-ში, ასეთი თვისებების მქონე ფუნქცია კი უწყვეტია. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო: რომელიღაც $x \in [0,1]$ წერტილში θ განიცდის წყვეტას. აღვნიშნოთ

$$I = \begin{cases} (\theta(x), \theta(x+0)), & \text{თუ} \quad x = 0, \\ (\theta(x-0), \theta(x+0)) \setminus \{\theta(x)\}, & \text{თუ} \quad x \in (0,1), \\ (\theta(x-0), \theta(x)), & \text{თუ} \quad x = 1. \end{cases}$$

θ-ს ზრდადობის გამო ადვილი დასანახია, რომ θ ვერ მიიღებს ვერცერთ მნიშვნელობას I-დან, რაც ეწინააღმდეგება θ-ს მიერ მიღებულ მნიშვნელობათა სიმრავლის ყველგან მკვრივობას $[0,1]$-ში.

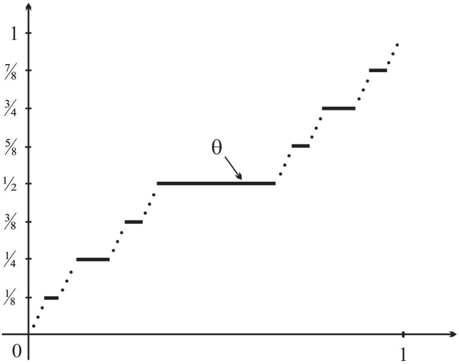
θ-ს **კანტორის ფუნქციას** უწოდებენ. როგორც ზემოთ დავადგინეთ, θ ფუნქციას აქვს თვისებები:

- θ არის $[0,1]$-ზე განსაზღვრული, ზრდადი და უწყვეტი;
- $\theta(0) = 0$ და $\theta(1) = 1$. შედეგად, θ არაა მუდმივი;
- θ მუდმივია კანტორის სიმრავლის ყოველ დამატებით ინტერვალზე. შედეგად, $\theta'(x) = 0$ თითქმის ყველგან $[0,1]$-ზე.

ნახ. 7.2-ზე მოცემულია კანტორის ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი.

შემდეგი თეორემა მტკიცდება კანტორის ფუნქციის თვისებების გამოყენებით.

თეორემა 7.4.1. არსებობენ ლებეგის აზრით ზომადი $f : [0,1] \to [0,1]$ და $g : [0,1] \to [0,1]$ ფუნქციები, ისეთები, რომ:



ნახ. 7.2.

- **მოიძებნება ლებეგის აზრით ზომადი $A \subset [0,1]$ სიმრავლე, რომლის $f^{-1}(A)$ წინასახე არაა ლებეგის აზრით ზომადი;**
- **$g \circ f$ არაა ლებეგის აზრით ზომადი.**

დამტკიცება. განვიხილოთ $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, განსაზღვრული შემდეგი ტოლობით:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\theta(x) + \frac{1}{2}x \quad (x \in [0,1]),$$

სადაც θ კანტორის ფუნქციაა. თუ გავითვალისწინებთ კანტორის ფუნქციის თვისებებს, დავასკვნით, რომ:

- φ მკაცრად ზრდადია, უწყვეტია და ბიექციურად ასახავს $[0,1]$ სეგმენტს თავის თავში;
- კანტორის სიმრავლის დამატებითი სიმრავლის $\varphi([0,1] \setminus \mathbb{D})$ ანასახის ზომა $1/2$-ის ტოლია. შედეგად, $1/2$-ის ტოლი ზომა აქვს კანტორის სიმრავლის $\varphi(\mathbb{D})$ ანასახსაც.

ყოველი დადებითი ლებეგის ზომის სიმრავლე შეიცავს არაზომად ქვესიმრავლეს. რის გამოც არსებობს $\varphi(\mathbb{D})$ სიმრავლის არაზომადი M ქვესიმრავლე. N-ით აღვნიშნოთ M-ის წინასახე $\varphi^{-1}(M)$. N როგორც ნულზომიანი $\mathbb{D}$ სიმრავლის ქვესიმრავლე, იქნება ლებეგის აზრით ზომადი. ამრიგად, φ ფუნქციის მოქმედებისას ზომადი N სიმრავლის ანასახი გამოდის არაზომადი M სიმრავლე.

f განვსაზღვროთ როგორც φ-ს შებრუნებული ფუნქცია. მაშინ f იქნება უწყვეტი და შედეგად, ლებეგის აზრით ზომადიც. ამასთან, შესრულდება ტოლობა $f^{-1}(N) = M$. ამით თეორემის პირველი ნაწილი დადგენილია. შემდეგ, თუ g ფუნქციას განვსაზღვრავთ, როგორც N სიმრავლის მახასიათებელ

ფუნქციას, გვექნება, რომ

$$\{g \circ f = 1\} = f^{-1}(\{g = 1\}) = f^{-1}(N) = M.$$

რაც ნიშნავს $g \circ f$ კომპოზიციის არაზომადობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ქვემოთ მოცემული ორი დებულება წარმოადგენს თეორემა 7.4.1-ის შედეგს.

თეორემა 7.4.2. არსებობს ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლე, რომელიც არაა ბორელის სიმრავლე.

დამტკიცება. განვიხილოთ ლებეგის აზრით ზომადი A სიმრავლე და f ფუნქცია თეორემა 7.4.1-დან. მაშინ A ვერ იქნება ბორელის სიმრავლე, ვინაიდან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, მისი $f^{-1}(A)$ წინასახე (f-ის ლებეგის აზრით ზომადობის ძალით) გამოვა ლებეგის აზრით ზომადი, რაც ეწინააღმდეგება თეორემა 7.4.1-ის პირველ დასკვნას. $\square$

შენიშვნა 7.4.1. ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა $\mathcal{L}$ კლასი რომ უფრო ფართოა, ვიდრე ბორელის სიმრავლეთა $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ კლასი, ამის დამტკიცება შეიძლება სიმძლავრესთან დაკავშირებულ მოსაზრებებზე დაყრდნობითაც. კერძოდ, $\mathcal{L}$ ჰიპერკონტინუუმის, ხოლო $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ კი კონტინუუმის სიმძლავრისაა. card $\mathcal{L}$ $= 2^{\mathrm{c}}$ ტოლობის მისაღებად საკმარისია გავითვალისწინოთ ლებეგის ზომის სისრულე და კანტორის სიმრავლის ლებეგის აზრით ზომადობა. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ კლასისათვის card $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathrm{c}$ ტოლობის დამტკიცება შედარებით რთულია და მოითხოვს ტრანსფინიტული ინდუქციის გამოყენებას (იხ. მაგ., [6], §1.6).

თეორემა 7.4.3. ბორელის ზომას არა აქვს სისრულის თვისება.

დამტკიცება. განვიხილოთ ლებეგის აზრით ზომადი $A \subset [0,1]$ სიმრავლე, რომელიც არაა ბორელის სიმრავლე. თეორემა 5.4.3-ის ძალით, A წარმოდგება სახით $A = M \cup N$, სადაც $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ხოლო N ისეთია, რომ მისთვის მოიძებნება $\widehat{N} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ სიმრავლე თვისებებით: $N \subset \widehat{N}$ და $\mathrm{m}_{\mathcal{B}}(\widehat{N}) = 0$. მაშინ N წარმოადგენს სიმრავლეს, რომელიც ჩართულია ნულის ტოლი ბორელის ზომის მქონე $\widehat{N}$ სიმრავლეში, მაგრამ არაა ზომადი ბორელის ზომის მიხედვით. შედეგად, ბორელის ზომას არა აქვს სისრულის თვისება. $\square$

§ 5. ზომადი ფუნქციის მიახლოება მარტივი ფუნქციების მეშვეობით

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა. $f : X \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება **მარტივი**, თუ f არის ზომადი და ღებულობს სასრული რაოდენობის მნიშვნელობებს.

მარტივი f ფუნქციის **სტანდარტული წარმოდგენა** ვუწოდოთ ჯამს:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k},$$

სადაც $f(X) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ და $A_k = \{f = a_k\}$. ცხადია, A_k სიმრავლეები ზომადები არიან.

მარტივი ფუნქციის ელემენტარული მაგალითია ზომადი A სიმრავლის მახასიათებელი χ_A ფუნქცია.

მარტივ ფუნქციებს არსებითი დატვირთვა აქვთ ლებეგის ინტეგრალის კონსტრუქციაში.

ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობას ვუწოდოთ **წერტილოვნად კრებადი**, თუ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ზღვარი.

ნებისმიერი ზომადი ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც მარტივ ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი ზღვარი. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.5.1. ნებისმიერი ზომადი f ფუნქციისათვის არსებობს მარტივ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა, ისეთი, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ყოველი $x \in E$ წერტილისათვის. თუ f არაუარყოფითი ფუნქციაა, მაშინ (f_n) შეიძლება შევარჩიოთ ისე, რომ დამატებით სრულდებოდეს პირობა:

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \quad (x \in X);$$

ხოლო, თუ f შემოსაზღვრული ფუნქციაა, მაშინ შეიძლება მივაღწიოთ (f_n) მიმდევრობის თანაბარ კრებადობას.

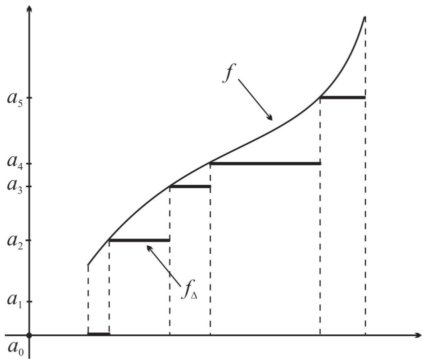
დამტკიცება. ვთქვათ, $\Delta = \{I_0, \ldots, I_n\}$ მონაკვეთებისაგან შედგენილი კლასია, ისეთი, რომ: $I_0 = [a_0, a_1), I_1 = [a_1, a_2), \ldots, I_{n-1} = [a_{n-1}, a_n), I_n = [a_n, \infty]$, სადაც $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \infty$. არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციის Δ-გამარტივება ვუწოდოთ შემდეგ ფუნქციას:

$$f_\Delta = \sum_{k=0}^{n} a_k \chi_{\{f \in I_k\}}.$$

f-დან f_Δ ფუნქციაზე გადასვლისას მართლაც ხდება ფუნქციის ყოფაქცევის გამარტივება, ვინაიდან $\{f \in I_k\}$ სიმრავლეზე f ფუნქცია შეიძლება ღებულობდეს ნებისმიერ მნიშვნელობას I_k მონაკვეთიდან, მაშინ, როცა f_Δ ღებულობს ერთადერთ მნიშვნელობას, რომელიც I_k მონაკვეთის ქვედა საზღვრის ტოლია (ნახ. 7.3).

მოვიყვანოთ Δ-გამარტივების თვისებები:

- f_Δ მარტივი ფუნქციაა;



ნახ. 7.3.

- თუ $f(x) < a_n$, მაშინ $0 \le f(x) - f_\Delta(x) < \lambda_\Delta$, სადაც λ_Δ არის მაქსიმალური Δ კლასის მონაკვეთების სიგრძეებს შორის;
- თუ $f(x) \ge a_n$, მაშინ $f_\Delta(x) = a_n$;
- თუ Δ^* ოჯახის მონაკვეთები მიიღებიან Δ კლასის მონაკვეთების დანაწილების შედეგად, მაშინ $f_{\Delta^*} \ge f_\Delta$.

პირველი, მეორე და მესამე თვისებები მარტივად მოწმდება. მეოთხე თვისების დასადგენად განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილი. $f(x)$ რიცხვი შევა რომელიმე $I \in \Delta^*$ მონაკვეთში. თავის მხრივ, I მონაკვეთი შედის რომელიმე $J \in \Delta$ მონაკვეთში. მაშინ გვაქვს, რომ $f_{\Delta^*}(x) = \inf I \ge \inf J = f_\Delta(x)$.

ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის განვიხილოთ Δ_n კლასი, რომელიც შედგება

$$[0, 1/2^n),\ [1/2^n, 2/2^n), \ldots, [n - 1/2^n, n),\ [n, \infty]$$

მონაკვეთებისაგან და f_n-ის როლში ავიღოთ f_{Δ_n} ფუნქცია. Δ_{n+1} კლასის მონაკვეთები მიიღებიან Δ_n კლასის მონაკვეთების დანაწილების შედეგად. რის გამოც, Δ-გამარტივების თვისებებიდან გამომდინარე, (f_n) იქნება მარტივი არაუარყოფითი ფუნქციების ზრდადი მიმდევრობა, ამასთანავე, შესრულდება პირობები:

$$0 \le f(x) - f_n(x) < 1/2^n, \quad \text{თუ } f(x) < n;$$

და

$$f_n(x) = n, \quad \text{თუ } f(x) \ge n.$$

ცხადია, (f_n) მიმდევრობა აკმაყოფილებს არაუარყოფითი ფუნქციისათვის თეორემაში მოთხოვნილ ყველა პირობას. აქვე შევნიშნოთ, რომ f ფუნქციის შემოსაზღვრულობის შემთხვევაში, (f_n) მიმდევრობის კრებადობას თანაბარი ხასიათი ექნება.

ნებისმიერი ზომადი f ფუნქციისათვის შემოვიღოთ ფუნქციები:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{თუ } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{თუ } f(x) < 0; \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{თუ } f(x) < 0. \end{cases}$$

მათ, შესაბამისად, f ფუნქციის დადებით და უარყოფით ნაწილებს უწოდებენ. ცხადია, ორივე მათგანი არაუარყოფითია და $f = f^+ - f^-$. თუ გავითვალისწინებთ $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ და $f^+ = -\min(f(x), 0)$ ტოლობებს, თეორემა 7.3.2-ის საფუძველზე დავასკვნით f^+ და f^- ფუნქციების ზომადობას. განვიხილოთ მარტივ ფუნქციათა (f_n^+) და (f_n^-) მიმდევრობები, რომელთაც აქვთ საჭირო თვისებები, შესაბამისად, f^+ და f^- ფუნქციებთან მიმართებაში. მაშინ ცხადია, რომ მარტივ ფუნქციათა $f_n = f_n^+ - f_n^-$ მიმდევრობა ყოველ წერტილში კრებადი იქნება f ფუნქციისაკენ, ამასთან, f ფუნქციის შემოსაზღვრულობის შემთხვევაში, კრებადობას ექნება თანაბარი ხასიათი. თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 7.5.1. თუ არაუარყოფით ზომად f ფუნქციას აქვს თვისება: $\mu(\{f > t\}) < \infty$ ყოველი დადებითი t-სათვის, მაშინ თეორემა 7.5.1-ის დამტკიცებიდან ნათლად ჩანს, რომ ყოველი f_n ფუნქცია დადებით მნიშვნელობებს მიიღებს სასრული ზომის სიმრავლეებზე.

ამოცანები

1. აჩვენეთ, რომ ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი კრებადობიდან, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს მისი თანაბრად კრებადობა.

§ 6. ეკვივალენტური ფუნქციები

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა და ცნებები შემოღებული იქნება ამ სივრცესთან მიმართებაში.

ვთქვათ, ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის მოცემულია $P(x)$ პირობა. ამბობენ, რომ P პირობა სრულდება **თითქმის ყოველ** $x \in X$ **წერტილში** (მოკლედ, სრულდება **თითქმის ყველგან**), თუ ყველა იმ $x \in X$ წერტილის N_P სიმრავლე, რომელშიც არ სრულდება $P(x)$ პირობა, შეიძლება დაიფაროს ნული ზომის სიმრავლის მეშვეობით, ე.ი. მოიძებნება $A \in \mathrm{S}$ სიმრავლე თვისებებით: $\mu(A) = 0$ და $N_P \subset A$. შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრებაში არაა მოთხოვნილი N_P სიმრავლის ზომადობა. ცხადია, თუ μ ზომა სრულია, მაშინ N_P-ს ზომადობა თავისთავად უზრუნველყოფილი იქნება.

X-ზე განსაზღვრულ f და g ფუნქციებს ეწოდებათ **ეკვივალენტური**, თუ $f(x) = g(x)$ პირობა სრულდება თითქმის ყოველ $x \in X$ წერტილში. ფუნქციათა ეკვივალენტობას აღნიშნავენ შემდეგნაირად: $f \sim g$ ან $f = g(\mathrm{mod}\,\mu)$.

თეორემა 7.6.1. ფუნქციათა ეკვივალენტობის მიმართებას აქვს ეკვივალენტობის ზოგადი მიმართებისათვის დამახასიათებელი რეფლექსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისებები.

დამტკიცება. რეფლექსურობისა და სიმეტრიულობის თვისებები ცხადია. შევამოწმოთ ტრანზიტულობა. ვთქვათ, $f = g(\mathrm{mod}\ \mu)$ და $g = h(\mathrm{mod}\ \mu)$. მაშინ მოიძებნებიან ნულზომიანი N_1 და N_2 სიმრავლეები, რომელთათვისაც $\{f \neq g\} \subset N_1$ და $\{g \neq h\} \subset N_2$. ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ $N_1 \cup N_2$ ნული ზომისაა და $\{f \neq h\} \subset N_1 \cup N_2$, დავასკვნით f და h ფუნქციების ეკვივალენტობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 7.6.2. თუ μ ზომა სრულია, მაშინ ეკვივალენტურ ფუნქციათა შორის ერთ-ერთის ზომადობა იწვევს მეორე მათგანის ზომადობასაც.

დამტკიცება. დავუშვათ, g ზომადია და $f = g(\mathrm{mod}\ \mu)$. განვიხილოთ ნებისმიერი რიცხვი $a \in \mathbb{R}$. g-ს ზომადობის გამო, $\{g > a\}$ სიმრავლე არის ზომადი. ზომის სისრულიდან გამომდინარე კი, $\{f \neq g\}$ სიმრავლე არის ზომადი და მისი ზომა ნულის ტოლია. აღვნიშნოთ $E_f = \{f > a\}$ და $E_g = \{g > a\}$. შევნიშნოთ, რომ:

1) $E_f \triangle E_g \subset \{f \neq g\}$,

2) $E_f = (E_f \setminus E_g) \cup (E_f \cap E_g) = (E_f \setminus E_g) \cup (E_g \setminus (E_g \setminus E_f))$.

ამ ორი პირობიდან ზომის სისრულის საფუძველზე მარტივად ვასკვნით E_f სიმრავლის ზომადობას, რითაც თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ააგეთ ლებეგის აზრით ზომადი $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, ისეთი, რომ მისი ეკვივალენტური ნებისმიერი ფუნქცია იყოს ყველა წერტილში წყვეტილი.
2. აჩვენეთ, რომ თუ $[0,1]$-ზე განსაზღვრული ორი უწყვეტი ფუნქცია ეკვივალენტურია ლებეგის ზომის მიხედვით, მაშინ ეს ფუნქციები ყველა წერტილში ტოლია.

§ 7. თითქმის ყველგან კრებადობა

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა და განსახილავი ფუნქციები განსაზღვრულია X-ზე.

ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობას ეწოდება **თითქმის ყველგან კრებადი** f ფუნქციისაკენ, თუ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ პირობა სრულდება თითქმის ყოველი $x \in$

X წერტილისათვის. თითქმის ყველგან კრებადობას შემდეგნაირად აღნიშნავენ: $f_n \to f(\mathrm{mod}\,\mu)$ ან $f_n \to f$ თ.ყ.

თეორემა 7.7.1. თუ ზომად ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა თითქმის ყველგან კრებადია f ფუნქციისაკენ და დამატებით ცნობილია, რომ μ ზომა სრულია, მაშინ f ფუნქცია ზომადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, N ნულზომიანი სიმრავლეა, რომლის გარეთ მდებარე წერტილებზე სრულდება $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ პირობა. f ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$f = f\chi_N + f\chi_{X\setminus N}.$$

ადვილი დასანახია, რომ $(f_n\chi_{X\setminus N})(x) \to (f\chi_{X\setminus N})(x)$ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის, ამასთან, $X \setminus N$ სიმრავლის ზომადობის გამო, $f_n\chi_{X\setminus N}$ ფუნქციები ზომადი არიან. შედეგად, $f\chi_{X\setminus N}$ ზომადია, როგორც ზომად ფუნქციათა წერტილოვანი ზღვარი. ახლა დავადგინოთ $f\chi_N$ ფუნქციის ზომადობა, რითაც თეორემა დამტკიცებული იქნება. მართლაც, თუ $a \geq 0$, მაშინ $\{f\chi_N > a\}$ სიმრავლე წარმოადგენს N-ის ქვესიმრავლეს, ხოლო თუ $a < 0$, მაშინ $\{f\chi_N > a\}$ წარმოდგება $(X \setminus N) \cup E$ სახით, სადაც $E \subset N$. ორივე შემთხვევაში $\{f\chi_N > a\}$ სიმრავლე ზომადია μ ზომის სისრულის გამო. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ცხადია, თითქმის ყველგან კრებადობა არ იწვევს თანაბარ კრებადობას, თუმცა, როგორც ნ. ეგოროვის მიერ დამტკიცებული შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, შემოსაზღვრული ზომის შემთხვევაში, თითქმის ყველგან კრებადობიდან გამომდინარეობს თანაბარი კრებადობა ზომის თვალსაზრისით დიდ გარკვეულ სიმრავლეებზე.

თეორემა 7.7.2. თუ ზომად სასრულ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა თითქმის ყველგან კრებადია ზომადი სასრული f ფუნქციისაკენ და დამატებით ცნობილია, რომ μ ზომა შემოსაზღვრულია, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ზომადი $A = A_\varepsilon$ სიმრავლე, ისეთი, რომ:

- $\mu(A) < \varepsilon$,
- (f_n) **მიმდევრობა თანაბრად კრებადია f ფუნქციისაკენ $X \setminus A$ სიმრავლეზე, ე.ი.** $\sup\limits_{x\in X\setminus A} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty)$.

ლემა 7.7.1. ვთქვათ, შესრულებულია თეორემა 7.7.2-ის პირობები. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და $\delta > 0$ რიცხვებისათვის მოიძებნებიან ზომადი $A = A_{\varepsilon,\delta}$ სიმრავლე და $N = N_{\varepsilon,\delta}$ რიცხვი, ისეთები, რომ:

- $\mu(A) < \varepsilon$;
- $\sup\limits_{x\in X\setminus A} |f_n(x) - f(x)| \leq \delta$ **ყოველი $n \geq N$-სთვის.**

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$E_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

თუ x წერტილი ეკუთვნის (E_n) მიმდევრობის წევრთა უსასრულო რაოდენობას, მაშინ ცხადია, $(f_n(x))$ არაა კრებადი $f(x)$-საკენ. შედეგად, $f_n \to f(\mathrm{mod}\,\mu)$ პირობის გათვალისწინებით, (E_n) მიმდევრობის ზედა ზღვარი იქნება ნული ზომის სიმრავლე. ახლა, თუ მხედველობაში მივიღებთ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n$, ტოლობას, ზომის ზემოდან უწყვეტობის თვისების საფუძველზე ვიპოვით N ინდექსს, რომლისთვისაც,

$$\mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) < \varepsilon. \tag{1}$$

(E_n) სიმრავლეების განსაზღვრიდან გამომდინარე, $\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n$ სიმრავლის გარეთ მყოფი ნებისმიერი x წერტილისათვის გვექნება, რომ

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \delta \quad \text{ყოველი} \quad n \geq N\text{-სათვის}. \tag{2}$$

(1) და (2) შეფასებების ძალით ადვილი დასანახია, რომ $A = \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n$ სიმრავლე და N ინდექსი დააკმაყოფილებენ მოთხოვნილ პირობებს. ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 7.7.2-ის დამტკიცება. ლემა 7.7.1-ის ძალით ყოველი k-სათვის შეიძლება ვიპოვოთ A_k სიმრავლე და N_k ინდექსი, ისეთები, რომ:

- $\mu(A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$;
- $\sup\limits_{x\in X\setminus A_k} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$ ყოველი $n \geq N_k$-სათვის.

A-ს როლში ავიღოთ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ სიმრავლე. მაშინ A-ს ზომა იქნება ε-ზე ნაკლები, ამასთან, ყოველი k-სათვის გვექნება, რომ

$$\sup_{x\in X\setminus A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \text{ყოველი} \quad n \geq N_k\text{-სათვის}.$$

ბოლო შეფასება ცხადია იწვევს f ფუნქციისაკენ (f_n) მიმდევრობის თანაბრად კრებადობას $X \setminus A$ სიმრავლეზე. თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 7.7.1. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ეგოროვის თეორემა ვრცელდება იმ სიტუაციაზეც, როცა მიმდევრობის წევრები და ზღვარითი ფუნქცია თითქმის ყველგან სასრული არიან.

შენიშვნა 7.7.2. ეგოროვის თეორემა არ რჩება სამართლიანი იმ შემთხვევაში, როცა ზომა არაა შემოსაზღვრული. შესაბამის კონტრმაგალითს მივიღებთ, თუ ზომიანი სივრცის როლში ავიღებთ რიცხვით ღერძს, რომელიც აღჭურვილია ლებეგის ზომით, ხოლო (f_n) მიმდევრობას შევარჩევთ შემდეგნაირად: $f_n = \chi_{(n,\infty)}$. ცხადია, (f_n) მიმდევრობა ყველა წერტილში კრებადია იგივურად

ნულის ტოლი f ფუნქციისაკენ. მეორე მხრივ, როგორი სასრული ზომის A სიმრავლეც არ უნდა ავიღოთ, ყოველი n-სთვის გვექნება, რომ

$$\sup_{x \in X \setminus A} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$

შედეგად, კრებადობა $X \setminus A$ სიმრავლეზე არაა თანაბარი, როგორიც არ უნდა იყოს სასრული ზომის A სიმრავლე.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ ეგოროვის თეორემის ანალოგი იმ შემთხვევაში, როცა მიმდევრობა თითქმის ყველგან მიისწრაფვის ∞-საკენ.
2. ვთქვათ, μ ზომა შემოსაზღვრულია. აჩვენეთ, რომ ზომად სასრულ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა თითქმის ყველგან კრებადია ზომადი სასრული f ფუნქციისაკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი დადებითი ε-სთვის,
$$\lim_{k \to \infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \right) = 0.$$
3. ვთქვათ, f_n $(n \in \mathbb{N})$ და f ზომადი სასრული ფუნქციებია და ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება ზომადი A სიმრავლე შემდეგი თვისებებით: $\mu(X \setminus A) < \varepsilon$ და (f_n) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია f ფუნქციისაკენ $X \setminus A$ სიმრავლეზე. აჩვენეთ, რომ (f_n) თითქმის ყველგან კრებადია f ფუნქციისაკენ.
4. დაამტკიცეთ, რომ $f_n(x) = (\sin x)^n$ ფუნქციათა მიმდევრობა თითქმის ყველგან კრებადია ნულისაკენ ლებეგის ზომის მიხედვით.

§ 8. ზომით კრებადობა

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა და განსახილავი ფუნქციები განსაზღვრულია X-ზე.

ვთქვათ, f_n $(n \in \mathbb{N})$ და f ზომადი სასრული ფუნქციებია. (f_n) მიმდევრობას ეწოდება **ზომით კრებადი** f ფუნქციისაკენ, თუ ნებისმიერი დადებითი δ რიცხვისათვის,

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{|f_n - f| > \delta\}) = 0.$$

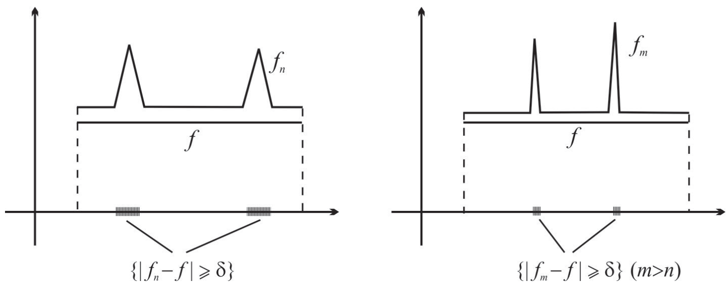
ზომით კრებადობას შემდეგნაირად აღნიშნავენ: $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

ნახ. 7.4-ზე მოცემულია ზომით კრებადობის შესატყვისი ილუსტრაცია.

თეორემა 7.8.1. ზომით კრებად მიმდევრობას ერთადერთი ზღვარი აქვს ეკვივალენტობის სიზუსტით, ე.ი. თუ $f_n \xrightarrow{\mu} f$ და $f_n \xrightarrow{\mu} g$, მაშინ $f = g (\mathrm{mod}\ \mu)$.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ადვილი დასანახია, რომ ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის სამართლიანია ჩართვა:

$$\{|f - g| > \delta\} \subset \{|f - f_n| > \delta/2\} \cup \{|f_n - g| > \delta/2\}.$$



ნახ. 7.4.

საიდანაც, თეორემის პირობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ,

$$\mu(\{|f-g|>\delta\}) \leq \mu(\{|f-f_n|>\delta/2\}) + \mu(\{|f_n-g|>\delta/2\}) \to 0.$$

შედეგად, $\mu(\{|f-g|>\delta\}) = 0$. აქედან, თავის მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\{f \neq g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{|f-g|>1/k\},$$

მივიღებთ $\mu(\{f \neq g\}) = 0$ ტოლობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შემდეგი თეორემა ეკუთვნის ლებეგს.

თეორემა 7.8.2. თუ ზომად სასრულ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა თითქმის ყველგან კრებადია ზომადი სასრული f ფუნქციისაკენ და დამატებით ცნობილია, რომ μ ზომა შემოსაზღვრულია, მაშინ (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადია f ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი δ და ε რიცხვები. ლემა 7.7.1-ის ძალით შეიძლება ვიპოვოთ ზომადი A სიმრავლე და N ინდექსი, ისეთები, რომ:

- $\mu(A) < \varepsilon$,
- $\sup\limits_{x \in X \setminus A} |f_n(x) - f(x)| \leq \delta$ ყოველი $n \geq N$-სთვის.

ბოლო შეფასებიდან გამომდინარე, $\{|f_n - f| > \delta\} \subset A$ ყოველი $n \geq N$-სთვის. საიდანაც მივიღებთ,

$$\mu(\{|f_n - f| > \delta\}) \leq \mu(A) < \varepsilon \quad \text{ყოველი} \quad n \geq N\text{-სთვის}.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 7.8.1. ლებეგის თეორემა არ რჩება სამართლიანი იმ შემთხვევაში, როცა ზომა არაა შემოსაზღვრული. შესაბამის კონტრმაგალითს მივიღებთ,

თუ ზომიანი სივრცის როლში ავიღებთ რიცხვით ღერძს, რომელიც აღჭურვილია ლებეგის ზომით, ხოლო (f_n) მიმდევრობას შევარჩევთ შემდეგნაირად: $f_n = \chi_{(n,\infty)}$. ცხადია, (f_n) მიმდევრობა ყოველ წერტილში კრებადია იგივურად ნულის ტოლი f ფუნქციისაკენ. მეორე მხრივ, ყოველი n-სთვის გვექნება, რომ $\mu(\{|f_n - f| = 1\}) = \infty$.

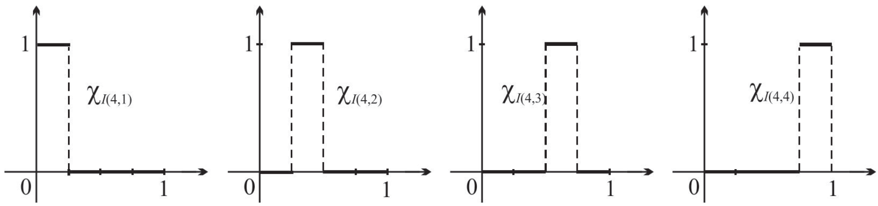
შენიშვნა 7.8.2. ვაჩვენოთ, რომ ლებეგის თეორემის დასკვნა არაა შებრუნებადი. საამისოდ ყოველი ნატურალური n-სთვის $[0,1]$ სეგმენტი დავყოთ n ცალ ტოლ სეგმენტად:

$$I(n,1) = \Big[0, \frac{1}{n}\Big],\ I(n,2) = \Big[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\Big],\ \ldots,\ I(n,n) = \Big[\frac{n-1}{n}, 1\Big].$$

განვიხილოთ $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ფუნქციათა შემდეგი მიმდევრობა:

$$\chi_{I(1,1)}; \quad \chi_{I(2,1)}, \chi_{I(2,2)}; \quad \chi_{I(3,1)}, \chi_{I(3,2)}, \chi_{I(3,3)}; \cdots$$

ე.ი. მიმდევრობა, რომელშიც n-ური ეტაპის სეგმენტების მახასიათებელი ფუნქციები ქმნიან n-ურ ბლოკს (ნახ. 7.5).



ნახ. 7.5.

მივანიჭოთ აღნიშნულ მიმდევრობას ერთინდექსიანი (f_s) ნუმერაცია. იქედან, რომ ნებისმიერი დადებითი δ-სთვის:

$$\mathrm{m}(\{\chi_{I(n,k)} > \delta\}) \le \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \overline{1,n}),$$

უშუალოდ გამომდინარეობს (f_s) მიმდევრობის ლებეგის ზომის მიხედვით კრებადობა იგივურად ნულის ტოლი f ფუნქციისაკენ. მეორე მხრივ, $f_s(x) \to 0$ კრებადობას ადგილი არა აქვს არცერთ $x \in [0,1]$ წერტილში. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in [0,1]$ წერტილი. ყოველი n-სთვის x შედის ერთ-ერთში მაინც $I(n,k)$ მონაკვეთებს შორის. შედეგად, ყოველი n-სთვის მოიძებნება $k \in \overline{1,n}$ ინდექსი, რომლისთვისაც

$$\chi_{I(n,k)}(x) = 1.$$

რაც იწვევს იმას, რომ გარკვეული ქვემიმდევრობის გასწვრივ $(f_s(x))$ არაა ნულისაკენ კრებადი.

მიუხედავად იმისა, რომ ზომით კრებადობა არ იწვევს თითქმის ყველგან კრებადობას, სამართლიანია შემდეგი თეორემა, რომელიც ეკუთვნის ფ.რისს.

თეორემა 7.8.3. თუ ზომად სასრულ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადია ზომადი სასრული f ფუნქციისაკენ და დამატებით ცნობილია, რომ μ ზომა შემოსაზღვრულია, მაშინ მოიძებნება (f_{n_k}) ქვემიმდევრობა, რომელიც თითქმის ყველგან კრებადია f ფუნქციისაკენ.

დამტკიცება. განვიხილოთ დადებით რიცხვთა (δ_k) და (η_k) მიმდევრობები, ისეთები, რომ:

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty.$$

ვიპოვოთ n_1 ინდექსი, რომლისთვისაც

$$\mu(\{|f_{n_1} - f| > \delta_1\}) < \eta_1.$$

მეორე ეტაპზე ავარჩიოთ $n_2 > n_1$ ინდექსი თვისებით:

$$\mu(\{|f_{n_2} - f| > \delta_2\}) < \eta_2.$$

თუ გავაგრძელებთ აგების ასეთ პროცესს, ყოველი k-სათვის ვიპოვით შემდეგი პირობის დამაკმაყოფილებელ $n_k > n_{k-1}$ ინდექსს:

$$\mu(\{|f_{n_k} - f| > \delta_k\}) < \eta_k.$$

ვაჩვენოთ ასეთნაირად აგებული (f_{n_k}) ქვემიმდევრობის თითქმის ყველგან კრებადობა f ფუნქციისაკენ.

N-ით აღვნიშნოთ $\{|f_{n_k} - f| > \delta_k\}$ სიმრავლეთა მიმდევრობის ზედა ზღვარი. აგების თანახმად,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{|f_{n_k} - f| > \delta_k\}) < \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty.$$

საიდანაც, ბორელ-კანტელის ლემის ძალით (იხ. თეორემა 4.4.4) დავასკვნით N სიმრავლის ნულზომიანობას. ვაჩვენოთ, რომ $f_{n_j}(x) \to f(x)$ ყოველი $x \notin N$ წერტილისათვის, რითაც თეორემა დამტკიცებული იქნება. მართლაც, თუ $x \notin N$, მაშინ მოიძებნება k, რომლისთვისაც

$$x \notin \{|f_{n_j} - f| > \delta_j\}, \quad \text{როცა} \quad j \geq k.$$

რაც, თავის მხრივ, იმას ნიშნავს, რომ

$$|f_{n_j}(x) - f(x)| \leq \delta_j, \quad \text{როცა} \quad j \geq k.$$

საიდანაც ვღებულობთ $(f_{n_j}(x))$ ქვემიმდევრობის კრებადობას $f(x)$ რიცხვისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 7.8.3. რისის თეორემა ვრცელდება იმ სიტუაციაზეც, როცა ზომა σ-შემოსაზღვრულია. მართლაც, ასეთ შემთხვევაში, X სივრცე შეიძლება დავყოთ სასრული ზომის მქონე წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ A_n $(n \in \mathbb{N})$ ნაწილებად. განვიხილოთ f_n ფუნქციების შეზღუდვები A_1 სიმრავლეზე. მარტივი დასანახია, რომ $(f_n|_{A_1})$ მიმდევრობა ზომით კრებადი იქნება $f|_{A_1}$ ფუნქციისაკენ. შედეგად, თუ ზომიანი სივრცის როლში ავიღებთ მოცემული სივრცის შეზღუდვას A_1 სიმრავლეზე, რისის თეორემის უკვე დადგენილი ვარიანტის გამოყენებით მოვძებნით $(f_{n(1,k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ქვემიმდევრობას, რომელიც A_1 სიმრავლის თითქმის ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაკენ. მეორე ეტაპზე, $(f_{n(1,k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ქვემიმდევრობის მიმართ მსგავსი მსჯელობის გამოყენებით მოვძებნით მის $(f_{n(2,k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ქვემიმდევრობას, რომელიც A_2 სიმრავლის თითქმის ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაკენ. თუ ამ პროცესს უსასრულოდ გავაგრძელებთ და განვიხილავთ დიაგონალურ $(f_{n(k,k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ქვემიმდევრობას, მივიღებთ, რომ ასეთი ქვემიმდევრობა ყოველი j-სათვის, f ფუნქციისაკენ კრებადია A_j სიმრავლის თითქმის ყოველ წერტილში. შედეგად, კრებადობას ადგილი ექნება X-ის თითქმის ყოველ წერტილშიც.

ამოცანები

1. ვთქვათ, μ შემოსაზღვრული ზომაა, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ და $g_n \xrightarrow{\mu} g$. აჩვენეთ, რომ: 1) $f_n \pm g_n \xrightarrow{\mu} f \pm g$; 2) $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$; 3) $f_n/g_n \xrightarrow{\mu} f/g$, თუ $0 \notin g_n(X)$ $(n \in \mathbb{N})$ და $0 \notin g(X)$.
2. იმისათვის, რომ ზომად სასრულ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადი იყოს ზომადი სასრული f ფუნქციისაკენ, აუცილებელი და საკმარისია (f_n) მიმდევრობა იყოს ზომით ფუნდამენტური, ე.ი. ყოველი დადებითი δ და η რიცხვებისათვის მოიძებნებოდეს $N \in \mathbb{N}$, ისეთი, რომ $\mu(\{|f_n - f_m| > \delta\}) < \eta$, როცა $n, m \geq N$.
3. ვთქვათ, μ შემოსაზღვრული ზომაა. აჩვენეთ, რომ ზომად სასრულ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადია ზომადი სასრული f ფუნქციისაკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (f_n) მიმდევრობის ნებისმიერი ქვემიმდევრობიდან შესაძლებელია f ფუნქციისაკენ თითქმის ყველგან კრებადი ქვექვემიმდევრობის გამოყოფა.

§ 9. ლუზინის თეორემა

ქვემოთ (X, d) მეტრიკული სივრცის E ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციის უწყვეტობა გაიგება E-ში ინდუცირებული მანძილის მიხედვით, ე.ი. $d|_{E\times E}$ მანძილის მიხედვით.

შემდეგი თეორემა ეკუთვნის ნ. ლუზინს და გვიჩვენებს, რომ ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი ფუნქცია რაგინდ მცირე ზომის სიმრავლეზე შესწორებით (ე.ი. მნიშვნელობათა შეცვლით) შეიძლება გავხადოთ უწყვეტი.

თეორემა 7.9.1. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეა, ხოლო f არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი სასრული ფუნქცია. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს E-ზე განსაზღვრული უწყვეტი g ფუნქცია, ისეთი, რომ

$$\mathrm{m}(\{g \neq f\}) < \varepsilon.$$

გარდა ამისა, დამატებით შესაძლებელია იმის მიღწევაც, რომ g ფუნქცია აკმაყოფილებდეს შეფასებას: $\sup\limits_{x \in E} |g(x)| \leq \sup\limits_{x \in E} |f(x)|$.

შემდეგი დებულება წარმოადგენს ლუზინის თეორემის შესუსტებულ ვარიანტს.

თეორემა 7.9.2. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეა, ხოლო f არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი სასრული ფუნქცია. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ჩაკეტილი $F \subset E$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mathrm{m}(E \setminus F) < \varepsilon$ და f ფუნქციის შეზღუდვა F სიმრავლეზე არის უწყვეტი.

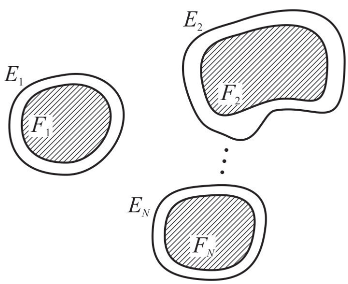
დამტკიცება. თავდაპირველად განვიხილოთ შემთხვევა, როცა E შემოსაზღვრული სიმრავლეა და f მარტივი ფუნქციაა. წარმოვადგინოთ f სტანდარტული სახით:

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}.$$

ყოველი E_k სიმრავლისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ (იხ. თეორემა 6.2.2) მისი ჩაკეტილი F_k ქვესიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$\mathrm{m}(E_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{N}.$$

F სიმრავლის როლში ავიღოთ $\bigcup_{k=1}^{N} F_k$ გაერთიანება (ნახ. 7.6).



ნახ. 7.6.

გვექნება, რომ

$$\mathrm{m}(E \setminus F) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{m}(E_k \setminus F_k) < \varepsilon.$$

F_k სიმრავლეები კომპაქტური და წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია, რის გამოც, ნებისმიერი F_k, სხვა დანარჩენი F_j სიმრავლეების გაერთიანებისაგან დაშორებულია დადებითი მანძილით (იხ. დანართი 2). ეს უკანასკნელი გარემოება, იმის გათვალისწინებით, რომ f მუდმივია თითოეულ F_k-ზე, გვაძლევს საშუალებას უშუალოდ დავასკვნათ F სიმრავლეზე f-ის შეზღუდვის უწყვეტობა.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა E შემოსაზღვრული სიმრავლეა და f ნებისმიერი ზომადი სასრული ფუნქციაა. თეორემა 7.5.1-ის საფუძველზე შევარჩიოთ მარტივ ფუნქციათა (h_k) მიმდევრობა, რომელიც f ფუნქციისაკენ კრებადია ყოველ წერტილში. ვისარგებლოთ თეორემის უკვე დადგენილი ნაწილით და ყოველი k ინდექსისათვის ვიპოვოთ $F_k \subset E$ სიმრავლე, ისეთი, რომ h_k ფუნქციის შეზღუდვა F_k სიმრავლეზე იყოს უწყვეტი და სრულდებოდეს პირობა:

$$\mathrm{m}(E \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

F_k $(k \in \mathbb{N})$ სიმრავლეების თანაკვეთა აღვნიშნოთ F_*-ით. ცხადია, რომ F_* სიმრავლეზე შეზღუდვისას თითოეული h_k ფუნქცია შეიძენს უწყვეტობის თვისებას და ამასთან, ადგილი ექნება შეფასებას:

$$\mathrm{m}(E \setminus F_*) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}(E \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

შემდეგ ვისარგებლოთ ეგოროვის თეორემით და ზომადი სიმრავლის ჩაკეტილი სიმრავლეებით შიგნიდან მიახლოების შესაძლებლობით (იხ. თეორემა 6.2.2). შედეგად, ვიპოვით F_* სიმრავლის ჩაკეტილ F ქვესიმრავლეს, რომელზეც თანაბრად კრებადია (h_k) მიმდევრობა და რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$\mathrm{m}(F_* \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ცხადია, თითოეული $h_k|_F$ ფუნქცია უწყვეტია და $(h_k|_F)$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია. შედეგად, ზღვარითი $f|_F$ ფუნქცია იქნება უწყვეტი, როგორც უწყვეტ ფუნქციათა თანაბრად კრებადი მიმდევრობის ზღვარი. ახლა, თუ შევნიშნავთ, რომ $\mathrm{m}(E \setminus F) < \varepsilon$, დავასკვნით თეორემის სამართლიანობას განსახილავ შემთხვევაში.

გადავიდეთ ზოგადი სიტუაციის განხილვაზე, ე.ი. მოვხსნათ E სიმრავლის შემოსაზღვრულობის შეზღუდვა. საამისოდ $\mathbb{R}^n$ სივრცე დავშალოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ Q_k $(k \in \mathbb{N})$ კუბებად. შემდეგ, თითოეული Q_k კუბი ოდნავ შევამციროთ მის კონცენტრულ Q_k^* კუბამდე ისე, რომ ზომის ჯამური დანაკარგი $\mathbb{R}^n$ სივრციდან Q_k^* კუბების გაერთიანებაზე გადასვლისას ნაკლები

იყოს $\varepsilon/2$-ზე. ამის შემდეგ კი, ყოველი k-სათვის გამოვიყენოთ თეორემის უკვე დამტკიცებული ნაწილი $f|_{Q_k^*\cap E}$ ფუნქციისა და $\varepsilon/2^{k+1}$ რიცხვის შემთხვევაში და ვიპოვოთ ჩაკეტილი F_k სიმრავლე შესაბამისი თვისებებით. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ასეთნაირად შერჩეული F_k სიმრავლეების გაერთიანება მოგვცემს სასურველი თვისებების მქონე ჩაკეტილ F სიმრავლეს. თეორემა დამტკიცებულია. □

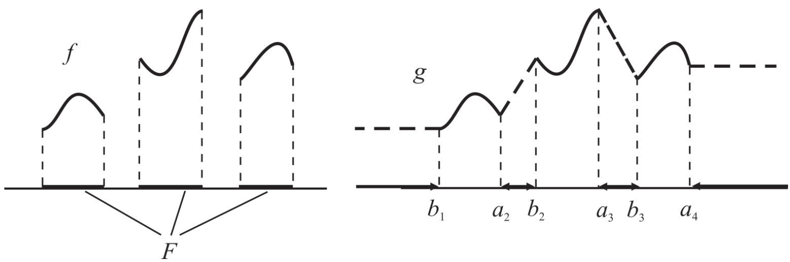
შემდეგი დებულება წარმოადგენს დამატებით არგუმენტს, რომლის მეშვეობითაც თეორემა 7.9.2-დან მიიღება ლუზინის თეორემა.

თეორემა 7.9.3. ვთქვათ, F არის $\mathbb{R}^n$ სივრცის არაცარიელი ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, ხოლო f არის F-ზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია. მაშინ არსებობს $\mathbb{R}^n$-ზე განსაზღვრული უწყვეტი g ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს f-ის გაგრძელებას და აკმაყოფილებს პირობას:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)| = \sup_{x\in F}|f(x)|.$$

ქვემოთ მოცემული იქნება თეორემა 7.9.3-ის დამტკიცება ერთგანზომილებიან შემთხვევაში. მრავალგანზომილებიან სიტუაციაში დამტკიცება საკმაოდ ვრცელი და ტექნიკური თვალსაზრისით რთულია. მისი ნახვა შესაძლებელია მაგალითად [29] წიგნის XII.1 პარაგრაფში.

დამტკიცება. $\{(a_n, b_n)\}$ იყოს F სიმრავლის დამატებითი ინტერვალების კლასი. თუ (a_n, b_n) შემოსაზღვრული ინტერვალია, მაშინ $[a_n, b_n]$ სეგმენტის შიგნით f ფუნქცია გავაგრძელოთ ისე, რომ მივიღოთ $[a_n, b_n]$-ზე წრფივი ფუნქცია სეგმენტის ბოლოებში შესაბამისად $f(a_n)$ და $f(b_n)$ მნიშვნელობებით; ხოლო, თუ $a_n = -\infty$ ან $b_n = \infty$, მაშინ (a_n, b_n) ინტერვალის წერტილებში g ფუნქციას მივანიჭოთ ის მნიშვნელობა, რომელსაც f ფუნქცია ღებულობს (a_n, b_n) ინტერვალის სასრულ ბოლოზე (ნახ. 7.7).



ნახ. 7.7.

შევამოწმოთ, რომ f ფუნქციის ასეთი g გაგრძელება აკმაყოფილებს სასურველ პირობებს. ცხადია, რომ

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| = \sup_{x \in F} |f(x)|.$$

დავადგინოთ g-ს უწყვეტობა. უწყვეტობა ცხადია დამატებით (a_n, b_n) ინტერვალებზე. განვიხილოთ F სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილი. დავადგინოთ მარჯვნიდან უწყვეტობა x-ში. თუ x არის რომელიმე დამატებითი ინტერვალის მარცხენა ბოლო, მაშინ x-ში g-ს მარჯვნიდან უწყვეტობა ცხადია. ამრიგად, განსახილავი რჩება ის შემთხვევა, როცა x არ არის არცერთი დამატებითი ინტერვალის მარცხენა ბოლო. ავიღოთ x წერტილისაკენ მარჯვნიდან კრებადი რაიმე (x_k) მიმდევრობა, ე.ი. $x_k > x$ $(k \in \mathbb{N})$ და $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. f ფუნქციის უწყვეტობის გათვალისწინებით შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევით, როცა x_k წერტილები არ ეკუთვნიან F სიმრავლეს. ყოველი k-სთვის (a_{n_k}, b_{n_k}) იყოს ის დამატებითი ინტერვალი, რომელიც შეიცავს x_k წერტილს. ადვილი დასანახია, რომ (a_{n_k}, b_{n_k}) ინტერვალები მარჯვნიდან მიისწრაფვიან x წერტილისაკენ, ე.ი. $x < a_{n_k} < x_k < b_{n_k}$, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$ და $\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = x$. მაშინ f-ის უწყვეტობის გამო, $\lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(b_{n_k}) = f(x)$. ამის შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $g(x_k)$ მოთავსებულია $f(a_{n_k})$ და $f(b_{n_k})$ რიცხვებს შორის, დავასკვნით $\lim_{k\to\infty} g(x_k) = f(x) = g(x)$ ტოლობას. ამით g-ს მარჯვნიდან უწყვეტობა x-ში დადგენილია. ანალოგიურად ვაჩვენებთ x-ში მარცხნიდან უწყვეტობასაც. □

შენიშვნა 7.9.1. თეორემა 7.9.3 დამტკიცებული იყო ა. ლებეგისა და ლ. ბროუერის მიერ. ჰ. ტიცემ თეორემა 7.9.3 გაავრცელა მეტრიკულ სივრცეებზე. შემდგომი განზოგადება ე.წ. ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეებისთვის ეკუთვნის პ. ურისონს (იხ. მაგ. [5], §2.1).

თეორემა 7.9.1-ის დამტკიცება. $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის თეორემა 7.9.2-ის საფუძველზე ვიპოვოთ ჩაკეტილი $F \subset E$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mathrm{m}(E \setminus F) < \varepsilon$ და $f|_F$ არის უწყვეტი. ამის შემდეგ, გამოვიყენოთ თეორემა 7.9.3 და $f|_F$ გავაგრძელოთ $\mathbb{R}^n$-ზე განსაზღვრულ უწყვეტ h ფუნქციამდე, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |h(x)| = \sup_{x \in F} |f(x)|.$$

ადვილი დასანახია, რომ $g = h|_E$ ფუნქციას ექნება საჭირო თვისებები. □

შენიშვნა 7.9.2. მარტივი შესამოწმებელია, რომ ლუზინის თეორემა ვრცელდება იმ სიტუაციაზეც, როცა ფუნქცია თითქმის ყველგან სასრულია.

შენიშვნა 7.9.3. ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეები და ფუნქციები, კლასიკური ანალიზიდან ცნობილ, გლუვი საზღვრის მქონე სიმრავლეებთან

და უწყვეტ ფუნქციებთან შედარებით, რთული ბუნებისანი არიან. მიუხედავად ამისა, როგორც ეგოროვის, ლუზინისა და 6.2.1 თეორემები გვიჩვენებენ, ამ ობიექტებს შორის არსებობს გარკვეული სიახლოვე, რაც შემდეგი სამი პრინციპის სახით გამოხატა ფუნქციათა თეორიის ცნობილმა მკვლევარმა ჯ. ლიტლვუდმა:

- ლებეგის აზრით ზომადი ყოველი სიმრავლე დაახლოებით მონაკვეთების სასრული გაერთიანებაა;
- ლებეგის აზრით ზომადი ყოველი ფუნქცია დაახლოებით უწყვეტი ფუნქციაა;
- თითქმის ყველგან კრებადი ყოველი მიმდევრობა დაახლოებით თანაბრად კრებადია.

ამოცანები

1. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აზრით ზომადი და სასრული ზომის სიმრავლეა, ხოლო f არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი სასრული ფუნქცია. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს ჩაკეტილი $F \subset E$ სიმრავლე, რომლისთვისაც $\mathrm{m}(E \setminus F) < \varepsilon$ და f ფუნქციის შეზღუდვა F სიმრავლეზე არის შემოსაზღვრული.
2. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეა, ხოლო f არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი სასრული ფუნქცია. მაშინ არსებობს E-ზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა (g_n) მიმდევრობა, რომელიც თითქმის ყველგან კრებადია f ფუნქციისაკენ.
3. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეა, ხოლო E-ზე განსაზღვრული f ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისება: ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $F \subset E$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mathrm{m}(E \setminus F) < \varepsilon$ და f ფუნქციის შეზღუდვა F სიმრავლეზე არის უწყვეტი. აჩვენეთ, რომ f არის ლებეგის აზრით ზომადი.
4. ვთქვათ, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქციაა, რომლის საყრდენი, ე.ი. $\{f \neq 0\}$ სიმრავლე, მოთავსებულია $[0, 1]$ მონაკვეთში. აჩვენეთ, რომ $f_n(x) = f(x - 1/n)$ ფუნქციათა მიმდევრობა ლებეგის ზომის მიხედვით კრებადია f ფუნქციისაკენ.
5. ააგეთ $[0, 1]$ მონაკვეთში საყრდენის მქონე ლებეგის აზრით ზომადი $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $f_n(x) = f(x - 1/n)$ ფუნქციათა მიმდევრობა განშლადია $[0, 1]$ მონაკვეთის დადებითი ზომის ქვესიმრავლეზე.

თ ა ვ ი 8

ლებეგის ინტეგრალი

მეცხრამეტე საუკუნის ბოლოს მათემატიკური ანალიზის სფეროში წარმოშობილი რამდენიმე მნიშვნელოვანი ამოცანის გადაწყვეტასთან დაკავშირებით ნათლად გამოიკვეთა რიმანის ინტეგრალის განზოგადების აუცილებლობა. გეომეტრიული ინტერპრეტაციის თანახმად, განსაზღვრული ინტეგრალი უნდა გამოთვლიდეს ფუნქციის გრაფიკქვეშა სიმრავლის ზომას. რიმანის ინტეგრალი ამ საკითხს ვერ წყვეტს, მაგალითად, ძალზე მარტივი ბუნების - დირიხლეს ფუნქციის შემთხვევაშიც კი. საზოგადოდ, რიმანის კონსტრუქციას აქვს ორი მთავარი ნაკლოვანება: 1) შეუძლებელია მისი გამოყენება შემოუსაზღვრელი ფუნქციებისათვის; 2) შემოსაზღვრული ფუნქციებისთვის კი მისი მოქმედების არეალი შორს ვერ სცილდება უწყვეტ ფუნქციათა კლასს.

ლებეგმა (1902) შექმნა ინტეგრების ძალზე მოქნილი და ეფექტური მეთოდი, რომელიც თავდაპირველად გამოყენებული იყო ერთგანზომილებიან $[a, b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული ფუნქციებისთვის, შემდეგ კი (1910), მრავალგანზომილებიან სიტუაციაში. ლებეგის ინტეგრალის აბსტრაქტული ვარიანტი განავითარეს ჯ. რადონმა (1913) და მ. ფრეშემ (1913). წინამდებარე თავში სწორედ აღნიშნულ აბსტრაქტულ კონსტრუქციას გავეცნობით.

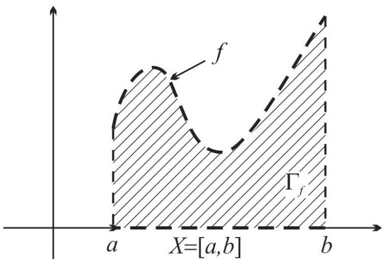
§ 1. არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი

ამ თავის ფარგლებში ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა. სიმრავლეებისა და ფუნქციების ზომადობას განვიხილავთ ამ სივრცესთან მიმართებაში.

X-ზე განსაზღვრული არაუარყოფითი f ფუნქციის **გრაფიკქვეშა სიმრავლე** (ნახ. 8.1) განისაზღვრება შემდეგნაირად:

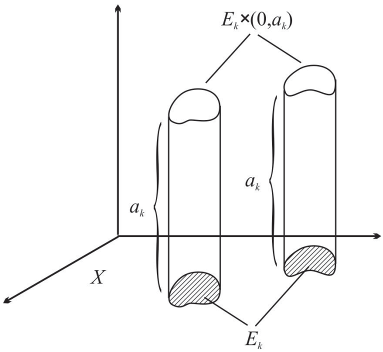
$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times [0, \infty] : x \in X,\ 0 < y < f(x)\}.$$

გეომეტრიული ინტერპრეტაციით, ლებეგის ინტეგრალი წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკქვეშა სიმრავლის გაზომვის მექანიზმს. ეს მექანიზმი ნათლად გასაგებია არაუარყოფითი მარტივი f ფუნქციის შემთხვევაში: ვთქვათ, f ფუნქციის სტანდარტული წარმოდგენაა $\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$. მაშინ Γ_f წარმოადგენს



ნახ. 8.1.

საფეხუროვანი ტიპის სიმრავლეს, რომლის საფეხურებია E_k ფუძისა და a_k სიმაღლის განზოგადებული $E_k \times (0, a_k)$ მართკუთხედები (ნახ. 8.2).



ნახ. 8.2.

ელემენტარული გეომეტრიული მოსაზრებებიდან გამომდინარე, ბუნებრივია, Γ_f გრაფიკქვეშა სიმრავლის ზომად მივიჩნიოთ მისი საფეხურების ზომათა ჯამი, ხოლო საფეხური კი გაიზომოს, როგორც მისი ფუძის ზომა გამრავლებული მისსავე სიმაღლეზე.

ზემოაღნიშნულის შემდეგ მოვიყვანოთ ზუსტი განსაზღვრება: დავუშვათ, f არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციაა და $\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$ მისი სტანდარტული წარმოდგენაა. f **ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი** X **სივრცეზე** აღინიშნება $\int_X f d\mu$ ჩანაწერით და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k).$$

ინტეგრალის აღსანიშნად ზოგჯერ იყენებენ $\int_X f(x) d\mu(x)$ ჩანაწერსაც.

შემდეგი დებულება გვიჩვენებს, რომ არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის ინტეგრალი შეიძლება გამოვთვალოთ სტანდარტულისაგან განსხვავებული წარმოდგენის მეშვეობითაც.

თეორემა 8.1.1. ვთქვათ, $f = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{F_j}$, სადაც $b_1, \ldots, b_m$ არაუარყოფითი სასრული რიცხვებია, ხოლო $F_1, \ldots, F_m$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ზომადი სიმრავლეებია. მაშინ

$$\int_X f d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(F_j).$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ F_j სიმრავლეების გაერთიანება X-ის ტოლია. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოცემულ წარმოდგენას ფორმალურად შევავსებდით $b_{m+1}\chi_{F_{m+1}}$ წევრით, სადაც $b_{m+1} = 0$, ხოლო F_{m+1} არის $F_1, \ldots, F_m$ სიმრავლეების გარეთ დარჩენილი სივრცის ნაწილი.

თუ $b_1, \ldots, b_m$ წყვილ-წყვილად განსხვავებული რიცხვებია, მაშინ $\sum\limits_{j=1}^{m} b_j \chi_{F_j}$ არის f ფუნქციის სტანდარტული წარმოდგენა. რის გამოც, ასეთ შემთხვევაში დებულება ცხადია.

თუ $b_1, \ldots, b_m$ რიცხვებს შორის ზოგიერთი ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ განვიხილოთ მათ მიერ მიღებული ყველა განსხვავებული მნიშვნელობა: $a_1, \ldots, a_n$. ყოველი $k \in \overline{1,n}$-სთვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\Delta_k = \{j \in \overline{1,m} : b_j = a_k\}, \;\; E_k = \bigcup_{j \in \Delta_k} F_j.$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$ იქნება f ფუნქციის სტანდარტული წარმოდგენა და ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \mu(F_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in \Delta_k} b_j \mu(F_j) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k) = \int_X f d\mu.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

X-ის ზომად E ქვესიმრავლეზე არაუარყოფითი მარტივი f ფუნქციის ინტეგრალი აღინიშნება $\int_E f d\mu$ ჩანაწერით და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E \, d\mu.$$

მარტივი დასანახია, რომ $\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$ სტანდარტული წარმოდგენის მქონე f ფუნქციისათვის,

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k \cap E).$$

შევნიშნოთ, რომ არაცარიელ E სიმრავლეზე ინტეგრალს შეგვიძლია შევხედოთ, აგრეთვე, როგორც $f|_E$ ფუნქციის ინტეგრალს $(E, \mathrm{S}\cap E, \mu|_{\mathrm{S}\cap E})$ ზომიან სივრცეზე.

ამოცანები

1. განვიხილოთ $\mathbb{R}$ სივრცე ლებეგის m ზომით. გამოთვალეთ: ა) $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} d\mathrm{m}$; ბ)$\int_{[-1,1]} \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} d\mathrm{m}$; გ)$\int_{[-1,1]} 2^{[x]} d\mathrm{m}(x)$.

§ 2. არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალს აქვს წრფივობისა და მონოტონურობის თვისებები.

თეორემა 8.2.1. ვთქვათ, f და g არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციებია. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu,$$

$$\int_X (cf)d\mu = c\int_X f d\mu \quad (c \geq 0),$$

$$\textbf{თუ}\ \ f \leq g,\ \ \textbf{მაშინ}\ \ \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ f და g ფუნქციების სტანდარტული წარმოდგენები:

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{F_j}.$$

ცხადია, $E_i \cap F_j$ სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება X-ის ტოლია. ამასთან, გვაქვს, რომ

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \chi_{E_i\cap F_j}, \quad g = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_j \chi_{F_j\cap E_i},$$

$$f+g = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i+b_j) \chi_{E_i\cap F_j}.$$

თეორემა 8.1.1-ის ძალით დავწერთ,

$$\int_X (f+g)d\mu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i+b_j)\mu(E_i\cap F_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\mu(E_i\cap F_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j\mu(E_i\cap F_j) = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

ამით პირველი წინადადება დადგენილია.

მეორე წინადადება ცხადია.

მესამე წინადადების დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ თუ $E_i\cap F_j$ სიმრავლე არაცარიელია, მაშინ მის ყოველ x წერტილში შესრულდება $a_i = f(x)\le g(x) = b_j$ შეფასება. შედეგად, კვლავ თეორემა 8.1.1-ის საფუძველზე დავწერთ,

$$\int_X f d\mu = \sum_{(i,j)} a_i\mu(E_i\cap F_j) = \sum_{\{(i,j):E_i\cap F_j\neq\emptyset\}} a_i\mu(E_i\cap F_j) \le$$

$$\le \sum_{\{(i,j):E_i\cap F_j\neq\emptyset\}} b_j\mu(E_i\cap F_j) = \sum_{(i,j)} b_j\mu(E_i\cap F_j) = \int_X g d\mu.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობას ეწოდება **ზრდადი**, თუ $f_1\le f_2\le\dots$.

ქვემოთ მოცემული თეორემა არსებითი როლს ასრულებს ინტეგრალის ცნების არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა კლასზე გავრცელებისას, რასაც ვნახავთ მომდევნო პარაგრაფში.

თეორემა 8.2.2. ვთქვათ, f_n $(n\in\mathbb{N})$ და f არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციებია. თუ (f_n) ზრდადი მიმდევრობაა და $f(x)\le\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ყოველი $x\in X$ წერტილისათვის, მაშინ

$$\int_X f d\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu. \tag{1}$$

დამტკიცება. წარმოვადგინოთ f ფუნქცია სტანდარტული სახით: $f = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k\chi_{E_k}$.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon\in(0,1)$ რიცხვი. შემოვიღოთ სიმრავლეები:

$$E_{k,n} = \{x\in E_k : f_n(x)\ge(1-\varepsilon)a_k\} \qquad (k\in\overline{1,m},\ n\in\mathbb{N}).$$

(f_n) მიმდევრობის ზრდადობის საფუძველზე, ყოველი $k\in\overline{1,m}$-სთვის გვექნება, რომ

$$E_{k,1}\subset E_{k,2}\subset\dots \quad \text{და} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k,n} = E_k.$$

შედეგად, ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისების ძალით, ყოველი $k\in\overline{1,m}$-სთვის,

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E_{k,n}) = \mu(E_k).$$

აღვნიშნოთ

$$g_n = \sum_{k=1}^{m} (1-\varepsilon) a_k \chi_{E_{k,n}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, g_n მარტივი ფუნქციაა და $f_n \geq g_n$. 8.1.1 თეორემისა და ინტეგრალის მონოტონურობის თვისების გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_X g_n d\mu = \sum_{k=1}^{m} (1-\varepsilon) a_k \mu(E_{k,n}).$$

საიდანაც, თავის მხრივ მივიღებთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} (1-\varepsilon) a_k \mu(E_{k,n}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (1-\varepsilon) a_k \mu(E_k) = (1-\varepsilon) \int_X f d\mu.$$

შედეგად, $\varepsilon \in (0,1)$ რიცხვის ნებისმიერობის საფუძველზე ვღებულობთ (1) შეფასებას. თეორემა დამტკიცებულია. □

§ 3. არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი

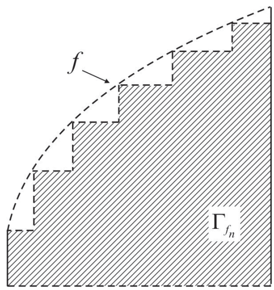
როგორც აღვნიშნეთ, ლებეგის ინტეგრალი წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიქვეშა სიმრავლის გაზომვის მექანიზმს, რომელიც უკვე ფორმირებულია არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციებისათვის. ნებისმიერი **არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალის** განსასაზღვრად უნდა ვიხელმძღვანელოთ შემდეგი ბუნებრივი გეომეტრიული მოსაზრებებით: **განვიხილოთ არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციების ზრდადი (f_n) მიმდევრობა, რომელიც ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაკენ. მაშინ Γ_{f_n} სიმრავლეები თანდათანობით ამოწურავენ Γ_f სიმრავლეს** (ნახ. 8.3), **ე.ი.**

$$\Gamma_{f_1} \subset \Gamma_{f_2} \subset \dots \quad \textbf{და} \quad \Gamma_f = \lim_{n\to\infty} \Gamma_{f_n}.$$

აღნიშნულის საფუძველზე მივიჩნიოთ, რომ

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu. \tag{1}$$

შევნიშნოთ, რომ (1)-ში მითითებული ზღვრის არსებობა გარანტირებულია (f_n) მიმდევრობის ზრდადობისა და არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის ინტეგრალის მონოტონურობის თვისების საფუძველზე. აქვე ისმის განსაზღვრების კორექტულობის საკითხი, დაკავშირებული (f_n) მიმდევრობის შერჩევისაგან ზღვრის დამოუკიდებლობასთან. ზღვარი მართლაც დამოუკიდებელია მიმდევრობის შერჩევისაგან, რადგან თუ (f_n) და (g_n) არიან f ფუნქციისაკენ კრებადი



ნახ. 8.3.

არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციების ზრდადი მიმდევრობები, მაშინ თეორემა 8.2.2-ის ძალით, ყოველი m-სთვის გვექნება, რომ

$$\int_X f_m d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \quad \text{და} \quad \int_X g_m d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

უკანასკნელი შეფასებები კი გვაძლევს ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu.$$

დაბოლოს, კიდევ ერთი საკითხი, რომელიც ასევე მოითხოვს გარკვევას: შემოღებული განსაზღვრება მიზნად ისახავს, ინტეგრალის ცნება გაავრცელოს არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციების კლასიდან არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციების კლასზე. ამიტომ არაუარყოფითი მარტივი f ფუნქციისათვის ინტეგრალის α მნიშვნელობა თავდაპირველი (ე.ი. წინა პარაგრაფში მოცემული) განსაზღვრების მიხედვით, უნდა ემთხვეოდეს (1) ტოლობის მეშვეობით გამოთვლილ β მნიშვნელობას. ამაში დასარწმუნებლად საკმარისია, (1) ზღვარი განვიხილოთ $f_n = f$ $(n \in \mathbb{N})$ მუდმივი მიმდევრობის მიმართ.

შევაჯამოთ ზემოთქმული: **ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა, ხოლო $\Lambda(f)$-ით აღნიშნავს ყველა იმ (f_n) მიმდევრობის კლასს, რომელიც შედგება არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციებისაგან, ზრდადია და ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაკენ. მაშინ:**

- **ნებისმიერი $(f_n) \in \Lambda(f)$ მიმდევრობისათვის არსებობს (1) ზღვარი;**
- **(1) ზღვრის მნიშვნელობა ერთი და იგივეა ყველა $(f_n) \in \Lambda(f)$ მიმდევრობისათვის;**
- **თუ f მარტივი ფუნქციაა, მაშინ (1) ზღვრის მნიშვნელობა ემთხვევა f-ის ლებეგის ინტეგრალს მნიშვნელობას $\S 8.1$-ში მოცემული განსაზღვრების მიხედვით;**

- **X სივრცეზე f ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი განისაზღვრება როგორც (1) ზღვრის მნიშვნელობა.**

აღსანიშნავია, რომ ყოველ არაუარყოფით ზომად ფუნქციას გააჩნია სასრული ან უსასრულო ინტეგრალი.

არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციისათვის $P(f)$-ით აღვნიშნოთ ყველა იმ არაუარყოფითი მარტივი ფუნქციის კლასი, რომლებიც არ აღემატებიან f ფუნქციას.

შემდეგი თეორემა გვაძლევს არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ინტეგრალის განსაზღვრის კიდევ ერთ შესაძლო ვარიანტს.

თეორემა 8.3.1. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. მაშინ

$$\int_X f d\mu = \sup_{p\in P(f)} \int_X p d\mu.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $(f_n) \in \Lambda(f)$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset P(f)$, ინტეგრალის განსაზღვრიდან გამომდინარე დავწერთ,

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \sup_{p\in P(f)} \int_X p d\mu.$$

მეორე მხრივ, ნებისმიერი $p \in P(f)$ ფუნქციისათვის, თეორემა 8.2.2-ის ძალით გვაქვს, რომ

$$\int_X p d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

შედეგად,

$$\sup_{p\in P(f)} \int_X p d\mu \le \int_X f d\mu.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

X-ის ზომად E ქვესიმრავლეზე არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციის ინტეგრალის განსაზღვრა ხდება შემდეგი ტოლობის მეშვეობით:

$$\int_E f d\mu = \int_X f\chi_E \, d\mu.$$

არაცარიელ E სიმრავლეზე ინტეგრალს შეგვიძლია შევხედოთ, აგრეთვე, როგორც $f|_E$ ფუნქციის ინტეგრალს $(E, \mathrm{S} \cap E, \mu|_{\mathrm{S}\cap E})$ ზომიან სივრცეზე. ადვილი დასანახია, რომ

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \sup_{p\in P(f)} \int_E p d\mu,$$

სადაც (f_n) ნებისმიერი მიმდევრობაა $\Lambda(f)$ კლასიდან.

თეორემა 8.3.2. ვთქვათ, $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{E_k}$, სადაც $E_1, E_2, \dots$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ზომადი სიმრავლეებია, ხოლო $a_1, a_2, \dots$ არაუარყოფითი რიცხვებია. მაშინ

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(E_k). \tag{2}$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$ $(n \in \mathbb{N})$. ადვილი დასანახია, რომ (f_n) მარტივ ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობაა და $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ყოველი x-სთვის. შედეგად, ინტეგრალის განსაზღვრების გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

საიდანაც, თეორემა 8.1.1-ის ძალით ვღებულობთ (2) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. □

ამოცანები

1. ვთქვათ, f და g არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებია. f და g ფუნქციებს ეწოდებათ ტოლადზომადი, თუ

$$\mu(\{f > a\}) = \mu(\{g > a\})$$

ყოველი $a > 0$-სთვის. აჩვენეთ, რომ თუ f და g ტოლადზომადია, მაშინ $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

§ 4. არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება

თეორემა 8.4.1. ვთქვათ, f და g არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებია. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu,$$

$$\int_X (cf) d\mu = c \int_X f d\mu \quad (c \geq 0),$$

$$\text{თუ } f \leq g, \text{ მაშინ } \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $(f_n) \in \Lambda(f)$ და $(g_n) \in \Lambda(g)$. მაშინ ცხადია, რომ $(f_n+g_n) \in \Lambda(f+g)$ და $(cf_n) \in \Lambda(f)$. შედეგად, ინტეგრალის განსაზღვრებისა და თეორემა 8.2.1-ის ძალით ვწერთ,

$$\int_X (f+g)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (f_n+g_n)d\mu = \lim_{n\to\infty} \left[\int_X f_n d\mu + \int_X g_n d\mu \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu;$$

$$\int_X (cf)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (cf_n)d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(c \int_X f_n d\mu \right) = c \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = c \int_X f d\mu.$$

მესამე წინადადების დასამტკიცებლად უნდა ვისარგებლოთ თეორემა 8.3.1-ით და გავითვალისწინოთ, რომ $P(f) \subset P(g)$.

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.4.2. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა და $C \geq 0$. თუ $f(x) \leq C \ (x \in X)$, მაშინ $\int_X f d\mu \leq C\mu(X)$.

დამტკიცება. შეფასება გამომდინარეობს ინტეგრალის მონოტონურობის თვისებიდან (იხ. თეორემა 8.4.1-ის მესამე წინადადება), თუ მას გამოვიყენებთ f და g ფუნქციათა წყვილისათვის, სადაც g არის იგივურად C-ს ტოლი ფუნქცია. $\square$

თეორემა 8.4.3. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. თუ E და F ზომადი სიმრავლეებია და $E \subset F$, მაშინ $\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $f\chi_E \leq f\chi_F$ და გამოვიყენოთ ინტეგრალის მონოტონურობის თვისება. შედეგად დავწერთ,

$$\int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu \leq \int_X f\chi_F d\mu = \int_F f d\mu.$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.4.4. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. თუ $\int_X f d\mu < \infty$, მაშინ $f(x) < \infty$ თითქმის ყველგან.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $E_\infty = \{f = \infty\}$. 8.4.2 და 8.4.3 თეორემების ძალით ვწერთ,

$$\infty > \int_X f d\mu \geq \int_{E_\infty} f d\mu = \infty \mu(E_\infty).$$

რაც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $\mu(E_\infty) = 0$. $\square$

თეორემა 8.4.5. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. თუ $\int_X f d\mu = 0$, მაშინ $f(x) = 0$ თითქმის ყველგან.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$E_k = \{f \geq 1/k\} \ (k \in \mathbb{N}), \quad E = \{f > 0\}.$$

ცხადია, (E_k) ზომად სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობაა და $\lim\limits_{k\to\infty} E_k = E$. 8.4.2 და 8.4.3 თეორემების ძალით ვწერთ,

$$0 = \int_X f d\mu \geq \int_{E_k} f d\mu \geq \frac{1}{k}\mu(E_k).$$

საიდანაც, ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისების საფუძველზე ვღებულობთ, რომ $\mu(E) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(E_k) = 0$. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 8.4.6. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. თუ $\mu(E) = 0$, მაშინ $\int_E f d\mu = 0$.

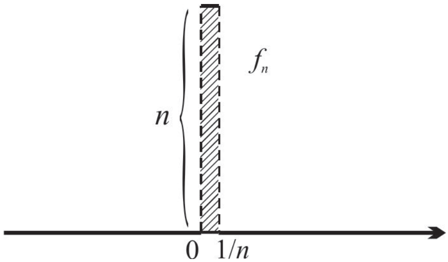
დამტკიცება. დებულება ცხადია მარტივი ფუნქციის შემთხვევაში. რის შემდეგაც, ზოგად სიტუაციაში დებულების დასადგენად საკმარისია გავითვალისწინოთ, რომ $\int_E f d\mu = \sup\limits_{p\in P(f)} \int_E p d\mu$. □

ამოცანები

1. ვთქვათ, f ზომადი ფუნქციაა და $f(x) > 0$ ყოველი $x \in X$-სთვის. აჩვენეთ, რომ თუ E ზომადი სიმრავლეა და $\int_E f d\mu = 0$, მაშინ $\mu(E) = 0$.
2. ვთქვათ, μ ზომა შემოსაზღვრულია, f ზომადი ფუნქციაა და $f(x) > 0$ ყოველი $x \in X$-სთვის. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $\alpha \in (0, \mu(X))$ რიცხვისათვის,
$$\inf_E \int_E f d\mu > 0,$$
სადაც ქვედა ზღვარი აიღება ყველა იმ ზომადი E სიმრავლის მიხედვით, რომელთათვისაც $\mu(E) \geq \alpha$.
3. აჩვენეთ, რომ თუ μ ზომა შემოუსაზღვრელია, მაშინ ამოცანა 2-ის დასკვნა საზოგადოდ არაა სამართლიანი.
4. დაამტკიცეთ, რომ კანტორის ფუნქციის ინტეგრალი ლებეგის ზომის მიხედვით 1/2-ის ტოლია, ე.ი. $\int_{[0,1]} \theta d\mathrm{m} = 1/2$.

§ 5. ზღვარზე გადასვლა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა მიმდევრობებისათვის

ყოველი ნატურალური n-სთვის განვიხილოთ რიცხვით ღერძზე განსაზღვრული f_n ფუნქცია, რომელიც n-ის ტოლია $(0, 1/n)$ ინტერვალზე და ნულის ტოლია $(0, 1/n)$ ინტერვალის გარეთ, ე.ი. $f_n = n\chi_{(0,1/n)}$ (ნახ. 8.4).



ნახ. 8.4.

მარტივი შესამოწმებელია, რომ (f_n) მიმდევრობა ყოველ წერტილში კრებადია იგივურად ნულის ტოლი f ფუნქციისაკენ, მაგრამ, მიუხედავად ამისა,

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mathrm{m} \neq \int_{\mathbb{R}} f d\mathrm{m} = 0.$$

ამ მაგალითის საფუძველზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ფუნქციათა მიმდევრობის ყოველ წერტილში კრებადობა, საზოგადოდ, არ უზრუნველყოფს ლებეგის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლას, რის შემდეგაც აქტუალური ხდება საკითხი: რა დამატებით პირობებშია დასაშვები ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლა? შემდეგი თეორემა ეკუთვნის ბ. ლევის და ის გვიჩვენებს, რომ ფუნქციათა მიმდევრობის ზრდადობის შემთხვევაში ზღვარზე გადასვლა შესაძლებელია.

თეორემა 8.5.1. ვთქვათ, (f_n) არის არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა, ხოლო f - მისი წერტილოვანი ზღვარი, ე.ი. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in X)$. მაშინ

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

აქვე მოვახდინოთ კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ზღვარითი თეორემის ფორმულირება, რომელიც ეკუთვნის პ. ფატუს. ეს თეორემა, კერძოდ, გვიჩვენებს, რომ ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი კრებადობა, მართალია, ვერ უზრუნველყოფს ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლას, მაგრამ მიუხედავად ამისა, უზრუნველყოფს ცალმხრივი შეფასების სამართლიანობას ზღვარითი ფუნქციისა და მიმდევრობის წევრთა ინტეგრალების შედარებისას.

თეორემა 8.5.2. ვთქვათ, არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა წერტილოვნად კრებადია და $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in X)$. მაშინ

$$\int_X f d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

უფრო მეტიც, იგივე შეფასება სამართლიანია მაშინაც, როცა f_n მიმდევრობა არაა აუცილებლად წერტილოვნად კრებადი და f-ის ნაცვლად აიღება $\varliminf_{n\to\infty} f_n$ ფუნქცია.

აქვე მოვიყვანოთ ფატუს თეორემის ერთი საინტერესო შედეგი.

თეორემა 8.5.3. ვთქვათ, არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა წერტილოვნად კრებადია და $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in X)$. თუ ყოველი n-სთვის სრულდება შეფასება:

$$\int_X f_n d\mu \leq C,$$

მაშინ

$$\int_X f d\mu \leq C.$$

შენიშვნა 8.5.1. ადვილი დასანახია, რომ ფატუს თეორემა და მისი შედეგი სამართლიანია მაშინაც, როცა (f_n) მიმდევრობის ყოველ წერტილში კრებადობის პირობას შევცვლით ზომადი f ფუნქციისაკენ თითქმის ყველგან კრებადობის პირობით.

ლევისა და ფატუს თეორემები მიღებული იქნება შემდეგი დებულების საფუძველზე, რომელიც, თავის მხრივ, წარმოადგენს თეორემა 8.2.2-ის განზოგადებას.

თეორემა 8.5.4. ვთქვათ, f_n $(n \in \mathbb{N})$ და f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებია. თუ (f_n) ზრდადი მიმდევრობაა და $f(x) \leq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის, მაშინ

$$\int_X f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

დამტკიცება. თეორემა 8.3.1-ის საფუძველზე დამტკიცება დაიყვანება იმ შემთხვევის განხილვაზე, როცა f მარტივი ფუნქციაა. შემდგომი მსჯელობა ანალოგიურია 8.2.2 თეორემის დამტკიცებისა და ის მოგვყავს გადმოცემის სისრულისათვის.

წარმოვადგინოთ f ფუნქცია სტანდარტული სახით: $f = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{E_k}$.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, 1)$ რიცხვი. შემოვიღოთ სიმრავლეები:

$$E_{k,n} = \{x \in E_k : f_n(x) \geq (1-\varepsilon)a_k\} \qquad (k \in \overline{1, m},\ n \in \mathbb{N}).$$

(f_n) მიმდევრობის ზრდადობის საფუძველზე, ყოველი $k \in \overline{1, m}$-სთვის გვექნება, რომ

$$E_{k,1} \subset E_{k,2} \subset \cdots \quad \text{და} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k,n} = E_k.$$

შედეგად, ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისების ძალით, ყოველი $k \in \overline{1,m}$-სთვის,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_{k,n}) = \mu(E_k).$$

აღვნიშნოთ

$$g_n = \sum_{k=1}^{m} (1-\varepsilon) a_k \chi_{E_{k,n}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, g_n მარტივი ფუნქციაა და $f_n \geq g_n$. 8.1.1 თეორემისა და ინტეგრალის მონოტონურობის თვისების გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_X g_n d\mu = \sum_{k=1}^{m} (1-\varepsilon) a_k \mu(E_{k,n}).$$

საიდანაც, თავის მხრივ მივიღებთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} (1-\varepsilon) a_k \mu(E_{k,n}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (1-\varepsilon) a_k \mu(E_k) = (1-\varepsilon) \int_X f d\mu.$$

შედეგად, $\varepsilon \in (0,1)$ რიცხვის ნებისმიერობის საფუძველზე ვღებულობთ (1) შეფასებას. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 8.5.1-ის დამტკიცება. არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ინტეგრალის მონოტონურობისა და (f_n) მიმდევრობის ზრდადობის გათვალისწინებით გვექნება,

$$\int_X f_1 d\mu \leq \int_X f_2 d\mu \leq \cdots \leq \int_X f d\mu.$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$ არსებობს და არ აღემატება $\int_X f d\mu$-ს. ეს დასკვნა კი, თეორემა 8.5.4-თან ერთად გვაძლევს სასურველ ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 8.5.2-ის დამტკიცება. დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილში ჩამოყალიბებული უფრო ზოგადი დებულება. აღვნიშნოთ

$$g_n = \inf_{m\geq n} f_m \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, (g_n) ზრდადი მიმდევრობაა და $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ $(x \in X)$. აქვე შევნიშნოთ, რომ $g_n \leq f_m$ $(n \leq m)$, საიდანაც ინტეგრალის მონოტონურობის თვისების ძალით,

$$\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_m d\mu \quad (n \leq m).$$

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარე, თეორემა 8.5.4-ის ძალით დავწერთ, რომ

$$\int_X f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება წარმოადგენს ლევის თეორემის შედეგს.

თეორემა 8.5.5. თუ (h_n) არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციების მიმდევრობაა, მაშინ

$$\int_X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} h_n\Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X h_n d\mu.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} h_n, \quad f_N = \sum_{n=1}^{N} h_n \ \ (N \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, (f_N) არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობაა და $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_N(x) \ \ (x \in X)$. თუ ვისარგებლებთ ლევის თეორემით და ინტეგრალის წრფივობის თვისებით, გვექნება, რომ

$$\int_X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} h_n\Big) d\mu = \int_X f d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X f_N d\mu =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_X h_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X h_n d\mu.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

ამოცანები

1. ააგეთ არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა კლებადი (f_n) მიმდევრობა, რომლისთვისაც არ სრულდება ტოლობა:

$$\int_X \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

2. აჩვენეთ, რომ თუ არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა კლებადი (f_n) მიმდევრობაა და დამატებით ცნობილია, რომ $\int_X f_1 d\mu < \infty$, მაშინ

$$\int_X \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

3. ააგეთ არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა, შემდეგი თვისებებით:

$$\int_X f_n d\mu \leq 1 \ \ (n \in \mathbb{N}), \qquad \int_X \big(\varlimsup_{n\to\infty} f_n\big) d\mu = \infty.$$

§ 6. არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის თვლადად ადიციურობა

არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციის **ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი** ეწოდება ზომად სიმრავლეთა კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრულ ფუნქციას:

$$\nu_f(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathrm{S}).$$

ცხადია, ν_f არაუარყოფითი ფუნქციაა და $\nu_f(\emptyset) = 0$.

თეორემა 8.6.1. ნებისმიერი არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი არის თვლადად ადიციური და შედეგად, არის ზომა.

დამტკიცება. ვთქვათ, E_k $(k \in \mathbb{N})$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ზომადი სიმრავლეებია და $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას:

$$\chi_E = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k},$$

და გამოვიყენებთ თეორემა 8.5.5-ს, მივიღებთ, რომ

$$\nu_f(E) = \int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu = \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k} \right) d\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f\chi_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_f(E_k).$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

მოვიყვანოთ თეორემა 8.6.1-ის რამდენიმე შედეგი.

თეორემა 8.6.2. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი თანაუკვეთი E და F ზომადი სიმრავლეებისათვის,

$$\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu.$$

თეორემა 8.6.3. არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული ნული ზომის სიმრავლეზე ფუნქციის მიერ მიღებულ მნიშვნელობებზე. სახელდობრ, თუ E ზომადი სიმრავლეა, ხოლო N - მისი ნული ზომის ქვესიმრავლე, მაშინ

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus N} f d\mu.$$

თეორემა 8.6.3 გამომდინარეობს თეორემა 8.6.2-დან იმის ცხადი ფაქტის გათვალისწინებით, რომ ნული ზომის სიმრავლეზე ინტეგრალის მნიშვნელობა ნულის ტოლია.

შენიშვნა 8.6.1. თეორემა 8.6.3-დან გამომდინარე, ამ თავის ყოველი თეორემა, რომლის პირობაში მოთხოვნილია რაიმე თვისების ყოველ წერტილში შესრულება, სამართლიანი რჩება იმ შემთხვევაშიც, როცა იგივე პირობები შესრულებულია თითქმის ყოველ წერტილში. მაგალითად, ფატუს თეორემა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა (f_n) მიმდევრობა ზღვარითი f ფუნქციისაკენ კრებადია თითქმის ყოველ წერტილში.

თეორემა 8.6.4. თუ f და g ეკვივალენტური არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებია, მაშინ ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლისათვის,

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, N ნული ზომის სიმრავლეა, ისეთი, რომ $\{f \neq g\} \subset N$. მაშინ თეორემა 8.6.3-ის ძალით დავწერთ,

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus (N \cap E)} f d\mu = \int_{E \setminus (N \cap E)} g d\mu = \int_E g d\mu.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 8.6.5. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა, (E_n) ზომად სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობაა და $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. მაშინ

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

თეორემა 8.6.5 უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 8.6.1-დან და ზომის ქვემოდან უწყვეტობის გათვალისწინებით.

ამოცანები

1. ვთქვათ, μ ზომა შემოსაზღვრულია და $f, f_1, f_2, \ldots$ ზომადი სასრული ფუნქციებია. აჩვენეთ, რომ (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადია f ფუნქციისაკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\int_X \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

2. აჩვენეთ, რომ თუ μ ზომა შემოუსაზღვრელია, მაშინ ამოცანა 1-ის დასკვნა საზოგადოდ არაა სამართლიანი.

3. ვთქვათ, $A_1, A_2, \ldots$ ზომადი სიმრავლეებია და E_n $(n \in \mathbb{N})$ არის ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელიც შედის არანაკლებ n ცალში A_k სიმრავლეთა შორის. აჩვენეთ, რომ

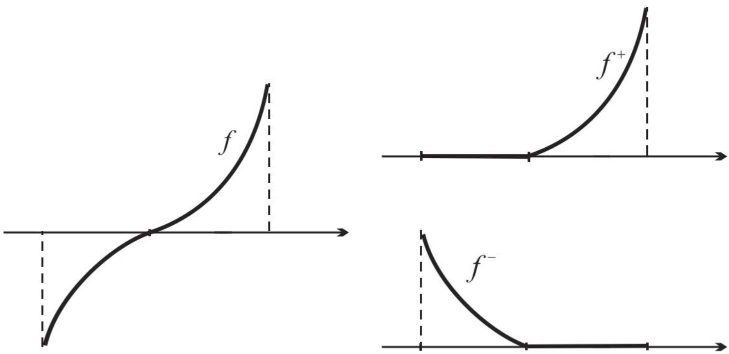
$$\mu(E_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

§ 7. ლებეგის ინტეგრალი ზოგად შემთხვევაში

ვთქვათ, f რაიმე ზომადი ფუნქციაა. განვიხილოთ f-ის წარმოდგენა დადებითი და უარყოფითი ნაწილების სხვაობის სახით, ე.ი.

$$f = f^+ - f^-,$$

სადაც $f^+ = f\chi_{\{f \geq 0\}}$ და $f^- = -f\chi_{\{f<0\}}$ (ნახ. 8.5).



ნახ. 8.5.

თუკი შევნიშნავთ, რომ f^+ და f^- არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებია, მაშინ ბუნებრივ მოსაზრებად ჩანს f ფუნქციის ინტეგრალად X სივრცეზე მივიჩნიოთ

$$\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

გამოსახულება. ოღონდ აქვე უნდა გავითვალისწინოთ შემდეგი გარემოება: თუ $\int_X f^+ d\mu$ და $\int_X f^- d\mu$ ინტეგრალები ორივე უსასრულოა, მაშინ მათი სხვაობა აზრს მოკლებულია, ანუ ასეთ შემთხვევაში $\int_X f d\mu$ ინტეგრალის განსაზღვრა შეუძლებელი ხდება. სწორედ ეს მოსაზრებები უდევს საფუძვლად ლებეგის ინტეგრალის ზოგად განსაზღვრებას. სახელდობრ:

ზომადი f ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი X სივრცეზე (აღნიშვნა: $\int_X f d\mu$) განისაზღვრება იმ შემთხვევაში, როცა

$$\int_X f^+ d\mu \quad \text{და} \quad \int_X f^- d\mu$$

ინტეგრალებს შორის ერთ-ერთი მაინც სასრულია და $\int_X f d\mu$-ის მნიშვნელობად მიიჩნევა სხვაობა

$$\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

ცალკე გამოიყოფა ის შემთხვევა, როცა ორივე $\int_X f^+ d\mu$ და $\int_X f^- d\mu$ ინტეგრალი სასრულია. ასეთ შემთხვევაში, f ფუნქციას ეწოდება **ლებეგის აზრით ინტეგრებადი** ან კიდევ, **ჯამებადი**. ყველა ჯამებადი ფუნქციის კლასი აღინიშნება $L(X, \mu)$ ჩანაწერით.

შევნიშნოთ, რომ ლებეგის ინტეგრალის აღსანიშნად, აგრეთვე, გამოიყენება $\int_X f(x) d\mu(x)$ ჩანაწერი.

შენიშვნა 8.7.1. არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციისათვის $f^+ = f$ და $f^- = 0$. შედეგად, f-ის ინტეგრალის მნიშვნელობა ზემოთ მოცემული განსაზღვრების მიხედვით ემთხვევა f-ის ინტეგრალის მნიშვნელობას §8.3-ში მოცემული განსაზღვრების მიხედვით.

შენიშვნა 8.7.2. არაუარყოფითი ზომადი f ფუნქციის ჯამებადობა ტოლფასია მისი ინტეგრალის სასრულობის, ე.ი. $\int_X f d\mu < \infty$ პირობის.

თეორემა 8.7.1. ზომადი f ფუნქცია ჯამებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჯამებადია მისი მოდული, ე.ი. $f \in L(X, \mu) \Leftrightarrow |f| \in L(X, \mu)$.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$. მაშინ გვაქვს, რომ $\int_X f^+ d\mu < \infty$ და $\int_X f^- d\mu < \infty$. შედეგად, თუ გავითვალისწინებთ $|f| = f^+ + f^-$ ტოლობას და გამოვიყენებთ არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებისათვის ლებეგის ინტეგრალის წრფივობის თვისებას, დავასკვნით, რომ

$$\int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu < \infty,$$

რაც ნიშნავს $|f|$-ის ჯამებადობას.

ვთქვათ, ახლა $|f| \in L(X, \mu)$. მაშინ $f^+ \leq |f|$ და $f^- \leq |f|$ შეფასებების გათვალისწინებით, არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციებისათვის ლებეგის ინტეგრალის მონოტონურობის თვისების ძალით დავასკვნით, რომ

$$\int_X f^+ d\mu \leq \int_X |f| d\mu < \infty \quad \text{და} \quad \int_X f^- d\mu \leq \int_X |f| d\mu < \infty.$$

შედეგად, $f \in L(X, \mu)$. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 8.7.2. ვთქვათ, $f \in L(X,\mu)$. მაშინ $|f(x)| < \infty$ თითქმის ყველგან.

თეორემა 8.7.2 გამომდინარეობს 8.7.1 და 8.4.4 თეორემებიდან.

თეორემა 8.7.3. ვთქვათ, $f, g \in L(X,\mu)$. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) $f+g \in L(X,\mu)$ და $\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$,

2) ნებისმიერი $c \in \mathbb{R}$-სთვის, $cf \in L(X,\mu)$ და $\int_X (cf)d\mu = c\int_X f d\mu$,

3) თუ $f \le g$, მაშინ $\int_X f d\mu \le \int_X g d\mu$.

დამტკიცება. არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის მონოტონურობისა და წრფივობის თვისებების ძალით ვწერთ,

$$\int_X |f+g| d\mu \le \int_X (|f|+|g|)d\mu \le \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu.$$

საიდანაც, თეორემა 8.7.1-ის საფუძველზე ვასკვნით $f+g$ ფუნქციის ჯამებადობას.

გვაქვს, რომ

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

შედეგად,

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+.$$

არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის წრფივობის თვისების საფუძველზე გვექნება,

$$\int_X (f+g)^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu =$$

$$= \int_X (f+g)^- d\mu + \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu.$$

საიდანაც, ტოლობაში მონაწილე თითოეული ინტეგრალის სასრულობის გათვალისწინებით, უშუალოდ ვღებულობთ, რომ

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

გადავიდეთ ერთგვაროვნების თვისების დამტკიცებაზე. არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის დადებითად ერთგვაროვნების ძალით დავწერთ,

$$\int_X |cf| d\mu = \int_X (|c||f|)d\mu = |c| \int_X |f| d\mu.$$

საიდანაც, თეორემა 8.7.1-ის საფუძველზე ვასკვნით cf ფუნქციის ჯამებადობას.

თუ $c \geq 0$, მაშინ გვაქვს, რომ $(cf)^+ = cf^+$ და $(cf)^- = cf^-$. შედეგად, არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის დადებითად ერთგვაროვნების გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\int_X (cf)d\mu = \int_X (cf^+)d\mu - \int_X (cf^-)d\mu =$$

$$= c\int_X f^+ d\mu - c\int_X f^- d\mu = c\int_X f d\mu.$$

მეორე შემთხვევაში, ე.ი. როცა $c < 0$, გვექნება, რომ $(cf)^+ = (-c)f^-$ და $(cf)^- = (-c)f^+$. შედეგად, კვლავ არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის დადებითად ერთგვაროვნების გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\int_X (cf)d\mu = \int_X (cf^+)d\mu - \int_X (cf^-)d\mu =$$

$$= (-c)\int_X f^- d\mu - (-c)\int_X f^+ d\mu = c\int_X f d\mu.$$

ინტეგრალის მონოტონურობის დასადგენად შევნიშნოთ, რომ $f \leq g$ პირობის შესრულების შემთხვევაში სამართლიანი იქნება შეფასებები:

$$f^+ \leq g^+, \quad g^- \leq f^-.$$

საიდანაც, არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის მონოტონურობის საფუძველზე დავწერთ,

$$\int_X f^+ d\mu \leq \int_X g^+ d\mu, \quad \int_X g^- d\mu \leq \int_X f^- d\mu.$$

ამ შეფასებებიდან, მათში მონაწილე ინტეგრალების სასრულობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ, რომ

$$\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \leq \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu.$$

რაც ნიშნავს დასამტკიცებელი შეფასების სამართლიანობას.

თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 8.7.4. ვთქვათ, $f \in L(X,\mu)$. მაშინ $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$.

თეორემა 8.7.4-ის დასამტკიცებლად საკმარისია გავითვალისწინოთ, რომ $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ და $\int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$.

თეორემა 8.7.5. ვთქვათ, $f \in L(X,\mu)$, $f \geq 0$, g ზომადი ფუნქციაა და $|g| \leq f$. მაშინ $g \in L(X,\mu)$.

დამტკიცება. არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის მონოტონურობის საფუძველზე გვაქვს,

$$\int_X |g| d\mu \leq \int_X f d\mu < \infty.$$

საიდანაც, თეორემა 8.7.1-ის ძალით ვასკვნით g ფუნქციის ჯამებადობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.7.6. თუ $\mu(X) < \infty$, მაშინ ნებისმიერი შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია ჯამებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, f ზომადი ფუნქციაა და $|f(x)| \leq C \ \ (x \in X)$. შევნიშნოთ, რომ $\mu(X) < \infty$ პირობის საფუძველზე, იგივურად C-ს ტოლი ფუნქცია ჯამებადია. ამის შემდეგ, თუ გამოვიყენებთ თეორემა 8.7.5-ს, დავასკვნით f-ის ჯამებადობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.7.7. თუ f ზომადი ფუნქციაა, $m \leq f(x) \leq M \ \ (x \in X)$ და $\mu(X) < \infty$. მაშინ $f \in L(X, \mu)$ და $m\mu(X) \leq \int_X f d\mu \leq M\mu(X)$.

დამტკიცება. თეორემა 8.7.4-ის ძალით f, $a\chi_X$ და $b\chi_X$ ფუნქციები ჯამებადია. ამის შემდეგ ინტეგრალის მონოტონურობის თვისება გვაძლევს საჭირო უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი დებულება მოიხსენიება როგორც ჩებიშევის უტოლობა.

თეორემა 8.7.8. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$. მაშინ ყოველი $\lambda > 0$ რიცხვისათვის სრულდება შეფასება:

$$\mu(\{|f| \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X |f| d\mu.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\lambda > 0$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$|f| \geq \lambda \chi_{\{|f| \geq \lambda\}}.$$

საიდანაც, არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ინტეგრალის მონოტონურობის საფუძველზე, გვაქვს,

$$\int_X |f| d\mu \geq \int_X \lambda \chi_{\{|f| \geq \lambda\}} d\mu = \lambda \mu(\{|f| \geq \lambda\}).$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.7.9. ვთქვათ, $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{E_k}$, სადაც $E_1, E_2, \ldots$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ზომადი სიმრავლეებია, ხოლო $a_1, a_2, \ldots$ რაიმე სასრული რიცხვებია. f ფუნქცია ჯამებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ,

როცა კრებადია $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\mu(E_k)$ მწკრივი და ჯამებადობის შემთხვევაში f-ის ინტეგრალი გამოითვლება ტოლობით:

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(E_k).$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $\Lambda_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0\}$ და $\Lambda_2 = \{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\}$. ადვილი დასანახია, რომ $f^+ = \sum_{k\in\Lambda_1} a_k\mu(E_k)$ და $f^- = \sum_{k\in\Lambda_2} |a_k|\mu(E_k)$. ამის შემდეგ, თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია გავითვალისწინოთ თეორემა 8.3.2. $\square$

თეორემა 8.7.10. ვთქვათ, μ ზომა შემოსაზღვრულია, f შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციაა და $m \leq f(x) < M$ $(x \in X)$. $[m, M)$ მონაკვეთის ნებისმიერი $T = (y_0, y_1, \dots, y_n)$, $m = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M$, დანაწილებისათვის აღვნიშნოთ: $\lambda(T) = \max\limits_{1\leq k\leq n}(y_k - y_{k-1})$, $E_k = \{y_{k-1} \leq |f| < y_k\}$ $(1 \leq k \leq n)$ და

$$\underline{S}_f(T) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\mu(E_k), \quad \overline{S}_f(T) = \sum_{k=1}^{n} y_k\mu(E_k).$$

ასეთ პირობებში გვაქვს, რომ

$$\int_X f d\mu = \lim_{\lambda(T)\to 0} \underline{S}_f(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} \overline{S}_f(T).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $\overline{S}_f(T)$ ჯამების შემთხვევა. T დანაწილებისათვის აღვნიშნოთ: $f_T = \sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{E_k}$. ცხადია, f_T მარტივი ფუნქციაა, ამასთან, თეორემა 8.7.9-ის ძალით გვაქვს,

$$\int_X f_T d\mu = S_f(T).$$

შემდეგ, თუ შევნიშნავთ, რომ $|f_T(x) - f(x)| \leq \lambda(T)$ $(x \in X)$, ინტეგრალის წრფივობისა და 8.7.4 და 8.7.7 თეორემების ძალით დავწერთ,

$$\Big|\int_X f_T d\mu - \int_X f d\mu\Big| = \int_X |f_T - f| d\mu \leq \lambda(T)\mu(X).$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა. $\underline{S}_f(T)$ ჯამების შემთხვევაში მსჯელობა ანალოგიურად წარიმართება. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 8.7.3. $\underline{S}_f(T)$ და $\overline{S}_f(T)$ ჯამებს შესაბამისად **ლებეგის ზედა და ქვედა ინტეგრალურ ჯამებს** უწოდებენ. $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \underline{S}_f(T) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \overline{S}_f(T)$ ტოლობა შეიძლება საფუძვლად დაედოს ლებეგის ინტეგრალის განსაზღვრას

შემოსაზღვრული ზომით აღჭურვილ სივრცეზე მოცემული შემოსაზღვრული და ზომადი ფუნქციებისთვის. სწორედ ასეთი იყო ლებეგის ორიგინალური განსაზღვრება.

ამოცანები

1. აჩვენეთ, რომ თუ μ ზომა შემოსაზღვრულია, მაშინ ზომადი f ფუნქციის ჯამებადობა ტოლფასია $\sum_{k=1}^{\infty} k\mu(\{k \leq |f| < k+1\})$ მწკრივის კრებადობის.
2. აჩვენეთ, რომ თუ μ ზომა შემოსაზღვრულია, მაშინ ზომადი f ფუნქციის ჯამებადობა ტოლფასია $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq k\})$ მწკრივის კრებადობის.
3. აჩვენეთ, რომ თუ μ ზომა შემოუსაზღვრელია, მაშინ 1 და 2 ამოცანების დასკვნები საზოგადოდ არაა სამართლიანი.
4. აჩვენეთ, რომ თუ f ფუნქცია ჯამებადია, მაშინ სრულდება პირობა $\mu(\{|f| > \lambda\}) = o(1/\lambda)$ $(\lambda \to \infty)$. ააგეთ მაგალითი შემოსაზღვრული μ ზომის და ზომადი f ფუნქციისა, რომლებისთვისაც სრულდება აღნიშნული პირობა, მაგრამ მიუხედავად ამისა, f არაა ჯამებადი.
5. ვთქვათ, f ზომადი ფუნქციაა. აჩვენეთ, რომ თუ რომელიმე $\alpha > 1$ და $C > 0$ რიცხვებისათვის შესრულებულია $\mu(\{|f| > \lambda\}) \leq C/\lambda^{\alpha}$ $(\lambda > 0)$ პირობა, მაშინ f ფუნქცია ჯამებადია.

§ 8. ლებეგის ინტეგრალი, როგორც სიმრავლის ფუნქცია

ზომადი f ფუნქციის ინტეგრალი X-ის ზომად E ქვესიმრავლეზე განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$\int_E f d\mu = \int_X f\chi_E \, d\mu.$$

ამასთან, იგულისხმება, რომ $\int_E f d\mu$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $\int_X f\chi_E \, d\mu$. არაცარიელი E სიმრავლის შემთხვევაში, $\int_E f d\mu$-ს შეიძლება შევხედოთ, როგორც $f|_E$ ფუნქციის ინტეგრალს $(E, \mathrm{S} \cap E, \mu|_{\mathrm{S}\cap E})$ სივრცეზე.

f ფუნქციას ეწოდება **ლებეგის აზრით ინტეგრებადი**, ან კიდევ, **ჯამებადი E სიმრავლეზე**, თუ $f\chi_E \in L(X, \mu)$. E-ზე ჯამებადი ყველა ფუნქციის კლასი აღვნიშნოთ $L(E, \mu)$ ჩანაწერით.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ: 1) $\int_E f d\mu$ არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\int_E f^+ d\mu$ და $\int_E f^- d\mu$ ინტეგრალებს შორის ერთ-ერთი მაინც სასრულია; 2) $f \in L(E, \mu)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე $\int_E f^+ d\mu$ და $\int_E f^- d\mu$ ინტეგრალებს შორის სასრულია.

თეორემა 8.8.1. ვთქვათ, f ზომადი ფუნქციაა. თუ $\mu(E) = 0$, მაშინ $f \in L(E, \mu)$ და $\int_E f d\mu = 0$.

თეორემა 8.8.1 არის 8.7.4 და 8.4.6 თეორემების შედეგი.

თეორემა 8.8.2. ვთქვათ, f ზომადი ფუნქციაა, E და F ზომადი სიმრავლეებია, $F \subset E$ და $f \in L(E, \mu)$. მაშინ $f \in L(F, \mu)$.

თეორემა 8.8.2 არის 8.7.1 და 8.4.3 თეორემების შედეგი.

$f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის **ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი** ეწოდება ზომად სიმრავლეთა კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრულ ფუნქციას:

$$\nu_f(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in S).$$

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლისათვის $\int_E f d\mu$ ინტეგრალის არსებობა გარანტირებულია თეორემა 8.8.2-ის ძალით.

თეორემა 8.8.3. ნებისმიერი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი წარმოადგენს ორი შემოსაზღვრული ზომის სხვაობას და შედეგად არის თვლადად ადიციური.

დამტკიცება. გვაქვს, რომ $\int_X f^+ d\mu < \infty$, $\int_X f^- d\mu < \infty$ და $\nu_f(E) = \nu_{f^+}(E) - \nu_{f^-}(E)$ $(E \in S)$. საიდანაც, თეორემა 8.6.1-ის გათვალისწინებით, ვასკვნით, რომ ν_f წარმოდგება ν_{f^+} და ν_{f^-} შემოსაზღვრული ზომების სხვაობის სახით. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

მოვიყვანოთ თეორემა 8.8.3-ის რამდენიმე შედეგი.

თეორემა 8.8.4. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$. მაშინ ნებისმიერი თანაუკვეთი E და F ზომადი სიმრავლეებისათვის,

$$\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu.$$

თეორემა 8.8.5. $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული ნული ზომის სიმრავლეზე ფუნქციის მიერ მიღებულ მნიშვნელობებზე. სახელდობრ, თუ E ზომადი სიმრავლეა, ხოლო N - მისი ნული ზომის ქვესიმრავლე, მაშინ

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus N} f d\mu.$$

თეორემა 8.8.5 გამომდინარეობს 8.8.1 და 8.8.4 თეორემებიდან.

თეორემა 8.8.6. თუ ეკვივალენტურ ზომად f და g ფუნქციებს შორის ერთ-ერთი ჯამებადია, მაშინ ჯამებადია მეორე მათგანიც და ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლისათვის,

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f^+ \sim g^+$ და $f^- \sim g^-$. შედეგად, თეორემა 8.6.4-ის ძალით გვაქვს, რომ ყოველი ზომადი E სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობები:

$$\int_E f^+ d\mu = \int_E g^+ d\mu, \quad \int_E f^- d\mu = \int_E g^- d\mu.$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი წინადადებები. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 8.8.7. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$, (E_n) **ზომად სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობაა და** $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. **მაშინ**

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

თეორემა 8.8.7 გამომდინარეობს თეორემა 8.6.5-დან, თუ მას გამოვიყენებთ f^+ და f^- ფუნქციებისათვის.

შემდეგი თეორემა გამოხატავს ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს თვისებას, რომელსაც **აბსოლუტურად უწყვეტობად** მოიხსენიებენ.

თეორემა 8.8.8. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$. **მაშინ ნებისმიერი** $\varepsilon > 0$**-სთვის მოიძებნება** $\delta > 0$, **ისეთი, რომ**

$$\left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon,$$

ყოველი ზომადი E **სიმრავლისათვის, რომელიც** აკმაყოფილებს $\mu(E) < \delta$ **პირობას.**

დამტკიცება. $\nu_f = \nu_{f^+} - \nu_{f^-}$ ტოლობის გათვალისწინებით, საკმარისია თეორემა დავამტკიცოთ არაუარყოფითი ფუნქციის შემთხვევაში. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, მოიძებნება $\varepsilon > 0$ და ზომად სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობა, ისეთი, რომ ყოველი n-სთვის,

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{და} \quad \nu_f(E_n) \geq \varepsilon.$$

განვიხილოთ სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობის ზედა ზღვარი:

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

მაშინ ბორელ-კანტელის ლემის (იხ. თეორემა 4.4.4) საფუძველზე მივიღებთ $\mu(E)=0$ ტოლობას. მეორე მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ν_f შემოსაზღვრული ზომაა (იხ. თეორემა 8.6.1) და გამოვიყენებთ ზომის ზემოდან უწყვეტობის თვისებას, მივიღებთ,

$$\nu_f(E) = \lim_{n\to\infty} \nu_f\bigg(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\bigg).$$

შედეგად, $\nu_f\big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\big) \geq \nu_f(E_n) \geq \varepsilon$ შეფასების გამო, $\nu_f(E) \geq \varepsilon$. ამრიგად, ნულზომიან E სიმრავლეზე არაუარყოფითი f ფუნქციის ინტეგრალი გამოვიდა დადებითი. ეს კი ეწინააღმდეგება თეორემა 8.8.1-ს. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 8.8.1. თეორემა 8.8.1 სამართლიანია მაშინაც, როცა $\big|\int_E f d\mu\big|$ გამოსახულებას შევცვლით $\int_E |f| d\mu$ გამოსახულებით. ამის დასადგენად საკმარისია გავითვალისწინოთ, რომ $f \in L(X,\mu) \Rightarrow |f| \in L(X,\mu)$ და შემდეგ თეორემა 8.8.1 გამოვიყენოთ $|f|$ ფუნქციისათვის.

ამოცანები

1. ვთქვათ, $f \in L(\mathbb{R}, \mathrm{m})$. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი შემოსაზღვრული და ლებეგის აზრით ზომადი E სიმრავლისათვის, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{E+n} |f| d\mathrm{m} = 0$, სადაც $E+n = \{x+n : x \in E\}$.
2. ვთქვათ, $f \in L([a,b], \mathrm{m})$. აჩვენეთ, რომ თუ $\int_{[a,c]} f d\mathrm{m} = 0$ ყოველი $c \in [a,b]$ წერტილისათვის, მაშინ f თითქმის ყველგან ნულის ტოლია.

§ 9. ზღვარზე გადასვლა ლებეგის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ

შემდეგი დებულება წარმოადგენს ბ. ლევის თეორემის ვარიანტს ნებისმიერნიშნიანი ფუნქციებისათვის.

თეორემა 8.9.1. ვთქვათ, (f_n) არის ჯამებად ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა, ხოლო f - მისი წერტილოვანი ზღვარი, ე.ი. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in X)$. თუ დამატებით ცნობილია, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n d\mu < \infty,$$

მაშინ f ფუნქცია ჯამებადია და

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $g_n = f_n - f_1$ $(n \in \mathbb{N})$ ფუნქციები. ცხადია, რომ ეს მიმდევრობა აკმაყოფილებს არაუარყოფითი ფუნქციებისათვის ლევის თეორემის პირობებს, რის გამოც, $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ ტოლობით განსაზღვრული ფუნქციისათვის გვექნება, რომ

$$\int_X g d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu - \int_X f_1 d\mu. \tag{1}$$

შედეგად, თეორემის პირობის ძალით ვასკვნით g ფუნქციის ჯამებადობას. აქედან, $f = g + f_1$ ტოლობის საფუძველზე გამომდინარეობს f ფუნქციის ჯამებადობა. შემდეგ, (1)-ის გათვალისწინებით, ვწერთ, რომ

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu + \int_X f_1 d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

ახლა ჩამოვაყალიბოთ უმნიშვნელოვანესი ზღვარითი თეორემა, რომელიც ეკუთვნის ლებეგს. ეს დებულება მოიხსენიება, როგორც ლებეგის თეორემა მაჟორანტული კრებადობის შესახებ და გვიჩვენებს, რომ თითქმის ყველგან კრებადობა უზრუნველყოფს ზღვარზე გადასვლას ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ, თუ დამატებით ცნობილია, რომ მიმდევრობის წევრები ერთობლივ შემოსაზღვრულია რაიმე ჯამებადი ფუნქციით (მაჟორანტით).

თეორემა 8.9.2. ვთქვათ, (f_n) ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობაა და f ჯამებადი ფუნქციაა. თუ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ თითქმის ყველგან და დამატებით ცნობილია ისეთი არაუარყოფითი ჯამებადი g ფუნქციის არსებობა, რომ ყოველი n-სთვის, $|f_n(x)| \le g(x)$ თითქმის ყველგან, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

და შედეგად,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

ლემა 8.9.1. ვთქვათ, (f_n) ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობაა და f ჯამებადი ფუნქციაა. თუ $\mu(X) < \infty$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ თითქმის ყველგან და დამატებით ცნობილია ისეთი არაუარყოფითი C რიცხვის არსებობა, რომ ყოველი n-სთვის, $|f_n(x)| \le C$ თითქმის ყველგან, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

და შედეგად,

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $|f_n(x)| \le C$ და $|f(x)| \le C$ შეფასებებს ადგილი აქვთ ყოველ წერტილში. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილავდით f_n და f ფუნქციების ეკვივალენტურ ფუნქციებს, რომლებიც ხსენებულ პირობებს აკმაყოფილებენ ყოველ წერტილში და გავითვალისწინებდით, რომ ეკვივალენტურ ფუნქციებს ერთი და იგივე ინტეგრალები აქვთ.

ვთქვათ, $\varepsilon > 0$. განვიხილოთ დადებითი δ და η რიცხვები, რომლებიც შერჩეული იქნება მოგვიანებით. შემოსაზღვრული ზომის შემთხვევაში, თითქმის ყველგან კრებადობა იწვევს ზომით კრებადობას (იხ. თეორემა 7.8.2). აღნიშნულის გათვალისწინებით მოიძებნება $N \in \mathbb{N}$, ისეთი, რომ

$$\mu(\{|f_n - f| > \delta\}) < \eta, \quad \text{როცა} \quad n \ge N.$$

თუ გავითვალისწინებთ $|f_n - f| \le 2C$ შეფასებას და გამოვიყენებთ ინტეგრალის ადიციურობისა და მონოტონურობის თვისებებს, ყოველი $n \ge N$-სთვის გვექნება,

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int\limits_{\{|f_n - f| > \delta\}} |f_n - f| d\mu + \int\limits_{\{|f_n - f| \le \delta\}} |f_n - f| d\mu \le$$

$$\le \int\limits_{\{|f_n - f| > \delta\}} 2C d\mu + \int\limits_X \delta d\mu \le 2C\eta + \delta\mu(X).$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\eta < \frac{\varepsilon}{4C}$ და $\delta < \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}$, მაშინ ყოველი $n \ge N$-სთვის გვექნება,

$$\int_X |f_n - f| d\mu < \varepsilon.$$

ამით ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 8.9.2. ვთქვათ, f ჯამებადი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება სასრული ზომის E სიმრავლე, ისეთი, რომ f შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე და $\int_{X\setminus E} |f| d\mu < \varepsilon$.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ f არაუარყოფითია და ყოველ წერტილში სასრულია.

აღვნიშნოთ $E_k = \{1/k \le f \le k\}$ $(k \in \mathbb{N})$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $(f\chi_{E_k})$ ზრდადი მიმდევრობაა და $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty}(f\chi_{E_k})(x)$ ყოველი x-სთვის. შედეგად, ლევის თეორემის ძალით,

$$\int_X f d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X f\chi_{E_k} d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f d\mu.$$

საიდანაც, განუსაზღვრელი ინტეგრალის ადიციურობის თვისების საფუძველზე, საკმარისად დიდი k-სთვის გვექნება,

$$\int_{X\setminus E_k} f d\mu < \varepsilon.$$

ამის შემდეგ, თუ შევნიშნავთ, რომ f შემოსაზღვრულია თითოეულ E_k სიმრავლეზე და ჩებიშევის უტოლობის ძალით,

$$\mu(E_k) \le \mu(\{f \ge 1/k\}) \le k \int_X f d\mu < \infty,$$

დავასკვნით, რომ საკმარისად დიდი k-სთვის E_k სიმრავლე დააკმაყოფილებს ყველა საჭირო პირობას. თეორემა დამტკიცებულია.

□

თეორემა 8.9.2-ის დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ და $|f_n(x)| \le g(x) < \infty$ პირობებს ადგილი აქვთ ყოველ წერტილში. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილავდით f_n, f და g ფუნქციების ეკვივალენტურ ფუნქციებს, რომლებიც ხსენებულ პირობებს აკმაყოფილებენ ყოველ წერტილში და გავითვალისწინებდით, რომ ეკვივალენტურ ფუნქციებს ერთი და იგივე ინტეგრალები აქვთ.

ვთქვათ, $\varepsilon > 0$. ლემა 8.9.2-ის გამოყენებით შეგვიძლია ვიპოვოთ სასრული ზომის E სიმრავლე, ისეთი, რომ g ფუნქცია შემოსაზღვრულია E-ზე და

$$\int_{X\setminus E} |g| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$(E, \mathrm{S}\cap E, \mu|_{\mathrm{S}\cap E})$ ზომიანი სივრცე და $f_n|_E$ $(n \in \mathbb{N})$, $f|_E$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ლემა 8.9.1-ის პირობებს. შედეგად, ლემა 8.9.1-ის ძალით, საკმარისად დიდი n-სთვის შესრულდება შეფასება:

$$\int_E |f_n - f| d\mu < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარე, საკმარისად დიდი n-სთვის გვექნება, რომ

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_E |f_n - f| d\mu + \int_{X\setminus E} |f_n - f| d\mu <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + 2\int_{X\setminus E} g d\mu < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

ვთქვათ, (f_n) თითქმის ყველგან სასრულ ზომად ფუნქციათა მიმდევრობაა, f თითქმის ყველგან სასრული ზომადი ფუნქციაა და E ზომადი სიმრავლეა.

ვიტყვით, რომ (f_n) **მიმდევრობა ზომით კრებადია** f **ფუნქციისაკენ** E **სიმრავლეზე**, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის სრულდება პირობა:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in E : |f_n(x)| < \infty, |f(x)| < \infty, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

შენიშვნა 8.9.1. თეორემა 7.8.2-ის ძალით (f_n) მიმდევრობის თითქმის ყველგან კრებადობა იწვევს (f_n)-ის ზომით კრებადობას სივრცის ნებისმიერ სასრული ზომის E ქვესიმრავლეზე.

შენიშვნა 8.9.2. ცხადია, რომ (f_n)-ის ზომით კრებადობა იწვევს (f_n)-ის ზომით კრებადობას სივრცის ნებისმიერ ზომად E ქვესიმრავლეზე.

თუ გავაანალიზებთ თეორემა 8.9.1-ის დამტკიცებას, დავრწმუნდებით, რომ სამართლიანია შემდეგი კიდევ უფრო ზოგადი დებულება.

თეორემა 8.9.3. ვთქვათ, (f_n) **ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობაა და** f **ჯამებადი ფუნქციაა. თუ** (f_n) **მიმდევრობა ზომით კრებადია** f **ფუნქციისაკენ სივრცის ნებისმიერ სასრული ზომის ქვესიმრავლეზე და დამატებით ცნობილია ისეთი არაუარყოფითი ჯამებადი** g **ფუნქციის არსებობა, რომ ყოველი** n**-სთვის,** $|f_n(x)| \le g(x)$ **თითქმის ყველგან, მაშინ**

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

და შედეგად,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

შენიშვნა 8.9.3. ამ პარაგრაფის დებულებების ანალოგები სამართლიანია $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ ფუნქციური მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრების საკითხთან მიმართებაში. აქ, ოღონდ, ერთობლივ შემოსაზღვრულობის შესაბამისი პირობები უნდა მოვთხოვოთ მწკრივის $\sum\limits_{k=1}^{n} h_k$ კერძო ჯამებს.

შენიშვნა 8.9.4. წევრ-წევრად ინტეგრების საკითხი მნიშვნელოვანია, როცა გვინდა გარკვეულ ფუნქციურ მწკრივად წარმოდგენილი h ფუნქციის ინტეგრალის გამოთვლა. რიმანის ინტეგრალის ფარგლებში ამ საკითხის გადაწყვეტა შეუძლებელია საკმაოდ მარტივ შემთხვევებშიც კი.

ზემოაღნიშნულის დამადასტურებელი მაგალითის ასაგებად განვიხილოთ $[0,1]$ მონაკვეთის არსად მკვრივი და სრულყოფილი E ქვესიმრავლე, რომელსაც აქვს დადებითი ზომა. ასეთი სიმრავლე აიგება კანტორის დისკონტინუუმის მსგავსად. სახელდობრ, ავიღოთ დადებით რიცხვთა (a_n) მიმდევრობა თვისებით: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \varepsilon < 1$. აგების პირველ ეტაპზე $[0,1]$ სეგმენტიდან

ამოვაგდოთ მისი კონცენტრული ინტერვალი a_1-ის ტოლი სიგრძით და საზოგადოდ, აგების n-ურ ეტაპზე განვიხილოთ აგების $n-1$ ეტაპის შემდეგ დარჩენილი 2^{n-1} ცალი სეგმენტი და მათგან ამოვაგდოთ მათი კონცენტრული და $a_n/2^{n-1}$ სიგრძის ინტერვალები. ასეთი აგების შედეგად მივიღებთ $[0,1]$ მონაკვეთის არსად მკვრივ და სრულყოფილ ქვესიმრავლეს, რომელსაც ექნება $1-\varepsilon$ რიცხვის ტოლი ზომა.

$((a_k,b_k))_{k\in\mathbb{N}}$ იყოს E სიმრავლის დამატებითი ინტერვალების მიმდევრობა. ყოველი k-სათვის h_k-თი აღვნიშნოთ $[0,1]$-ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც ნულის ტოლია (a_k,b_k) ინტერვალის გარეთ და რომლის გრაფიკი Ox ღერძთან ერთად ქმნის ტოლფერდა სამკუთხედს (a_k,b_k) მონაკვეთის ტოლი ფუძით და წვეროთი $(c_k,1)$ წერტილში, სადაც c_k არის (a_k,b_k)-ს შუაწერტილი.

განვიხილოთ $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ ფუნქციური მწკრივი. ამ მწკრივს აქვს შემდეგი თვისებები:

- h_k ფუნქციები უწყვეტი და არაუარყოფითია;
- $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \leq 1$ ყოველი $x\in[0,1]$ წერტილისათვის;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{[a,b]} h_k(x)dx \leq 1$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ მწკრივის h ჯამი არაა რიმანის აზრით ინტეგრებადი.

პირველი, მეორე და მესამე თვისებები ცხადია. მეოთხე თვისების დასადგენად უნდა შევნიშნოთ, რომ h იქნება E სიმრავლის ყოველ წერტილში წყვეტილი ფუნქცია. ეს მტკიცება E-ს არსად მკვრივობის საფუძველზე. დადებითი ზომის სიმრავლის წერტილებში წყვეტილი ფუნქცია კი რიმანის აზრით არაინტეგრებადია. ეს უკანასკნელი დასკვნა გამომდინარეობს რიმანის აზრით ინტეგრებადობის ცნობილი კრიტერიუმიდან, რომელიც დამტკიცებული იქნება მომდევნო თავში (იხ. §9.2).

ამრიგად, რიმანის ინტეგრალი, საზოგადოდ, ვერ უზრუნველყოფს ფუნქციური მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრებას იმ შემთხვევაშიც კი, როცა მწკრივი შედგება არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციებისაგან, მისი კერძო ჯამები ერთობლივ შემოსაზღვრულია და, ამასთანავე, ინტეგრალების მწკრივი კრებადია. აღნიშნულის გამო წევრ-წევრად ინტეგრების საკითხი მიჩნეული იყო ერთ-ერთ ძირითად გადაუჭრელ ამოცანად, რაც მოითხოვდა ინტეგრების ახალი უფრო ძლიერი მექანიზმის შექმნას.

ამ და წინა პარაგრაფებში დადგენილი შესაბამისი თეორემები გვიჩვენებენ ლებეგის ინტეგრალის ეფექტურობას ფუნქციური მწკრივის წევრ-წევრად ინტეგრების საკითხთან მიმართებაში.

ამოცანები

1. ვთქვათ, μ ზომა შემოსაზღვრულია და (f_n) ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობაა, რომელიც თანაბრად კრებადია ჯამებადი f ფუნქციისაკენ. აჩვენეთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.
2. ვთქვათ, (f_n) არაუარყოფით ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობაა და f ჯამებადი ფუნქციაა. აჩვენეთ, რომ თუ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ თითქმის ყველგან და $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$, მაშინ
$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$
3. აჩვენეთ, რომ ამოცანა 2-ის დასკვნა, საზოგადოდ, არაა სამართლიანი, თუ (f_n) ნებისმიერ ჯამებად ფუნქციათა მიმდევრობაა.
4. ვთქვათ, μ ზომა შემოსაზღვრულია, $f, f_1, f_2, \dots$ არაუარყოფითი ჯამებადი ფუნქციებია და (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადია f ფუნქციისაკენ. აჩვენეთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f_n ფუნქციებს აქვთ თანაბარხარისხოვნად აბსოლუტურად უწყვეტი ინტეგრალები, ე.ი. ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ δ-ზე მცირე ზომის ნებისმიერი E სიმრავლისათვის და ყოველი n-სთვის სრულდება შეფასება: $\int_E f_n d\mu < \varepsilon$.
5. აჩვენეთ, რომ ამოცანა 4-ის დასკვნა საზოგადოდ არაა სამართლიანი, თუ μ ზომა შემოუსაზღვრელია.

§ 10. ლებეგის ინტეგრალის გამოთვლა განაწილების ფუნქციის მეშვეობით

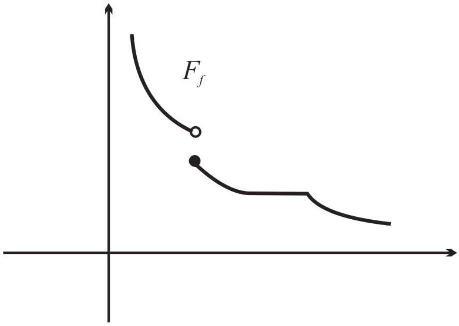
ზომადი f ფუნქციის **განაწილების ფუნქცია** განისაზღვრება შემდეგნაირად:
$$F_f(t) = \mu(\{|f| > t\}) \quad (0 \le t < \infty).$$
ადვილი შესამოწმებელია, რომ F_f ფუნქცია კლებადია და მარჯვნიდან უწყვეტია ყოველ წერტილში (ნახ. 8.6).

ქვემოთ მოცემული თეორემა გვიჩვენებს, თუ როგორ გამოითვლება ზომადი ფუნქციის მოდულის ინტეგრალი მისი განაწილების ფუნქციის მეშვეობით.

თეორემა 8.10.1. ნებისმიერი ზომადი f ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა:
$$\int_X |f| d\mu = \int_{[0,\infty)} F_f(t) d\mathrm{m}(t).$$

თეორემა 8.10.1-ს ჩვენ მივიღებთ შემდეგი უფრო ზოგადი დებულებიდან.

თეორემა 8.10.2. ვთქვათ, $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ რაიმე უწყვეტად წარმოებადი, მკაცრად ზრდადი ფუნქციაა და $\Phi(0) = 0$. მაშინ ნებისმიერი



ნახ. 8.6.

ზომადი f ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_X \Phi(|f|)d\mu = \int_{[0,\infty)} F_f(t)\Phi'(t)d\mathrm{m}(t). \tag{1}$$

შენიშვნა 8.10.1. ცხადია, $\Phi(t) = t$ $(0 \le t < \infty)$ შემთხვევაში თეორემა 8.10.2-დან მიიღება თეორემა 8.10.1.

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა f არის არაუარყოფითი მარტივი ფუნქცია, რომელიც დადებით მნიშვნელობებს ღებულობს სასრული ზომის სიმრავლეებზე. განვიხილოთ f-ის წარმოდგენა: $f = \sum_{k=0}^{n} a_k\chi_{E_k}$, სადაც $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ და $\{f = a_k\} = E_k$ $(0 \le k \le n)$. f-ის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$F_f(t) = \begin{cases} \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots + \mu(E_n), & \text{თუ } \ 0 < t < a_1, \\ \mu(E_2) + \cdots + \mu(E_n), & \text{თუ } \ a_2 \le t < a_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \mu(E_n), & \text{თუ } \ a_{n-1} \le t < a_n, \\ 0, & \text{თუ } \ a_n \le t. \end{cases}$$

აქედან გამომდინარე, გვექნება, რომ

$$\int_{(0,\infty)} F_f(t)\Phi'(t)d\mathrm{m}(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{[a_{k-1},a_k)} F_f(t)\Phi'(t)d\mathrm{m}(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=k}^{n} \mu(E_i) \right) \int_{[a_{k-1},a_k)} \Phi'(t)d\mathrm{m}(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=k}^{n} \mu(E_i) \right) (\Phi(a_k) - \Phi(a_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(a_k)\mu(E_k). \tag{2}$$

მეორე მხრივ, $\Phi(f) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(a_k)\chi_{E_k}$ ტოლობის ძალით,

$$\int_X \Phi(|f|)d\mu = \sum_{k=1}^{n} \Phi(a_k)\mu(E_k). \tag{3}$$

(2)-დან და (3)-დან ვღებულობთ დასამტკიცებელ (1) ტოლობას.

გადავიდეთ ზოგადი შემთხვევის განხილვაზე. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ f არაუარყოფითია. თუ $\mu(\{f > t\}) = \infty$, რომელიმე დადებითი t-სათვის, მაშინ დებულება მარტივი შესამოწმებელია. ასე რომ, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\mu(\{f > t\}) < \infty$ ყოველი დადებითი t-სათვის. მაშინ თეორემა 7.5.1-ის გამოყენებით (იხ. აგრეთვე შენიშვნა 7.5.1) ვიპოვით მარტივ ფუნქციათა ზრდად (f_n) მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი დადებით მნიშვნელობებს ღებულობს სასრული ზომის სიმრავლეებზე და რომელიც ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაკენ. თუ გამოვიყენებთ თეორემის ზემოთ დამტკიცებულ ნაწილს, ყოველი n-სთვის გვექნება,

$$\int_X \Phi(f_n)d\mu = \int_{[0,\infty)} F_{f_n}(t)\Phi'(t)d\mathrm{m}(t). \tag{4}$$

(f_n) მიმდევრობის თვისებებიდან გამომდინარე ადვილი დასანახია, რომ (F_{f_n}) ფუნქციათა მიმდევრობა არის ზრდადი და ყოველ წერტილში კრებადია F_f ფუნქციისაკენ. ამის შემდეგ, ლევის თეორემის გამოყენებით, (4) ტოლობის ორივე მხარეში გადავიდეთ ზღვარზე. რაც მოგვცემს დასამტკიცებელ ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ვთქვათ, $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ბორელის აზრით ზომადი რაიმე ფუნქციაა. $\Phi(L)(X, \mu)$ **ინტეგრალური კლასი** განისაზღვრება, როგორც ყველა იმ ზომადი f ფუნქციის კლასი, რომლისთვისაც

$$\int_X \Phi(|f|)d\mu < \infty.$$

ცხადია, $\Phi(t) = t$ შემთხვევაში $\Phi(L)(X, \mu)$ დაემთხვევა ლებეგის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა $L(X, \mu)$ კლასს. მე-11 თავში შესწავლილი იქნება $\Phi(t) = t^p$ $(1 \le p < \infty)$ სახის ფუნქციებით წარმოქმნილი ინტეგრალური კლასები.

თ ა ვ ი 9

რიმანისა და ლებეგის ინტეგრალების შედარება

ეს თავი ეთმობა ზოგიერთი იმ უპირატესობის წარმოჩენას, რომელიც ლებეგის ინტეგრალს აქვს რიმანის ინტეგრალთან შედარებით.

§ 1. მიმართება რიმანისა და ლებეგის ინტეგრალებს შორის

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმოთ, რომ $[a, b]$ არის რაიმე გადაუგვარებელი n-განზომილებიანი სეგმენტი.

$R([a, b])$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული და რიმანის აზრით ინტეგრებადი ყველა ფუნქციის კლასი.

ლებეგის აზრით ზომადი არაცარიელი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის $L(E)$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ E-ზე განსაზღვრული და ლებეგის ზომის მიხედვით ინტეგრებადი ყველა ფუნქციის კლასი, ე.ი. $L(E) = L(E, \mathrm{m}_E)$, სადაც m_E არის ლებეგის ზომის შეზღუდვა E-ში შემავალ ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასზე.

შევთანხმდეთ, რომ $f \in R([a, b])$ ფუნქციის რიმანის ინტეგრალს აღვნიშნავთ $\int_{[a,b]} f$ ჩანაწერით, ხოლო $f \in L(E)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალს - $\int_E f d\mathrm{m}$ ჩანაწერით.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ლებეგის ინტეგრალი წარმოადგენს რიმანის ინტეგრალის გავრცელებას.

თეორემა 9.1.1. თუ $f \in R([a, b])$, მაშინ $f \in L([a, b])$ და

$$\int_{[a,b]} f d\mathrm{m} = \int_{[a,b]} f.$$

სიმარტივისათვის, თეორემა 9.1.1-ს დავამტკიცებთ ერთგანზომილებიან შემთხვევაში.

გადმოცემის სისრულისათვის ქვემოთ მოცემული იქნება ზოგიერთი განსაზღვრება და დებულება რიმანის ინტეგრალის თეორიიდან.

$[a, b]$ სეგმენტის **დანაწილება** ეწოდება ნებისმიერ $P = (x_0, \dots, x_n)$ $(n+1)$-ეულს, სადაც $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. P **დანაწილების პარამეტრი** ეწოდება $\lambda(P) = \max\limits_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$ რიცხვს.

$[a,b]$ სეგმენტის **მონიშნული დანაწილება** ეწოდება (P,ξ) წყვილს, სადაც $P=(x_0,\ldots,x_n)$ არის $[a,b]$-ს დანაწილება, ხოლო $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ - n-ეული, რომლის $\xi_1,\ldots,\xi_n$ წევრები შესაბამისად ეკუთვნიან $[x_0,x_1],\ldots,$ $[x_{n-1},x_n]$ მონაკვეთებს. (P,ξ) **მონიშნული დანაწილების პარამეტრი** გაიგება, როგორც P დანაწილების პარამეტრი.

ვთქვათ, f არის $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული სასრული ფუნქცია. $[a,b]$-ს მონიშნული (P,ξ) დანაწილებისათვის აღვნიშნოთ

$$\sigma_f(P,\xi)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}).$$

$\sigma_f(P,\xi)$ ჯამს უწოდებენ f **ფუნქციის რიმანის ინტეგრალურ ჯამს**.

ამბობენ, რომ I **რიცხვი არის $\sigma_f(P,\xi)$ ჯამების ზღვარი**, როცა $\lambda(P)\to 0$ (ჩანაწერი: $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma_f(P,\xi)=I$), თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$-სთვის მოიძებნება $\delta>0$, ისეთი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P,ξ) დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაკლებია δ-ზე, სრულდება შეფასება:

$$|\sigma_f(P,\xi)-I|<\varepsilon.$$

$\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma_f(P,\xi)$ ზღვრის არსებობის შემთხვევაში ამბობენ, რომ f **ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე**, ან კიდევ, არსებობს f **ფუნქციის რიმანის ინტეგრალი $[a,b]$ სეგმენტზე**.

f ფუნქციის რიმანის ინტეგრალი $[a,b]$ სეგმენტზე (მისი არსებობის შემთხვევაში) აღინიშნება $\int_{[a,b]} f$ ან $\int_{[a,b]} f(x)dx$ ჩანაწერით და ინტეგრალის მნიშვნელობად მიიჩნევა $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma_f(P,\xi)$ ზღვარი.

მარტივად მოწმდება, რომ რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია აუცილებლად შემოსაზღვრულია.

ვთქვათ, f არის შემოსაზღვრული ფუნქცია. $[a,b]$ სეგმენტის $P=(x_0,x_1,$ $\ldots,x_n)$ დანაწილებისათვის აღვნიშნოთ:

$$\overline{\sigma}_f(P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1}),\qquad \underline{\sigma}_f(P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1}),$$

სადაც M_k და m_k შესაბამისად არიან f ფუნქციის სუპრემუმი და ინფიმუმი $[x_{k-1},x_k]$ სეგმენტზე. $\overline{\sigma}_f(P)$ და $\underline{\sigma}_f(P)$ ჯამებს შესაბამისად უწოდებენ **დარბუს ზედა და ქვედა ჯამებს**. ცხადია, ნებისმიერი (P,ξ) მონიშნული დანაწილებისათვის, $\underline{\sigma}_f(P)\le\sigma_f(P,\xi)\le\overline{\sigma}_f(P)$, ამასთან, $\overline{\sigma}_f(P)$ და $\underline{\sigma}_f(P)$ ჯამები, შესაბამისად, წარმოადგენენ $\sigma_f(P,\xi)$ ჯამების სუპრემუმსა და ინფიმუმს, აღებულს ξ-ს მიხედვით. რიმანის ინტეგრალი შეიძლება გამოითვალოს

დარბუს ჯამების საფუძველზე: **თუ f რიმანის აზრით ინტეგრებადია, მაშინ**

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{\lambda(P)\to 0} \overline{\sigma}_f(P) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \underline{\sigma}_f(P).$$

ე.ი. ფუნქციის რიმანის ინტეგრალი მისი დარბუს ზედა და ქვედა ჯამების ზღვრების ტოლია.

თეორემა 9.1.1-ის დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ f ფუნქცია შემოსაზღვრულია რიმანის აზრით ინტეგრებადობის გამო. ყოველი $k \in \mathbb{N}$-სთვის დავანაწილოთ $[a,b]$ სეგმენტი 2^k ტოლ ნაწილად $x_{k,j} = a + \frac{j}{2^k}(b-a)$ $(j = 0,\ldots,2^k)$ წერტილების მეშვეობით და ამ დანაწილების შესაბამისი დარბუს ჯამები:

$$\Omega_k = \frac{b-a}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} M_{k,j}, \quad \omega_k = \frac{b-a}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} m_{k,j},$$

სადაც $M_{k,j}$ არის f-ის სუპრემუმი $[x_{k,j-1}, x_{k,j}]$ სეგმენტზე, ხოლო $m_{k,j}$ - f-ის ინფიმუმი იგივე სეგმენტზე. რიმანის ინტეგრალის თვისებების ძალით,

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{k\to\infty} \Omega_k = \lim_{k\to\infty} \omega_k.$$

u_k და l_k ფუნქციები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: $u_k(a) = l_k(a) = f(a)$ და

$$u_k(x) = M_{k,j}, \quad l_k(x) = m_{k,j} \qquad (x \in (x_{k,j-1}, x_{k,j}],\ j = 1,\ldots,2^k).$$

u_k და l_k არიან უბან-უბან მუდმივი ფუნქციები და

$$\int_{[a,b]} u_k d\mathrm{m} = \Omega_k, \quad \int_{[a,b]} l_k d\mathrm{m} = \omega_k.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ k-ური ეტაპის ყოველი დანაწილების სეგმენტი წარმოადგენს $(k+1)$-ე ეტაპის დანაწილების ორი სეგმენტის გაერთიანებას, ადვილად დავრწმუნდებით (l_k) მიმდევრობის კლებადობასა და (u_k) მიმდევრობის ზრდადობაში. აქვე შევნიშნოთ, რომ

$$\inf_{[a,b]} f \le l_k \le f \le u_k \le \sup_{[a,b]} f \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

განვიხილოთ u და l ფუნქციები, რომლებიც შესაბამისად წარმოადგენენ (u_k) და (l_k) მიმდევრობების წერტილოვან ზღვარს, ე.ი. $u(x) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(x)$ და $l(x) = \lim\limits_{k\to\infty} l_k(x)$ $(x \in [a,b])$. u და l ფუნქციები არიან ლებეგის აზრით ზომადი და აკმაყოფილებენ შეფასებებს:

$$\inf_{[a,b]} f \le l \le f \le u \le \sup_{[a,b]} f.$$

მაჟორანტული კრებადობის შესახებ ლებეგის თეორემის ძალით დავწერთ,

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{k\to\infty} \Omega_k = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} u_k d\mathrm{m} = \int_{[a,b]} u d\mathrm{m},$$

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{k\to\infty} \omega_k = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} l_k d\mathrm{m} = \int_{[a,b]} l d\mathrm{m}.$$

შედეგად,

$$\int_{[a,b]} (u-l) d\mathrm{m} = 0,$$

საიდანაც ვასკვნით $l(x) = u(x)$ ტოლობის თითქმის ყველგან შესრულებას. აქედან, თავის მხრივ, ლებეგის ზომის სისრულის საფუძველზე, გვაქვს, რომ f ზომადი ფუნქციაა, რომელიც ეკვივალენტურია u და l ფუნქციების. ეს უკანასკნელი პირობა კი საშუალებას გვაძლევს, დავადგინოთ ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f d\mathrm{m} = \int_{[a,b]} f.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 9.1.1. ლებეგის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა კლასი გაცილებით უფრო ფართოა, ვიდრე რიმანის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა კლასი. კერძოდ, რიმანის აზრით ინტეგრებადი ყოველი ფუნქცია აუცილებლად შემოსაზღვრულია, მაშინ, როცა ძნელი მისათითებელი არაა ლებეგის აზრით ინტეგრებადი შემოუსაზღვრელი ფუნქციები. განსხვავება თვალსაჩინოა შემოსაზღვრული ფუნქციების შემთხვევაშიც: ნებისმიერი შემოსაზღვრული და ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქცია, თეორემა 8.7.6-ის ძალით, ლებეგის აზრით ინტეგრებადია მაშინ, როცა როგორც მომდევნო პარაგრაფში იქნება დადგენილი, ასეთი ფუნქციები, წყვეტის წერტილთა სიმრავლის არანულზომიანობის შემთხვევაში, არ არიან რიმანის აზრით ინტეგრებადი. კონკრეტულ მაგალითს შემოსაზღვრული ფუნქციისა $L([a,b]) \setminus R([a,b])$ კლასიდან გვაძლევს დირიხლეს ფუნქცია.

ამოცანები

1. გამოთვალეთ $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} e^{-n\sin x} dx$ ზღვარი.
2. გამოთვალეთ $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E \sin^{2n}(x^2+y^2) dxdy$ ზღვარი, სადაც $E = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 2\pi\}$.
3. გამოთვალეთ $\int_{[0,1]} f d\mathrm{m}$ ინტეგრალი, თუ f არის ფუნქცია, რომელიც x^2-ის ტოლია კანტორის სიმრავლის წერტილებში და x^3-ის ტოლია $[0,1]$ მონაკვეთის დანარჩენ წერტილებში.

§ 2. რიმანის აზრით ინტეგრებადობის კრიტერიუმი

თეორემა 9.2.1. **$[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული f ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთდროულად შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:**

- **f შემოსაზღვრულია;**
- **f უწყვეტია თითქმის ყველგან ლებეგის ზომის მიხედვით.**

დამტკიცება. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი შემთხვევა.

ქვემოთ ვისარგებლებთ თეორემა 9.1.1-ის დამტკიცებაში გამოყენებული აღნიშვნებით და დასკვნებით. P_k $(k \in \mathbb{N})$ იყოს $x_{k,0}, \ldots, x_{k,2^k}$ წერტილებისაგან შედგენილი $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილება, ხოლო Π იყოს P_k $(k \in \mathbb{N})$ დანაწილებების შემადგენელი ყველა წერტილის სიმრავლე, ე.ი.

$$\Pi = \{x_{k,j} : k \in \mathbb{N},\ j = 0, \ldots, 2^k\}.$$

თავდაპირველად დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება: შემოსაზღვრული f ფუნქცია უწყვეტია $x \in [a, b] \setminus \Pi$ წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $l(x) = u(x)$.

თუ $l(x) = u(x)$, მაშინ $l(x) \leq f(x) \leq u(x)$ შეფასებების გამო, $l(x) = f(x) = u(x)$. ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება k, ისეთი, რომ $|u_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ და $|l_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. განვიხილოთ ის I ინტერვალი P_k დანაწილებით წარმოქმნილ ინტერვალთა შორის, რომელიც შეიცავს x წერტილს. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ყოველი $y \in I$ წერტილისათვის სრულდება შეფასებები:

$$f(x) - \varepsilon < l_k(x) < f(y) < u_k(x) < f(x) + \varepsilon.$$

რაც ნიშნავს f-ის უწყვეტობას x წერტილში.

ვთქვათ, f უწყვეტია x წერტილში. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $\delta > 0$ თვისებით: $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, როცა $|y - x| < \varepsilon$. ადვილი დასანახია, რომ საკმარისად დიდი k-სთვის ის I ინტერვალი P_k დანაწილებით წარმოქმნილ ინტერვალთა შორის, რომელიც შეიცავს x წერტილს, მოთავსდება x-ის δ-მიდამოში. შედეგად, საკმარისად დიდი k-სთვის შესრულდება $u_k(x) - l_k(x) \leq 2\varepsilon$ შეფასება. საიდანაც გამომდინარეობს $l(x) = u(x)$ ტოლობა. ამით დებულება დამტკიცებულია.

ახლა გადავიდეთ უშუალოდ თეორემის დამტკიცებაზე. ვთქვათ, $f \in R([a, b])$. მაშინ f იქნება შემოსაზღვრული. თეორემა 9.1.1-ის დამტკიცებაში დადგენილია, რომ $u(x) = l(x)$ თითქმის ყველგან. აქედან გამომდინარე, დამტკიცებული დებულების საფუძველზე ვასკვნით f ფუნქციის უწყვეტობას თითქმის ყოველ წერტილში. ამით აუცილებლობის ნაწილი დადგენილია.

დავუშვათ, f შემოსაზღვრულია და f უწყვეტია თითქმის ყველგან ლებეგის ზომის მიხედვით. ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{k\to\infty}\Omega_k = \lim\limits_{k\to\infty}\omega_k$. შედეგად, გვექნება შესაძლებლობა ვიპოვოთ დანაწილება, რომლის შესაბამის დარბუს ზედა და ქვედა ჯამებს შორის განსხვავება წინასწარ დასახელებულ რიცხვზე მცირე იქნება. ეს კი, როგორც ცნობილია, ნიშნავს ფუნქციის რიმანის აზრით ინტეგრებადობას. ხსენებული ტოლობის დასადგენად შევნიშნოთ: i) u და l ფუნქციები შემოსაზღვრული და ლებეგის აზრით ზომადია; ii) $u(x) = l(x)$ თითქმის ყველგან (ზემოთ დამტკიცებული დებულების ძალით). საიდანაც ვწერთ,

$$\int_{[a,b]} u d\mathrm{m} = \int_{[a,b]} l d\mathrm{m}.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ მარცხენა ინტეგრალი $\lim\limits_{k\to\infty}\Omega_k$ ზღვრის ტოლია, ხოლო მარჯვენა კი - $\lim\limits_{k\to\infty}\omega_k$ ზღვრისა, მივიღებთ $\lim\limits_{k\to\infty}\Omega_k = \lim\limits_{k\to\infty}\omega_k$ ტოლობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 9.2.1. გავიხსენოთ პირველყოფილის განსაზღვრება: F ფუნქციას ეწოდება f **ფუნქციის პირველყოფილი**, თუ F არის წარმოებადი ყოველ $x \in [a,b]$ წერტილში და $F'(x) = f(x)$.

რიმანის აზრით ინტეგრებადი f ფუნქციისათვის F-ით აღვნიშნოთ მისი რიმანის განუსაზღვრელი ინტეგრალი, ე.ი. $F(x) = \int_{[a,x]} f$ ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია.

კლასიკური ანალიზიდან ცნობილია, რომ თუ f ფუნქცია უწყვეტია რაიმე $x_0 \in [a,b]$ წერტილში, მაშინ F წარმოებადია x_0-ში და $F'(x_0) = f(x_0)$.

აღნიშნულიდან გამომდინარე, თუ f უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ მისი რიმანის განუსაზღვრელი ინტეგრალი წარმოადგენს მისსავე პირველყოფილს.

იგივეს თქმა შეუძლებელია რიმანის აზრით ინტეგრებადი ნებისმიერი f ფუნქციისათვის. მართლაც, თუ f რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციაა, რომელსაც აცილებადი წყვეტა აქვს რაიმე x_0 წერტილში, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $F'(x_0)$ იარსებებს, მაგრამ ის არ იქნება $f(x_0)$-ის ტოლი. შესაძლებელია ამ თვალსაზრისით კიდევ უფრო მეტი ნეგატივის შემცველი ფუნქციების აგება. მაგალითად, თუ $E \subset [a,b]$ არის ნებისმიერი ნული ზომის ჩაკეტილი სიმრავლე, მაშინ $f = \chi_E$ ფუნქციისათვის $F'(x) = f(x)$ ტოლობა დაირღვევა ყოველ $x \in E$ წერტილში.

ამრიგად, რიმანის განუსაზღვრელი ინტეგრალი, საზოგადოდ, არ წარმოადგენს ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირველყოფილს კლასიკური გაგებით.

თეორემა 9.2.1 საშუალებას იძლევა, რიმანის განუსაზღვრელი ინტეგრალი გავიაზროთ, როგორც ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირველყოფილი. ამასთან დაკავშირებით შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრება: F ფუნქციას ვუწოდოთ f **ფუნქციის განზოგადებული პირველყოფილი**, თუ F არის თითქმის ყველგან წარმოებადი ფუნქცია და $F'(x) = f(x)$ თითქმის ყოველი $x \in [a,b]$

წერტილისათვის. მაშინ თეორემა 9.2.1-ის ძალით, რიმანის აზრით ინტეგრებადი ნებისმიერი f ფუნქციისათვის მისი რიმანის განუსაზღვრელი ინტეგრალი წარმოადგენს მისსავე განზოგადებულ პირველყოფილს.

შენიშვნა 9.2.2. როგორც უკვე ვიცით, შემოსაზღვრული ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი წყვეტის წერტილთა სიმრავლის ზომა ნულის ტოლია, ხოლო რაც შეეხება ლებეგის აზრით ინტეგრებადობას - ის უზრუნველყოფილია ნებისმიერი შემოსაზღვრული და ზომადი ფუნქციისათვის. გავაანალიზოთ, თუ რითაა გამოწვეული ასეთი პროგრესი რიმანის ინტეგრალიდან ლებეგის ინტეგრალზე გადასვლისას.

აღნიშნული მიზნისათვის მოხერხებულია, გამოვიყენოთ რიმანის ინტეგრალის განსაზღვრა დარბუს ჯამების ტერმინებში და შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალის განსაზღვრა ლებეგის ჯამების ტერმინებში (იხ. თეორემა 8.7.10).

შევნიშნოთ, რომ დარბუს და ლებეგის ჯამებს აქვთ ერთმანეთის მსგავსი სახეები: $\sum_{k=1}^{n} m_k \mathrm{m}(E_k)$ და $\sum_{k=1}^{n} M_k \mathrm{m}(E_k)$, სადაც E_k სიმრავლეები ქმნიან $[a,b]$ სეგმენტის გარკვეულ დაყოფას, ხოლო m_k და M_k არიან რიცხვები, რომელთა შორისაც მოთავსებულია f ფუნქციის ინფიმუმი და სუპრემუმი, აღებული E_k სიმრავლეზე. განსხვავება იმაშია, რომ დარბუს ჯამებში E_k სიმრავლე არის $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილების $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთი, ხოლო ლებეგის ჯამებში E_k არის

$$\{x \in [a,b] : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$$

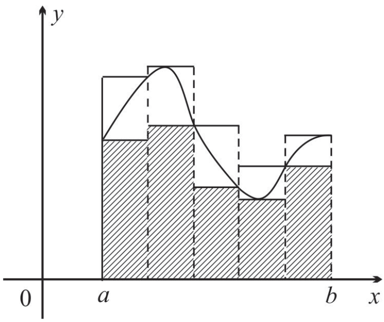
სახის სიმრავლე, სადაც $[y_{k-1}, y_k)$ წარმოადგენს f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის შემცველი $[m, M)$ მონაკვეთის დანაწილების მონაკვეთს. ამრიგად, პირველ შემთხვევაში E_k სიმრავლეებში წერტილები თავს იყრიან ფუნქციის განსაზღვრის არეზე მათი სიახლოვის მიხედვით, ხოლო მეორე შემთხვევაში კი - ამ წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობათა სიახლოვის მიხედვით. აღნიშნული მოვლენა არსებითი განმასხვავებელი მომენტია რიმანისა და ლებეგის ინტეგრალთა მექანიზმებს შორის. ქვემოთ გაანალიზებული იქნება მიზეზები, რომლის გამოც, ინტეგრალის განზოგადების პროცესში დარბუს ჯამები გარდაიქმნება ლებეგის ჯამებად.

დავიწყოთ იმით, რომ, გეომეტრიული თვალსაზრისით, ინტეგრალი გაიგება როგორც $f \geq 0$ ფუნქციის გრაფიკქვეშა Γ_f სიმრავლის (ე.წ. მრუდწირული ტრაპეციის) გაზომვის მექანიზმი.

ვთქვათ, f უწყვეტი დადებითი ფუნქციაა. კლასიკური ინტეგრალური აღრიცხვა გვთავაზობს Γ_f მრუდწირული ტრაპეციის ზომის გამოთვლის შემდეგ ზოგად პრინციპს: Γ_f **სიმრავლე, გარკვეული წესით, იყოფა ისეთ ნაწილებად, რომელთა მიახლოებითი გაზომვის სარწმუნო არგუმენტებიც არსებობს. ამ ნაწილების ზომათა მიახლოებითი მნიშვნელობების შეკრების**

საფუძველზე განისაზღვრება მთლიანი მრუდწირული ტრაპეციის ზომის მიახლოებითი მნიშვნელობა, საბოლოოდ კი ხდება ზღვარზე გადასვლა უფრო და უფრო ზუსტი მიახლოების უზრუნველმყოფი დაყოფებით წარმოქმნილ ზღვარით პროცესში.

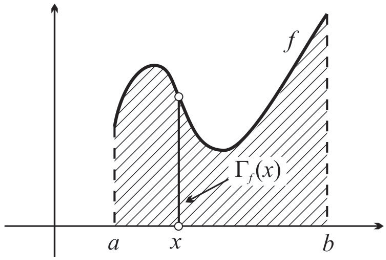
სახელდობრ, რიმანის ინტეგრალის კონსტრუქციაში Γ_f-ის დაყოფა ხდება შემდეგნაირად: დავანაწილოთ $[a,b]$ სეგმენტი $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ წერტილებით საკმარისად მცირე მონაკვეთებად და განვიხილოთ $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთებით წარმოქმნილი მცირე მრუდწირული ტრაპეციები: $\Gamma_k = \{(x,t) : x_{k-1} \le x \le x_k,\ 0 < t < f(x)\}$ $(1 \le k \le n)$. m_k და M_k შესაბამისად იყვნენ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე f ფუნქციის ინფიმუმი და სუპრემუმი. მაშინ ცხადია, რომ ყოველი k-სათვის, Γ_k მოიცავს $I_k = [x_{k-1}, x_k] \times (0, m_k)$ მართკუთხედს და ჩართულია $J_k = [x_{k-1}, x_k] \times (0, M_k)$ მართკუთხედში (ნახ. 9.1).



ნახ. 9.1.

ზემოაღნიშნული ჩართვების გამო, თუ Γ_k-ს ზომის მიახლოებით მნიშვნელობად ჩავთვლით I_k ან J_k მართკუთხედის ფართობს, ე.ი. $m_k(x_k - x_{k-1})$ ან $M_k(x_k - x_{k-1})$ სიდიდეს, მაშინ ცდომილება არ იქნება $(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$ რიცხვზე მეტი. ეს უკანასკნელი კი, f-ის უწყვეტობის გათვალისწინებით, შეიძლება ყოველი k-სათვის გავხადოთ $\varepsilon(x_k - x_{k-1})$ რიცხვზე მცირე. ამისათვის, x_k წერტილები უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ $\max\limits_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1})$ იყოს საკმარისად მცირე. მაშინ $\sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$ და $\sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$ ჯამების გადახრა Γ_f-ს ზომის ჰიპოთეტური მნიშვნელობიდან იქნება $\varepsilon \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b-a)$ რიცხვზე მცირე. ზღვარზე გადასვლა, როცა $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილების $\max\limits_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1})$ პარამეტრი მიისწრაფვის ნულისაკენ, მოგვცემს რიცხვს, რომელიც, ბუნებრივია, რომ მივიჩნიოთ Γ_f მრუდწირული ტრაპეციის ზომის მნიშვნელობად.

$x \in [a,b]$ წერტილისათვის $\Gamma_f(x) = \{(x,t) : 0 < t < f(x)\}$ მონაკვეთს ვუწოდოთ Γ_f **ტრაპეციის მდგენელი** x **ფუძით** (ნახ. 9.2).



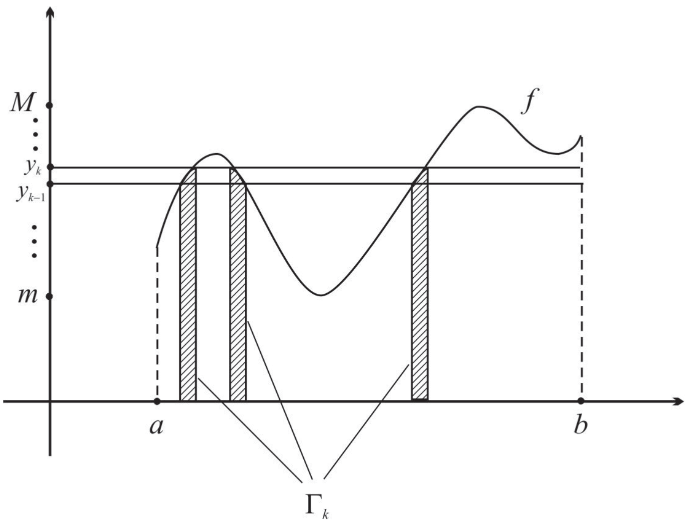
ნახ. 9.2.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, Γ_f ტრაპეციის მდგენელები გაერთიანებულია ერთ ნაწილში, მათი ფუძეების სიახლოვის ნიშნის მიხედვით, ეს კი, ფუნქციის უწყვეტობის საფუძველზე, თავის მხრივ, იწვევს ერთ ნაწილში მყოფ მდგენელთა სიმაღლეების ერთმანეთთან სიახლოვეს. ეს უკანასკნელი გარემოება არსებითი მნიშვნელობისაა Γ_k ნაწილის ზომის მიახლოებითი მნიშვნელობისა და მთლიანად Γ_f-ის ზომის განსაზღვრისას.

რა ხდება, როცა ზემოთ მოცემულ კონსტრუქციას წყვეტილი ფუნქციებისათვის გამოვიყენებთ? ასეთ სიტუაციაში, წყვეტების გამო, მდგენელების სიმაღლეები შორს შეიძლება იყვნენ ერთმანეთისგან მათი ფუძეების სიახლოვის მიუხედავად. ამიტომ აშკარაა საფრთხე იმისა, რომ ბევრი წყვეტის წერტილის შემთხვევაში, Γ_k ნაწილების უმეტესობისათვის, ზომათა შეფასებები არაეფექტური აღმოჩნდეს, რაც, საბოლოო ჯამში, არ მოგვცემს Γ_f სიმრავლის გაზომვის საშუალებას. ამას მარტივად გვიჩვენებს დირიხლეს ფუნქციის მაგალითი. საზოგადოდ, თეორემა 9.2.1 ადასტურებს, რომ რიმანის ინტეგრალის ქმედუნარიანობა უწყვეტ ფუნქციათა კლასს დიდად არ შორდება. წყვეტილი ფუნქციების საინტეგრებლად საჭიროა სხვაგვარი მიდგომა.

წყვეტილი ფუნქციებისათვის Γ_f ტრაპეციის გასაზომად ლებეგმა ზემოთ მოცემულ კონსტრუქციაში მოახდინა ბუნებრივი და ლოგიკური ცვლილება: **ტრაპეციის მდგენელებს ერთ ნაწილში თავი მოუყარა არა მათი ფუძეების, არამედ მათი სიმაღლეების სიახლოვის ნიშნით**. სახელდობრ, ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის შემცველი $[m, M)$ მონაკვეთი $y_0 < y_1 < \cdots < y_n$ წერტილებით დაჰყო წინასწარ მოცემულ ε-ზე მცირე სიგრძის მონაკვეთებად. ყოველი k-სათვის Γ_k ნაწილში თავი მოუყარა ყველა იმ მდგენელს, რომელთა სიმაღლეები მოთავსებულია $[y_{k-1}, y_k)$ დიაპაზონში (ნახ. 9.3).

შევნიშნოთ, რომ Γ_k-ში თავმოყრილი მდგენელების ფუძეები ქმნიან $E_k = \{x \in [a,b] : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$ სიმრავლეს. ამიტომ ყოველი Γ_k ნაწილი მოიცავს $I_k = E_k \times (0, y_{k-1})$ განზოგადებულ მართკუთხედს და ჩართულია ანალოგიური ტიპის $J_k = E_k \times (0, y_k)$ სიმრავლეში. ბუნებრივია, $E \times (0, y)$ განზოგადებული მართკუთხედი გაიზომოს, როგორც მისი ფუძის - E სიმრავლის



ნახ. 9.3.

ზომა, გამრავლებული მის სიმაღლეზე - y რიცხვზე. ზემოაღნიშნული ჩართვე-ბის გამო, თუ Γ_k-ს ზომის მიახლოებით მნიშვნელობად მივიჩნევთ I_k ან J_k განზოგადებული მართკუთხედის ზომას, ე.ი. $y_{k-1}\mathrm{m}(E_k)$ ან $y_k\mathrm{m}(E_k)$ რიცხვს, მაშინ ცდომილება არ იქნება $(y_k - y_{k-1})\mathrm{m}(E_k) < \varepsilon\mathrm{m}(E_k)$ რიცხვზე მეტი. შედეგად, ლებეგის $\sum_{k=1}^n y_k\mathrm{m}(E_k)$ და $\sum_{k=1}^n y_{k-1}\mathrm{m}(E_k)$ ჯამების გადახრა Γ_f-ის ზომის ჰიპოთეტური მნიშვნელობიდან გამოვა $\varepsilon\sum_{k=1}^n \mathrm{m}(E_k) = \varepsilon(b-a)$ რიცხვზე მცირე. ზღვარზე გადასვლა, როცა $[m, M)$ მონაკვეთის დანაწილების $\max\limits_{1\le k\le n}(y_k - y_{k-1})$ პარამეტრი მიისწრაფვის ნულისაკენ, მოგვცემს რიცხვს, რომელიც, ბუნებრივია, მივიჩნიოთ Γ_f-ის ზომის მნიშვნელობად.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოცემულ მსჯელობას აქვს ერთი ხარვეზი: $y_{k-1}\mathrm{m}(E_k)$ და $y_k\mathrm{m}(E_k)$ სიდიდეების განხილვის უფლება გვაქვს მხოლოდ E_k სიმრავლეების ლებეგის აზრით ზომადობის შემთხვევაში. ამიტომ საჭიროა ლებეგის კონსტრუქციაში აპრიორულად მოვითხოვოთ E_k სიმრავლეების ზომადობა. ეს იგივეა, ყოველი $[y_{k-1}, y_k)$ მონაკვეთის წინასახე იყოს ზომადი, რაც, თავის მხრივ, ნიშნავს f ფუნქციის ლებეგის აზრით ზომადობას. ამრიგად, ლებეგის კონსტრუქციის წარმატებით მუშაობისათვის საჭიროა წინასწარ მოვითხოვოთ f ფუნქციის ზომადობა.

ყურადღება გავამახვილოთ ერთ დეტალზე: განსხვავებით რიმანის ინტეგრალის შემთხვევისაგან, ლებეგის ინტეგრალის კონსტრუქციაში მრუდწირული ტრაპეციის Γ_k ნაწილი, შეიძლება, მასიური სიმრავლე იყოს. მაგალითად, თუ f ფუნქცია რაიმე ფიქსირებულ y მნიშვნელობას ღებულობს დადებითი ზომის

სიმრავლეზე, მაშინ ის Γ_k ნაწილი, რომლისთვისაც $y \in [y_{k-1}, y_k)$ იქნება ფიქსირებულ დადებით რიცხვზე მეტი ზომის. თუმცა აღნიშნული გარემოება ხელს არ უშლის Γ_k ნაწილის ზომის მიახლოებითი მნიშვნელობის ეფექტურ გამოთვლას.

როგორც ზემოთ მოცემული მსჯელობები გვიჩვენებენ, რიმანის ინტეგრალიდან ლებეგის ინტეგრალზე (დარბუს ჯამებიდან ლებეგის ჯამებზე) გადასვლას აქვს გეომეტრიული ახსნა, რაც დაკავშირებულია გრაფიკქვეშა სიმრავლის გაზომვის ოპტიმალური მექანიზმის შერჩევასთან. **ლებეგის მიერ შემოთავაზებული მექანიზმის უპირატესობას განაპირობებს ცვლილება გრაფიკქვეშა სიმრავლის დანაწილების წესში: ნაწილებში მდგენელები თავმოყრილია არა მათი ფუძეების, არამედ მათი სიმაღლეების სიახლოვის ნიშნით. ეს მიდგომა კი, თავის მხრივ, ეფუძნება ასევე ლებეგის მიერ შექმნილ - წრფივ სიმრავლეთა ზომის თეორიას.**

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ კანტორის სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია.
2. ვთქვათ, E არის $[0, 1]$ მონაკვეთის ნულზომიანი ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. აჩვენეთ, რომ E სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია.
3. ააგეთ $[0, 1]$ მონაკვეთზე რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია, რომლის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია.
4. ვთქვათ, $[a, b]$ მონაკვეთზე რიმანის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია f ფუნქციისაკენ. დაამტკიცეთ, რომ f ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია და

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f.$$

§ 3. რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალისა და ლებეგის ინტეგრალის შედარება

ქვემოთ დადგენილი იქნება, რომ რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობა, საზოგადოდ, არ იწვევს ლებეგის აზრით ინტეგრებადობას. უფრო მეტიც, ფუნქცია (რომლისთვისაც აზრი აქვს რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალის განხილვას), ინტეგრებადია ლებეგის აზრით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია.

სიმარტივისათვის განვიხილავთ ერთგანზომილებიან შემთხვევას.

თეორემა 9.3.1. ვთქვათ, f ფუნქცია განსაზღვრულია $(a, b]$ მონაკვეთზე და ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, b-a)$ რიცხვისათვის რიმანის აზრით ინტეგრებადია

$[a+\varepsilon, b]$ **სეგმენტზე. მაშინ**

$$\int_{(a,b]} |f| d\mathrm{m} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[a+\varepsilon,b]} |f|,$$

და შედეგად,

$$f \in L((a,b]) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[a+\varepsilon,b]} |f| < \infty.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $I_k = [a+(b-a)/2^k, b]$ $(k \in \mathbb{N})$ და განვიხილოთ $g_k = |f|\chi_{I_k}$ ფუნქციათა მიმდევრობა. ცხადია, (g_k) ზრდადი მიმდევრობაა და $|f|$ წარმოადგენს მის წერტილოვან ზღვარს. ამასთანავე, თეორემა 9.1.1-ის საფუძველზე, ყოველი $k \in \mathbb{N}$-სთვის გვექნება, რომ $g_k \in L((a,b])$ და

$$\int_{(a,b]} g_k d\mathrm{m} = \int_{I_k} |f| d\mathrm{m} = \int_{I_k} |f|.$$

შედეგად, ლევის თეორემის გათვალისწინებით ვწერთ,

$$\int_{(a,b]} |f| d\mathrm{m} = \lim_{k \to \infty} \int_{(a,b]} g_k d\mathrm{m} = \lim_{k \to \infty} \int_{I_k} |f|.$$

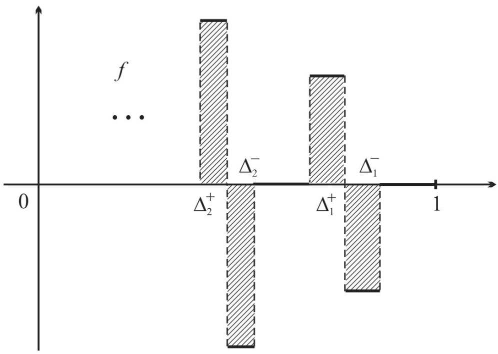
უკანასკნელი ზღვარი კი, როგორც ადვილი შესამოწმებელია,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[a+\varepsilon,b]} |f|$$

ზღვრის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 9.3.1. თეორემა 9.3.1-ის მეშვეობით ვრწმუნდებით, რომ შეიძლება, ფუნქციის რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალი იყოს კრებადი, მაგრამ ფუნქცია არ იყოს ლებეგის აზრით ინტეგრებადი. კერძოდ, ასე ხდება ნებისმიერი ფუნქციისათვის, რომლის არასაკუთრივი ინტეგრალი მხოლოდ პირობით კრებადია (ე.ი კრებადია, მაგრამ არაა აბსოლუტურად კრებადი). გადმოცემის სისრულისათვის ავაგოთ ასეთი ფუნქციის მაგალითი.

განვიხილოთ $(0,1]$ მონაკვეთში შემავალი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი Δ_k ინტერვალების მიმდევრობა, რომელთა მარცხენა და მარჯვენა ბოლოები ქმნიან ნულისაკენ კრებად და, იმავდროულად, კლებად რიცხვით მიმდევრობებს. თითოეული Δ_k ინტერვალისათვის განვიხილოთ მისი შუაზე გაყოფით მიღებული ორი ქვეინტერვალი, რომლებიც აღვნიშნოთ Δ_k^--ით და Δ_k^+-ით. დადებითი a_k რიცხვი შევარჩიოთ ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა: $a_k \mathrm{m}(\Delta_k) = 1/k$. ამის შემდეგ, f ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: f-ს Δ_k^+ ინტერვალების წერტილებში მივანიჭოთ შესაბამისად a_k რიცხვების ტოლი მნიშვნელობები, Δ_k^- ინტერვალების წერტილებში - შესაბამისად $(-a_k)$ რიცხვების ტოლი მნიშვნელობები, ხოლო $(0,1]$-ის დარჩენილ წერტილებში კი - ნულის ტოლი მნიშვნელობა (ნახ. 9.4).



ნახ. 9.4.

გვექნება,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{[\varepsilon,1]}|f| = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Delta_k}|f|d\mathrm{m} = \sum_{k=1}^{\infty}a_k\mathrm{m}(\Delta_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty.$$

ამრიგად, $(0,1]$ მონაკვეთზე f-ის რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალი არ არის აბსოლუტურად კრებადი, მეორე მხრივ კი, იგივე ინტეგრალი ჩვეულებრივი აზრით კრებადი გამოდის. მართლაც, $[\varepsilon,1]$ სახის ნებისმიერი სეგმენტისათვის, რომელიც შეიცავს ერთს მაინც Δ_k მონაკვეთებს შორის, განვიხილოთ ის მინიმალური $k=k(\varepsilon)$ ნომერი, რომლისთვისაც Δ_k არაა ჩართული $[\varepsilon,1]$ მონაკვეთში. გავითვალისწინოთ, რომ ყოველი j-სთვის, $\int_{\Delta_j} f = \int_{\Delta_j^-} f + \int_{\Delta_j^+} f = 0$. შედეგად, დავწერთ,

$$\left|\int_{[\varepsilon,1]} f\right| = \left|\sum_{j=1}^{k(\varepsilon)-1}\int_{\Delta_j} f + \int_{[\varepsilon,1]\cap\Delta_{k(\varepsilon)}} f\right| \le \int_{\Delta_{k(\varepsilon)}}|f| = \frac{1}{k(\varepsilon)}.$$

საიდანაც, უშუალოდ ვღებულობთ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{[\varepsilon,1]} f = 0$ ტოლობას.

შენიშვნა 9.3.2. თეორემა 9.3.1-ის ანალოგები სამართლიანია რიმანის სხვა სახის არასაკუთრივი ინტეგრალებისთვისაც.

ამოცანები

1. α და β პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის არის $f(x) = x^{\alpha}\sin x^{\beta}$ $(x\in(0,1])$ ფუნქცია: ა) ლებეგის აზრით ინტეგრებადი; ბ) რიმანის არასაკუთრივი აზრით ინტეგრებადი?
2. α და β პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის არის $f(x) = x^{\alpha}\sin x^{\beta}$ $(x\in[1,\infty))$ ფუნქცია: ა) ლებეგის აზრით ინტეგრებადი; ბ) რიმანის არასაკუთრივი აზრით ინტეგრებადი?

§ 4. პირველყოფილი ფუნქციის აღდგენა შემოსაზღვრული წარმოებულის შემთხვევაში

პირველყოფილის აღდგენის შესახებ პრობლემა, როგორც ცნობილია გულისხმობს შემდეგს: ვთქვათ, f არის $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული და ყოველ $x \in [a,b]$ წერტილში წარმოებადი ფუნქცია. როგორ შეიძლება, გამოვსახოთ (აღვადგინოთ) f პირველყოფილი მისი f' წარმოებულის მეშვეობით?

ინტეგრალური აღრიცხვის კურსიდან ცნობილია, რომ თუ f' არის რიმანის აზრით ინტეგრებადი, მაშინ

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f' \quad (x \in [a,b]).$$

ე.ი. პირველყოფილი შეიძლება აღვადგინოთ რიმანის ინტეგრალის აპარატის გამოყენებით, თუ ცნობილია, რომ წარმოებული ფუნქცია რიმანის აზრით ინტეგრებადია.

საზოგადოდ, რიმანის ინტეგრალი ვერ იძლევა პირველყოფილის აღდგენის ამოცანის გადაწყვეტას თვით შემოსაზღვრული წარმოებულის მქონე ფუნქციების შემთხვევაშიც კი, რაც იმას ნიშნავს, რომ არსებობენ ფუნქციები, რომელთა წარმოებული შემოსაზღვრულია, მაგრამ არაა რიმანის აზრით ინტეგრებადი. ქვემოთ მოცემული იქნება ასეთი ფუნქციის აგება. მსგავსი მაგალითი თავდაპირველად ააგო ვ. ვოლტერამ (1881 წ.).

განვიხილოთ $[0,1]$ მონაკვეთის რაიმე არსად მკვრივი და სრულყოფილი E ქვესიმრავლე, რომელსაც აქვს დადებითი ზომა. ასეთი სიმრავლის კონსტრუქცია მოცემული იყო 8.9.4 შენიშვნაში. $((a_k, b_k))$ იყოს E-ს დამატებითი ინტერვალების მიმდევრობა.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ფუნქციას E სიმრავლის წერტილებში მივანიჭოთ ნულის ტოლი მნიშვნელობა, ხოლო ყოველ (a_k, b_k) დამატებით ინტერვალზე $f(x)$ იყოს

$$(x-a_k)^2(x-b_k)^2 \sin\frac{1}{(b_k-a_k)(x-a_k)(x-b_k)}$$

გამოსახულების ტოლი.

დავადგინოთ, რომ E სიმრავლის წერტილებში f ფუნქციის წარმოებული არსებობს და ნულის ტოლია. მართლაც, ვთქვათ, $x \in E$ და y არის $[0,1]$ სეგმენტის რაიმე წერტილი, რომელიც მდებარეობს x-ის მარჯვნივ. თუ $y \in E$, მაშინ $f(y) = f(x) = 0$. $y \notin E$ შემთხვევაში განვიხილოთ ის (a_k, b_k) ინტერვალი, რომელიც შეიცავს y წერტილს. მაშინ გვაქვს, რომ $x \le a_k < y$. შედეგად, $y - a_k \le y - x$ და

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le y - a_k \le y - x.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველ $x \in E$, $x \neq 1$, წერტილში f-ის მარჯვენა წარმოებული არსებობს და ნულის ტოლია. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ ყოველ $x \in E$, $x \neq 0$, წერტილში f-ის მარცხენა წარმოებული არსებობს და ნულის ტოლია.

ცხადია, f ფუნქცია წარმოებადია ნებისმიერ $x \in (a_k, b_k)$ წერტილში და

$$f'(x) = 2(x-a_k)(x-b_k)(2x-a_k-b_k)\ \sin\frac{1}{(b_k-a_k)(x-a_k)(x-b_k)} -$$

$$-\ \frac{2x-a_k-b_k}{b_k-a_k}\ \cos\frac{1}{(b_k-a_k)(x-a_k)(x-b_k)}.$$

ამრიგად, f ფუნქცია წარმოებადია ყოველ წერტილში. ამასთან, f' შემოსაზღვრული ფუნქციაა, კერძოდ, $|f'(x)| \leq 3$ ყოველი x-სთვის. ადვილი დასანახია, რომ $f'(x)$ ირხევა -1 და 1 მნიშვნელობებს შორის, როცა x უახლოვდება a_k ან b_k წერტილს (a_k, b_k) ინტერვალის შიგნიდან. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს f' ფუნქციის წყვეტილობა დადებითი ზომის E სიმრავლის თითოეულ წერტილში, ეს კი, თავის მხრივ, იწვევს f'-ის რიმანის აზრით არაინტეგრებადობას. ამით ჩვენ მიერ დასახული თვისებების ფუნქციის მაგალითი აგებულია.

ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს, რომ მე-19 საუკუნის ბოლოს პირველყოფილის აღდგენის ამოცანა იყო მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი ძირითადი პრობლემა, რომელიც წარმოაჩენდა რიმანის ინტეგრალის განზოგადების აუცილებლობას. ქვემოთ მოცემული თეორემა ეკუთვნის ა. ლებეგს და გვიჩვენებს არსებით პროგრესს პირველყოფილის აღდგენის ამოცანის გადაწყვეტასთან დაკავშირებით, რომელიც მიიღწევა ლებეგის ინტეგრალის მეშვეობით.

თეორემა 9.4.1. თუ f არის $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული წარმოებადი ფუნქცია და დამატებით ცნობილია, რომ f' შემოსაზღვრულია, მაშინ $f' \in L([a, b])$ და

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f' d\mathrm{m} \qquad (x \in [a, b]).$$

ამრიგად, ლებეგის ინტეგრალი სრულად წყვეტს პირველყოფილის აღდგენის ამოცანას წარმოებულის შემოსაზღვრულობის შემთხვევაში. შემდგომში (სახელდობრ, მე-12 თავში) დამტკიცებული იქნება, რომ ლებეგის ინტეგრალი პირველყოფილს აღადგენს კიდევ უფრო ზოგად სიტუაციაში, კერძოდ, მაშინაც, როცა წარმოებულის შემოსაზღვრულობის პირობა შესუსტებულია და მოთხოვნილია მხოლოდ მისი ლებეგის აზრით ინტეგრებადობა.

თეორემა 9.4.1-ის დამტკიცება. თავიდანვე შევნიშნოთ, რომ წარმოებადობიდან გამომდინარე, f ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. გავაგრძელოთ

f ფუნქცია $[a, b+1]$ სეგმენტზე ისე, რომ $(b, b+1]$ მონაკვეთის x წერტილებში მისი მნიშვნელობები გამოითვლებოდეს შემდეგნაირად:

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x - b).$$

ახლა f შეიძლება განვიხილოთ, როგორც $[a, b+1]$ სეგმენტზე წარმოებადი (და შედეგად, უწყვეტი) ფუნქცია.

ყოველი k-სთვის განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული Δ_k ფუნქცია:

$$\Delta_k(x) = \frac{f(x + 1/k) - f(x)}{1/k} \qquad (x \in [a, b]).$$

ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში გვაქვს, რომ $f'(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \Delta_k(x)$. ამრიგად, f' არის უწყვეტ Δ_k ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი ზღვარი. საიდანაც ვასკვნით f'-ის ლებეგის აზრით ზომადობას. აქედან, თავის მხრივ, $[a, b]$ მონაკვეთის ზომის სასრულობისა და f'-ის შემოსაზღვრულობის გამო, f' იქნება ჯამებადი ფუნქციაც.

შევნიშნოთ, რომ Δ_k ფუნქციები ერთობლივ შემოსაზღვრულია

$$C = \sup\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$$

რიცხვით. მართლაც, ლაგრანჟის თეორემიდან გამომდინარე, ყოველი x-სთვის და ყოველი k-სთვის მოიძებნება $\theta = \theta_{x,k} \in (0, 1)$, რომლისთვისაც $\Delta_k(x) = f'(x + \theta/k)$, საიდანაც ვღებულობთ $|\Delta_k(x)| \leq C$ შეფასებას.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $[a, b]$-ზე განსაზღვრული C მუდმივის ტოლი ფუნქცია ლებეგის აზრით ინტეგრებადია და გამოვიყენებთ ლებეგის თეორემას მაჟორანტული კრებადობის შესახებ, დავწერთ,

$$\int_{[a,b]} f' d\mathrm{m} = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \Delta_k d\mathrm{m}.$$

გვაქვს, რომ

$$\int_{[a,b]} \Delta_k d\mathrm{m} = k \int_{[a,b]} f(\cdot + 1/k) d\mathrm{m} \; - \; k \int_{[a,b]} f d\mathrm{m}.$$

f ფუნქციის უწყვეტობის გამო ამ ტოლობაში მოცემული ინტეგრალები შეიძლება გავიგოთ რიმანის აზრით. შემდეგ კი, $x = t - 1/k$ ცვლადის შეცვლის საფუძველზე დავწერთ,

$$\int_{[a,b]} \Delta_k = k \int_{[a+1/k, b+1/k]} f \; - \; k \int_{[a,b]} f =$$

$$= k \int_{[b, b+1/k]} f \; - \; k \int_{[a, a+1/k]} f.$$

თუ უკანასკნელი ორი ინტეგრალისათვის გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემას, მივიღებთ, რომ

$$\int_{[a,b]} \Delta_k = f(b+\theta_k/k) - f(a+\xi_k/k),$$

სადაც $\theta_k, \xi_k \in (0,1)$. საიდანაც f ფუნქციის უწყვეტობის გათვალისწინებით გამომდინარეობს ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f' d\mathrm{m} = f(b) - f(a).$$

ცხადია, დამტკიცებულ ტოლობაში b შეგვიძლია შევცვალოთ ნებისმიერი x-ით $[a,b]$ მონაკვეთიდან. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 9.4.1. თეორემა 1 შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ეკვივალენტური ფორმითაც: თუ $f \in L([a,b])$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა და ცნობილია, რომ F არის f-ის პირველყოფილი, მაშინ სამართლიანია ნიუტონ-ლაიბნიცის ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f d\mathrm{m} = F(b) - F(a).$$

თ ა ვ ი 10

ინტეგრება სივრცეთა ნამრავლზე

კლასიკური ანალიზიდან ცნობილია, რომ ორი (და, საზოგადოდ, მრავალი) ცვლადის უწყვეტი ფუნქციის ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება ერთი ცვლადის მიმართ ინტეგრებაზე. სახელდობრ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა: თუ f არის $[a,b]\times[c,d]$ მართკუთხედზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{[a,b]}\left(\int_{[c,d]} f(x,y)dy\right)dx = \int_{[c,d]}\left(\int_{[a,b]} f(x,y)dx\right)dy.$$

ამრიგად, რიმანის ორჯერადი ინტეგრალის მნიშვნელობის საპოვნელად საკმარისია გამოვთვალოთ ერთ-ერთი ე.წ. განმეორებით ინტეგრალებს შორის, ეს უკანასკნელნი კი, თავის მხრივ, წარმოადგენენ ერთი ცვლადის მიმართ ინტეგრების ოპერაციის მიმდევრობითი შესრულების შედეგს.

ამ თავში ჯერადი ინტეგრალის განმეორებით ინტეგრალამდე დაყვანის შესახებ თეორემები დადგენილი იქნება ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციებისათვის. მოცემულია აგრეთვე ამ ტიპის დებულებების ზოგიერთი გამოყენება.

§ 1. ზომების დეკარტული ნამრავლი

ვთქვათ, X არის რაიმე არაცარიელი სიმრავლე, S - X-ის ქვესიმრავლეების რაიმე ნახევარრგოლი, ხოლო μ - S-ზე განსაზღვრული ზომა. დავუშვათ აგრეთვე, რომ Y სიმრავლე, T ნახევარრგოლი და ν ზომა ანალოგიურადაა ერთმანეთთან დაკავშირებული.

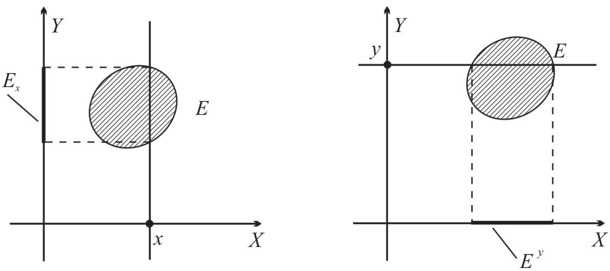
განვიხილოთ μ და ν ზომების დეკარტული ნამრავლი, ე.ი. $\mathrm{S}\times\mathrm{T}$ ნახევარრგოლზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$(\mu\times\nu)(A\times B) = \mu(A)\nu(B) \quad (A\in\mathrm{S}, B\in\mathrm{T}).$$

როგორც ვიცით (იხ. თეორემა 4.5.1) $\mu\times\nu$ ფუნქცია არის კვაზიზომა. ქვემოთ ნაჩვენები იქნება, რომ $\mu\times\nu$ ფუნქციას აქვს ზომის თვისებებიც.

$\mathrm{S}\times\mathrm{T}$ დეკარტულ ნამრავლში შემავალ სიმრავლეებს ვუწოდოთ **მართკუთხედები**, ხოლო $A\times B$ მართკუთხედისათვის A და B სიმრავლეებს ვუწოდოთ **გვერდები**.

ვთქვათ, $E\subset X\times Y$. ფიქსირებული $x\in X$ წერტილისათვის E_x-ით აღვნიშნოთ $\{y\in Y:(x,y)\in E\}$ სიმრავლე და მას ვუწოდოთ x **წერტილით წარმოქმნილი E სიმრავლის კვეთა**. ანალოგიურად, ფიქსირებული $y\in Y$ წერტილისათვის E^y-ით აღვნიშნოთ $\{x\in X:(x,y)\in E\}$ სიმრავლე და მას ვუწოდოთ y **წერტილით წარმოქმნილი E სიმრავლის კვეთა**. შევნიშნოთ, რომ კვეთა არ არის $X\times Y$ ნამრავლის ქვესიმრავლე, ის წარმოადგენს X-ის ან Y-ის ქვესიმრავლეს (ნახ. 10.1).



ნახ. 10.1.

სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობის წევრების კვეთებისათვის გამოვიყენოთ $[E_n]_x$ და $[E_n]^y$ ჩანაწერები.

თეორემა 10.1.1. **$\mu\times\nu$ ფუნქცია არის ზომა.**

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ S კლასი არის σ-ალგებრა, ე.ი. (X,S,μ) სამეული არის ზომიანი სივრცე. წინააღმდეგ შემთხვევაში, μ ზომას გავაგრძელებთ ლებეგის მეთოდით და ვიმსჯელებთ ამ გაგრძელების შედეგად მიღებული σ-ალგებრისა და ზომის მიხედვით.

ნებისმიერი $R=A\times B$ მართკუთხედისათვის განვიხილოთ $X\ni x\mapsto \nu(R_x)$ ფუნქცია, რომელიც აღწერს მისი x-კვეთების ზომებს. შევნიშნოთ, რომ $R_x=B$, თუ $x\in A$; და $R_x=\emptyset$, თუ $x\notin A$. აქედან გამომდინარე,

$$\nu(R_x)=\nu(B),\ \text{თუ}\ x\in A;\quad \text{და}\quad \nu(R_x)=0,\ \text{თუ}\ x\notin A. \tag{1}$$

ცხადია, $x\mapsto\nu(R_x)$ არის მარტივი ფუნქცია (X,S,μ) ზომიან სივრცესთან მიმართებაში. ამ ფუნქციის ინტეგრალი ჩავწეროთ $\int_X\nu(R_x)d\mu(x)$ სახით. ეს ინტეგრალი (1)-ის ძალით $\mu(A)\nu(B)$ რიცხვის ტოლია. ამრიგად,

$$(\mu\times\nu)(R)=\int_X\nu(R_x)d\mu(x). \tag{2}$$

შევნიშნავთ, რომ მართკუთხედის ზომის (2) სახით წარმოდგენა არის დამტკიცების ძირითადი ინსტრუმენტი.

შევამოწმოთ $\mu \times \nu$ ფუნქციის σ-ადიციურობა. ნათელია, რომ ზომის სხვა თვისებები შესრულებულია. ვთქვათ, რაიმე R მართკუთხედი წარმოდგენილია წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი R_n $(n \in \mathbb{N})$ მართკუთხედების გაერთიანების სახით. დასამტკიცებელი გვაქვს ტოლობა:

$$(\mu \times \nu)(R) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(R_n).$$

ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი x-სთვის $[R_n]_x$ სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $R_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} [R_n]_x$. აქედან გამომდინარე,

$$\nu(R_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu([R_n]_x). \tag{3}$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ (2) და (3) პირობებს და გამოვიყენებთ ლევის თეორემას $\sum_{n=1}^{\infty} \nu([R_n]_x)$ ფუნქციური მწკრივისათვის, დავწერთ,

$$(\mu \times \nu)(R) = \int_X \nu(R_x) d\mu(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu([R_n]_x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(R_n).$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

§ 2. **ზომიანი სივრცეების ლებეგისეული და ბორელისეული ნამრავლები**

ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია. μ და ν **ზომების ლებეგისეული ნამრავლი** (აღნიშვნა: $\mu \otimes \nu$) ეწოდება $\mu \times \nu$ ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებას. $\mu \otimes \nu$ ზომის განსაზღვრის არეში შემავალი სიმრავლეების კლასი აღვნიშნოთ $\mathrm{S} \otimes \mathrm{T}$-თი და მას ვუწოდოთ S და T **კლასების ლებეგისეული ნამრავლი**. დაბოლოს, $(X \times Y, \mathrm{S} \otimes \mathrm{T}, \mu \otimes \nu)$ სივრცეს ვუწოდოთ (X, S, μ) და (Y, T, ν) **სივრცეების ლებეგისეული ნამრავლი**.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ლებეგის ზომა წარმოდგება დაბალ-განზომილებიანი ლებეგის ზომების ნამრავლის სახით.

თეორემა 10.2.1. ნებისმიერი p და q ნატურალური რიცხვებისათვის,

$$\mathrm{m}_{p+q} = \mathrm{m}_p \otimes \mathrm{m}_q.$$

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mathrm{m}_{p+q} = \overline{\mathrm{v}_{p+q}}$, $\mathrm{m}_p = \overline{\mathrm{v}_p}$, $\mathrm{m}_q = \overline{\mathrm{v}_q}$ და $\mathrm{v}_{p+q} = \mathrm{v}_p \times \mathrm{v}_q$, მაშინ დასამტკიცებელი ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\overline{\mathrm{v}_p \times \mathrm{v}_q} = \overline{\mathrm{m}_p \times \mathrm{m}_q}. \tag{1}$$

თეორემა 5.3.1-ის ძალით (1) დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ შემდეგ ტოლობას:

$$(\mathrm{v}_p \times \mathrm{v}_q)^* = (\mathrm{m}_p \times \mathrm{m}_q)^*.$$

შევნიშნოთ, რომ $(\mathrm{v}_p \times \mathrm{v}_q)^*$ და $(\mathrm{m}_p \times \mathrm{m}_q)^*$ გარე ზომები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$(\mathrm{v}_p \times \mathrm{v}_q)^*(E) = \inf \sum_k \mathrm{v}_p(I_k)\mathrm{v}_q(J_k),$$

სადაც ქვედა ზღვარი აიღება E-ს დამფარავი ყველა შესაძლო $I_k \times J_k \in \mathcal{I}^p \times \mathcal{I}^q$ მიმდევრობის მიხედვით;

$$(\mathrm{m}_p \times \mathrm{m}_q)^*(E) = \inf \sum_k \mathrm{m}_p(A_k)\mathrm{m}_q(B_k),$$

სადაც ქვედა ზღვარი აიღება E-ს დამფარავი ყველა შესაძლო $A_k \times B_k \in \mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^q$ მიმდევრობის მიხედვით.

ცხადია, მეორე ქვედა ზღვარი დაფარვების უფრო მდიდარი კლასის მიხედვით აიღება. რის გამოც, $(\mathrm{m}_p \times \mathrm{m}_q)^*(E) \leq (\mathrm{v}_p \times \mathrm{v}_q)^*(E)$. დავამტკიცოთ შებრუნებული უტოლობა:

$$(\mathrm{v}_p \times \mathrm{v}_q)^*(E) \leq (\mathrm{m}_p \times \mathrm{m}_q)^*(E). \tag{2}$$

(2) ცხადია, თუ $(\mathrm{m}_p \times \mathrm{m}_q)^*(E) = \infty$. ასე რომ, განსახილავი გვრჩება $(\mathrm{m}_p \times \mathrm{m}_q)^*(E) < \infty$ შემთხვევა. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის ვიპოვოთ $A_k \times B_k \in \mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^q$ მიმდევრობა, რომელიც ფარავს E სიმრავლეს და

$$\sum_k \mathrm{m}_p(A_k)\mathrm{m}_q(B_k) < (\mathrm{m}_p \times \mathrm{m}_q)^*(E) + \varepsilon.$$

შემდეგ, $\mathrm{m}_p = \overline{\mathrm{v}_p}$ და $\mathrm{m}_q = \overline{\mathrm{v}_q}$ ტოლობების გათვალისწინებით, ყოველი k-სთვის ვიპოვოთ მონაკვეთების $(I_{k,s})$ და $(J_{k,r})$ მიმდევრობები, რომლებიც, შესაბამისად, ფარავენ A_k და B_k სიმრავლეებს და გარდა ამისა, აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\sum_s \mathrm{v}_p(I_{k,s}) < \mathrm{m}_p(A_k) + \delta_k,$$

$$\sum_r \mathrm{v}_q(J_{k,r}) < \mathrm{m}_q(B_k) + \delta_k,$$

სადაც δ_k იმდენად მცირე დადებითი რიცხვია, რომ

$$(\mathrm{m}_p(A_k) + \delta_k)(\mathrm{m}_q(B_k) + \delta_k) < \mathrm{m}_p(A_k)\mathrm{m}_q(B_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

ასეთ პირობებში გვექნება,

$$\sum_{s,r} \mathrm{v}_p(I_{k,s})\mathrm{v}_q(J_{k,r}) = \sum_{s} \mathrm{v}_p(I_{k,s}) \ \sum_{r} \mathrm{v}_q(J_{k,r}) <$$

$$< (\mathrm{m}_p(A_k)+\delta_k)(\mathrm{m}_q(B_k)+\delta_k) < \mathrm{m}_p(A_k)\mathrm{m}_q(B_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

შედეგად, იმის გათვალისწინებით, რომ ყოველი k-სთვის $\{I_{k,s}\times J_{k,r}\}_{s,r}$ კლასი ფარავს $A_k \times B_k$ სიმრავლეს, ვღებულობთ შეფასებას:

$$(\mathrm{v}_p \times \mathrm{v}_q)^*(E) \leq \sum_{k,s,r} \mathrm{v}_p(I_{k,s})\mathrm{v}_q(J_{k,r}) <$$

$$< \sum_{k} [\mathrm{m}_p(A_k)\mathrm{m}_q(B_k) + \varepsilon/2^k] < (\mathrm{m}_p \times \mathrm{m}_q)^*(E) + 2\varepsilon.$$

საიდანაც $\varepsilon > 0$-ის ნებისმიერობის საფუძველზე ვასკვნით (2) შეფასების სამართლიანობას.

თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 10.2.1. ვთქვათ, A და B ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეებია შესაბამისად $\mathbb{R}^p$ და $\mathbb{R}^q$ სივრცეებში. მაშინ მათი დეკარტული $A \times B$ ნამრავლი ლებეგის აზრით ზომადია $\mathbb{R}^{p+q}$ სივრცეში. მართლაც, $A \times B$ სიმრავლე შედის $\mathrm{m}_p \otimes \mathrm{m}_q$ ზომის განსაზღვრის არეში. ეს ზომა კი, თეორემა 10.2.1-ის თანახმად ლებეგის m_{p+q} ზომას ემთხვევა. ამრიგად, $A\times B$ შედის m_{p+q} ზომის განსაზღვრის არეში, ანუ არის ლებეგის აზრით ზომადი $\mathbb{R}^{p+q}$ სივრცეში.

თეორემა 10.2.1-ის დამტკიცების სქემის გამოყენებით შეიძლება დავამტკიცოთ შემდეგი უფრო ზოგადი დებულება.

თეორემა 10.2.2. ნებისმიერი μ და ν ზომებისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\overline{\mu \times \nu} = \overline{\overline{\mu} \times \overline{\nu}}.$$

ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია. μ და ν **ზომების ბორელისეული ნამრავლი** (აღნიშვნა: $\mu\odot\nu$) ეწოდება $\mu\times\nu$ ზომის ბორელისეულ გაგრძელებას. ცხადია, ბორელისეული ნამრავლი წარმოადგენს ლებეგისეული ნამრავლის შეზღუდვას $\sigma a(\mathrm{S}\times\mathrm{T})$ კლასზე. $\sigma a(\mathrm{S}\times\mathrm{T})$ კლასს ეწოდება S და T **კლასების ბორელისეული ნამრავლი**. $(X\times Y, \sigma a(\mathrm{S}\times\mathrm{T}), \mu\odot\nu)$ სივრცეს (X, S, μ) და (Y, T, ν) **სივრცეების ბორელისეულ ნამრავლს** უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ ლებეგის ზომების ბორელისეული ნამრავლი არ გვაძლევს ლებეგის ზომას, ე.ი. $\mathrm{m}_p \odot \mathrm{m}_q \neq \mathrm{m}_{p+q}$. ეს ფაქტი დადგენილი იქნება ამ თავის მე-5 პარაგრაფში.

ამოცანები

1. ვთქვათ, $\mathrm{H} \subset 2^X$ და $\mathrm{R} \subset 2^Y$ რაიმე ნახევარრგოლებია. აჩვენეთ, რომ $\sigma a(\sigma a(\mathrm{H}) \times \sigma a(\mathrm{R})) = \sigma a(\mathrm{H} \times \mathrm{R})$.
2. დაამტკიცეთ თეორემა 10.2.2 ამოცანა 1-ში მოცემული ტოლობის გამოყენებით.
3. დაამტკიცეთ, რომ ბორელის ზომა წარმოდგება დაბალგანზომილებიანი ბორელის ზომების ნამრავლის სახით, ე.ი. $\mathrm{m}_{\mathcal{B},p+q} = \mathrm{m}_{\mathcal{B},p} \odot \mathrm{m}_{\mathcal{B},q}$.

§ 3. სიმრავლის ზომის გამოთვლა მისი კვეთების ზომების მეშვეობით

შემდეგი დებულება მთავარი დასაყრდენია ზომათა ნამრავლის თვისებების შესწავლისას.

თეორემა 10.3.1. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია, ხოლო $R \subset X \times Y$ არის სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედი. მაშინ ნებისმიერი $E \subset R$, $E \in \sigma a(\mathrm{S} \times \mathrm{T})$, სიმრავლისათვის:

- **E-ს ყოველი კვეთა არის ზომადი, ე.ი. $E_x \in \mathrm{T}$ ყოველი $x \in X$-სთვის და $E^y \in \mathrm{S}$ ყოველი $y \in Y$-სთვის;**
- **$\nu(E_x)$, როგორც x ცვლადის ფუნქცია, არის μ-ზომადი; ხოლო $\mu(E^y)$, როგორც y ცვლადის ფუნქცია, არის ν-ზომადი;**
- **სამართლიანია ტოლობები:**

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

დამტკიცება. Δ იყოს ყველა იმ $E \subset R$, $E \in \sigma a(\mathrm{S} \times \mathrm{T})$, სიმრავლის კლასი, რომლისთვისაც შესრულებულია თეორემის დასკვნები. დავადგინოთ, რომ Δ კლასს აქვს შემდეგი ოთხი თვისება:

$a)$ ნებისმიერი $H \subset R$ მართკუთხედი ეკუთვნის Δ კლასს;

$b)$ თუ (E_n) არის Δ კლასის სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობა, მაშინ $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Delta$;

$c)$ თუ $\{E_n\}$ არის Δ კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა სასრული ან თვლადი ქვეკლასი, მაშინ $\bigcup_n E_n \in \Delta$;

$d)$ თუ (E_n) არის Δ კლასის სიმრავლეთა კლებადი მიმდევრობა, მაშინ $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \Delta$.

თითოეული თვისების შემოწმებისას განვიხილოთ მხოლოდ x-კვეთების შემთხვევა. y-კვეთებისათვის მსჯელობა სავსებით ანალოგიურია.

$a)$-ს საჩვენებლად უნდა გავიმეოროთ თეორემა 10.1.1-ის დამტკიცებაში მოცემული არგუმენტები. კერძოდ, $H = A \times B$ მართკუთხედისათვის გვაქვს,

რომ:

$$H_x = B \ \ (x \in A), \ \ H_x = \emptyset \ \ (x \notin A);$$

$$\nu(H_x) = \nu(B)\chi_A(x) \ \ (x \in X).$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს საჭირო დასკვნები.

გადავიდეთ b) თვისების დამტკიცებაზე. აღვნიშნოთ $E = \bigcup_n E_n$. ნებისმიერი x-სთვის $[E_n]_x$ $(n \in \mathbb{N})$ კვეთები ზომადებია, ამიტომ ზომადია მათი გაერთიანება, რომელიც E_x-ის ტოლია. ამით E_x კვეთებისათვის პირველი მოთხოვნა შემოწმებულია.

(E_n) მიმდევრობისზრდადობისა და ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისების საფუძველზე გვაქვს,

$$\nu([E_n]_x) \uparrow \nu(E_x) \ \text{ყოველი } x \in X\text{-სთვის},$$

სადაც $a_n \uparrow a$ ჩანაწერი აღნიშნავს, რომ (a_n) მიმდევრობა ზრდადია და კრებადია a რიცხვისაკენ. ამრიგად, $x \mapsto \nu(E_x)$ ფუნქცია წარმოადგენს μ-ზომად ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვან ზღვარს. შედეგად, თავადაც არის μ-ზომადი და ამასთან ერთად, შეგვიძლია, ლევის თეორემის ძალით დავწეროთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \nu([E_n]_x) d\mu(x) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x). \tag{1}$$

კვლავ (E_n) მიმდევრობის ზრდადობისა და ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისების გამო,

$$\lim_{n\to\infty} (\mu \otimes \nu)(E_n) = (\mu \otimes \nu)(E). \tag{2}$$

საბოლოოდ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $E_n \in \Delta$, (1)-ის და (2)-ის საფუძველზე გვექნება,

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x).$$

ამით b) პირობა შემოწმებულია.

ზომის ადიციურობისა და ინტეგრალის წრფივობის თვისებების საფუძველზე მარტივად მოწმდება, რომ c) თვისებას ადგილი აქვს $\{E_n\}$ კლასის სასრულობის შემთხვევაში. ამის გათვალისწინებით, c)-ს დარჩენილი ნაწილი უკვე წარმოადგენს b) თვისების შედეგს.

d) თვისების შემოწმება ხდება b) თვისების დამტკიცების სქემის გამოყენებით. მსჯელობაში განსხვავებული მომენტებია ის, რომ, ზომის ქვემოდან უწყვეტობის ნაცვლად, გვიწევს ვისარგებლოთ ზემოდან უწყვეტობის თვისებით, ხოლო ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლისას კი, ლევის თეორემის ნაცვლად, უნდა დავეყრდნოთ ლებეგის თეორემას მაჟორანტული კრებადობის

შესახებ. როგორც ზომის ზემოდან უწყვეტობის თვისების, ასევე ლებეგის თეორემის გამოყენება დასაშვებია E_n სიმრავლეების მომცველი R მართკუთხედის გვერდების ზომათა სასრულობის გამო.

ამრიგად, Δ კლასის $a) - d)$ თვისებები შემოწმებულია.

შევნიშნოთ, რომ $a)$ და $c)$ თვისებების ძალით, Δ კლასი შეიცავს R-ში შემავალი მართკუთხედებით წარმოქმნილ $r[(\mathrm{S} \times \mathrm{T}) \cap R]$ რგოლს, ხოლო $b)$ და $d)$ თვისებების ძალით კი, Δ წარმოადგენს მონოტონურ კლასს. აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ (იხ. თეორემა 3.2.2) $\sigma a[(\mathrm{S} \times \mathrm{T}) \cap R]$ ემთხვევა $r[(\mathrm{S} \times \mathrm{T}) \cap R]$ რგოლის შემცველ მინიმალურ მონოტონურ კლასს, ვღებულობთ $\Delta \supset \sigma a[(\mathrm{S} \times \mathrm{T}) \cap R]$ ჩართვას. ახლა გამოვიყენოთ თეორემა 3.3.3, რომლის თანახმად,

$$\sigma a[(\mathrm{S} \times \mathrm{T}) \cap R] = \sigma a(\mathrm{S} \times \mathrm{T}) \cap R.$$

შედეგად მივიღებთ $\Delta \supset \sigma a(\mathrm{S} \times \mathrm{T}) \cap R$ ჩართვას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

E სიმრავლეს ეწოდება **სრული ზომის** მქონე (X, S, μ) ზომიან სივრცეში, თუ $E \in \mathrm{S}$ და $\mu(X \setminus E) = 0$.

ამ თავის ფარგლებში მივიჩნევთ, რომ რაიმე თვისება სრულდება **თითქმის ყველგან**, თუ ამ თვისების მქონე ყველა წერტილის სიმრავლეს აქვს სრული ზომა.

(X, S, μ) ზომიან სივრცეს ვუწოდოთ **სრული**, თუ μ ზომა სრულია.

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცე არის სრული. სამართლიანია შემდეგი ორი მარტივი წინადადება (რომლებიც, მითითების გარეშე, რამდენჯერმე იქნება ქვემოთ გამოყენებული): 1) თუ $A \subset X$ სიმრავლე შეიცავს სრული ზომის ქვესიმრავლეს, მაშინ A სრული ზომისაა; 2) თუ X-ზე განსაზღვრული f ფუნქციის შეზღუდვა სრული ზომის რაიმე ქვესიმრავლეზე არის ზომადი, მაშინ f ზომადია.

თეორემა 10.3.2. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით, ხოლო $R \subset X \times Y$ სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედია. მაშინ ნებისმიერი $E \subset R$, $E \in \mathrm{S} \otimes \mathrm{T}$, სიმრავლისათვის:

- **E-ს თითქმის ყოველი კვეთა არის ზომადი, ე.ი. $X_E = \{x \in X : E_x \in \mathrm{T}\}$ სიმრავლე სრული ზომისაა X-ში, და $Y_E = \{y \in Y : E^y \in \mathrm{S}\}$ სიმრავლე სრული ზომისაა Y-ში;**
- **$\nu(E_x)$, როგორც X_E-ზე განსაზღვრული x ცვლადის ფუნქცია, არის μ-ზომადი; ხოლო $\mu(E^y)$, როგორც Y_E-ზე განსაზღვრული y ცვლადის ფუნქცია, არის ν-ზომადი;**

● **სამართლიანია ტოლობები:**

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_{X_E} \nu(E_x) d\mu(x) = \int_{Y_E} \mu(E^y) d\nu(y).$$

დამტკიცება. დამტკიცება ჩავატაროთ მხოლოდ x-კვეთებისათვის. y-კვეთებისათვის მსჯელობა სავსებით ანალოგიურია.

თავდაპირველად განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა E სიმრავლე ნული ზომისაა. თეორემა 5.4.1-ის ძალით არსებობს E-ს შემცველი ნულზომიანი $\widehat{E}$ სიმრავლე, რომელიც ეკუთვნის $\sigma a(\mathrm{S} \times \mathrm{T})$ კლასს. ცხადია, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\widehat{E} \subset R$. მაშინ თეორემა 10.3.1-ის თანახმად, $\widehat{E}_x$ ზომადია ყოველი x-სთვის, $x \mapsto \nu(\widehat{E}_x)$ ფუნქცია არის μ-ზომადი და

$$\int_X \nu(\widehat{E}_x) d\mu(x) = 0.$$

საინტეგრო ფუნქციის არაუარყოფითობიდან გამომდინარე გვექნება,

$$A = \{x \in X : \nu(\widehat{E}_x) = 0\}$$

სიმრავლე სრული ზომისაა X-ში. შედეგად, $E_x \subset \widehat{E}_x$ ჩართვისა და ν ზომის სისრულის გავითვალისწინებით ვასკვნით: ყოველი $x \in A$-სთვის E_x კვეთა ზომადია და $\nu(E_x) = 0$. ამის შემდეგ, $X_E \supset A$ ჩართვისა და μ ზომის სისრულის საფუძველზე ადვილად ვღებულობთ, რომ E სიმრავლეს აქვს სამივე საჭირო თვისება.

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი $E \subset R$, $E \in \mathrm{S} \otimes \mathrm{T}$, სიმრავლის შემთხვევა. გამოვიყენოთ თეორემა 5.4.1 და E წარმოვადგინოთ სახით $E = M \cup N$, სადაც $M \in \sigma a(\mathrm{S} \times \mathrm{T})$, ხოლო N ნულზომიანი სიმრავლეა. ცხადია, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $M \cap N = \emptyset$. თეორემა 10.3.1-ის და უკვე განხილული შემთხვევის გათვალისწინებით, ზომისა და ინტეგრალის თვისებების საფუძველზე მარტივად მოწმდება, რომ $M \cup N$ გაერთიანებას აქვს სამივე საჭირო თვისება. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 10.3.1. 10.3.1 და 10.3.2 თეორემების პირველი პუნქტი არაა შებრუნებადი, ე.ი. კვეთების ზომადობა საზოგადოდ არ იწვევს სიმრავლის ზომადობას. სახელდობრ, ვ. სერპინსკიმ ააგო ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლე სიბრტყეზე, რომელსაც ნებისმიერ წრფესთან აქვს არაუმეტეს ორელემენტიანი თანაკვეთა.

§ 4. ფუბინისა და ტონელის თეორემები ზომების ლებეგისეული ნამრავლისათვის

საკმაოდ ზოგად პირობებში ჯერადი (ე.ი. ზომათა ნამრავლის მიხედვით განხილული) $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu)$ ინტეგრალი დაიყვანება თანამამრავლი ზომების

მიხედვით აღებულ $\int_X \Big(\int_Y f d\nu\Big) d\mu$ და $\int_Y \Big(\int_X f d\mu\Big) d\nu$ განმეორებით ინტეგრალებზე. ქვემოთ დამტკიცებული იქნება ამ მიმართულებით ორი უმთავრესი შედეგი. პირველ მათგანს მოიხსენიებენ, როგორც ტონელის, ხოლო მეორეს კი - როგორც ფუბინის თეორემას.

შემოვიღოთ რამდენიმე საჭირო განსაზღვრება.

ვთქვათ, f არის $X \times Y$ დეკარტულ ნამრავლზე განსაზღვრული რაიმე ფუნქცია. ფიქსირებული $x \in X$-სთვის f_x-ით აღვნიშნოთ $Y \ni y \mapsto f(x, y)$ ფუნქცია და მას ვუწოდოთ **x-ით წარმოქმნილი f ფუნქციის კვეთა**. ანალოგიურად, $y \in Y$-თვის f^y-ით აღვნიშნოთ $X \ni x \mapsto f(x, y)$ ფუნქცია და მას ვუწოდოთ **y-ით წარმოქმნილი f ფუნქციის კვეთა**. ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობის წევრების კვეთებისათვის გამოვიყენოთ $[f_n]_x$ და $[f_n]^y$ ჩანაწერები.

ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია.

$X \times Y$-ზე განსაზღვრული f ფუნქციისათვის აღვნიშნოთ:

$$\begin{aligned}
X_f &= \{x \in X : f_x \text{ არის } \nu\text{-ზომადი}\},\\
Y^f &= \{y \in Y : f^y \text{ არის } \mu\text{-ზომადი}\},\\
X_f^* &= \{x \in X : f_x \text{ არის } \nu\text{-ზომადი და } f_x \in L(Y, \nu)\},\\
Y_*^f &= \{y \in Y : f^y \text{ არის } \mu\text{-ზომადი და } f^y \in L(X, \mu)\}.
\end{aligned}$$

ვიტყვით, რომ არაუარყოფით $(\mu \otimes \nu)$-ზომად f ფუნქციას აქვს **ტონელის თვისება** (უფრო ზუსტად, ტონელის თვისება $(\mu, \nu, \mu \otimes \nu)$ სამეულის მიმართ), თუ:

- თითქმის ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის f_x კვეთა არის ν-ზომადი, ე.ი. $\mu(X \setminus X_f) = 0$;
- თითქმის ყოველი $y \in Y$ წერტილისათვის f^y კვეთა არის μ-ზომადი, ე.ი. $\nu(Y \setminus Y^f) = 0$;
- $\int_Y f d\nu$ ფუნქცია არის μ-ზომადი. აქ $\int_Y f d\nu$ გაიგება როგორც ფუნქცია, რომელიც $x \in X_f$ წერტილებში $\int_Y f_x d\nu$ ინტეგრალის ტოლია, ხოლო $x \in X \setminus X_f$ წერტილებში კი ნულის ტოლია;
- $\int_X f d\mu$ ფუნქცია არის ν-ზომადი. აქ $\int_X f d\mu$ გაიგება როგორც ფუნქცია, რომელიც $y \in Y^f$ წერტილებში $\int_X f^y d\mu$ ინტეგრალის ტოლია, ხოლო $y \in Y \setminus Y^f$ წერტილებში კი ნულის ტოლია;
- f ფუნქციის ჯერადი და განმეორებითი ინტეგრალები ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. სამართლიანია ტოლობები:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \Big(\int_Y f d\nu\Big) d\mu = \int_Y \Big(\int_X f d\mu\Big) d\nu.$$

შენიშვნა 10.4.1. განმეორებითი ინტეგრალებისათვის ასევე გავრცელებულია $\int_X d\mu \int_Y f d\nu$ და $\int_Y d\nu \int_X f d\mu$ ჩანაწერები.

ვიტყვით, რომ $f \in L(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ ფუნქციას აქვს **ფუბინის თვისება** (უფრო ზუსტად, ფუბინის თვისება $(\mu, \nu, \mu \otimes \nu)$ სამეულის მიმართ), თუ:

- თითქმის ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის $f_x \in L(Y, \nu)$, ე.ი. $\mu(X \setminus X_f^*) = 0$;
- თითქმის ყოველი $y \in Y$ წერტილისათვის $f^y \in L(X, \mu)$, ე.ი. $\nu(Y \setminus Y_*^f) = 0$;
- $\int_Y f d\nu \in L(X, \mu)$. აქ $\int_Y f d\nu$ აღნიშნავს ფუნქციას, რომელიც $x \in X_f^*$ წერტილებში $\int_Y f_x d\nu$ ინტეგრალის ტოლია, ხოლო $x \in X \setminus X_f^*$ წერტილებში კი ნულის ტოლია;
- $\int_X f d\mu \in L(Y, \nu)$. აქ $\int_X f d\mu$ აღნიშნავს ფუნქციას, რომელიც $y \in Y_*^f$ წერტილებში $\int_X f^y d\mu$ ინტეგრალის ტოლია, ხოლო $y \in Y \setminus Y_*^f$ წერტილებში კი ნულის ტოლია;
- f ფუნქციის ჯერადი და განმეორებითი ინტეგრალები ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. სამართლიანია ტოლობები:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f d\mu \right) d\nu.$$

f **ფუნქციის საყრდენი** (აღნიშვნა: $\mathrm{supp} f$) ეწოდება ყველა იმ წერტილის სიმრავლეს, რომელშიც ფუნქცია არანულოვან მნიშვნელობას ღებულობს.

(X, S, μ) ზომიან სივრცეს ვუწოდოთ **შემოსაზღვრული** (**σ-შემოსაზღვრული**), თუ μ ზომა არის შემოსაზღვრული (σ-შემოსაზღვრული).

თეორემა **10.4.1.** **ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. მაშინ $X \times Y$-ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu \otimes \nu)$-ზომად ფუნქციას, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი კლასით, აქვს ტონელის თვისება.**

თეორემა **10.4.2.** **ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. მაშინ ნებისმიერ $f \in L(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ ფუნქციას, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი კლასით, აქვს ფუბინის თვისება.**

შედეგი **10.4.1.** **ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია σ-შემოსაზღვრულობისა და სისრულის თვისებებით. მაშინ $X \times Y$-ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu \otimes \nu)$-ზომად f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება, ხოლო ნებისმიერ $f \in L(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ ფუნქციას აქვს ფუბინის თვისება.**

შედეგი **10.4.2.** ვთქვათ, $(X, \mathrm{S}, \mu) = (\mathbb{R}^p, \mathcal{L}_p, \mathrm{m}_p)$ **და** $(Y, \mathrm{T}, \nu) = (\mathbb{R}^q, \mathcal{L}_q, \mathrm{m}_q)$. **მაშინ $\mathbb{R}^{p+q}$-ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით და ლებეგის**

აზრით ზომად f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება, ხოლო ნებისმიერ $f \in L(\mathbb{R}^{p+q})$ ფუნქციას აქვს ფუბინის თვისება.

მოკლედ რომ ვთქვათ, ფუბინისა და ტონელის თეორემები ადგენენ განმეორებითი ინტეგრალების არსებობას და მათ ტოლობას ჯერად ინტეგრალთან.

ლემა 10.4.1. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. ტონელის თვისების მქონე ყველა ფუნქციის Δ კლასს აქვს შემდეგი თვისებები:

$a)$ თუ $f, g \in \Delta$, მაშინ $f + g \in \Delta$;

$b)$ თუ $f \in \Delta$ და $\alpha \geq 0$, მაშინ $\alpha f \in \Delta$;

$c)$ თუ (f_n) არის Δ კლასის ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა, მაშინ (f_n)-ის წერტილოვანი ზღვარი f აგრეთვე ეკუთვნის Δ კლასს;

$d)$ თუ (f_n) არის Δ კლასის ფუნქციათა მიმდევრობა, მაშინ მათი ჯამი $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ აგრეთვე ეკუთვნის Δ კლასს.

დამტკიცება. დამტკიცება ჩავატაროთ x-კვეთებისათვის. y-კვეთების შემთხვევა ანალოგიურია.

$a)$ და $b)$ თვისებები უშუალოდ მოწმდებიან μ ზომის სისრულის, არითმეტიკულ ოპერაციათა მიმართ ზომად ფუნქციათა კლასის ჩაკეტილობისა და ინტეგრალის წრფივობის გათვალისწინებით.

გადავიდეთ $c)$ თვისების დამტკიცებაზე. თავიდან შევნიშნოთ, რომ f ფუნქცია, როგორც $(\mu \otimes \nu)$-ზომად ფუნქციათა წერტილოვანი ზღვარი, თავადაც $(\mu \otimes \nu)$-ზომადია.

A-თი აღვნიშნოთ X_{f_n} სიმრავლეების თანაკვეთა. ცხადია, A სრული ზომისაა და ნებისმიერი $x \in A$-სთვის თითოეული $[f_n]_x$ $(n \in \mathbb{N})$ კვეთა ν-ზომადია (ე.ი. $A \subset X_f$). აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი $x \in A$-სთვის f_x კვეთა, როგორც ν-ზომად ფუნქციათა $([f_n]_x)$ მიმდევრობის წერტილოვანი ზღვარი, აგრეთვე ν-ზომადია.

$\int_Y f(x,y) d\nu(y)$ და $\int_Y f_n(x,y) d\nu(y)$ $(n \in \mathbb{N})$ ინტეგრალები, როგორც A-ზე განსაზღვრული x ცვლადის ფუნქციები, აღვნიშნოთ შესაბამისად I_f-ით და I_{f_n}-ით.

(f_n) მიმდევრობის ზრდადობის გამო, ზრდადია (I_{f_n}) მიმდევრობაც. ამასთან, ნებისმიერი $x \in A$-სთვის, თუ გამოვიყენებთ ლევის თეორემას, $([f_n]_x)$ მიმდევრობის შემთხვევაში, გვექნება, რომ $I_f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} I_{f_n}(x)$. ამრიგად, I_f წარმოადგენს μ-ზომად ფუნქციათა ზრდადი (I_{f_n}) მიმდევრობის წერტილოვან ზღვარს. შედეგად, I_f არის μ-ზომადი. გარდა ამისა, ლევის თეორემის ძალით გვექნება,

$$\int_A I_f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_A I_{f_n} d\mu.$$

შედეგად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mu(X_{f_n} \setminus A) = 0$ და $f_n \in \Delta$ $(n \in \mathbb{N})$, დავწერთ,

$$\int_A \left[\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right] d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_A \left[\int_Y f_n(x,y)d\nu(y) \right] d\mu(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{X_f} \left[\int_Y f_n(x,y)d\nu(y) \right] d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} f_n d(\mu\otimes\nu).$$

თუ კიდევ ერთხელ გამოვიყენებთ ლევის თეორემას, ამჯერად (f_n) მიმდევრობისათვის, მივიღებთ, რომ ბოლო ზღვარი ზემოთ მოცემულ ტოლობათა ჯაჭვიდან, $\int_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu)$ ინტეგრალის ტოლია. ზემოთ დადგენილი დასკვნებიდან, μ ზომის სისრულის გათვალისწინებით, ადვილად ვღებულობთ $f \in \Delta$ მიკუთვნებას. ამით $c)$ თვისება დადგენილია.

$d)$ წარმოადგენს $a)$ და $c)$ თვისებების შედეგს.

ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 10.4.2. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით, ხოლო R სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედია. მაშინ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu\otimes\nu)$-ზომად ფუნქციას, რომლის საყრდენი მოთავსებულია R-ში, აქვს ტონელის თვისება.

დამტკიცება. სივრცეთა სისრულის გათვალისწინებით ადვილი დასანახია, რომ $E \subset R$, $E \in \mathrm{S}\otimes\mathrm{T}$, სიმრავლისათვის თეორემა 10.3.2-ის დასკვნა ტოლფასია მისი მახასიათებელი χ_E ფუნქციის მიერ ტონელის თვისების ფლობისა. ამრიგად, თეორემა 10.3.2-ის ძალით R-ში შემავალი ნებისმიერი ზომადი სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება. ამის შემდეგ გავითვალისწინოთ, რომ: i) R-ში შემავალი საყრდენის მქონე არაუარყოფითი მარტივი ფუნქცია წარმოადგენს R-ში შემავალი ზომადი სიმრავლეების მახასიათებელი ფუნქციების დადებითკოეფიციენტებიან წრფივ კომბინაციას; ii) R-ში შემავალი საყრდენის მქონე ნებისმიერი არაუარყოფითი ზომადი ფუნქცია წარმოდგება R-ში შემავალი საყრდენის მქონე არაუარყოფით მარტივ ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობის წერტილოვანი ზღვრის სახით. შედეგად, ლემა 10.4.1-ის მეშვეობით ვღებულობთ საჭირო დასკვნას. ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 10.4.1-ის დამტკიცება. განვიხილოთ სასრული ზომის გვერდების მქონე წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი $\{R_n\}$ კლასი, რომელიც ფარავს $\{f > 0\}$ სიმრავლეს. მაშინ ლემა 10.4.2-ის ძალით $f\chi_{R_n}$ ფუნქციებს ექნებათ ტონელის თვისება. შედეგად, თუ გავითვალისწინებთ $f = \sum\limits_n f\chi_{R_n}$ ტოლობას და გამოვიყენებთ ლემა 10.4.1-ს, დავასკვნით, რომ f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 10.4.2-ის დამტკიცება. საჭირო დასკვნა მიიღება თეორემა 10.4.1-დან შემდეგი სამი წინადადების გათვალისწინებით:

- ნებისმიერი ჯამებადი ფუნქცია წარმოდგება ორი არაუარყოფითი ჯამებადი ფუნქციის სხვაობის სახით;
- თუ არაუარყოფით ჯამებად ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება, მაშინ მას აქვს ფუბინის თვისებაც;
- ფუბინის თვისების მქონე ფუნქციების სხვაობას აგრეთვე აქვს ფუბინის თვისება.

პირველ წინადადებაში ხსენებულ წარმოდგენას, ცხადია, იძლევიან ფუნქციის დადებითი და უარყოფითი ნაწილები. მეორე წინადადების საჩვენებლად მხედველობაში უნდა მივიღოთ ჯამებადი ფუნქციის თითქმის ყველგან სასრულობის ფაქტი. მესამე წინადადება უშუალოდ მოწმდება ჯამებად ფუნქციათა თვისებების და სივრცეთა სისრულის გათვალისწინებით.

თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 10.4.2. ჯერადი ინტეგრალის განმეორებით ინტეგრალზე დაყვანის ფორმულები მარტივად ვრცელდება იმ სიტუაციაზე, როცა ინტეგრალი ნაცვლად მთელი $X \times Y$ სივრცისა აიღება მის რაიმე ზომად E ქვესიმრავლეზე. სახელდობრ, თუ f ფუნქცია აკმაყოფილებს 10.4.1 ან 10.4.2 თეორემის პირობებს, მაშინ $f\chi_E$ ფუნქციისათვის შესაბამისი თეორემის გამოყენება გვაძლევს ტოლობებს:

$$\int_E fd(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_{E_x} fd\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_{E^y} fd\mu \right) d\nu.$$

ადვილი დასანახია, რომ $E = A \times B$ შემთხვევაში ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$\int_{A\times B} fd(\mu \otimes \nu) = \int_A \left(\int_B fd\nu \right) d\mu = \int_B \left(\int_A fd\mu \right) d\nu.$$

შენიშვნა 10.4.3. ტონელის თეორემაში ფუნქციის საყრდენთან დაკავშირებული შეზღუდვა არსებითია. ავაგოთ ამის დამადასტურებელი მაგალითი. (X, S, μ) სივრცის როლში ავიღოთ $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}, \mu)$, სადაც μ დამთვლელი ზომაა $\mathbb{R}$-ში, ხოლო (Y, T, ν) სივრცე იყოს $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathrm{m})$-ის ტოლი. განვიხილოთ $f = \chi_E$ ფუნქცია, სადაც $E = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ დიაგონალური წრფეა. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ E ზომადი სიმრავლეა და შედეგად, f ზომადი ფუნქციაა. ეს გამომდინარეობს E სიმრავლის შემდეგი წარმოდგენიდან:

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_{n,k} \times I_{n,k}),$$

სადაც $I_{n,k} = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$.

ამის შემდეგ შევნიშნოთ, რომ ყოველი x-სთვის f_x კვეთის ინტეგრალი 0-ის ტოლია, ხოლო ყოველი y-სთვის კი, f^y კვეთის ინტეგრალი 1-ს უდრის. შედეგად, f-ის განმეორებით ინტეგრალებს შორის ერთი 0-ის, ხოლო მეორე კი, ∞-ის ტოლია. რაც ნიშნავს ტონელის თვისების დარღვევას.

შენიშვნა 10.4.4. ტონელისა და ფუბინის თეორემებში სივრცეთა სისრულის პირობა არსებითია. ვთქვათ, (X, S, μ) არაა სრული სივრცე, ხოლო (Y, T, ν) არატრივიალური სივრცეა, ე.ი. $\nu(Y) > 0$. მაშინ X-ში მოიძებნება ნული ზომის A სიმრავლე, რომელიც შეიცავს არაზომად A^* ქვესიმრავლეს. განვიხილოთ $E = A^* \times Y$ სიმრავლე $X \times Y$ სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ $\mu \otimes \nu$ ზომა წარმოქმნილია ლებეგისეული გაგრძელების პროცესის შედეგად, ამიტომ ის სრულია. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ $A \times Y$ სიმრავლე ეკუთვნის $\mathrm{S} \times \mathrm{T}$ დეკარტულ ნამრავლს და

$$(\mu \times \nu)(A \times Y) = \mu(A)\nu(Y) = 0.$$

რის გამოც, $A \times Y \in \mathrm{S} \otimes \mathrm{T}$ და $(\mu \otimes \nu)(A \times Y) = 0$. ზემოაღნიშნული ორი გარემოებიდან გამომდინარე, E ნულზომიანი სიმრავლეა $X \times Y$ სივრცეში. გვაქვს, რომ ყოველი y-სთვის, $E^y = A^*$, ე.ი. E სიმრავლის ყოველი y-კვეთა არაზომადია. რაც, ცხადია, ნიშნავს ფუბინის და ტონელის თვისებების დარღვევას $\chi_E \in L(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ ფუნქციისათვის.

შენიშვნა 10.4.5. ტონელისა და ფუბინის თეორემებში დგინდება ფუნქციების თითქმის ყოველი კვეთის ზომადობა. ქვემოთ ვაჩვენებთ, რომ მეტის მიღწევა, საზოგადოდ, შეუძლებელია. (X, S, μ) და (Y, T, ν) სივრცეების როლში ავიღოთ ლებეგის ზომით აღჭურვილი რიცხვითი ღერძი. დავუშვათ, $A \subset \mathbb{R}$ ნებისმიერი ნული ზომის სიმრავლეა, ხოლო $B \subset \mathbb{R}$ - რაიმე არაზომადი სიმრავლე. განვიხილოთ $E = A \times B$ დეკარტული ნამრავლი. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A \times \mathbb{R}$ სიმრავლეს ნული ზომა აქვს სიბრტყეზე და $E \subset A \times \mathbb{R}$, შემდეგ კი ვისარგებლებთ ლებეგის ზომის სისრულით, დავასკვნით E სიმრავლის ზომადობას. ცხადია, $E_x = B$ ყოველი $x \in A$-სთვის. შედეგად, ყოველი $x \in A$-სთვის E_x კვეთა არაზომადია. ამრიგად, შესაძლებელია სიბრტყეზე ზომადი ისეთი სიმრავლის აგება, რომელსაც წინასწარ დასახელებული ნულზომიანი ფუძის მიხედვით აღებული კვეთები არაზომადი აქვს.

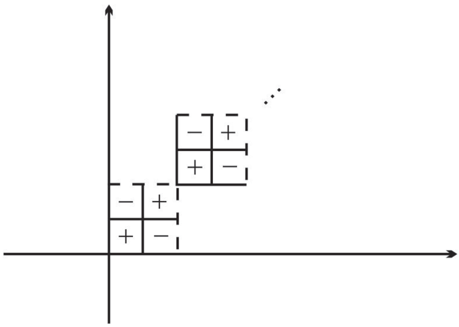
შენიშვნა 10.4.6. ტონელის თეორემიდან გამომდინარე, თეორემა 10.3.2-ში მოცემული დასკვნები ზომადი სიმრავლის კვეთების შესახებ ვრცელდება ნებისმიერ ზომად სიმრავლეზე, რომელიც შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი ოჯახით.

შენიშვნა 10.4.7. ფუბინის თეორემის ძალით, ზომათა ნამრავლის მიხედვით f ფუნქციის ჯამებადობა იწვევს f-ის განმეორებითი ინტეგრალების

არსებობას და მათ ერთმანეთთან ტოლობას. ქვემოთ ავაგებთ ფუნქციის მაგალითს, რომელიც გვიჩვენებს, რომ განმეორებითი ინტეგრალების არსებობა და ტოლობა, საზოგადოდ, არ იწვევს ფუნქციის ჯამებადობას ნამრავლი ზომის მიხედვით.

(X, S, μ) და (Y, T, ν) სივრცეების როლში ავიღოთ ლებეგის ზომით აღჭურვილი რიცხვითი ღერძი, ე.ი. $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ სივრცე. თეორემა 10.2.1-ის თანახმად, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ სივრცის თავის თავზე ლებეგისეული ნამრავლი გვაძლევს $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_2, \mathrm{m}_2)$ სივრცეს, ე.ი. ლებეგის ზომით აღჭურვილ სიბრტყეს.

ყოველი $p, q \in \mathbb{N}$-სთვის $I_{p,q}$-თი აღვნიშნოთ $[p-1, p) \times [q-1, q)$ კვადრატი. f-ის როლში ავიღოთ $\mathbb{R}^2$-ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც 1-ის ტოლია $I_{p,p}$ სახის კვადრატების წერტილებში, (-1)-ის ტოლია $I_{2p,2p-1}$ და $I_{2p-1,2p}$ სახის კვადრატების წერტილებში (ნახ. 10.2) და ნულის ტოლია ყველა სხვა წერტილში.



ნახ. 10.2.

ცხადია, როგორც f ფუნქცია, ასევე მისი ყოველი კვეთა, ლებეგის აზრით ზომადია. ამავდროულად, ადვილი დასანახია, რომ f-ის ნებისმიერი კვეთის ინტეგრალი ნულის ტოლია. შედეგად, ორივე განმეორებითი ინტეგრალი ნულის ტოლი გამოდის. მეორე მხრივ, ცხადია, რომ f ფუნქცია არაა ჯამებადი.

აქვე შევნიშნავთ, რომ მსგავსი სქემით აიგება ერთეულოვან კვადრატზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით არაინტეგრებადი ფუნქცია, რომლის განმეორებითი ინტეგრალები ერთმანეთის ტოლია (იხ. ამოცანა 1 პარაგრაფის ბოლოს).

შენიშვნა 10.4.8. ტონელისა და ფუბინის თეორემები საკმაოდ ზოგადი დაშვებების პირობებში გვაძლევენ საშუალებას, ნამრავლი ზომის მიხედვით ინტეგრალის გამოთვლა დავიყვანოთ განმეორებითი ინტეგრალების გამოთვლაზე. თანმხლები შედეგი ამ დროს არის განმეორებითი ინტეგრალების არსებობისა და მათი ერთმანეთთან ტოლობის ფაქტი. საზოგადოდ, არ უნდა

ვიფიქროთ, რომ განმეორებითი ინტეგრალები (მათი არსებობის შემთხვევაში) ყოველთვის ერთმანეთის ტოლია. ავაგოთ შესაბამისი მაგალითი.

კვლავ განვიხილოთ ლებეგის ზომიანი რიცხვითი ღერძის თავის თავზე ლებეგისეული ნამრავლი. ყოველი $p, q \in \mathbb{N}$-სთვის $I_{p,q}$-თი აღვნიშნოთ კვადრატი: $[p-1, p) \times [q-1, q)$. f-ის როლში ავიღოთ $\mathbb{R}^2$-ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც 1-ის ტოლია $I_{p,p}$ სახის კვადრატების წერტილებში, (-1)-ის ტოლია $I_{p,p+1}$ სახის კვადრატების წერტილებში და ნულის ტოლია ყველა სხვა წერტილში. ცხადია, როგორც f ფუნქცია, ასევე მისი ყოველი კვეთა, ლებეგის აზრით ზომადია. ამავდროულად, ადვილი დასანახია, რომ f^y კვეთის ინტეგრალი ნულის ტოლია ყოველი y-სთვის, ხოლო f_x კვეთის ინტეგრალი 1-ის ტოლია, თუ $x \in [0, 1)$ და ნულის ტოლია სხვა შემთხვევაში. აღნიშნულიდან გამომდინარე გვექნება,

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\mathrm{m}_1(x) \right] d\mathrm{m}_1(y) = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\mathrm{m}_1(y) \right] d\mathrm{m}_1(x) = 1.$$

აქვე შევნიშნავთ, რომ მსგავსი სქემით აიგება ერთეულოვან კვადრატზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქცია, რომლის განმეორებითი ინტეგრალები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია (იხ. ამოცანა 2 პარაგრაფის ბოლოს).

შენიშვნა 10.4.9. თეორემა 10.4.1 და თეორემა 10.4.2 იმ შემთხვევაში, როცა (X, S, μ) და (Y, T, ν) სივრცეები წარმოადგენენ ლებეგის ზომით აღჭურვილ ერთგანზომილებიან მონაკვეთებს, დამტკიცებული იყო შესაბამისად ლ. ტონელის (1909) და გ. ფუბინის (1907) მიერ. მსგავსი შედეგები გარკვეულ დამატებით პირობებში მანამდე მიღებული ჰქონდა ა. ლებეგს (1904).

ამოცანები

1. ვთქვათ, $\Delta_p = [1 - 1/2^{p-1}, 1 - 1/2^p)$ და $I_{p,q} = \Delta_p \times \Delta_q$ $(p, q \in \mathbb{N})$. f იყოს $[0, 1)^2$-ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც მუდმივია ყოველ $I_{p,q}$ მართკუთხედზე და რომლის ინტეგრალი ლებეგის m_2 ზომის მიხედვით: 1-ის ტოლია $I_{p,p}$ სახის მართკუთხედებზე, (-1)-ის ტოლია $I_{2p,2p-1}$ და $I_{2p-1,2p}$ სახის მართკუთხედებზე და 0-ის ტოლია ყველა დანარჩენ $I_{p,q}$ მართკუთხედზე. აჩვენეთ, რომ f-ის განმეორებითი ინტეგრალები (აღებული ლებეგის ერთგანზომილებიანი ზომის მიხედვით) ნულის ტოლია და $f \notin L([0, 1)^2, \mathrm{m}_2)$.
2. ვთქვათ, $\Delta_p = [1 - 1/2^{p-1}, 1 - 1/2^p)$ და $I_{p,q} = \Delta_p \times \Delta_q$ $(p, q \in \mathbb{N})$. f იყოს $[0, 1)^2$-ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც მუდმივია ყოველ $I_{p,q}$ მართკუთხედზე და რომლის ინტეგრალი ლებეგის m_2 ზომის მიხედვით: 1-ის ტოლია $I_{p,p}$ სახის მართკუთხედებზე, (-1)-ის ტოლია $I_{p+1,p}$ სახის მართკუთხედებზე და 0-ის ტოლია ყველა დანარჩენ $I_{p,q}$ მართკუთხედზე.

აჩვენეთ, რომ f-ის განმეორებითი ინტეგრალები (აღებული ლებეგის ერთ-განზომილებიანი ზომის მიხედვით) ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

3. დაამტკიცეთ კავალიერის პრინციპი: ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) σ-შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. თუ E და F ზომადი სიმრავლეებია $X \times Y$-ში და $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ ყოველი (თითქმის ყოველი) $x \in X$-სთვის, მაშინ

$$(\mu \otimes \nu)(E) = (\mu \otimes \nu)(F).$$

§ 5. ფუბინისა და ტონელის თეორემები ზომების ბორელისეული ნამრავლისათვის

ქვემოთ მოცემული ორი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ბორელისეული ნამრავლის მიხედვით ზომადი როგორც სიმრავლის, ასევე ფუნქციის ნებისმიერი კვეთა ზომადია.

თეორემა 10.5.1. თუ $E \in \sigma a(\mathrm{S} \times \mathrm{T})$, მაშინ $E_x \in \mathrm{T}$ და $E^y \in \mathrm{S}$ ყოველი $x \in X$ და $y \in Y$ წერტილებისათვის.

დამტკიცება. Δ-თი აღვნიშნოთ ყველა იმ $E \in \sigma a(\mathrm{S} \times \mathrm{T})$ სიმრავლის კლასი, რომლის ნებისმიერი E_x კვეთა ν-ზომადია, ე.ი. ეკუთვნის T კლასს. დავადგინოთ, რომ $\Delta = \sigma a(\mathrm{S} \times \mathrm{T})$. საამისოდ საკმარისია ვაჩვენოთ შემდეგი ორი წინადადების სამართლიანობა:

1) ყოველი $A \times B$ მართკუთხედი ეკუთვნის Δ კლასს;

2) Δ არის σ-ალგებრა.

პირველი წინადადება გამომდინარეობს იქედან, რომ: $[A \times B]_x = \emptyset$, როცა $x \notin A$ და $[A \times B]_x = B$, როცა $x \in A$. მეორე წინადადება კი, თავის მხრივ არის შემდეგი სამი წინადადების შედეგი:

i) $X \times Y \in \Delta$;

ii) თუ $E \in \Delta$, მაშინ $[(X \times Y) \setminus E]_x = Y \setminus E_x$. რის გამოც, $(X \times Y) \setminus E \in \Delta$;

iii) თუ $E_k \in \Delta$ $(k \in \mathbb{N})$ და $E = \bigcup_k E_k$, მაშინ $E_x = \bigcup_k [E_k]_x$. რის გამოც, $E \in \Delta$.

ანალოგიურ მსჯელობას გამოვიყენებთ E^y კვეთების შემთხვევაში.

თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 10.5.2. ვთქვათ, f არის $(\mu \odot \nu)$-ზომადი ფუნქცია. მაშინ f_x კვეთა არის ν-ზომადი ყოველი $x \in X$-სთვის, ხოლო f^y კვეთა არის μ-ზომადი ყოველი $y \in Y$-სთვის.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილი. ვთქვათ, a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია და $I = [a, \infty]$. გვაქვს, რომ

$$(f_x)^{-1}(I) = \{y : f_x(y) \in I\} = \{y : f(x, y) \in I\} =$$

$$= \{y : (x, y) \in f^{-1}(I)\} = [f^{-1}(I)]_x.$$

შედეგად, თეორემა 10.5.1-ის გათვალისწინებით, $(f_x)^{-1}(I) \in \mathrm{T}$. რითაც f_x ფუნქციის ν-ზომადობა დადგენილია. მსგავსად დამტკიცდება f^y კვეთების μ-ზომადობა. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

არაუარყოფითი $(\mu\odot\nu)$-ზომადი ფუნქციისათვის **ტონელის თვისება** $(\mu, \nu, \mu\odot\nu)$ **სამეულის მიმართ** (მოკლედ, ტონელის თვისება) განისაზღვრება მსგავსად ტონელის თვისებისა $(\mu, \nu, \mu \otimes \nu)$ სამეულის მიმართ, ოღონდ იმ განსხვავებით, რომ პირველ და მეორე თვისებებში მოითხოვება ყოველი კვეთის ზომადობა, ხოლო ჯერადი ინტეგრალი განიხილება $\mu \odot \nu$ ზომის მიმართ.

$f \in L(X\times Y, \mu\odot\nu)$ ფუნქციისათვის **ფუბინის თვისება** $(\mu, \nu, \mu\odot\nu)$ **სამეულის მიმართ** (მოკლედ, ფუბინის თვისება) განისაზღვრება მსგავსად ფუბინის თვისებისა $(\mu, \nu, \mu \otimes \nu)$ სამეულის მიმართ, იმ განსხვავებით, რომ ჯერადი ინტეგრალი განხილული უნდა იქნას $\mu \odot \nu$ ზომის მიმართ.

ტონელისა და ფუბინის თეორემები სამართლიანია ზომების ბორელისეული ნამრავლისთვისაც.

თეორემა 10.5.3. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია. მაშინ $X \times Y$-ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu \odot \nu)$-ზომად ფუნქციას, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი კლასით, აქვს ტონელის თვისება.

თეორემა 10.5.4. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია. მაშინ ნებისმიერ $f \in L(X \times Y, \mu \odot \nu)$ ფუნქციას, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი კლასით, აქვს ფუბინის თვისება.

შედეგი 10.5.1. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია σ-შემოსაზღვრულობის თვისებით. მაშინ $X\times Y$-ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu\odot\nu)$-ზომად f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება, ხოლო ნებისმიერ $f \in L(X \times Y, \mu \odot \nu)$ ფუნქციას აქვს ფუბინის თვისება.

ამრიგად, განსხვავებით ლებეგისეული ნამრავლისაგან, სივრცეების სისრულის მოთხოვნა შეიძლება საერთოდ მოვხსნათ. დამტკიცებები მიმდინარეობს ლებეგისეული ნამრავლის შემთხვევაში გამოყენებული სქემის მიხედვით და მათში კიდევ უფრო ნაკლებია ტექნიკური დეტალები. კერძოდ, თეორემა 10.5.3-ის დამტკიცება ეფუძნება უშუალოდ თეორემა 10.3.1-ს.

შენიშვნა 10.5.1. მრავალგანზომილებიანი ლებეგის ზომის მიხედვით აღებული ინტეგრალის დაყვანა დაბალგანზომილებიანი ლებეგის ზომების მიხედვით აღებულ განმეორებით ინტეგრალზე შეუძლებელია ბორელისეული ნამრავლის

კონსტრუქციის მეშვეობით. ეს გამოწვეულია იმით, რომ ლებეგის ზომა არ წარმოდგება დაბალგანზომილებიანი ლებეგის ზომების ბორელისეული ნამრავლის სახით, ე.ი.

$$\mathrm{m}_{p+q} \neq \mathrm{m}_p \odot \mathrm{m}_q.$$

ეს, თავის მხრივ, გამომდინარეობს იქედან, რომ $\mathrm{m}_p \odot \mathrm{m}_q$ არაა სრული ზომა, მაშინ, როცა m_{p+q} ლებეგის ზომა სრულია. $\mathrm{m}_p \odot \mathrm{m}_q$ ზომის არასრულობის დასადგენად უნდა განვიხილოთ $A \neq \emptyset, \mathrm{m}_p(A) = 0$, სიმრავლე და $B \subset \mathbb{R}^q, B \notin \mathcal{L}_q$, სიმრავლე. მაშინ $A \times B \subset A \times \mathbb{R}^q$ და $(\mathrm{m}_p \odot \mathrm{m}_q)(A \times \mathbb{R}^q) = 0$, მაგრამ თეორემა 10.5.1-ის ძალით, $A \times B \notin \sigma a(\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q)$.

შენიშვნა 10.5.2. წინა შენიშვნის გათვალისწინებით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ სრული ზომების ბორელისეული ნამრავლი საზოგადოდ არაა სრული ზომა. უფრო მეტიც, თუ გავაანალიზებთ ჩატარებულ მსჯელობას, შეიძლება დავამტკიცოთ შემდეგი წინადადება: ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) სივრცეები ისეთებია, რომ მოიძებნებიან $A \neq \emptyset, \mu(A) = 0$, და $B \subset Y, B \notin \mathrm{T}$, სიმრავლეები. მაშინ μ და ν ზომების ბორელისეულ ნამრავლს არა აქვს სისრულის თვისება.

შენიშვნა 10.5.3. თეორემა 10.5.3-ში ფუნქციის საყრდენთან დაკავშირებული მოთხოვნა არსებითია. ადვილი დასანახია, რომ ამის დამადასტურებლად გამოდგება ზომათა ლებეგისეული ნამრავლის შემთხვევაში მსგავსი მიზნით აგებული სივრცეებისა და ფუნქციის მაგალითი (იხ. შენიშვნა 10.4.3).

შენიშვნა 10.5.4. ფუბინის თეორემაში დგინდება ფუნქციის თითქმის ყოველი კვეთის ჯამებადობა. მეტის მიღწევა საზოგადოდ შეუძლებელია. ამაში დასარწმუნებლად (X, S, μ) და (Y, T, ν) სივრცეების როლში ავიღოთ ლებეგის ზომით აღჭურვილი რიცხვითი ღერძი. ვთქვათ, $A \subset \mathbb{R}$ ნებისმიერი ნული ზომის სიმრავლეა. განვიხილოთ ფუნქცია, რომელიც ∞-ის ტოლია $A \times \mathbb{R}$ სიმრავლეზე და ნულის ტოლია მის გარეთ. ადვილი დასანახია, რომ $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathrm{m}_1 \odot \mathrm{m}_1)$ და $f_x \notin L(\mathbb{R}, \mathrm{m}_1)$, როცა $x \in A$. ამრიგად, შესაძლებელია ისეთი ჯამებადი ფუნქციის აგება, რომელსაც წინასწარ დასახელებული ნულზომიანი ფუძის მიხედვით აღებული კვეთები არაჯამებადი აქვს.

შენიშვნა 10.5.5. ადვილი შესამოწმებელია, რომ 10.4.7 და 10.4.8 შენიშვნებში განმეორებით ინტეგრალებთან დაკავშირებით აგებული მაგალითები იგივე მიზნებისათვის გამოდგება ზომათა ბორელისეული ნამრავლის შემთხვევაშიც.

§ 6. ფუბინისა და ტონელის თეორემების ზოგიერთი გამოყენება

1. ზომათა ნამრავლის მიხედვით ფუნქციის ჯამებადობის კრიტერიუმი. ტონელის თეორემიდან, იმის გათვალისწინებით, რომ ფუნქციის ჯამებადობა

მისი მოდულის ჯამებადობის ტოლფასია, გამომდინარეობს ნამრავლი ზომის მიხედვით ფუნქციის ჯამებადობის შემდეგი სასარგებლო კრიტერიუმი.

თეორემა 10.6.1. ვთქვათ, (X, S, μ) და (Y, T, ν) ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. მაშინ ნებისმიერი $(\mu \otimes \nu)$-ზომადი f ფუნქციისათვის, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი კლასით, შემდეგი სამი პირობა ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

$$f \in L(X \times Y, \mu \otimes \nu),$$

$$\int_X \bigg(\int_Y |f| d\nu \bigg) d\mu < \infty,$$

$$\int_Y \bigg(\int_X |f| d\mu \bigg) d\nu < \infty.$$

თეორემა 10.6.1-ის თანახმად, საკმაოდ ზოგად პირობებში ზომადი ფუნქციის მოდულისათვის ერთ-ერთი განმეორებითი ინტეგრალის სასრულობა ტოლფასია ნამრავლი ზომის მიხედვით ფუნქციის ჯამებადობის. ეს წინადადება ხშირად გამოიყენება ფუნქციის ჯამებადობის შემოწმებისას.

შენიშვნა 10.6.1. თეორემა 10.5.3-ზე დაყრდნობით მივიღებთ ანალოგიურ თეორემას ზომების ბორელისეული ნამრავლის შემთხვევაში, თანაც, ამ დროს შესაძლებელია სივრცეთა სისრულის მოთხოვნის მოხსნა.

2. ლებეგის ინტეგრალის გეომეტრიული შინაარსი. სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 10.6.2. ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო f არის X-ზე განსაზღვრული არაუარყოფითი μ-ზომადი ფუნქციაა. მაშინ f-ის გრაფიკქვეშა სიმრავლე:

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in X,\ 0 < y < f(x)\}$$

ეკუთვნის $\sigma a(\mathrm{S} \times \mathcal{L})$ კლასს, ე.ი. ზომადია $\mu \odot \mathrm{m}$ ბორელისეული ნამრავლის მიხედვით.

დამტკიცება. თავდაპირველად განვიხილოთ მარტივი f ფუნქციის შემთხვევა. თუ f იგივურად ნულის ტოლია, მაშინ $\Gamma_f = \emptyset$; ხოლო თუ f არაა იგივურად ნულოვანი ფუნქცია, მაშინ გვექნება, რომ

$$\Gamma_f = \bigcup_{a \in \{f > 0\}} (\{f = a\} \times (0, a)).$$

ცხადია, ორივე შემთხვევაში $\Gamma_f \in \sigma a(\mathrm{S} \times \mathcal{L})$.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი სიტუაცია. ვიპოვოთ არაუარყოფით მარტივ ფუნქციათა ზრდადი (f_n) მიმდევრობა, რომელიც f ფუნქციისაკენ კრებადია ყოველ წერტილში. მაშინ გვექნება,

$$\Gamma_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_{f_n}.$$

საიდანაც, $\Gamma_{f_n} \in \sigma a(\mathrm{S} \times \mathcal{L})$ $(n \in \mathbb{N})$ პირობების გათვალისწინებით ვასკვნით, რომ $\Gamma_f \in \sigma a(\mathrm{S} \times \mathcal{L})$. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 10.6.3. ვთქვათ, (X, S, μ) σ**-შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა, ხოლო** f **მასზე განსაზღვრული არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციაა. მაშინ**

$$(\mu \odot \mathrm{m})(\Gamma_f) = \int_X f d\mu,$$

ე.ი. ფუნქციის გრაფიკქვეშა სიმრავლის ზომა მისი ლებეგის ინტეგრალის ტოლია.

დამტკიცება. დამტკიცება ეფუძნება შედეგი 10.5.1-ის გამოყენებას

$$(X, \mathrm{S}, \mu), \quad (Y, \mathrm{T}, \nu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathrm{m})$$

სივრცეების ბორელისეული ნამრავლისა და $E = \Gamma_f$ სიმრავლისათვის. მართლაც, ადვილი დასანახია, რომ $[\Gamma_f]_x = (0, f(x))$, თუ $f(x) > 0$ და $[\Gamma_f]_x = \emptyset$, თუ $f(x) = 0$. შედეგად,

$$\mathrm{m}([\Gamma_f]_x) = f(x) \quad (x \in X).$$

საიდანაც თეორემა 10.6.2-ის და შედეგი 10.5.1-ის ძალით გვექნება,

$$(\mu \odot \mathrm{m})(\Gamma_f) = \int_X \mathrm{m}([\Gamma_f]_x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 10.6.2. თეორემა 10.6.3 ადასტურებს, რომ ლებეგის ინტეგრალი ახორციელებს მისი განსაზღვრისას შემოღებულ მიზანს: ინტეგრალი ზომავს გრაფიკქვეშა სიმრავლეს.

შენიშვნა 10.6.3. [34] სახელმძღვანელოში ლებეგის ინტეგრალის თეორია აგებულია $(\mu \odot \mathrm{m})(\Gamma_f) = \int_X f d\mu$ ტოლობის საფუძველზე. სახელდობრ, ჯერ შესწავლილია ზომათა ნამრავლის თვისებები და ამის შემდეგ $\int_X f d\mu$ ლებეგის ინტეგრალი განისაზღვრება როგორც გრაფიკქვეშა სიმრავლის ზომის მნიშვნელობა (μ და ლებეგის ერთგანზომილებიანი m ზომების ნამრავლის მიხედვით): $(\mu \odot \mathrm{m})(\Gamma_f)$.

3. ნახვევის ცნება. შევთანხმდეთ, რომ $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისათვის $\|f\|$ აღნიშნავს $\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mathrm{m}$ ინტეგრალს.

თეორემა 10.6.4. ვთქვათ, $f \in L(\mathbb{R}^n)$ და $g \in L(\mathbb{R}^n)$. მაშინ:

- **$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)|d\mathrm{m}(t) < \infty$ პირობის დამაკმაყოფილებელი ყველა $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილის E სიმრავლე სრული ზომისაა;**
- **თუ $f * g$ აღნიშნავს შემდეგნაირად განსაზღვრულ ფუნქციას: $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)d\mathrm{m}(t)$, როცა $x \in E$ და $(f*g)(x) = 0$, როცა $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, მაშინ $f * g \in L(\mathbb{R}^n)$ და $\|f * g\| \leq \|f\| \, \|g\|$.**

თეორემა 10.6.4-ის მეშვეობით განსაზღვრულ $f * g$ ფუნქციას f და g **ფუნქციების ნახვევი** ეწოდება.

შენიშვნა 10.6.4. ორი ჯამებადი ფუნქციის ნამრავლი შეიძლება არ იყოს ჯამებადი. ამიტომ ნახვევის განმსაზღვრელი $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)d\mathrm{m}(t)$ ინტეგრალის არსებობა (რომელიმე ერთი x წერტილისთვისაც კი) არაა თავისთავად ცხადი ფაქტი.

ვთქვათ, X და T არაცარიელი ღია სიმრავლეებია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. $\varphi : T \to X$ ასახვას ეწოდება **დიფეომორფიზმი**, თუ φ ბიექციაა და როგორც φ, ასევე φ^{-1}, არიან უწყვეტად დიფერენცირებადი.

თეორემა 10.6.4-ის დამტკიცებისათვის დაგვჭირდება შემდეგი თეორემა დიფეომორფული ასახვისას ლებეგის ზომის გარდაქმნის შესახებ.

თეორემა 10.6.5. ვთქვათ, X და T არაცარიელი ღია სიმრავლეებია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, ხოლო $\varphi : T \to X$ ასახვა არის დიფეომორფიზმი. მაშინ ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი $E \subset T$ სიმრავლისათვის $\varphi(E)$ ანასახი ასევე ლებეგის აზრით ზომადია და

$$\mathrm{m}[\varphi(E)] = \int_E |J_\varphi(t)|d\mathrm{m}(t),$$

სადაც J_φ აღნიშნავს φ ასახვის იაკობიანს.

ამ თეორემის დამტკიცება მოცემულია, მაგალითად, [6] და [21] სახელმძღვანელოებში.

შენიშვნა 10.6.5. ვთქვათ, X და T არაცარიელი ღია სიმრავლეებია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, ხოლო $\varphi : T \to X$ ასახვა არის დიფეომორფიზმი. მაშინ ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი $E \subset X$ სიმრავლის $\varphi^{-1}(E)$ წინასახე ასევე ლებეგის აზრით ზომადია. ამაში დასარწმუნებლად უნდა გავითვალისწინოთ, რომ φ^{-1} ასახვა ასევე დიფეომორფიზმია და გამოვიყენოთ 10.6.5 თეორემა φ^{-1} ასახვისათვის.

თეორემა 10.6.4-ის დამტკიცებისათვის ასევე დაგვჭირდება შემდეგი დებულება.

თეორემა 10.6.6. ვთქვათ, f არის $\mathbb{R}^n$ სივრცეზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქცია, ხოლო F_1, F_2 და F_3 არიან $\mathbb{R}^{2n}$ სივრცეზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქციები: $F_1(x,t) = f(x)$, $F_2(x,t) = f(t)$ და $F_3(x,t) = f(x-t)$ $(x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^n)$. მაშინ F_1, F_2 და F_3 ფუნქციები არიან ლებეგის აზრით ზომადი.

დამტკიცება. ნებისმიერი $a \in \mathbb{R}$-სთვის გვაქვს, რომ

$$\{F_1 > a\} = \{f > a\} \times \mathbb{R}^n, \quad \{F_2 > a\} = \mathbb{R}^n \times \{f > a\}.$$

საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი ასევე ლებეგის აზრით ზომადია (იხ. შენიშვნა 10.2.1), დავასკვნით F_1 და F_2 ფუნქციების ლებეგის აზრით ზომადობას.

$\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ იყოს შემდეგნაირად განსაზღვრული ასახვა:

$$\varphi(x,t) = (x-t, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^n).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ φ ასახვა წარმოადგენს დიფეომორფიზმს, ამასთან, გვაქვს, რომ $F_3 = F_1 \circ \varphi$. საიდანაც, 10.6.5 შენიშვნისა და 7.2.1 თეორემის საფუძველზე გამომდინარეობს F_3 ფუნქციის ლებეგის აზრით ზომადობა. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 10.6.4-ის დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{R}^{2n}$ სივრცეზე $h(x,t) = f(x-t)g(t)$ ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია ზომადია ლებეგის აზრით. მართლაც, h_1-ით და h_2-ით აღვნიშნოთ $\mathbb{R}^{2n}$ სივრცეზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქციები: $h_1(x,t) = f(x-t)$, $h_2(x,t) = g(t)$. თეორემა 10.6.6-ის ძალით h_1 და h_2 ფუნქციები ლებეგის აზრით ზომადი არიან, ამიტომ $h = h_1 h_2$ ტოლობის გათვალისწინებით ლებეგის აზრით ზომადი იქნება h ფუნქციაც.

გამოვთვალოთ $\int[\int |h(x,t)| d\mathrm{m}(x)] d\mathrm{m}(t)$ განმეორებითი ინტეგრალი:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |h(x,t)| d\mathrm{m}(x) \right] d\mathrm{m}(t) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)| d\mathrm{m}(x) \right] |g(t)| d\mathrm{m}(t) = \|f\| \, \|g\| < \infty. \tag{1}$$

აქ გავითვალისწინეთ, რომ ლებეგის ზომის ძვრის მიმართ ინვარიანტულობისა და თეორემა 8.10.1-ის ძალით, $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)| d\mathrm{m}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d\mathrm{m}(x)$ ყოველი $t \in \mathbb{R}^n$-სთვის.

(1)-დან ტონელის თეორემის საფუძველზე ვღებულობთ h ფუნქციის ჯამებადობას ($2n$-განზომილებიანი ლებეგის ზომის მიხედვით). შემდეგ კი, h-ის მიმართ ფუბინის თეორემის გამოყენება საშუალებას გვაძლევს, დავასკვნათ

თითქმის ყოველი h_x კვეთის ჯამებადობა, ანუ

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)g(t)|d\mathrm{m}(t)$$

ინტეგრალის სასრულობა თითქმის ყოველი x-სთვის, რითაც თეორემის პირველი წინადადება დადგენილია. მეორე წინადადების დასადგენად გამოვიყენოთ ფუბინის თეორემა $|h|$ ფუნქციისათვის და (1) თანაფარდობები, რის საფუძველზეც დავწერთ,

$$\|f*g\| = \int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|d\mathrm{m}(x) \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |h(x,t)|d\mathrm{m}(t)\right] d\mathrm{m}(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |h(x,t)|d\mathrm{m}(x)\right] d\mathrm{m}(t) = \|f\|\,\|g\|.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

ამოცანები

1. ვთქვათ, $f \in L(X,\mu)$, $g \in L(Y,\nu)$ და $h(x,y) = f(x)g(y)$ $(x \in X, y \in Y)$. აჩვენეთ, რომ $h \in L(X \times Y, \mu \odot \nu)$ და
$$\int_{X\times Y} hd(\mu\odot\nu) = \int_X fd\mu \int_Y gd\nu.$$
2. ვთქვათ, $f(x,y) = e^{-xy}\sin x \sin y$ $(x,y \in (0,\infty)$. აჩვენეთ, რომ $f \in L((0,\infty)^2)$.
3. ვთქვათ, f არის ზომიან სივრცეზე განსაზღვრული არაუარყოფითი ზომადი ფუნქცია. დაამტკიცეთ, რომ f-ის გრაფიკქვეშა სიმრავლის მეორე ვარიანტი: $\Gamma_f^* = \{(x,y) : x \in X,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ ეკუთვნის $\sigma a(\mathrm{S} \times \mathcal{L})$ კლასს და $(\mu \odot \mathrm{m})(\Gamma_f^*) = \int_X fd\mu$.
4. ვთქვათ, f არის ზომიან სივრცეზე განსაზღვრული არაუარყოფითი ზომადი ფუნქცია. დაამტკიცეთ, რომ f-ის გრაფიკი: $\gamma_f = \{(x,y) : x \in X,\ y = f(x)\}$ ეკუთვნის $\sigma a(\mathrm{S} \times \mathcal{L})$ კლასს და $(\mu \odot \mathrm{m})(\gamma_f) = 0$.

§ 7. ფუბინისა და ტონელის თეორემები ნებისმიერი რაოდენობის ზომის ნამრავლისათვის

ტონელისა და ფუბინის თეორემები სამართლიანია ნებისმიერი რაოდენობის ზომების ლებეგისეული ნამრავლისათვის. მოვიყვანოთ თეორემების ჩამოყალიბებისთვის საჭირო განსაზღვრებები და დებულებები.

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ $n \geq 2$.

ვთქვათ, ყოველი $k \in \overline{1,n}$-სთვის X_k არაცარიელი სიმრავლეა, $\mathrm{S}_k \subset 2^{X_k}$ ნახევარრგოლია, ხოლო μ_k არის S_k-ზე განსაზღვრული ზომა.

$\mathrm{S}_1 \times \dots \times \mathrm{S}_n$ განვსაზღვროთ როგორც $A_1 \times \dots \times A_n$ სახის ყველა სიმრავლის კლასი, სადაც $A_1 \in \mathrm{S}_1, \dots, A_n \in \mathrm{S}_n$. $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ განვსაზღვროთ როგორც $\mathrm{S}_1 \times \dots \times \mathrm{S}_n$ კლასზე მოცემული შემდეგი ფუნქცია:

$$(\mu_1 \times \dots \times \mu_n)(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \dots \mu_n(A_n).$$

თეორემა 10.7.1. $\mathrm{S}_1 \times \dots \times \mathrm{S}_n$ კლასი არის ნახევარრგოლი.

თეორემა 10.7.2. $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ ფუნქცია არის ზომა.

10.7.1 და 10.7.2 თეორემები ინდუქციური მსჯელობით მიიღებიან $n = 2$ შემთხვევაში დადგენილი შესაბამისი დებულებებიდან. შევნიშნავთ, რომ ინდუქციის ბიჯის განხორციელებისას უნდა გავაიგივოთ ერთმანეთთან

$$((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) \text{ და } (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

სახის ელემენტები.

$\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ ფუნქციას $\mu_1, \dots, \mu_n$ **ზომების დეკარტული ნამრავლი** ეწოდება.

ვთქვათ, $(X_1, \mathrm{S}_1, \mu_1), \dots, (X_n, \mathrm{S}_n, \mu_n)$ ზომიანი სივრცეებია. $\mu_1, \dots, \mu_n$ **ზომების ლებეგისეული ნამრავლი** (აღნიშვნა: $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$) ეწოდება $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებას. ლებეგისეული ნამრავლის განსაზღვრის არეში შემავალი სიმრავლეების კლასი აღვნიშნოთ $\mathrm{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathrm{S}_n$-თი და მას ვუწოდოთ $\mathrm{S}_1, \dots, \mathrm{S}_n$ **კლასების ლებეგისეული ნამრავლი**. დაბოლოს,

$$(X_1 \times \dots \times X_n,\ \mathrm{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathrm{S}_n,\ \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)$$

სამეულს ვუწოდოთ $(X_k, \mathrm{S}_k, \mu_k)$ **სივრცეების ლებეგისეული ნამრავლი**.

რამდენიმე ზომისა და სივრცის ბორელისეული ნამრავლის განსაზღვრისას უნდა განვიხილოთ $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ ზომის ბორელისეული გაგრძელება.

თეორემა 10.7.3. ზომების ლებეგისეულ ნამრავლს აქვს ასოციაციურობის თვისება, ე.ი. $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3 = (\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$.

თეორემა 10.7.3-ის დამტკიცება ეფუძნება თეორემა 10.2.2-ს.

შევთანხმდეთ, რომ $a_1 \times \dots a_{k-1} \times a_{k+1} \times \dots \times a_n$ სახის ჩანაწერი $k = 1$ და $k = n$ შემთხვევებში შესაბამისად გავიგოთ როგორც $a_2 \times \dots \times a_n$ და $a_1 \times \dots \times a_{n-1}$.

ვთქვათ, $(X_1, \mathrm{S}_1, \mu_1), \dots, (X_n, \mathrm{S}_n, \mu_n)$ ზომიანი სივრცეებია.

$\mathrm{S}_1 \times \dots \times \mathrm{S}_n$ დეკარტულ ნამრავლში შემავალ სიმრავლეებს **მართკუთხედები** ვუწოდოთ. $A_1 \times \dots \times A_n$ მართკუთხედისათვის $A_1, \dots, A_n$ სიმრავლეებს **გვერდები** ვუწოდოთ.

აღვნიშნოთ:

$$Y_k = X_1 \times \dots X_{k-1} \times X_{k+1} \dots X_n,$$

$$\nu_k = \mu_1 \otimes \dots \mu_{k-1} \otimes \mu_{k+1} \otimes \dots \otimes \mu_n.$$

ვთქვათ, f არის $X_1 \times \dots \times X_n$-ზე განსაზღვრული ფუნქცია. ფიქსირებული $y = (x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) \in Y_k$ ელემენტისათვის f_y-ით აღვნიშნოთ f ფუნქციის y-კვეთა, ე.ი. X_k-ზე განსაზღვრული შემდეგი ფუნქცია: $X_k \ni x_k \mapsto f(x_1^0 \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)$.

აღვნიშნოთ აგრეთვე:

$$Y_{k,f} = \{y \in Y_k : f_y \text{ არის } \mu_k\text{-ზომადი}\},$$

$$Y_{k,f}^* = \{y \in Y_k : f_y \text{ არის } \mu_k\text{-ზომადი და } f_y \in L(X_k, \mu_k)\}.$$

f ფუნქციას ვუწოდოთ μ_k**-ზომადი**, თუ $Y_{k,f}$ სიმრავლე სრული ზომისაა Y_k-ში ν_k ზომის მიხედვით. შევთანხმდეთ აგრეთვე, რომ $L(X_k, \mu_k)$-ში შემავალ ფუნქციას ვუწოდოთ μ_k-ჯამებადი.

f ფუნქციას ვუწოდოთ μ_k**-ჯამებადი**, თუ $Y_{k,f}^*$ სიმრავლე სრული ზომისაა Y_k-ში ν_k ზომის მიხედვით.

შევთანხმდეთ აგრეთვე, რომ $L(X_k, \mu_k)$-ში შემავალ ფუნქციას ვუწოდოთ μ_k**-ჯამებადი**.

განმეორებითი ინტეგრალის ჩანაწერში, $\int_{X_k} f d\mu_k$-ის ნაცვლად, ქვემოთ, მოხერხებულობისათვის, გამოყენებული იქნება $\int_{X_k} d\mu_k f$ სახის ჩანაწერი.

თუ f არის μ_k-ზომადი არაუარყოფითი ფუნქცია, მაშინ $\int_{X_k} d\mu_k f$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ Y_k-ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც ყოველ $y \in Y_{k,f}$ წერტილში ღებულობს $\int_{X_k} f_y d\mu_k$ ინტეგრალის ტოლ მნიშვნელობას, ხოლო დანარჩენ წერტილებში კი ნულის ტოლია.

ვთქვათ, π არის ნატურალურ რიცხვთა $\overline{1,n}$ მონაკვეთის რაიმე გადანაცვლება. ვიტყვით, რომ არაუარყოფით $(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)$-ზომად f ფუნქციას აქვს **ტონელის თვისება** π **გადანაცვლების მიმართ**, თუ:

- f არის $\mu_{\pi(n)}$-ზომადი;
- $\int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f$ ფუნქცია არის $\mu_{\pi(n-1)}$-ზომადი;
- $\int_{X_{\pi(n-1)}} d\mu_{\pi(n-1)} \int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f$ ფუნქცია არის $\mu_{\pi(n-2)}$-ზომადი;

და ა.შ.

- $\int_{X_{\pi(2)}} d\mu_{\pi(2)} \int_{X_{\pi(3)}} d\mu_{\pi(3)} \cdots \int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f$ ფუნქცია არის $\mu_{\pi(1)}$-ზომადი;
- f ფუნქციის განმეორებითი ინტეგრალი π გადანაცვლების მიხედვით და ჯერადი ინტეგრალი ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_{X_{\pi(1)}} d\mu_{\pi(1)} \int_{X_{\pi(2)}} d\mu_{\pi(2)} \cdots \int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f =$$

$$= \int_{X_1 \times \dots \times X_n} f d(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n).$$

ვიტყვით, რომ $(\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n)$-ზომად f ფუნქციას აქვს **ტონელის თვისება**, თუ მას აქვს ტონელის თვისება ნებისმიერი π გადანაცვლების მიმართ.

ქვემოთ, ფუბინის თვისების ფორმულირებისას, $\int_{X_k} d\mu_k f$ ჩანაწერს ენიჭება რამდენადმე განსხვავებული შინაარსი. კერძოდ, თუ f არის μ_k-ჯამებადი ფუნქცია, მაშინ $\int_{X_k} d\mu_k f$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ Y_k-ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც ყოველ $y \in Y^*_{k,f}$ წერტილში ღებულობს $\int_{X_k} f_y d\mu_k$ ინტეგრალის ტოლ მნიშვნელობას, ხოლო დანარჩენ წერტილებში კი ნულის ტოლია.

ვთქვათ, π არის $\overline{1,n}$ მონაკვეთის რაიმე გადანაცვლება. ვიტყვით, რომ $f \in L(X_1 \times \cdots \times X_n, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$ ფუნქციას აქვს **ფუბინის თვისება π გადანაცვლების მიმართ**, თუ:

- f არის $\mu_{\pi(n)}$-ჯამებადი;
- $\int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f$ ფუნქცია არის $\mu_{\pi(n-1)}$-ჯამებადი;
- $\int_{X_{\pi(n-1)}} d\mu_{\pi(n-1)} \int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f$ ფუნქცია არის $\mu_{\pi(n-2)}$-ჯამებადი;
  და ა.შ.
- $\int_{X_{\pi(2)}} d\mu_{\pi(2)} \int_{X_{\pi(3)}} d\mu_{\pi(3)} \cdots \int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f$ ფუნქცია არის $\mu_{\pi(1)}$-ჯამებადი;
- f ფუნქციის განმეორებითი ინტეგრალი π გადანაცვლების მიხედვით და ჯერადი ინტეგრალი ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_{X_{\pi(1)}} d\mu_{\pi(1)} \int_{X_{\pi(2)}} d\mu_{\pi(2)} \cdots \int_{X_{\pi(n)}} d\mu_{\pi(n)} f =$$
$$= \int_{X_1\times\cdots\times X_n} f d(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n).$$

ვიტყვით, რომ $f \in L(X_1\times\cdots\times X_n, \mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n)$ ფუნქციას აქვს **ფუბინის თვისება**, თუ მას აქვს ფუბინის თვისება ნებისმიერი π გადანაცვლების მიმართ.

თეორემა 10.7.4. ვთქვათ, $(X_1, \mathrm{S}_1, \mu_1), \ldots, (X_n, \mathrm{S}_n, \mu_n)$ ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. მაშინ $X_1 \times \cdots \times X_n$-ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$-ზომად ფუნქციას, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი კლასით, აქვს ტონელის თვისება.

თეორემა 10.7.5. ვთქვათ, $(X_1, \mathrm{S}_1, \mu_1), \ldots, (X_n, \mathrm{S}_n, \mu_n)$ ზომიანი სივრცეებია სისრულის თვისებით. მაშინ ნებისმიერ $f \in L(X_1\times\cdots\times X_n, \mu_1\otimes \cdots \otimes \mu_n)$ ფუნქციას, რომლის საყრდენი შეიძლება დაიფაროს სასრული ზომის გვერდების მქონე მართკუთხედების არაუმეტეს თვლადი კლასით, აქვს ფუბინის თვისება.

შედეგი 10.7.1. ვთქვათ, $(X_1, \mathrm{S}_1, \mu_1), \ldots, (X_n, \mathrm{S}_n, \mu_n)$ ზომიანი სივრცეებია σ-შემოსაზღვრულობისა და სისრულის თვისებებით. მაშინ $X_1 \times$

$\cdots \times X_n$-ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით $(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$-ზომად f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება, ხოლო ნებისმიერ $f \in L(X_1 \times \cdots \times X_n, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$ ფუნქციას აქვს ფუბინის თვისება.

შედეგი 10.7.2. ვთქვათ, $(X_1, \mathrm{S}_1, \mu_1) = \cdots = (X_n, \mathrm{S}_n, \mu_n) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$. **მაშინ $\mathbb{R}^n$-ზე განსაზღვრულ ნებისმიერ არაუარყოფით და ლებეგის აზრით ზომად f ფუნქციას აქვს ტონელის თვისება, ხოლო ნებისმიერ $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციას აქვს ფუბინის თვისება**.

10.7.4 და 10.7.5 თეორემები ინდუქციური მსჯელობით მიიღებიან ორი ზომის ნამრავლისათვის დადგენილი ტონელისა და ფუბინის თეორემებიდან, ამასთან, ინდუქციის ბიჯის განხორციელებისას უნდა ვისარგებლოთ ზომების ნამრავლის ასოციაციურობის თვისებით.

ტონელისა და ფუბინის თეორემების შესაბამისი ვარიანტები (სახელდობრ, 10.5.3 და 10.5.4 თეორემების ანალოგები) სამართლიანია ნებისმიერი რაოდენობის ზომის ბორელისეული ნამრავლის შემთხვევაშიც.

თ ა ვ ი 11

L^p სივრცეები

p ხარისხში ჯამებადი ფუნქციების სივრცეები ძალზე მნიშვნელოვანია მათემატიკის მრავალი მიმართულებით (ფუნქციონალური ანალიზი, დიფერენციალური განტოლებები, ფურიეს ანალიზი, ალბათობის თეორია). წინამდებარე თავში გადმოცემულია აღნიშნულ სივრცეთა ძირითადი თვისებები.

§ 1. L^p სივრცის განსაზღვრა

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა. თუ დამატებით რაიმე არ იქნება ნათქვამი, მაშინ ასევე ვიგულისხმებთ, რომ p არის რიცხვი $[1, \infty)$ შუალედიდან.

$L^p(X, \mu)$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ ყველა იმ μ-ზომადი $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ფუნქციის კლასი, რომლისთვისაც

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

უკანასკნელი პირობის დამაკმაყოფილებელ ფუნქციას p **ხარისხში ჯამებადს** უწოდებენ. ცხადია, $L^1(X, \mu) = L(X, \mu)$. $L^p(X, \mu)$ კლასს, ზოგჯერ, სიმოკლისათვის, L^p-თი აღნიშნავენ.

შევნიშნავთ, რომ $\overline{\mathbb{R}}$-ში ალგებრულ მოქმედებებთან დაკავშირებით ვისარგებლებთ §7.3-ში მოცემული შეთანხმებებით.

შემდეგი მარტივი დებულების ძალით, $L^p(X, \mu)$ კლასი წარმოადგენს წრფივ სივრცეს ფუნქციათა შეკრებისა და ფუნქციის სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

ლემა 11.1.1. თუ $f \in L^p(X, \mu)$ და $g \in L^p(X, \mu)$, მაშინ $f + g \in L^p(X, \mu)$ და $af \in L^p(X, \mu)$ $(a \in \mathbb{R})$.

დამტკიცება. ნებისმიერი $a, b \in \mathbb{R}$ რიცხვებისათვის გვაქვს,

$$|a + b|^p \leq [2 \max(|a|, |b|)]^p = 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leq 2^p(|a|^p + |b|^p).$$

შედეგად, ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისათვის დავწერთ,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

თუ ვაინტეგრებთ ამ წერტილოვანი შეფასების ორივე მხარეს, დავასკვნით, რომ $f+g\in L^p(X,\mu)$. $L^p(X,\mu)$-ს ჩაკეტილობა სკალარზე გამრავლების მიმართ მიიღება ინტეგრალის ერთგვაროვნების საფუძველზე. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

$L^p(X,\mu)$ წრფივ სივრცეში შესაძლებელია ნორმის შემოღება, რის გასაკეთებლადაც დაგვჭირდება რამდენიმე თავისთავად საინტერესო უტოლობის დამტკიცება.

$p>1$ შემთხვევაში q-თი აღვნიშნოთ რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ტოლობა. ასეთ p და q რიცხვებს ურთიერთშეუღლებულებს უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ: ა) $q=\frac{p}{p-1}$ და $p=\frac{q}{q-1}$; ბ) თუ $p=2$, მაშინ $q=2$; გ) თუ $p\to 1$, მაშინ $q\to\infty$; დ) თუ $p\to\infty$, მაშინ $q\to 1$.

ლემა 11.1.2. (იუნგის უტოლობა). თუ $a,b\in[0,\infty)$ და $1<p<\infty$, მაშინ

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ჩავთვალოთ, რომ $a>0$ და $b>0$. ფიქსირებული a პარამეტრისათვის განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ფუნქცია:

$$f(t)=\frac{a^p}{p}+\frac{t^q}{q}-at\qquad(t>0).$$

ვაჩვენოთ, რომ $f(t)\ge 0$ ყოველი $t>0$-სთვის, რითაც იუნგის უტოლობა დამტკიცებული იქნება.

განვიხილოთ f ფუნქციის წარმოებული: $f'(t)=t^{q-1}-a$. ცხადია, $f'(t)<0$, როცა $t\in(0,a^{\frac{1}{q-1}})$ და $f'(t)>0$, როცა $t\in(a^{\frac{1}{q-1}},\infty)$. შედეგად, f კლებადია $(0,a^{\frac{1}{q-1}}]$ შუალედზე და ზრდადია $[a^{\frac{1}{q-1}},\infty)$ შუალედზე. აქედან გამომდინარე, $t=a^{\frac{1}{q-1}}$ წერტილში f ფუნქცია აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას. თუ გამოვთვლით აღნიშნულ მინიმუმს, გვექნება,

$$\min f=f(a^{\frac{1}{q-1}})=\frac{a^p}{p}+\frac{a^{\frac{q}{q-1}}}{q}-a^{1+\frac{1}{q-1}}=\frac{a^p}{p}+\frac{a^p}{q}-a^p=0.$$

რითაც უტოლობა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 11.1.3. (ჰელდერის უტოლობა). თუ $1<p<\infty$, $f\in L^p(X,\mu)$ და $g\in L^q(X,\mu)$, მაშინ $fg\in L(X,\mu)$ და

$$\int_X|fg|d\mu\le\left(\int_X|f|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X|g|^qd\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $M = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ და $N = \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ f და g ღებულობენ სასრულ მნიშვნელობებს და $M > 0$, $N > 0$. ნებისმიერი $x \in X$-სთვის დავწეროთ იუნგის უტოლობა $a_x = |f(x)|/M$ და $b_x = |g(x)|/N$ რიცხვების შემთხვევაში:

$$\frac{|f(x)g(x)|}{MN} \leq \frac{|f(x)|^p}{pM^p} + \frac{|g(x)|^q}{qN^q}.$$

რის შემდეგაც, უტოლობის ორივე მხარის ინტეგრებით მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{MN}\int_X |fg|d\mu \leq \frac{1}{pM^p}\int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{qN^q}\int_X |g|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

ცხადია, ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 11.1.1. $p = 2$ შემთხვევაში ჰელდერის უტოლობა გვაძლევს შემდეგ შეფასებას:

$$\int_X |fg|d\mu \leq \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}},$$

რომელსაც კოში-შვარცის უტოლობად მოიხსენიებენ.

ლემა 11.1.4. (მინკოვსკის უტოლობა). თუ $f \in L^p(X,\mu)$ და $g \in L^p(X,\mu)$, მაშინ

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

დამტკიცება. $p = 1$ შემთხვევაში უტოლობა უშუალოდ გამომდინარეობს ინტეგრალის თვისებებიდან. განვიხილოთ $p \in (1, \infty)$ შემთხვევა. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ f და g ღებულობენ სასრულ მნიშვნელობებს და $\int_X |f+g|^p d\mu > 0$.

ნებისმიერი $x \in X$-სთვის გვექნება,

$$|f(x)+g(x)|^p \leq |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}.$$

შევნიშნოთ, რომ $(p-1)q = p$ ტოლობის ძალით, $|f+g|^{p-1} \in L^q(X,\mu)$. შედეგად, უკანასკნელი შეფასების მარჯვენა მხარეში მყოფ ფუნქციათა ნამრავლებისთვის ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით დავწერთ,

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+\left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

ახლა, თუ კვლავ გამოვიყენებთ $(p-1)q = p$ ტოლობას და მიღებული შეფასების ორივე მხარეს გავყოფთ $\left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q}$ გამოსახულებაზე, მივიღებთ საჭირო უტოლობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

განვიხილოთ $L^p(X,\mu)$ წრფივ სივრცეზე შემდეგნაირად განსაზღვრული არაუარყოფითი $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ ფუნქცია:

$$\|f\| = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

მას აქვს შემდეგი თვისებები:

1) $f \in L^p$ ფუნქციისათვის $\|f\| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x) = 0$ თითქმის ყველგან,

2) $\|af\| = |a|\,\|f\| \quad (a \in \mathbb{R}, f \in L^p)$,

3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (f, g \in L^p)$.

პირველი და მეორე თვისებები მარტივად მოწმდება, ხოლო მესამე თვისება წარმოადგენს მინკოვსკის უტოლობის შედეგს.

ამრიგად, $\|\cdot\|$ ფუნქციას აქვს $L^p(X,\mu)$ წრფივ სივრცეზე განსაზღვრული ნორმის ყველა თვისება, გარდა შესაძლოა შემდეგისა:

$$\|f\| = 0 \;\; \Rightarrow \;\; f \text{ არის იგივურად ნულოვანი ფუნქცია.}$$

იმისათვის, რომ $\|\cdot\|$ განხილული იქნას როგორც ნორმა $L^p(X,\mu)$ სივრცეზე, მიღებულია თითქმის ყველგან ერთმანეთის ტოლი ფუნქციების ერთმანეთთან გაიგივება. კერძოდ, ნულოვან ელემენტად უნდა ჩავთვალოთ თითქმის ყველგან ნულის ტოლი ყოველი ფუნქცია. ასეთ შემთხვევაში ცხადია, რომ წყვილს - $(L^p(X,\mu), \|\cdot\|)$ უკვე შეგვიძლია შევხედოთ, როგორც ნორმირებულ წრფივ სივრცეს.

შევნიშნოთ, რომ ნორმის შემოღების საკითხის უფრო ფორმალური გადაწყვეტა ხდება შემდეგნაირად. განვიხილოთ $L^p(X,\mu)$ წრფივი სივრცის შემდეგი ქვესივრცე:

$$M = \{f \in L^p(X,\mu) : f(x) = 0 \text{ თითქმის ყველგან}\}.$$

და მოვახდინოთ $L^p(X,\mu)$-ს ფაქტორიზაცია M-ის მიხედვით. შევნიშნოთ, რომ $L^p(X,\mu)/M$ სივრცის ელემენტები გამოხატავენ $L^p(X,\mu)$ კლასის თითქმის ყველგან ერთმანეთის ტოლი ფუნქციების გაიგივების შედეგად მიღებულ ობიექტებს. $L^p(X,\mu)/M$ ფაქტორ-სივრცეზე შემდეგნაირად განვსაზღვროთ $\|\cdot\|^*$ ფუნქცია:

$$\|\xi\|^* = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (\xi \in L^p(X,\mu)/M),$$

სადაც f არის ξ მოსაზღვრე კლასის რაიმე წარმომადგენელი. $\|\cdot\|$ ფუნქციის თვისებებზე დაყრდნობით ადვილი დასანახია, რომ $\|\cdot\|^*$ არის $L^p(X,\mu)/M$ სივრცეზე განსაზღვრული ნორმა.

შემდგომში $(L^p(X,\mu), \|\cdot\|)$ ნორმირებულ სივრცეს სიმოკლისათვის აღვნიშნავთ $L^p(X,\mu)$, ან, უბრალოდ, L^p ჩანაწერით.

ამოცანები

1. იუნგის უტოლობის განზოგადება: ვთქვათ, $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ არის მკაცრად ზრდადი უწყვეტი ფუნქცია, ისეთი, რომ $\varphi(0) = 0$, ხოლო $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ არის მისი შექცეული ფუნქცია. ნებისმიერი არაუარყოფითი a და b რიცხვებისათვის აჩვენეთ უტოლობა:
$$ab \le \int_0^a \varphi \, + \int_0^b \psi.$$
შენიშვნა: ამ შეფასებიდან $\varphi(t) = t^{p-1}$ შემთხვევაში ვღებულობთ იუნგის უტოლობას. მართლაც, საამისოდ მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ თუ $1 < p < \infty$, მაშინ $\varphi(t) = t^{p-1}$ და $\psi(t) = t^{q-1}$ ფუნქციები ურთიერთშებრუნებული არიან.
2. დაამტკიცეთ, რომ განზოგადებულ იუნგის უტოლობაში ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $b = \varphi(a)$.
3. დაამტკიცეთ, რომ ჰელდერის უტოლობაში ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოიძებნებიან არაუარყოფითი რიცხვები α და β, ისეთები, რომ $\alpha + \beta > 0$ და $\alpha|f|^p = \beta|g|^q (\mathrm{mod}\, \mu)$.
4. დაამტკიცეთ, რომ $1 < p < \infty$ შემთხვევაში, მინკოვსკის უტოლობაში, ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოიძებნებიან არაუარყოფითი რიცხვები α და β, ისეთები, რომ $\alpha + \beta > 0$ და $\alpha f = \beta g (\mathrm{mod}\, \mu)$.
5. დაამტკიცეთ, რომ $p = 1$ შემთხვევაში, მინკოვსკის უტოლობაში, ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $fg \ge 0 (\mathrm{mod}\, \mu)$.
6. ვთქვათ, $1 < p < \infty$ და $1/p + 1/q = 1$. დაამტკიცეთ, რომ $f \in L^p(X,\mu)$ ფუნქციის ნორმა $L^p(X,\mu)$ სივრცეში შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგნაირად:
$$\|f\|_p = \sup_g \int_X fg d\mu,$$
სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა იმ $g \in L^q(X,\mu)$ ფუნქციის მიხედვით, რომლისთვისაც $\|g\|_q \le 1$. აჩვენეთ აგრეთვე, რომ აღნიშნული სუპრემუმი მიიღწევა გარკვეული $g_0 \in L^q(X,\mu), \|g_0\|_q = 1$, ფუნქციისათვის.

§ 2. L^p სივრცეების ზოგიერთი თვისება

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ შემოსაზღვრული μ ზომის შემთხვევაში, $L^p(X,\mu)$ სივრცეები ვიწროვდებიან p პარამეტრის ზრდასთან ერთად.

თეორემა 11.2.1. თუ μ შემოსაზღვრული ზომაა, მაშინ $1 \le p_1 < p_2 < \infty$ პარამეტრებისათვის გვაქვს, რომ

$$L^{p_2}(X,\mu) \subset L^{p_1}(X,\mu).$$

გარდა ამისა, ნებისმიერი $f \in L^{p_2}(X,\mu)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$\|f\|_{p_1} \le \mu(X)^{1/p_1 - 1/p_2}\|f\|_{p_2}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $f \in L^{p_2}(X,\mu)$. თუ $|f|^{p_1}$ ფუნქციას წარმოვადგენთ $|f|^{p_1} = |f|^{p_1} \cdot 1$ სახით და გავითვალისწინებთ, რომ $|f|^{p_1} \in L^{p_2/p_1}(X,\mu)$, მაშინ ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით დავწერთ,

$$\int_X |f|^{p_1} d\mu \le \left(\int_X (|f|^{p_1})^{\frac{p_2}{p_1}} d\mu\right)^{\frac{p_1}{p_2}} \left(\int_X 1^{\frac{p_2}{p_2-p_1}} d\mu\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}} =$$

$$= \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu\right)^{\frac{p_1}{p_2}} \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}.$$

ცხადია, ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

ლებეგის აზრით ზომადი არაცარიელი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის $L^p(E)$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ $L^p(E, \mathrm{m}_E)$ სივრცე, სადაც m_E არის ლებეგის ზომის შეზღუდვა E-ში შემავალ ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასზე.

შენიშვნა 11.2.1. შემოუსაზღვრელი ზომის შემთხვევაში, საზოგადოდ, შეუძლებელია, რაიმე ითქვას $L^p(X,\mu)$ სივრცეთა მონოტონურ ყოფაქცევაზე p პარამეტრის მიმართ. სახელდობრ, ამაში გვარწმუნებენ $L^p(\mathbb{R})$ სივრცეები: $L^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ ჩართვა არ სრულდება, რადგან

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{(n,n+1)}$$

ფუნქცია ეკუთვნის $L^2(\mathbb{R})$, მაგრამ არ ეკუთვნის $L^1(\mathbb{R})$-ს. მეორე მხრივ, არ სრულდება არც $L^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ ჩართვა, რადგან

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, \chi_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)}$$

ფუნქცია ეკუთვნის $L^1(\mathbb{R})$-ს და არ ეკუთვნის $L^2(\mathbb{R})$-ს.

$L^p(X,\mu)$ სივრცეთა საინტერესო სახესხვაობა მიიღება მაშინ, როცა $X = \mathbb{N}$ და μ წარმოადგენს დამთვლელ ზომას $\mathbb{N}$-ში. ასეთ შემთხვევაში, $L^p(X,\mu)$ სივრცის აღსანიშნავად იყენებენ l^p სიმბოლოს. ადვილი დასანახია, რომ l^p არის ყველა იმ $x = (x_n)$ რიცხვითი მიმდევრობის სივრცე, რომლისთვისაც

$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$, ამასთან, (x_n) მიმდევრობის ნორმა l^p-ში ტოლია შემდეგი გამოსახულებისა: $\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ l^p სივრცეები ფართოვდებიან p მაჩვენებლის ზრდასთან ერთად, ე.ი. თუ $1\le p_1<p_2<\infty$, მაშინ $l^{p_1}\subset l^{p_2}$.

l^p სივრცეებისთვის ჰელდერისა და მინკოვსკის უტოლობები, შესაბამისად, ღებულობენ შემდეგ სახეს:

- თუ $(x_n)\in l^p$ და $(y_n)\in l^q$, მაშინ $(x_ny_n)\in l^1$ და
$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n|\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}};$$
- თუ $(x_n)\in l^p$ და $(y_n)\in l^p$, მაშინ $(x_n+y_n)\in l^p$ და
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ამ უტოლობებს, შესაბამისად, ჰელდერისა და მინკოვსკის რიცხვითი უტოლობების ტერმინებით მოიხსენიებენ.

შემდეგი დებულება გამომდინარეობს 8.10.1 თეორემიდან და გვიჩვენებს, თუ როგორ შეიძლება გამოვთვალოთ L^p-ნორმა განაწილების ფუნქციის მეშვეობით.

თეორემა 11.2.2. ნებისმიერი $f\in L^p(X,\mu)$ ფუნქციისათვის სრულდება ტოლობა:
$$\int_X|f|^pd\mu=\int_{(0,\infty)}F_f(t)pt^{p-1}d\mathrm{m}(t).$$

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ თუ $1\le p_1<p_2<\infty$, მაშინ $L^{p_2}([0,1])\subset L^{p_1}([0,1])$ ჩართვა მკაცრია. უფრო მეტიც, აჩვენეთ, რომ ყოველი $p\ge 1$-სთვის მოიძებნება $f\in L^p([0,1])$ ფუნქცია, რომელიც არ ეკუთვნის არცერთ $L^r([0,1])$ $(r>p)$ სივრცეს.
2. ვთქვათ, μ შემოსაზღვრული ზომაა და $1\le p_1<p_2<\infty$. დაამტკიცეთ, რომ $L^{p_2}(X,\mu)=L^{p_1}(X,\mu)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა μ ზომა თავმოყრილია სასრული რაოდენობის ატომებზე (ზომის ატომი ეწოდება ისეთ დადებითი ზომის სიმრავლეს, რომლისთვისაც არ მოიძებნება მასზე მცირე დადებითი ზომის ქვესიმრავლე).
3. დაამტკიცეთ, რომ თუ $1\le p_1<p_2<\infty$, მაშინ არ სრულდება $L^{p_2}(\mathbb{R})\subset L^{p_1}(\mathbb{R})$ ჩართვა. უფრო მეტიც, აჩვენეთ, რომ ყოველი $p>1$-სთვის მოიძებნება $f\in L^p(\mathbb{R})$ ფუნქცია, რომელიც არ ეკუთვნის არცერთ $L^r(\mathbb{R})$ $(1\le r<p)$ სივრცეს.
4. დაამტკიცეთ, რომ თუ $1\le p_1<p_2<\infty$ და $f\in L^{p_1}(\mathbb{R})\cap L^{p_2}(\mathbb{R})$, მაშინ $f\in L^p(\mathbb{R})$ ყოველი $p\in(p_1,p_2)$-სთვის.

5. ვთქვათ, ყოველი $i \in \{1,2\}$-სთვის $(X_i, \mathrm{S}_i, \mu_i)$ ზომიანი სივრცეა, ხოლო f_i არის μ_i-ზომადი ფუნქცია. აჩვენეთ, რომ თუ f_1 და f_2 ფუნქციები ტოლადზომადია, ე.ი. $\mu_1(\{|f_1| > t\}) = \mu_2(\{|f_2| > t\})$ $(t > 0)$, მაშინ $\int_{X_1} |f_1|^p d\mu_1 = \int_{X_2} |f_2|^p d\mu_2$ ყოველი $p \in [1, \infty)$-სთვის.

§ 3. L^p სივრცის სისრულე. p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობა

თეორემა 11.3.1. $L^p(X, \mu)$ სივრცე არის სრული.

დამტკიცება. ვთქვათ, (f_n) ფუნდამენტური მიმდევრობაა $L^p(X, \mu)$-ში. საკმარისია, ვაჩვენოთ მისი რაიმე (f_{n_k}) ქვემიმდევრობის კრებადობა (იხ. დანართი 2). ამ მიზნით განვიხილოთ (f_{n_k}) ქვემიმდევრობა, რომლის წევრები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

ასეთი ქვემიმდევრობის არსებობა გამომდინარეობს (f_n)-ის ფუნდამენტურობიდან.

ყოველი k-სთვის g_k ფუნქცია განვსაზღვროთ ტოლობით:

$$g_k(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{i=1}^{k-1} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|.$$

ცხადია, (g_k) არაუარყოფით ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობაა. g-თი აღვნიშნოთ (g_k) მიმდევრობის წერტილოვანი ზღვარი (რომელიც ზოგიერთ წერტილში, შეიძლება, ∞-ის ტოლი იყოს). ნებისმიერი $k \in \mathbb{N}$-სთვის გვაქვს,

$$\|g_k\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{i=1}^{k-1} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + 1.$$

ამრიგად, $\int_X |g_k|^p d\mu$ ინტეგრალები შემოსაზღვრულია გარკვეული მუდმივით. საიდანაც, ლევის თეორემის საფუძველზე ვღებულობთ, რომ $g \in L^p(X, \mu)$. შედეგად, g ფუნქცია სასრულია თითქმის ყოველ წერტილში. აქედან, თავის მხრივ, ვასკვნით, რომ

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$$

მიმდევრობა კრებადია სრული ზომის მქონე გარკვეული E სიმრავლის ყოველ წერტილში. f იყოს ფუნქცია, რომელიც აღნიშნული მიმდევრობის ზღვრის ტოლია E სიმრავლის წერტილებში და ნულის ტოლია E სიმრავლის გარეთ.

ადვილი დასანახია, რომ f ზომადია და $|f| \leq g$. შედეგად, $f \in L^p(X, \mu)$. ახლა, თუ გავითვალისწინებთ შეფასებას:

$$|f_{n_k} - f| \leq 2g \quad (k \in \mathbb{N}),$$

მაჟორანტული კრებადობის შესახებ ლებეგის თეორემის ძალით გვექნება,

$$\int_X |f_{n_k} - f|^p d\mu \to 0 \quad (k \to \infty).$$

ამრიგად, f არის (f_{n_k}) მიმდევრობის ზღვარი $L^p(X, \mu)$ სივრცეში. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

ვთქვათ, $f_n \in L^p(X, \mu)$ $(n \in \mathbb{N})$ და $f \in L^p(X, \mu)$. თუ $\|f_n - f\|_p \to 0$, ე.ი. თუ $\int_X |f_n - f|^p d\mu \to 0$, მაშინ ამბობენ, რომ (f_n) მიმდევრობა p **მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადია** f ფუნქციისაკენ. შევნიშნავთ, რომ $p = 1$ შემთხვევაში დამკვიდრებულია ტერმინი - **საშუალოდ კრებადობა**, ხოლო $p = 2$ შემთხვევაში კი ტერმინი - **საშუალო კვადრატულად კრებადობა**.

სამართლიანია შემდეგი წინადადებები, რომლებიც გვიჩვენებენ, თუ რა მიმართებაშია p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობა ზომით, თითქმის ყველგან და თანაბრად კრებადობის ტიპებთან:

- p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობიდან გამომდინარეობს ზომით კრებადობა. ამის დასადგენად უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის,

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \geq \int_{\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}} |f_n - f|^p d\mu \geq \varepsilon^p \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}).$$

- არც ზომით კრებადობიდან და არც თითქმის ყველგან კრებადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობა. მართლაც, განვიხილოთ $L^p([0,1])$ სივრცე და მასში $f_n = n\chi_{(0,1/n)}$ ფუნქციათა მიმდევრობა. ცხადია, რომ (f_n) როგორც ზომით, ასევე ყველა წერტილში კრებადია იგივურად ნულის ტოლი ფუნქციისაკენ, მაგრამ

$$\int_{[0,1]} |f_n|^p d\mu = n^{p-1} \geq 1.$$

  რაც იმას ნიშნავს, რომ (f_n) არაა p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადი იგივურად ნულის ტოლი ფუნქციისაკენ.
- p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს თითქმის ყველგან კრებადობა. მართლაც, განვიხილოთ 7.8 პარაგრაფის მეორე შენიშვნაში მოცემული ფუნქციათა (f_s) მიმდევრობა. ეს მიმდევრობა $[0,1]$ მონაკვეთის არცერთ წერტილში არაა ნულისაკენ კრებადი. მეორე მხრივ, ადვილი შესამოწმებელია, რომ

(f_s) არის p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადი იგივურად ნულის ტოლი ფუნქციისაკენ.

- თუ μ შემოსაზღვრული ზომაა, მაშინ თანაბრად კრებადობიდან გამომდინარეობს p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობა. ეს დასკვნა მიიღება შემდეგი შეფასებიდან:

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \leq \max |f_n - f|^p \ \mu(X).$$

შემოუსაზღვრელი ზომისათვის კი თანაბარი კრებადობა საზოგადოდ არ იწვევს p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობას. ამაში გვარწმუნებს $L^p(\mathbb{R})$ სივრცისა და $f_n = \frac{1}{n}\chi_{(-n^p, n^p)}$ ფუნქციათა მიმდევრობის მაგალითი.

აქვე შევნიშნოთ, რომ, შემოსაზღვრული ზომის შემთხვევაში, თეორემა 11.2.1-ის ძალით, p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობა იწვევს ნებისმიერი უფრო მცირე r მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადობას.

ამოცანები

1. ვთქვათ, f_n $(n \in \mathbb{N})$ და f არიან $L^p(X, \mu)$ სივრცის ფუნქციები. აჩვენეთ, რომ თუ (f_n) მიმდევრობა ზომით კრებადია f ფუნქციისაკენ და მოიძებნება ისეთი $g \in L^p(X, \mu)$ ფუნქცია, რომ $|f_n| \leq g$ $(n \in \mathbb{N})$, მაშინ (f_n) მიმდევრობა p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადია f ფუნქციისაკენ.
2. ვთქვათ, f_n $(n \in \mathbb{N})$ და f არიან $L^p(X, \mu)$ სივრცის ფუნქციები. აჩვენეთ, რომ თუ (f_n) მიმდევრობა p მაჩვენებლით საშუალოდ კრებადია f ფუნქციისაკენ, მაშინ მოიძებნება (f_{n_k}) ქვემიმდევრობა, რომელიც თითქმის ყველგან კრებადია f ფუნქციისაკენ.
3. ვთქვათ, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $\{f\} \cup \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L^p(X, \mu)$ და $\{g\} \cup \{g_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L^q(X, \mu)$. აჩვენეთ, რომ თუ $\|f_n - f\|_p \to 0$ და $\|g_n - g\|_q \to 0$, მაშინ $\|f_n g_n - fg\|_1 \to 0$.

§ 4. ყველგან მკვრივი სიმრავლეები L^p სივრცეში

ვიტყვით, რომ ფუნქციათა Ω კლასი **ყველგან მკვრივია** $L^p(X, \mu)$ სივრცეში, თუ ყოველი $f \in L^p(X, \mu)$ ფუნქციისათვის და ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $h \in \Omega \cap L^p(X, \mu)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $\|f - h\|_p < \varepsilon$.

თეორემა 11.4.1. მარტივ ფუნქციათა კლასი ყველგან მკვრივია $L^p(X, \mu)$ სივრცეში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f \in L^p(X, \mu)$ არაუარყოფითი ფუნქციაა. განვიხილოთ არაუარყოფით მარტივ ფუნქციათა ზრდადი (h_n) მიმდევრობა, რომელიც

ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაკენ. ცხადია, h_n ფუნქციები მიეკუთვნებიან $L^p(X,\mu)$ სივრცეს. შემდეგ, თუკი შევნიშნავთ, რომ

$$0 \leq (f-h_n)^p \leq f^p \quad (n \in \mathbb{N}),$$

და გამოვიყენებთ ლებეგის თეორემას მაჟორანტული კრებადობის შესახებ, დავწერთ,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f-h_n|^p d\mu = 0.$$

ამით დადგენილია $L^p(X,\mu)$ სივრცის ნებისმიერი არაუარყოფითი ფუნქციის მიახლოების შესაძლებლობა მარტივი ფუნქციების მეშვეობით.

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, $f \in L^p(X,\mu)$ და $\varepsilon > 0$. წარმოვადგინოთ f ფუნქცია დადებითი და უარყოფითი ნაწილების სხვაობის სახით: $f = f^+ - f^-$. f^+ და f^- არაუარყოფითი ფუნქციებია, ამასთან, მათი განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ ისინი $L^p(X,\mu)$ სივრცეს ეკუთვნიან. გამოვიყენოთ თეორემის უკვე დამტკიცებული ნაწილი f^+ და f^- ფუნქციებისათვის და ვიპოვოთ მარტივი $h_1 \in L^p(X,\mu)$ და $h_2 \in L^p(X,\mu)$ ფუნქციები, რომელთათვისაც

$$\|f^+ - h_1\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|f^- - h_2\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

h-ით აღვნიშნოთ $h_1 - h_2$ სხვაობა. ცხადია, რომ h ფუნქცია მარტივია, ეკუთვნის $L^p(X,\mu)$ სივრცეს და ამასთან,

$$\|f-h\|_p \leq \|f^+ - h_1\|_p + \|f^- - h_2\|_p < \varepsilon.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 11.4.1. ადვილი დასანახია, რომ $\sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$ წარმოდგენის მარტივი h ფუნქცია ეკუთვნის $L^p(X,\mu)$ სივრცეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სასრული ზომა აქვს ყოველ იმ A_k სიმრავლეს, რომლისთვისაც $\alpha_k \neq 0$.

თეორემა 11.4.1 შეიძლება გავაძლიეროთ, თუ ცნობილია, რომ μ ზომა მიღებულია ნახევარრგოლზე მოცემული ზომის ლებეგისეული გაგრძელებით. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 11.4.2. ვთქვათ, μ წარმოადგენს H ნახევარრგოლზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებას. მაშინ $L^p(X,\mu)$ სივრცეში ყველგან მკვრივია ყველა იმ მარტივი ფუნქციის კლასი, რომელსაც აქვს სახე: $\sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$, სადაც A_k სიმრავლეები არიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და ეკუთვნიან H ნახევარრგოლს.

დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ: ვთქვათ, Π არის ყველა იმ მარტივი ფუნქციის კლასი, რომელზეც საუბარია თეორემის პირობაში და

ვთქვათ, Π^* არის ყველა იმ მარტივი ფუნქციის კლასი, რომელიც წარმოდგება შემდეგი სახით: $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$, სადაც A_k სიმრავლეები ეკუთვნიან H კლასს. მაშინ ნახევარრგოლთა თვისებებიდან (იხ. თეორემა 3.2.2) ადვილად გამომდინარეობს, რომ $\Pi^* = \Pi$. ამრიგად, თუ ვაჩვენებთ Π^* კლასის ყველგან მკვრივობას, მაშინ თეორემა დადგენილი იქნება.

თეორემა 11.4.1-ის ძალით, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $L^p(X, \mu)$-ში შემავალ ყოველ მარტივ ფუნქციას შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ Π^* კლასის მარტივი ფუნქციის მეშვეობით. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყველა იმ ფუნქციის კლასი, რომელიც ექვემდებარება Π^* კლასის ფუნქციებით მიახლოებას, არის წრფივი (ე.ი. ჩაკეტილია შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ), რის გამოც, საკმარისია, ვიმსჯელოთ იმ მახასიათებელი χ_A ფუნქციებისთვის, რომელთათვისაც $\mu(A) < \infty$.

ვთქვათ, $\mu(A) < \infty$ და $\varepsilon > 0$. მაშინ 5.6.4 და 3.3.1 თეორემების ძალით (იხ. აგრეთვე შენიშვნა 3.3.2) მოიძებნებიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{H}$ სიმრავლეები, ისეთები, რომ

$$\mu\biggl(A \bigtriangleup \bigcup_{k=1}^{n} B_k\biggr) < \varepsilon^p.$$

შედეგად, $\sum_{k=1}^{n} \chi_{B_k}$ ფუნქცია ეკუთვნის Π^* კლასს და

$$\biggl\|\chi_A - \sum_{k=1}^{n} \chi_{B_k}\biggr\|_p = \biggl(\int_X \biggl|\chi_A - \sum_{k=1}^{n} \chi_{B_k}\biggr|^p d\mu\biggr)^{1/p} = \mu\biggl(A \bigtriangleup \bigcup_{k=1}^{n} B_k\biggr)^{1/p} < \varepsilon.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

(X, S, μ) ზომიან სივრცეს ეწოდება **რეგულარული (X, ϱ) მეტრიკული სივრცის მიმართ**, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

- S კლასი შეიცავს (X, ϱ) სივრცის ყოველ ღია და ყოველ ჩაკეტილ ქვესიმრავლეს;
- ყოველი $A \in \mathrm{S}$ სიმრავლისათვის და $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნებიან (X, ϱ) სივრცეში ღია G და ჩაკეტილი F სიმრავლეები, ისეთები, რომ $G \supset A \supset F$ და $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

(X, ϱ) მეტრიკულ სივრცეზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ვუწოდოთ **ფინიტური**, თუ მისი საყრდენი (ე.ი. $\{f \neq 0\}$ სიმრავლე) შემოსაზღვრულია.

(X, ϱ) მეტრიკული სივრცისათვის $C(X, \varrho)$-თი აღვნიშნოთ ყველა უწყვეტი $f : X \to \mathbb{R}$ ფუნქციის კლასი, ხოლო $C_0(X, \varrho)$-თი აღვნიშნოთ ყველა უწყვეტი და ფინიტური $f : X \to \mathbb{R}$ ფუნქციის კლასი. ცხადია, $C_0(X, \varrho) \subset C(X, \varrho)$ და $C_0(X, \varrho) = C(X, \varrho)$, თუ (X, ϱ) შემოსაზღვრული სივრცეა.

შევნიშნოთ, რომ თუ (X, S, μ) ზომიანი სივრცე რეგულარულია (X, ϱ) მეტრიკული სივრცის მიმართ, მაშინ ყოველი უწყვეტი $f : X \to \mathbb{R}$ ფუნქცია μ-ზომადია. მართლაც, როგორც ცნობილია, უწყვეტი ასახვისათვის ღია

სიმრავლის წინასახე ღიაა, რის გამოც, ყოველი $a \in \mathbb{R}$-სთვის $f^{-1}((a,\infty))$ სიმრავლე იქნება ღია (X,ϱ) სივრცეში და შედეგად, იქნება μ-ზომადიც.

თეორემა 11.4.3. ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცე რეგულარულია (X,ϱ) მეტრიკული სივრცის მიმართ. მაშინ $C_0(X,\varrho)$ კლასი ყველგან მკვრივია $L^p(X,\mu)$ სივრცეში. შედეგად, $C(X,\varrho)$ კლასი ყველგან მკვრივია $L^p(X,\mu)$ სივრცეში.

დამტკიცება. თუ გავიმეორებთ თეორემა 11.4.2-ის დამტკიცებისას გამოყენებულ მსჯელობას, დავრწმუნდებით, რომ საკმარისია დავადგინოთ χ_A, $\mu(A) < \infty$, სახის ფუნქციების მიახლოების შესაძლებლობა $C_0(X,\varrho)$ კლასის ფუნქციების მეშვეობით.

ვთქვათ, A სასრული ზომის სიმრავლეა და $\varepsilon > 0$. განვიხილოთ რაიმე x_0 წერტილი და $B(x_0,n) = \{x : \varrho(x,x_0) < n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ ბირთვები. მაშინ $A_n = A \cap B(x_0,n)$ სიმრავლეები მოგვცემენ ზომად სიმრავლეთა ზრდად მიმდევრობას, რომლის გაერთიანება A-ს ტოლია. ამიტომ ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისების ძალით მოიძებნება n, რომლისთვისაც $\mu(A \setminus A_n) < (\varepsilon/2)^p$. ამრიგად, $A^* = A_n$ არის $B(x_0,n)$ ბირთვში შემავალი სასრული ზომის სიმრავლე, ისეთი, რომ $\|\chi_A - \chi_{A^*}\| < \varepsilon/2$.

თეორემის პირობის ძალით შეგვიძლია ვიპოვოთ ღია G და ჩაკეტილი F სიმრავლეები, ისეთები, რომ $G \supset A^* \supset F$ და $\mu(G \setminus F) < (\varepsilon/2)^p$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ G შემოსაზღვრულია (წინააღმდეგ შემთხვევაში G-ს ნაცვლად განვიხილავდით $G \cap B(x_0,n)$ სიმრავლეს.)

f ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგი ტოლობით:

$$f(x) = \frac{\varrho(x, X \setminus G)}{\varrho(x,F) + \varrho(x, X \setminus G)} \qquad (x \in X),$$

სადაც $\varrho(y,E)$ აღნიშნავს მანძილს y წერტილსა და E სიმრავლეს შორის, ე.ი. $\varrho(y,E) = \inf\limits_{t \in E} \varrho(y,t)$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ f ფუნქცია განსაზღვრულია კორექტულად (ე.ი. მნიშვნელი არცერთ წერტილში არ ხდება ნულის ტოლი) და მას აქვს შემდეგი ოთხი თვისება:

1) f უწყვეტია;

2) $0 \le f \le 1$;

3) $f(x) = 1$, როცა $x \in F$;

4) $f(x) = 0$, როცა $x \in X \setminus G$.

ამ თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ $f \in C_0(X,\varrho) \cap L^p(X,\mu)$. კერძოდ, $f \in C_0(X,\varrho)$ მიკუთვნებას ვღებულობთ 1) და 4) თვისებებიდან, ხოლო $f \in L^p(X,\mu)$ მიკუთვნება მიიღება 1), 2) და 4) თვისებებიდან, $\mu(G) \le \mu(A^*) + \mu(G \setminus A^*) \le \mu(A^*) + \mu(G \setminus F) < \infty$ შეფასების გათვალისწინებით.

2), 3) და 4) პირობების ძალით შეგვიძლია დავწეროთ,

$$\|\chi_{A^*} - f\|_p = \left(\int_{G \setminus F} |\chi_{A^*} - f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \mu(G \setminus F)^{1/p} < \varepsilon/2.$$

ამრიგად, f ფუნქცია ეკუთვნის $C_0(X, \varrho) \cap L^p(X, \mu)$ კლასს და

$$\|\chi_A - f\|_p \leq \|\chi_A - \chi_{A^*}\|_p + \|\chi_{A^*} - f\|_p < \varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ვუწოდოთ **საფეხუროვანი ფუნქცია**, თუ მას აქვს შემდეგი სახე: $\sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{I_k}$, სადაც $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ არანულოვანი რიცხვებია, ხოლო $I_1, \ldots, I_m$ არიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ნახევრადღია n-განზომილებიანი მონაკვეთები $\mathcal{I}^n$ ნახევარრგოლიდან.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ლებეგის ზომა მიიღება ნახევრადღია n-განზომილებიანი მონაკვეთების $\mathcal{I}^n$ ნახევარრგოლზე მოცემული საწყისი ზომის (სახელდობრ, მოცულობის) გაგრძელებით და ასევე გავითვალისწინებთ ლებეგის ზომის რეგულარობის თვისებას $\mathbb{R}^n$-ის ბუნებრივი მანძილის მიმართ (იხ. თეორემა 6.2.2), მაშინ 11.4.1-11.4.3 თეორემებიდან მივიღებთ შემდეგ დებულებას.

თეორემა 11.4.4. $L^p(\mathbb{R}^n)$ **სივრცეში ყველგან მკვრივია თითოეული შემდეგ სამ კლასს შორის:**

- **მარტივ ფუნქციათა კლასი;**
- **საფეხუროვან ფუნქციათა კლასი;**
- **უწყვეტ და ფინიტურ ფუნქციათა კლასი.**

ვთქვათ, Ω არის X სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციების რაიმე კლასი. Ω-ს **შეზღუდვა** $E \subset X$ **სიმრავლეზე** ვუწოდოთ $\{f|_E : f \in \Omega\}$ კლასს, სადაც $f|_E$ აღნიშნავს f ფუნქციის შეზღუდვას E სიმრავლეზე.

თეორემა 11.4.4-დან ადვილად გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 11.4.5. ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ **ლებეგის აზრით ზომადი რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა.** $L^p(E)$ **სივრცეში ყველგან მკვრივია თითოეული შემდეგ სამ კლასს შორის:**

- $\mathbb{R}^n$**-ში მარტივ ფუნქციათა კლასის შეზღუდვა** E **სიმრავლეზე;**
- $\mathbb{R}^n$**-ში საფეხუროვან ფუნქციათა კლასის შეზღუდვა** E **სიმრავლეზე;**
- $\mathbb{R}^n$**-ში უწყვეტ და ფინიტურ ფუნქციათა კლასის შეზღუდვა** E **სიმრავლეზე.**

ცალკე გამოვყოთ ის შემთხვევა, როცა E არის სასრული სიგრძის ერთგანზომილებიანი $[a,b]$ მონაკვეთი. თეორემა 11.4.4-ის ძალით $[a,b]$-ზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტი ფუნქციის $C([a,b])$ კლასი ყველგან მკვრივია $L^p([a,b])$-ში. სამართლიანია ამ წინადადების შემდეგი გაძლიერება.

თეორემა 11.4.6. **$L^p([a,b])$ სივრცეში ყველგან მკვრივია მრავალწევრთა კლასი.**

დამტკიცება. საკმარისია, დავადგინოთ, რომ ყოველი უწყვეტ ფუნქციას შეიძლება მივუახლოვდეთ მრავალწევრების მეშვეობით. ვთქვათ, $f \in C([a,b])$ და $\varepsilon > 0$. მაშინ ვაიერშტრასის ცნობილი თეორემის ძალით მოიძებნება g მრავალწევრი, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობას:

$$\max|f-g| < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{1/p}}.$$

შედეგად, გვექნება, რომ

$$\|f-g\|_p = \left(\int_{[a,b]} |f-g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq (\max|f-g|)(b-a)^{1/p} < \varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ ტრიგონომეტრიული მრავალწევრების კლასი ყველგან მკვრივია $L^p([-\pi,\pi])$ სივრცეში.
2. ვთქვათ, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. $f \in L^p([a,b])$ ფუნქციის L^p-უწყვეტობის მოდული არის $(0, b-a)$ ინტერვალზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$\omega_{f,p}(\delta) = \sup_{h\in(0,\delta]} \left(\int_{(a,b-h)} |f(x+h)-f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

დაამტკიცეთ, რომ $\omega_{f,p}(\delta) \to 0$, როცა $\delta \to 0$.

§ 5. L^p სივრცის სეპარაბელურობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა. $\mathrm{S}^* \subset \mathrm{S}$ კლასს ეწოდება μ **ზომის ბაზისი**, თუ მას აქვს შემდეგი ორი თვისება:

- $\mu(A^*) < \infty$ ყოველი $A^* \in \mathrm{S}^*$-სთვის;
- სასრული ზომის ყოველი A სიმრავლისათვის და ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $A^* \in \mathrm{S}^*$ სიმრავლე, რომლისთვისაც სრულდება შეფასება: $\mu(A \triangle A^*) < \varepsilon$.

თეორემა 11.5.1. **თუ μ ზომას აქვს არაუმეტეს თვლადი ბაზისი, მაშინ $L^p(X,\mu)$ სივრცე სეპარაბელურია.**

დამტკიცება. ვთქვათ, სიმრავლეთა S^* კლასი არის μ ზომის არაუმეტეს თვლადი ბაზისი. Π-თი აღვნიშნოთ ყველა შემდეგი სახის მარტივი ფუნქციის კლასი:

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \chi_{A_k^*},$$

სადაც $r_1, \ldots, r_n$ რაციონალური რიცხვებია, ხოლო $A_1^*, \ldots, A_n^*$ სიმრავლეები ეკუთვნიან S^* კლასს. ადვილი შესამოწმებელია, რომ Π კლასი არაუმეტეს თვლადია და $\Pi \subset L^p(X, \mu)$. დავამტკიცოთ, რომ Π ყველგან მკვრივია $L^p(X, \mu)$-ში, რითაც თეორემა დადგენილი იქნება.

ვთქვათ, A სასრული ზომის სიმრავლეა და $\varepsilon > 0$. განვიხილოთ $A^* \in S^*$ სიმრავლე, რომლისთვისაც $\mu(A \triangle A^*) < \varepsilon^p$. საიდანაც დავწერთ,

$$\|\chi_A - \chi_{A^*}\|_p = \left(\int_X |\chi_A - \chi_{A^*}|^p d\mu \right)^{1/p} = \mu(A \triangle A^*)^{1/p} < \varepsilon.$$

ამ შენიშვნაზე დაყრდნობით შეგვიძლია უზრუნველვყოთ ნებისმიერი მარტივი $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k} \in L^p(X, \mu)$ ფუნქციის რაგინდ ზუსტი მიახლოება Π კლასის ფუნქციის მეშვეობით. საამისოდ, $\sum_{k=1}^{n} r_k \chi_{A_k^*} \in \Pi$ ფუნქცია უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ $|\alpha_k - r_k|$ და $\|\chi_{A_k} - \chi_{A_k^*}\|_p$ გამოსახულებები იყვნენ საკმარისად მცირე.

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარე, იმის გათვალისწინებით, რომ მარტივ ფუნქციათა კლასი ყველგან მკვრივია $L^p(X, \mu)$-ში, ვასკვნით Π კლასის ყველგან მკვრივობას $L^p(X, \mu)$ სივრცეში. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

სამართლიანია თეორემა 11.5.1-ის შებრუნებული დებულება.

თეორემა 11.5.2. თუ $L^p(X, \mu)$ სივრცე სეპარაბელურია, მაშინ μ ზომას აქვს არაუმეტეს თვლადი ბაზისი.

თეორემა 11.5.2-ის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ:

1) μ ზომას აქვს არაუმეტეს თვლადი ბაზისი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $L^p(X, \mu)$ მეტრიკული სივრცის შემდეგი ქვესივრცე: $\{\chi_A : A \in S, \mu(A) < \infty\}$, არის სეპარაბელური;

2) სეპარაბელური მეტრიკული სივრცის ნებისმიერი ქვესივრცე ასევე სეპარაბელურია (იხ. დანართი 2).

თეორემა 11.5.3. ლებეგის ზომას აქვს თვლადი ბაზისი.

დამტკიცება. n-განზომილებიან $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ მონაკვეთს ვუწოდოთ რაციონალური, თუ თითოეული ერთგანზომილებიანი I_k მონაკვეთის ბოლოები რაციონალური რიცხვებია.

განვიხილოთ $\mathcal{I}^n$ კლასში შემავალი რაციონალური მონაკვეთების ყველა შესაძლო სასრული გაერთიანების S^* კლასი. ვაჩვენოთ, რომ S^* ქმნის ლებეგის

ზომის თვლად ბაზისს. ადვილი შესამოწმებელია, რომ S^* თვლადია. ცხადია, S^*-ში შემავალი სიმრავლეები სასრული ზომისაა.

განვიხილოთ სასრული ლებეგის ზომის მქონე ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. თეორემა 6.2.1-ის ძალით (იხ. აგრეთვე შენიშვნა 3.3.2) მოიძებნებიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $I_1, \ldots, I_p \in \mathcal{I}^n$ მონაკვეთები, რომელთათვისაც

$$\mathrm{m}\left(A \triangle \bigcup_{k=1}^{p} I_k\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ თითოეულ I_k მონაკვეთს შევამცირებთ რაციონალურ I_k^* მონაკვეთამდე ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა:

$$\mathrm{m}(I_k \setminus I_k^*) < \frac{\varepsilon}{2p},$$

მაშინ სამართლიანი იქნება შეფასება:

$$\mathrm{m}\left(A \triangle \bigcup_{k=1}^{p} I_k^*\right) < \varepsilon.$$

ამით დადგენილია, რომ S^* კლასი არის ლებეგის ზომის თვლადი ბაზისი. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 11.5.4. ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის m_E ზომას (ე.ი. ლებეგის ზომის შეზღუდვას E-ს ლებეგის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასზე) აქვს არაუმეტეს თვლადი ბაზისი.

დამტკიცება. ვთქვათ, S^* არის ლებეგის ზომის რაიმე თვლადი ბაზისი. განვიხილოთ S^*-ის კვალი E-ზე, ე.ი. $\mathrm{S}^* \cap E = \{A^* \cap E : A^* \in \mathrm{S}^*\}$ კლასი. ადვილი დასანახია, რომ $\mathrm{S}^* \cap E$ არაუმეტეს თვლადია და ქმნის m_E ზომის ბაზისს. თეორემა დამტკიცებულია. □

11.5.1 და 11.5.4 თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 11.5.5. ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის $L^p(E)$ სივრცე სეპარაბელურია.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ ლებეგ-სტილტიესის ზომას აქვს არაუმეტეს თვლადი ბაზისი.
2. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $p \in [1, \infty)$-სთვის l^p სივრცე სეპარაბელურია.

§ 6. არსებითად შემოსაზღვრული ფუნქციების სივრცე

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) რაიმე ზომიანი სივრცეა.

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ფუნქციას ეწოდება **არსებითად შემოსაზღვრული** μ **ზომის მიმართ**, თუ მოიძებნება $c \geq 0$, ისეთი, რომ $|f(x)| \leq c$ თითქმის ყველგან, ე.ი. მოიძებნება $A \in \mathrm{S}$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mu(A) = 0$ და $|f(x)| \leq c$ ყოველი $x \in X \setminus A$ წერტილისათვის.

μ ზომის მიმართ არსებითად შემოსაზღვრული f ფუნქციისათვის აღვნიშნოთ

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf \{c : c \geq 0,\ |f(x)| \leq c \text{ თითქმის ყველგან}\}.$$

$\operatorname{ess\,sup} f$ რიცხვს უწოდებენ f ფუნქციის **არსებით ზედა საზღვარს** μ **ზომის მიმართ**.

ლემა 11.6.1. თუ f **არის** μ **ზომის მიმართ არსებითად შემოსაზღვრული ფუნქცია, მაშინ** $|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup} f$ **თითქმის ყველგან.**

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის,

$$|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup} f + \frac{1}{n}$$

თითქმის ყველგან, ე.ი. მოიძებნება ნული ზომის მქონე A_n სიმრავლე, რომლისთვისაც $|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup} f + 1/n$, როცა $x \notin A_n$.

A-თი აღვნიშნოთ A_n $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეების გაერთიანება. ცხადია, A იქნება ნული ზომის სიმრავლე. ამასთან, ყოველი $x \notin A$ წერტილისათვის და ყოველი n-სთვის გვექნება, რომ $|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup} f + 1/n$. შედეგად, $|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup} f$ ყოველი $x \notin A$-სთვის. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 11.6.2. თუ f **და** g **არიან** μ **ზომის მიმართ არსებითად შემოსაზღვრული ფუნქციები, მაშინ:**

$$\operatorname{ess\,sup}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g,$$

$$\operatorname{ess\,sup}(af) = |a| \operatorname{ess\,sup} f \quad (a \in \mathbb{R}).$$

დამტკიცება. ლემა 11.6.1-ის ძალით მოიძებნებიან ნულზომიანი A და B სიმრავლეები, ისეთები, რომ $\{|f| > \operatorname{ess\,sup} f\} \subset A$ და $\{|g| > \operatorname{ess\,sup} f\} \subset B$. მაშინ ნულზომიანი $A \cup B$ სიმრავლისათვის გარეთ მდებარე ნებისმიერი x წერტილისათვის,

$$|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g.$$

საიდანაც გამომდინარეობს $\operatorname{ess\,sup}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g$ შეფასება.

$\operatorname{ess\,sup}(af) = |a| \operatorname{ess\,sup} f$ ტოლობა გამომდინარეობს შემდეგი ცხადი სიმრავლური ტოლობიდან:

$$\{c : c \geq 0,\ |(af)(x)| \leq c \text{ თ.ყ.}\} = \{|a|t : t \geq 0,\ |f(x)| \leq t \text{ თ.ყ.}\}.$$

ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ყველა μ-ზომადი და μ ზომის მიმართ არსებითად შემოსაზღვრული $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ ფუნქციის კლასი აღვნიშნოთ $L^\infty(X,\mu)$ ჩანაწერით. ამრიგად, $L^\infty(X,\mu)$ კლასის ფუნქციებს, არსებითად შემოსაზღვრულობასთან ერთად, მოეთხოვებათ ზომადობაც.

11.6.1 და 11.6.2 ლემებიდან გამომდინარე, $L^\infty(X,\mu)$ წარმოადგენს წრფივ სივრცეს ფუნქციათა შეკრებისა და ფუნქციის სკალარზე გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

განვიხილოთ $L^\infty(X,\mu)$ სივრცეზე შემდეგნაირად განსაზღვრული $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ ფუნქცია:

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup} f.$$

11.6.1 და 11.6.2 ლემების ძალით, მას აქვს თვისებები:

1) $f \in L^\infty$ ფუნქციისათვის $\|f\| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x) = 0$ თითქმის ყველგან;

2) $\|af\| = |a|\,\|f\| \quad (a \in \mathbb{R}, f \in L^\infty)$;

3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (f, g \in L^\infty)$.

თუ თითქმის ყველგან ერთმანეთის ტოლ ფუნქციებს გავაიგივებთ, მაშინ შეგვიძლია, $(L^\infty(X,\mu), \|\cdot\|)$ წყვილს შევხედოთ, როგორც ნორმირებულ წრფივ სივრცეს.

შემდგომში $(L^\infty(X,\mu), \|\cdot\|_\infty)$ ნორმირებულ სივრცეს, სიმოკლისათვის, აღვნიშნავთ $L^\infty(X,\mu)$ ჩანაწერით.

ლებეგის აზრით ზომადი არაცარიელი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის $L^\infty(E)$-თი აღვნიშნავთ $L^\infty(E, \mathrm{m}_E)$ სივრცეს, სადაც m_E არის ლებეგის ზომის შეზღუდვა E-ში შემავალ ლებეგის აზრით ზომად სიმრავლეთა კლასზე.

შენიშვნა 11.6.1. ყოველი $f \in L^\infty(X,\mu)$ ფუნქციისათვის უზრუნველყოფილია $\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ სიმრავლის ზომადობა. ცხადია, ამ სიმრავლის ზომა ნულის ტოლია. მარტივი დასანახია, რომ საზოგადოდ, არსებითად შემოსაზღვრული f ფუნქციისათვის აღნიშნული სახის სიმრავლე შეიძლება ზომადი არ იყოს.

შენიშვნა 11.6.2. იმის გათვალისწინებით, რომ $\lim_{p\to 1} \frac{p}{p-1} = \infty$, ბუნებრივია $p = 1$ რიცხვის შეუღლებულ q პარამეტრად მივიჩნიოთ ∞. $p = 1$, $q = \infty$ წყვილის შემთხვევაში, ჰელდერის უტოლობა შემდეგ სახეს ღებულობს: თუ $f \in L^1(X,\mu)$ და $g \in L^\infty(X,\mu)$, მაშინ $fg \in L(X,\mu)$ და

$$\int_X |fg|d\mu \leq \|f\|_1\,\|g\|_\infty.$$

ამ უტოლობის დამტკიცებისათვის უნდა შევნიშნოთ, რომ თითქმის ყოველ წერტილში სრულდება შეფასება: $|f(x)g(x)| \leq |f(x)|\, \|g\|_\infty$, რომლის ინტეგრება გვაძლევს საჭირო უტოლობას.

აქვე შევნიშნავთ, რომ $p = \infty$ შემთხვევაში მინკოვსკის უტოლობა გამოიხატება $\|\cdot\|_\infty$ ნორმის მესამე თვისებით.

შენიშვნა 11.6.3. ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი დებულება: თუ μ შემოსაზღვრული ზომაა, მაშინ ნებისმიერი $1 \leq p < \infty$ პარამეტრისათვის გვაქვს, რომ $L^\infty(X,\mu) \subset L^p(X,\mu)$. გარდა ამისა, ყოველი $f \in L^\infty(X,\mu)$-სთვის სრულდება შეფასება $\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p}\|f\|_\infty$.

შემოუსაზღვრელი ზომის შემთხვევაში, $L^\infty(X,\mu) \subset L^p(X,\mu)$ ჩართვა სამართლიანი არაა. მართლაც, ამ სიტუაციაში იგივურად ერთის ტოლი ფუნქცია ეკუთვნის $L^\infty(X,\mu)$-ს, მაგრამ არ ეკუთვნის $L^p(X,\mu)$-ს.

შენიშვნა 11.6.4. თუ $X = \mathbb{N}$ და μ წარმოადგენს დამთვლელ ზომას $\mathbb{N}$-ში, მაშინ $L^\infty(X,\mu)$ სივრცის აღსანიშნავად იყენებენ l^∞ სიმბოლოს. l^∞ არის ყველა შემოსაზღვრული $x = (x_n)$ რიცხვითი მიმდევრობის სივრცე, რომელშიც ნორმა განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყოველი $1 \leq p < \infty$ პარამეტრისათვის $l^p \subset l^\infty$.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ $p = 1$ შემთხვევაში ჰელდერის უტოლობაში ტოლობა მიიღწევა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|g(x)| = \|g\|_\infty$ თითქმის ყველგან.
2. ააგეთ ფუნქცია, რომელიც ეკუთვნის $L^p([0,1])$ სივრცეს ყოველი $p \in [1,\infty)$-სთვის, მაგრამ არ ეკუთვნის $L^\infty([0,1])$ სივრცეს.
3. აჩენეთ, რომ თუ μ ზომა შემოსაზღვრულია, მაშინ ნებისმიერი $f \in L^\infty(X,\mu)$ ფუნქციისათვის $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
4. დაამტკიცეთ, რომ $f \in L^1(X,\mu)$ ფუნქციის ნორმა $L^1(X,\mu)$ სივრცეში შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგნაირად: $\|f\|_1 = \sup \int_X fg d\mu$, სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა იმ $g \in L^\infty(X,\mu)$ ფუნქციის მიხედვით, რომლისთვისაც $\|g\|_\infty \leq 1$. აჩვენეთ აგრეთვე, რომ აღნიშნული სუპრემუმი მიიღწევა გარკვეული $g_0 \in L^\infty(X,\mu)$, $\|g_0\|_\infty \leq 1$, ფუნქციისათვის.
5. დაამტკიცეთ, რომ $f \in L^\infty(X,\mu)$ ფუნქციის L^∞-ნორმა შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგნაირად: $\|f\|_\infty = \sup \int_X fg d\mu$, სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა იმ $g \in L^1(X,\mu)$ ფუნქციის მიხედვით, რომლისთვისაც $\|g\|_1 \leq 1$. $L^\infty([0,1])$ სივრცის მაგალითზე აჩვენეთ, რომ აღნიშნული სუპრემუმი შეიძლება არ მიიღწეოდეს არცერთი $g \in L^1([0,1]), \|g\|_1 \leq 1$, ფუნქციისათვის.

§ 7. L^∞ სივრცის ზოგიერთი თვისება

თეორემა 11.7.1. *$L^\infty(X,\mu)$ სივრცე არის სრული.*

დამტკიცება. ვთქვათ, (f_n) არის ფუნქციათა ფუნდამენტური მიმდევრობა $L^\infty(X,\mu)$ სივრცეში. განვიხილოთ სრული ზომის E სიმრავლე, რომელიც მიიღება სივრციდან შემდეგი ნულზომიანი სიმრავლეების ამოგდებით:

$$A_n = \{x : |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$A_{n,m} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\} \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

მაშინ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისათვის $(f_n(x))$ იქნება სასრული რიცხვების მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \quad (n, m \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

შედეგად, $(f_n(x))$ რიცხვითი მიმდევრობა იქნება ფუნდამენტური. რის გამოც, იარსებებს $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ზღვარი. განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული f ფუნქცია: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, როცა $x \in E$ და $f(x) = 0$, როცა $x \in X \setminus E$. ვაჩვენოთ, რომ f არის (f_n) მიმდევრობის ზღვარი L^∞ სივრცეში.

f წარმოდგება როგორც ზომად ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი ზღვარი. რის გამოც, f თავადაც ზომადი იქნება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და (f_n) მიმდევრობის ფუნდამენტურობის საფუძველზე ვიპოვოთ $N \in \mathbb{N}$, ისეთი, რომ $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$, როცა $n, m \geq N$. შემდეგ, ნებისმიერი $x \in E$-სთვის და $n \geq N$-სთვის (1) შეფასებაში m-ის მიმართ ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad (x \in E, n \geq N).$$

აქედან გამომდინარე, E სიმრავლის სრულზომიანობის გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ ყოველი $n \geq N$-სთვის,

$$f_n - f \in L^\infty(X,\mu) \ \text{და}\ \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

საიდანაც ერთდროულად მივიღებთ, რომ $f \in L^\infty(X,\mu)$ და $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 11.7.1. $L^\infty(X,\mu)$ სივრცეში კრებადობა ახლოს დგას თანაბრად კრებადობასთან. კერძოდ, ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი დებულების სამართლიანობა: ვთქვათ, $\{f\} \cup \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L^\infty(X,\mu)$. მაშინ იმისათვის, რომ (f_n) კრებადი იყოს f ფუნქციისაკენ $L^\infty(X,\mu)$ სივრცეში აუცილებელი და საკმარისია, რომ მოიძებნებოდეს სრული ზომის A სიმრავლე, რომელზეც (f_n) მიმდევრობა თანაბრად კრებადი იქნება f ფუნქციისაკენ. აქვე შევნიშნავთ, რომ f_n და f ფუნქციების უწყვეტობის შემთხვევაში $L^\infty(E)$ $(E \subset \mathbb{R}^n)$ სახის სივრცეებში კრებადობა ტოლფასია თანაბარი კრებადობისა.

შენიშვნა 11.7.2. L^p $(1 \leq p < \infty)$ სივრცეებისათვის დამახასიათებელი თვისებების ნაწილი არ ვრცელდება L^∞ სივრცის შემთხვევაზე. ამის საილუსტრაციოდ აღვნიშნავთ, რომ:

- $L^\infty([0,1])$ სივრცეში არაა ყველგან მკვრივი უწყვეტ ფუნციათა კლასი;

- $L^\infty([0,1])$ სივრცე არაა სეპარაბელური.

მოკლედ აღვწეროთ ამ წინადადებების დამტკიცებები.

პირველი წინადადების დასადგენად უნდა განვიხილოთ დადებითი ზომის სრულყოფილი $E \subset [0,1]$ სიმრავლე, რომელიც არსად მკვრივია. E სიმრავლის მახასიათებელი χ_E ფუნქცია ეკუთვნის $L^\infty([0,1])$ სივრცეს, თუმცა ნებისმიერი $f \in L^\infty([0,1])$ ფუნქცია, რომლისთვისაც სრულდება შეფასება: $\|f - \chi_E\|_\infty < 1/2$, იქნება წყვეტილი E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილში. რაც იმას ნიშნავს, რომ შეუძლებელია χ_E ფუნქციას მივუახლოვდეთ $1/2$-ზე ნაკლებ მანძილზე უწყვეტი ფუნქციის მეშვეობით.

მეორე წინადადების დასამტკიცებლად უნდა განვიხილოთ $[0,1]$ მონაკვეთის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ და დადებითი ზომის ქვესიმრავლეთა რაიმე (E_n) მიმდევრობა. თუ ნატურალურ ინდექსთა ნებისმიერი $\Lambda \subset \mathbb{N}$ სიმრავლისათვის f_Λ-თი აღვნიშნავთ $\bigcup_{n\in\Lambda} E_n$ სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას, მაშინ გვექნება, რომ: 1) $\{f_\Lambda : \Lambda \subset \mathbb{N}\} \subset L^\infty([0,1])$; 2) $\{f_\Lambda : \Lambda \subset \mathbb{N}\}$ კლასი კონტინუუმის სიმძლავრისაა; 3) $\{f_\Lambda : \Lambda \subset \mathbb{N}\}$ კლასის ნებისმიერ ორ ფუნქციას შორის L^∞-მანძილი ერთის ტოლია, აღნიშნული თვისებებიდან კი გამომდინარეობს $L^\infty([0,1])$ სივრცის არასეპარაბელურობა.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ მარტივ ფუნქციათა კლასი ყველგან მკვრივია $L^\infty(X,\mu)$ სივრცეში.
2. დაამტკიცეთ, რომ თუ მოიძებნება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და დადებითი ზომის სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობა, მაშინ არასეპარაბელურია $L^\infty(X,\mu)$ სივრცე. აჩვენეთ აგრეთვე, რომ აღნიშნული სახის მიმდევრობის არარსებობის შემთხვევაში, $L^\infty(X,\mu)$ სივრცე სასრულგანზომილებიანია და შედეგად, სეპარაბელურია.
3. დაამტკიცეთ, რომ l^∞ სივრცე არასეპარაბელურია.

თ ა ვ ი 12

ინტეგრება და დიფერენცირება

დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის უმთავრესი პრინციპის თანახმად, გაწარმოებისა და ინტეგრების ოპერაციები ურთიერთშებრუნებული არიან. ეს გამოიხატება იმაში, რომ თუ ფუნქციას ჯერ ვაინტეგრებთ, ხოლო შემდეგ კი გავაწარმოებთ - კვლავ საწყის ფუნქციას მივიღებთ, ამასთანავე, მსგავსი დასკვნა შესრულებული იქნება ოპერაციების თანმიმდევრობის შეცვლის შემთხვევაშიც: თუ ფუნქციას ჯერ გავაწარმოებთ, ხოლო შემდეგ ვაინტეგრებთ - საწყის ფუნქციას დავუბრუნდებით. კერძოდ, გაწარმოებისა და რიმანის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის ეს ორი ასპექტი ცნობილია შემდეგი თეორემების სახით:

1. **თუ f არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია, ხოლო F არის მისი რიმანის განუსაზღვრელი ინტეგრალი, ე.ი. $F(x)=\int_{[a,x]} f \ \ (x\in[a,b])$, მაშინ F ფუნქციას ყოველ $x\in[a,b]$ წერტილში აქვს წარმოებული, რომელიც $f(x)$-ის ტოლია.**

2. **თუ f არის $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, მაშინ ყოველი $x\in[a,b]$ წერტილისათვის სრულდება ტოლობა**

$$f(x)=f(a)+\int_{[a,x]} f'.$$

წინამდებარე თავი მიზნად ისახავს, შეისწავლოს გაწარმოებისა და ლებეგის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის საკითხი.

§ 1. ლებეგის თეორემა ინტეგრალის დიფერენცირების შესახებ

დავიწყოთ იმის შესწავლით, არის თუ არა გაწარმოება შებრუნებული ოპერაცია ლებეგის მიხედვით ინტეგრებისათვის. კერძოდ, ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: **თუ $f\in L([a,b])$ ფუნქციისათვის განვიხილავთ მის ლებეგის განუსაზღვრელ ინტეგრალს:**

$$F(x)=\int_{[a,x]} f d\mathrm{m} \quad (x\in[a,b]),$$

მაშინ იქნება თუ არა F წარმოებადი და ეს წარმოებული იქნება თუ არა f ფუნქციის ტოლი?

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის ცვლილება ნებისმიერ ნულზომიან სიმრავლეზე გავლენას არ ახდენს მის ლებეგის ინტეგრალზე. ამის გამო, მაქსიმუმი, რისი მოლოდინიც შეიძლება გვქონდეს, არის $F'(x) = f(x)$ ტოლობის თითქმის ყოველ წერტილში შესრულება. ლებეგის შემდეგი ფუნდამენტური თეორემა გვიჩვენებს, რომ თითქმის ყოველ წერტილში აღნიშნულ ტოლობას მართლაც აქვს ადგილი.

თეორემა 12.1.1. ნებისმიერი $f \in L([a,b])$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელ ინტეგრალს თითქმის ყოველ $x \in [a,b]$ წერტილში აქვს წარმოებული, რომელიც $f(x)$-ის ტოლია.

შენიშვნა 12.1.1. თეორემა 12.1.1-ის თანახმად, ნებისმიერი ჯამებადი f ფუნქციისათვის მისი ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი წარმოადგენს მისსავე განზოგადებულ პირველყოფილს.

შევთანხმდეთ, რომ შემდგომში:

- $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლის გარე ზომა და ზომადობის შემთხვევაში ლებეგის ზომა აღნიშნული იქნება შესაბამისად $|E|_*$ და $|E|$ ჩანაწერებით;
- $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი - $\int_A f d\mathrm{m}$ აღნიშნული იქნება $\int_A f$ ჩანაწერით;
- სიმრავლისა და ფუნქციის ზომადობა განხილული იქნება ლებეგის ზომის მიმართ;
- ყოველთვის განხილული იქნება გადაუგვარებელი და სასრული სიგრძის მონაკვეთები.

წრფეზე აღებული x წერტილისათვის $\mathbf{I}(x)$-ით აღვნიშნოთ x-ის შემცველი ყველა მონაკვეთის კლასი.

თეორემა 12.1.1 შედეგის სახით მიიღება შემდეგი დებულებიდან.

თეორემა 12.1.2. ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციისათვის თითქმის ყოველ $x \in \mathbb{R}$ წერტილში სრულდება შემდეგი ზღვარითი ტოლობა:

$$\lim_{I \in \mathbf{I}(x),\, I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I f = f(x). \qquad (1)$$

შენიშვნა 12.1.2. (1) ტოლობაში მოცემული ზღვარი შემდეგნაირად გაიგება: ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$\Big|\frac{1}{|I|} \int_I f - f(x)\Big| < \varepsilon,$$

ყოველთვის, როცა $I \in \mathbf{I}(x)$ და $|I| < \delta$.

შენიშვნა 12.1.3. თეორემა 12.1.2 მოკლედ შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: ინტეგრალური საშუალოების ზღვარი თითქმის ყველგან ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ტოლია.

შენიშვნა 12.1.4. თეორემა 12.1.2-დან თეორემა 12.1.1-ის მისაღებად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ თუ F არის $f \in L([a,b])$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი, მაშინ ნებისმიერი $x \in [a,b]$-სთვის,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{|I|}\int_I f,$$

სადაც $h \neq 0$, $x+h \in [a,b]$ და I არის სეგმენტი, რომლის ბოლოებია x და $x+h$ წერტილები.

შენიშვნა 12.1.5. თეორემა 12.1.2 ცხადია მაშინ, როცა f უწყვეტი ფუნქციაა. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი x წერტილი და $\varepsilon > 0$ რიცხვი. f-ის უწყვეტობის გამო შეგვიძლია ვიპოვოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$, როცა $|y-x| < \delta$. შედეგად, ნებისმიერი $I \ni x$ მონაკვეთისათვის, რომლის სიგრძე ნაკლებია δ-ზე, გვექნება:

$$(f(x)-\varepsilon)|I| \leq \int_I f \leq (f(x)+\varepsilon)|I|.$$

საიდანაც ვასკვნით (1) ტოლობის სამართლიანობას ნებისმიერ x წერტილში.

თეორემა 12.1.2-ის დამტკიცება. მსჯელობა ეფუძნება $L(\mathbb{R})$ სივრცეში უწყვეტ ფუნქციათა კლასის ყველგან მკვრივობის ფაქტს და ფუნქციის ინტეგრალურ საშუალოთა შესახებ ე.წ. სუსტი ტიპის უტოლობას, რომელიც საკმაოდ რთულ მომენტს შეადგენს დამტკიცებაში. აქვე შევნიშნავთ, რომ აღნიშნულ სუსტი ტიპის შეფასებას ამ ეტაპზე ჩავთვლით ცნობილად, ხოლო მის დამტკიცებას დაეთმობა მომდევნო ორი პარაგრაფი.

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\lambda > 0$-სთვის შემდეგი სიმრავლე:

$$E_\lambda = \left\{x : \varlimsup_{I \in \mathrm{I}(x),\, I \to x} \left|\frac{1}{|I|}\int_I f - f(x)\right| > 2\lambda\right\}$$

არის ნული ზომის. აქ მონაკვეთის ν ფუნქციის ზედა ზღვარი გაიგება შემდეგნაირად:

$$\varlimsup_{I \in \mathrm{I}(x),\, I \to x} \nu(I) = \lim_{\delta \to 0}(\sup\{\nu(I) : I \in \mathrm{I}(x), |I| < \delta\}).$$

ადვილი დასანახია, რომ ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომლისთვისაც არ სრულდება (1) ტოლობა, წარმოდგება $E_{1/k}$ $(k \in \mathbb{N})$ სიმრავლეების გაერთიანების სახით. ამის გათვალისწინებით, E_λ $(\lambda > 0)$ სიმრავლეების ნულზომიანობის დამტკიცების შემთხვევაში, თეორემა დადგენილი იქნება.

ვთქვათ, $\lambda > 0$. თეორემა 11.4.4-ის ძალით, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ უწყვეტი და ჯამებადი g ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$\int_{\mathbb{R}} |f-g| < \varepsilon. \tag{2}$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, უწყვეტი ფუნქციებისთვის ადგილი აქვს ინტეგრალურ საშუალოთა კრებადობას, ე.ი. ნებისმიერი x წერტილისათვის,

$$\lim_{I \in \mathrm{I}(x),\ I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I g = g(x). \tag{3}$$

განვიხილოთ რაიმე x წერტილი. გარდავქმნათ $\frac{1}{|I|}\int_I f - f(x)$ გამოსახულება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{|I|}\int_I f - f(x) = \frac{1}{|I|}\int_I (f-g) \ + \ \frac{1}{|I|}\int_I g \ - \ g(x) \ + \ (g(x) - f(x)).$$

აქედან, (3)-ის გათვალისწინებით ადვილი დასანახია, რომ

$$\varlimsup_{I \in \mathrm{I}(x),\ I \to x} \Big| \frac{1}{|I|}\int_I f - f(x) \Big| \le \varlimsup_{I \in \mathrm{I}(x),\ I \to x} \frac{1}{|I|}\int_I |f-g| \ + \ |g(x) - f(x)| \le$$

$$\le \sup_{I \in \mathrm{I}(x)} \frac{1}{|I|}\int_I |f-g| \ + \ |g(x) - f(x)|. \tag{4}$$

(4)-დან გამომდინარე დავწერთ,

$$E_\lambda \subset \Big\{ x : \sup_{I \in \mathrm{I}(x)} \frac{1}{|I|}\int_I |f-g| > \lambda \Big\} \cup \{ x : |g(x) - f(x)| > \lambda \} = A \cup B.$$

ამ თავის მესამე პარაგრაფში დადგენილი იქნება ე.წ. სუსტი ტიპის უტოლობა ინტეგრალური საშუალოებისათვის (იხ. თეორემა 12.3.1), რომლის ძალითაც ნებისმიერი $h \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციისათვის,

$$\Big| \Big\{ x : \sup_{I \in \mathrm{I}(x)} \frac{1}{|I|}\int_I |h| > \lambda \Big\} \Big|_* \le \frac{5}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |h|. \tag{5}$$

თუ (5)-ს გამოვიყენებთ $|f-g|$ ფუნქციისათვის, მივიღებთ, რომ

$$|A|_* \le \frac{5}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f-g|.$$

B სიმრავლის ზომა კი, $|f-g|$ ფუნქციისათვის დაწერილი ჩებიშევის უტოლობით, შემდეგნაირად შეფასდება:

$$|B| \le \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f-g|.$$

ახლა, თუ მხედველობაში მივიღებთ (2)-ს, დავწერთ, რომ

$$|E_\lambda|_* \le \frac{6\varepsilon}{\lambda}.$$

საიდანაც, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის საფუძველზე დავასკვნით E_λ სიმრავლის ნულზომიანობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 2. ვიტალის თეორემები სიმრავლეთა დაფარვის შესახებ

ამ პარაგრაფში დამტკიცებული თეორემები ეკუთვნის ჯ. ვიტალის. მათი მიზანია, მონაკვეთების მოცემული კლასიდან გამოყოს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი ქვეკლასი, რომელიც რაც შეიძლება დიდ ნაწილს აითვისებს საწყისი კლასიდან (ე.ი. ექნება დიდი ზომის გაერთიანება). ამ ტიპის შედეგებს ძალზე მნიშვნელოვანი დატვირთვა აქვთ დიფერენცირებისა და ზოგიერთი სხვა ზღვარითი პროცესის შესწავლისას. ჩვენი უახლოესი მიზანია მათი გამოყენება ინტეგრალური საშუალოებისათვის სუსტი ტიპის უტოლობის დასადგენად.

თეორემა 12.2.1. ვთქვათ, წრფივი E სიმრავლე დაფარულია ერთობლივ შემოსაზღვრული სიგრძეების მქონე მონაკვეთების Π კლასით. მაშინ Π-დან შეიძლება გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი, არაუმეტეს თვლადი Π' ქვეკლასი, ისეთი, რომ

$$\sum_{I\in\Pi'} |I| \geq \frac{1}{5}|E|_*.$$

დამტკიცება. საძიებელი Π' ქვეკლასის შერჩევა ხდება ე.წ. „ხარბი“ ალგორითმის გამოყენებით. აღვწეროთ ეს ალგორითმი:

Π ოჯახის მონაკვეთების სიგრძეების ერთობლივ შემოსაზღვრულობის გამო შეგვიძლია ავირჩიოთ „თითქმის ყველაზე დიდი“ მათ შორის, რაც გულისხმობს ისეთი $I_1 \in \Pi$ მონაკვეთის არჩევას, რომლისთვისაც სრულდება პირობა

$$|I_1| > \frac{1}{2}\sup\{|I| : I \in \Pi\}.$$

დავუშვათ, წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $I_1, \dots, I_k \in \Pi$ მონაკვეთები უკვე არჩეულია. განვიხილოთ ყველა იმ $I \in \Pi$ მონაკვეთის Π_k კლასი, რომელიც არ კვეთს არცერთს $I_1, \dots, I_k$ მონაკვეთებს შორის. თუ Π_k კლასი ცარიელია, მაშინ აგება დასრულებულად ჩავთვალოთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი, I_{k+1}-ის როლში ავიღოთ თითქმის ყველაზე დიდი Π_k კლასის წევრებს შორის, ე.ი. ვირჩევთ $I_{k+1} \in \Pi_k$ მონაკვეთს, რომლისთვისაც

$$|I_{k+1}| > \frac{1}{2}\sup\{|I| : I \in \Pi_k\}.$$

აღწერილი სქემის გამოყენებით, Π კლასიდან გამოვყოფთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთების სასრულ ან თვლად $\Pi' = \{I_k\}$ ქვეკლასს. დავადგინოთ, რომ Π' აკმაყოფილებს საჭირო შეფასებას. განვიხილოთ ის შემთხვევა,

როცა Π' თვლადი კლასია. სასრული კლასის შემთხვევაში, დამტკიცება ანალოგიური და კიდევ უფრო მარტივია.

შესაძლებელია ორი ქვეშემთხვევა იმისდა მიხედვით $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| = \infty$, თუ $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| < \infty$.

პირველ ქვეშემთხვევაში დებულება ცხადია.

მეორე ქვეშემთხვევაში გვექნება, რომ

$$|I_k| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

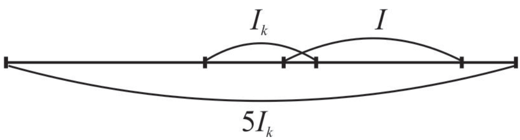
საიდანაც გამომდინარეობს შემდეგი წინადადება: ნებისმიერი $I \in \Pi$ მონაკვეთი კვეთს ერთს მაინც I_k მონაკვეთებს შორის, ე.ი. ნებისმიერი $I \in \Pi$-სთვის,

$$I \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset. \tag{1}$$

მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, აგებიდან გამომდინარე ყოველი k-სთვის შესრულდება შეფასება: $|I_k| > |I|/2$. რაც ეწინააღმდეგება $|I_k| \to 0$ პირობას.

Θ_1 იყოს ყველა იმ $I \in \Pi$ მონაკვეთის კლასი, რომელიც კვეთს I_1-ს, ხოლო $k \geq 2$-სთვის Θ_k იყოს ყველა იმ $I \in \Pi$ მონაკვეთის კლასი, რომელიც კვეთს I_k-ს და არ კვეთს არც ერთს $I_1, \ldots, I_{k-1}$ მონაკვეთებს შორის. აგების გათვალისწინებით, ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი k-სთვის (ნახ. 12.1),

$$I \in \Theta_k \ \Rightarrow \ (I \cap I_k \neq \emptyset, \ |I| < 2|I_k|) \ \Rightarrow I \subset 5I_k. \tag{2}$$



ნახ. 12.1.

აქ $5I_k$ აღნიშნავს I_k-ს 5-ჯერ გაჭიმვით მიღებულ მონაკვეთს, ე.ი. $5I_k = H(I_k)$, სადაც H არის ჰომოთეტია, რომლის ცენტრი ემთხვევა I_k-ს ცენტრს და რომლის კოეფიციენტი არის 5-ის ტოლი.

(1)-ის და (2)-ის ძალით ვწერთ,

$$E \subset \bigcup_{I \in \Pi} I = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{I \in \Theta_k} I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} 5I_k. \tag{3}$$

(3)-დან კი ვღებულობთ, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}|5I_k| \geq \frac{1}{5}\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} 5I_k\right| \geq \frac{1}{5}|E|_*.$$

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 12.2.1. Π' ქვეკლასის არაუმეტეს თვლადობის მოთხოვნა თეორემა 12.1.1-ის ფორმულირებაში (და ყველა შემდგომ მსგავსი ტიპის დებულებაში) მოცემულია გადმოცემის სისრულისათვის. მართლაც, წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთების ყოველი კლასი თავისთავადაა არაუმეტეს თვლადი. უფრო მეტიც (იხ. 1 და 2 ამოცანები პარაგრაფის ბოლოს), ელემენტარული მსჯელობით მტკიცდება, რომ σ-შემოსაზღვრულ ზომიან სივრცეში დადებითი ზომის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა ნებისმიერი კლასი არაუმეტეს თვლადია.

შენიშვნა 12.2.2. თეორემა 12.2.1 არ რჩება სამართლიანი, თუ E სიმრავლის დამფარავ მონაკვეთებს არ მოვთხოვთ სიგრძეების ერთობლივ შემოსაზღვრულობას. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ განვიხილავთ $E = \mathbb{R}$ სიმრავლისა და მისი $\Pi = \{[-k, k] : k \in \mathbb{N}\}$ დაფარვის შემთხვევას.

ვიტყვით, რომ მონაკვეთების Π კლასი **ვიტალის აზრით ფარავს** $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლეს, თუ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისათვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $I \in \Pi$ მონაკვეთი შემდეგი თვისებებით: $x \in I$ და $|I| < \varepsilon$.

შევნიშნოთ, რომ ვიტალის აზრით დაფარვის გამომხატველი პირობა ტოლფასია შემდეგის: ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისათვის მოიძებნება Π კლასის მონაკვეთების (I_k) მიმდევრობა თვისებებით: $x \in I_k$ და $|I_k| \to 0$ $(k \to \infty)$.

თეორემა 12.2.2. ვთქვათ, წრფივი E სიმრავლე ვიტალის აზრით დაფარულია მონაკვეთების Π კლასით. მაშინ Π-დან შეიძლება გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი, არაუმეტეს თვლადი Π' ქვეკლასი, რომელიც თითქმის ფარავს E სიმრავლეს, ე.ი.

$$\left| E \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right|_* = 0.$$

შენიშვნა 12.2.3. ვთქვათ, Π' არის გამოყოფილი ქვეკლასი თეორემა 12.2.2-დან. მაშინ გვექნება, რომ

$$|E|_* \leq \left| E \cap \bigcup_{I \in \Pi'} I \right|_* + \left| E \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right|_* \leq \sum_{I \in \Pi'} |I|.$$

ამრიგად, $\sum_{I \in \Pi'} |I| \geq |E|_*$, რაც წარმოადგენს თეორემა 12.2.1-ის დასკვნაში მოცემულზე ძლიერ შეფასებას.

ლემა 12.2.1. ვთქვათ, წრფივი შემოსაზღვრული E სიმრავლე ვიტალის აზრით დაფარულია მონაკვეთების Π კლასით. მაშინ ნებისმიერი ჩაკეტილი A სიმრავლისათვის Π კლასიდან შეიძლება გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი სასრული Π' ქვეკლასი, ისეთი,

რომ:

$$I \cap A = \emptyset \quad \textbf{ყოველი} \quad I \in \Pi'\textbf{-სათვის},$$

$$\left|(E \setminus A) \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I\right|_* \leq \left(1 - \frac{1}{20}\right)|E \setminus A|_*.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $|E\setminus A|_* > 0$. დავფაროთ $E\setminus A$ სიმრავლე ღია და შემოსაზღვრული G სიმრავლით ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა:

$$|G| \leq (1 + 1/20)\, |E \setminus A|_*. \tag{4}$$

განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული $\widehat{\Pi}$ კლასი:

$$\widehat{\Pi} = \{I \in \Pi : I \subset G,\ I \cap A = \emptyset\}.$$

$\widehat{\Pi}$ კლასი დაფარავს $E\setminus A$ სიმრავლეს. ეს ადვილად გამომდინარეობს შემდეგი სამი ფაქტიდან: G ღიაა, A ჩაკეტილია და Π არის $E\setminus A$ სიმრავლის ვიტალის აზრით დაფარვა. ამის შემდეგ, $E\setminus A$ სიმრავლისა და $\widehat{\Pi}$ კლასისთვის გამოვიყენოთ თეორემა 12.2.1. ადვილი დასანახია, რომ ეს საშუალებას მოგვცემს, ვიპოვოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი, სასრული $\Pi' \subset \widehat{\Pi}$ კლასი, რომლისთვისაც

$$\sum_{I \in \Pi'} |I| \geq \frac{|E \setminus A|_*}{10}.$$

შედეგად, (4)-ის გათვალისწინებით გვექნება,

$$\left|(E \setminus A) \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I\right| \leq \left|G \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I\right| = |G| - \sum_{I \in \Pi'} |I| \leq \left(1 - \frac{1}{20}\right)|E \setminus A|_*.$$

შევნიშნოთ, რომ Π' კლასის მონაკვეთები, $\Pi' \subset \widehat{\Pi}$ ჩართვის გამო, არ კვეთენ A სიმრავლეს. ამით ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 12.2.2-ის დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად მივიჩნიოთ, რომ დამფარავი მონაკვეთები ჩაკეტილია.

თავდაპირველად განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა E სიმრავლე შემოსაზღვრულია.

საძიებელ ქვეკლასს გამოვყოფთ ე.წ. „ამოწურვის“ მეთოდის მეშვეობით, რომელიც ეფუძნება ლემა 12.2.1-ის გამოყენებას.

ლემა 12.2.1-ის საფუძველზე ვიპოვოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი სასრული $\Pi_1' \subset \Pi$ ქვეკლასი, ისეთი, რომ

$$\left|E \setminus \bigcup_{I \in \Pi_1'} I\right|_* \leq \left(1 - \frac{1}{20}\right)|E|_*. \tag{5}$$

დავუშვათ, Π-ს სასრული ქვეკლასები - $\Pi'_1, \dots, \Pi'_k$, უკვე აგებულია. აღვნიშნოთ

$$A_1 = \bigcup_{I \in \Pi'_1} I, \quad \dots \quad , A_k = \bigcup_{I \in \Pi'_k} I, \quad A(k) = A_1 \cup \dots \cup A_k.$$

ცხადია, $A(k)$ სიმრავლე ჩაკეტილია. თუ $E \setminus A(k)$ სიმრავლე ცარიელია, მაშინ აგება დასრულებულად ჩავთვალოთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში, E და $A(k)$ სიმრავლეებისათვის გამოვიყენოთ ლემა 12.2.1 და ვიპოვოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი სასრული $\Pi'_{k+1} \subset \Pi$ ქვეკლასი, ისეთი, რომ:

$$I \cap A(k) = \emptyset \quad \text{ყოველი} \quad I \in \Pi'_{k+1}\text{-სათვის}, \tag{6}$$

$$\left|(E \setminus A(k)) \setminus \bigcup_{I \in \Pi'_{k+1}} I\right|_* \le \left(1 - \frac{1}{20}\right)|E \setminus A(k)|_*. \tag{7}$$

აღწერილი სქემით, Π კლასიდან გამოვყოფთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი და სასრული Π'_k ქვეკლასების სასრულ ან უსასრულო მიმდევრობას. Π' იყოს Π'_k კლასების გაერთიანება. სასრული მიმდევრობის შემთხვევაში, (6)-ის გათვალისწინებით ცხადია, რომ Π' დააკმაყოფილებს მოთხოვნილ პირობებს. განვიხილოთ უსასრულო მიმდევრობის შემთხვევა. აგებიდან გამომდინარე, (6)-ის გათვალისწინებით ცხადია, რომ Π' შედგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან. დასამტკიცებელი გვრჩება Π' კლასის მეშვეობით E სიმრავლის თითქმის დაფარვა. ეს დასკვნა მიიღება შემდეგი შეფასებიდან:

$$\left|E \setminus \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{I \in \Pi'_s} I\right|_* \le \left|E \setminus \bigcup_{s=1}^{m} \bigcup_{I \in \Pi'_s} I\right|_* \le \left(1 - \frac{1}{20}\right)^m |E|_* \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

უკანასკნელი შეფასება კი ადვილად მტკიცდება ინდუქციით m-ის მიმართ (5)-ის და (7)-ის საფუძველზე. ამით, განსახილავ შემთხვევაში, თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა გადავიდეთ ზოგად შემთხვევაზე, ე.ი. როცა E არის ნებისმიერი წრფივი სიმრავლე. აღვნიშნოთ

$$\Pi_k = \{I \in \Pi : I \subset (k, k+1)\} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

ცხადია, ყოველი $k \in \mathbb{Z}$-სთვის, Π_k ქმნის $E \cap (k, k+1)$ სიმრავლის ვიტალის აზრით დაფარვას. შემდეგ, ყოველი $k \in \mathbb{Z}$-სთვის უკვე განხილული შემთხვევის საფუძველზე Π_k-დან გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთების Π'_k ქვეკლასი, რომელიც თითქმის ფარავს $E \cap (k, k+1)$ სიმრავლეს. ადვილი დასანახია, რომ $\Pi' = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Pi'_k$ ქვეკლასის მონაკვეთები იქნებიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და თითქმის დაფარავენ E სიმრავლეს. $\square$

შენიშვნა 12.2.4. თეორემა 12.2.2-ის დამტკიცებისთვის გამოყენებული იყო თეორემა 12.2.1, თუმცა შესაძლებელია მისი დამტკიცება უშუალოდაც - მონაკვეთების ამორჩევის ხარბი ალგორითმის გამოყენებით.

ამოცანები

1. აჩვენეთ, რომ შემოსაზღვრულ ზომიან სივრცეში დადებითი ზომის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა ნებისმიერი კლასი არაუმეტეს თვლადია. **მითითება**: ნებისმიერი ნატურალური k რიცხვისათვის განიხილეთ იმ სიმრავლეების ქვეკლასი, რომელთა ზომები მეტია $1/k$-ზე.
2. აჩვენეთ, რომ σ-შემოსაზღვრულ ზომიან სივრცეში დადებითი ზომის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა ნებისმიერი კლასი არაუმეტეს თვლადია.
3. ვთქვათ, შემოსაზღვრული $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლე დაფარულია მონაკვეთების სასრული Π კლასით. დაამტკიცეთ, რომ:

   ა) Π-დან შეიძლება გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი Π' ქვეკლასი, ისეთი, რომ $\sum_{I\in\Pi'}|I| \geq |E|_*/3$;

   ბ) Π-დან შეიძლება გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი Π' ქვეკლასი, ისეთი, რომ $\sum_{I\in\Pi'}|I| \geq |E|_*/2$.
4. დაამტკიცეთ, რომ მონაკვეთების ნებისმიერი კლასის გაერთიანება ზომადი სიმრავლეა.

§ 3. სუსტი ტიპის უტოლობა ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორისათვის

ვთქვათ, $f \in L(\mathbb{R})$. განვიხილოთ f-თან შემდეგი წესით დაკავშირებული $M(f)$ ფუნქცია:

$$M(f)(x) = \sup_{I\in \mathrm{I}(x)} \frac{1}{|I|}\int_I |f| \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$M(f)$-ს უწოდებენ f-ის **ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალურ ფუნქციას**. უხეშად რომ ვთქვათ, $M(f)(x)$ გვიჩვენებს, თუ რა მაქსიმალური მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს f ფუნქციის მოდულის ინტეგრალურმა საშუალოებმა x წერტილის არეალში.

ასახვას, რომელიც $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციას $M(f)$ ფუნქციას შეუსაბამებს, **ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალურ ოპერატორს** უწოდებენ.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ M ოპერატორს აქვს შემდეგი თვისებები:

$$0 \leq M(f)(x) \leq \infty,$$

$$M(f+g)(x) \leq M(f)(x) + M(g)(x),$$
$$M(\alpha f)(x) = |\alpha| M(f)(x).$$

შემდეგი თეორემა ადგენს ე.წ. **სუსტი ტიპის უტოლობას** ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორისათვის, რომლის გამოყენებითაც მტკიცდება

ინტეგრალის წარმოებადობის შესახებ ლებეგის თეორემა. აქვე აღვნიშნავთ, რომ ამ უტოლობას მნიშვნელოვანი გამოყენებები აქვს ფუნქციათა თეორიის სხვადასხვა საკითხებში.

თეორემა 12.3.1. ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციისათვის $M(f)$ არის ზომადი ფუნქცია და აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$|\{M(f) > \lambda\}| \leq \frac{5}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| \qquad (0 < \lambda < \infty).$$

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\lambda \in (0, \infty)$-სთვის, $\{M(f) > \lambda\}$ სიმრავლე არის ღია, რითაც $M(f)$-ის ზომადობა დადგენილი იქნება.

ვთქვათ, $x \in \{M(f) > \lambda\}$. მაშინ მოიძებნება $I \ni x$ მონაკვეთი, ისეთი, რომ

$$\int_I |f| > \lambda |I|.$$

აღვნიშნოთ $\varepsilon = \int_I |f| - \lambda|I|$ და ლებეგის ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობის საფუძველზე ვიპოვოთ $\delta > 0$ რიცხვი თვისებით:

$$|E| < \delta \ \Rightarrow \ \int_E |f| < \varepsilon.$$

დავადგინოთ $(x - \delta/2, x + \delta/2) \subset \{M(f) > \lambda\}$ ჩართვა. თუ $(x - \delta/2, x + \delta/2)$ მონაკვეთის ნებისმიერი $y \neq x$ წერტილისათვის განვიხილავთ

$$J = I + (y - x)$$

მონაკვეთს, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $y \in J$. ამასთან, თუ შევნიშნავთ, რომ $J \setminus I$ და $I \setminus J$ წარმოადგენენ $\delta/2$-ზე მცირე სიგრძის მონაკვეთებს, გვექნება საფუძველი, დავწეროთ,

$$\int_J |f| = \int_I |f| - \int_{I \setminus J} |f| + \int_{J \setminus I} |f| \geq$$

$$\geq \int_I |f| - \int_{(I \setminus J) \cup (J \setminus I)} |f| > \int_I |f| - \varepsilon = \lambda |I| = \lambda |J|.$$

შედეგად ვღებულობთ $M(f)(y) > \lambda$ შეფასებას. ამით $\{M(f) > \lambda\}$ სიმრავლის ღიაობა და, მასთან ერთად, $M(f)$ ფუნქციის ზომადობა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, $\lambda \in (0, \infty)$. მაშინ ყოველი $x \in \{M(f) > \lambda\}$ წერტილისათვის მოიძებნება x-ის შემცველი I_x მონაკვეთი, ისეთი, რომ

$$\frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} |f| > \lambda.$$

შედეგად, I_x მონაკვეთებისათვის სამართლიანი იქნება შეფასებები:

$$|I_x| < \frac{1}{\lambda} \int_{I_x} |f| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f|. \tag{1}$$

მონაკვეთების $\Pi = \{I_x\}$ კლასი ფარავს $\{M(f) > \lambda\}$ სიმრავლეს, ამასთან, (1)-ის ძალით Π კლასის მონაკვეთებს აქვთ ერთობლივ შემოსაზღვრული სიგრძეები. ეს საფუძველს გვაძლევს, თეორემა 12.2.1-ის გამოყენებით, Π-დან გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მონაკვეთებისაგან შედგენილი არაუმეტეს თვლადი Π' ქვეკლასი, რომლისთვისაც

$$\sum_{I \in \Pi'} |I| \geq \frac{1}{5} |\{M(f) > \lambda\}|. \tag{2}$$

$I \in \Pi'$ მონაკვეთების წყვილ-წყვილად თანაუკვეთობისა და $(1), (2)$ პირობების ძალით დავწერთ,

$$|\{M(f) > \lambda\}| \leq 5 \sum_{I \in \Pi'} |I| < 5 \sum_{I \in \Pi'} \frac{1}{\lambda} \int_I |f| =$$

$$= \frac{5}{\lambda} \int_{\bigcup\limits_{I \in \Pi'} I} |f| \leq \frac{5}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 12.3.1. თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას:

$$\{M(f) = \infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{M(f) > k\},$$

თეორემა 12.3.1-ის საფუძველზე დავასკვნით, რომ ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R})$-სთვის, $M(f)$ მაქსიმალური ფუნქცია თითქმის ყველგან სასრულია.

თუ T ოპერატორი ყოველ $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციას შეუსაბამებს ზომად $T(f)$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$|\{T(f) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| \qquad (0 < \lambda < \infty),$$

სადაც c არის f ფუნქციისაგან დამოუკიდებელი დადებითი მუდმივი, მაშინ ამბობენ, რომ T ოპერატორს აქვს **სუსტი** $(1, 1)$ **ტიპი**.

თუ T ოპერატორი ყოველ $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციას შეუსაბამებს $T(f) \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$\int_{\mathbb{R}} |T(f)| \leq c \int_{\mathbb{R}} |f|,$$

სადაც c არის f ფუნქციისაგან დამოუკიდებელი დადებითი მუდმივი, მაშინ ამბობენ, რომ T ოპერატორს აქვს **ძლიერი** $(1, 1)$ **ტიპი**.

ჩებიშევის უტოლობიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ თუ ოპერატორს აქვს ძლიერი $(1, 1)$ ტიპი, მაშინ მას აქვს სუსტი $(1, 1)$ ტიპიც.

შენიშვნა 12.3.2. თეორემა 12.3.1-ის ძალით, ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალურ ოპერატორს აქვს სუსტი $(1,1)$ ტიპი. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ მას არა აქვს ძლიერი $(1,1)$ ტიპი. უფრო მეტიც, $M(f)$ მაქსიმალური ფუნქცია, შეიძლება, საერთოდ არ იყოს ჯამებადი. მართლაც, თუ განვიხილავთ $f = \chi_{(0,1)}$ ფუნქციას, ადვილი შესამოწმებელია, რომ ყოველი $x > 1$ წერტილისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$M(f)(x) \geq \frac{1}{|[0,x]|} \int_{[0,x]} f = \frac{1}{x}.$$

საიდანაც ვასკვნით $M(f)$ ფუნქციის არაჯამებადობას.

შენიშვნა 12.3.3. ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ფუნქცია თითქმის ყოველ წერტილში აკმაყოფილებს $M(f)(x) \geq |f(x)|$ შეფასებას. მართლაც, მაქსიმალური ფუნქციის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ნებისმიერი x წერტილისათვის გვექნება, რომ

$$M(f)(x) \geq \varlimsup_{I \in \mathrm{I}(x),\, I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I |f|.$$

ამასთანავე, ლებეგის თეორემის ძალით, თითქმის ყოველი x-სთვის,

$$\lim_{I \in \mathrm{I}(x),\, I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I |f| = |f(x)|.$$

შედეგად, $M(f)(x) \geq |f(x)|$ თითქმის ყველგან.

ამოცანები

1. M ოპერატორისათვის დაამტკიცეთ სუსტი $(1,1)$ ტიპის უტოლობის შემდეგი დაზუსტება: $|\{M(f) > \lambda\}| \leq \frac{3}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f|$.
2. დაამტკიცეთ, რომ $M(f) \in L(\mathbb{R})$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x) = 0$ თითქმის ყველგან.

§ 4. ზოგიერთი შენიშვნა ლებეგის თეორემასთან დაკავშირებით

I. **ლებეგის თეორემა ლოკალურად ჯამებადი ფუნქციებისათვის.** $\mathbb{R}$-ზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება **ლოკალურად ჯამებადი**, თუ f ჯამებადია ნებისმიერ შემოსაზღვრულ და ზომად სიმრავლეზე. ყველა ლოკალურად ჯამებადი ფუნქციის კლასი აღინიშნება $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ჩანაწერით. ცხადია, რომ $L(\mathbb{R}) \subset L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. ამასთან, იგივურად ერთის ტოლი ფუნქციის მაგალითი გვარწმუნებს, რომ აღნიშნული ჩართვა მკაცრია.

როგორც შემდეგი დებულება გვიჩვენებს, თეორემა 12.1.2 ვრცელდება $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ კლასის ფუნქციებზე.

თეორემა 12.4.1. ნებისმიერი $f \in L_{\rm loc}(\mathbb{R})$ ფუნქციისათვის თითქმის ყოველ $x \in \mathbb{R}$ წერტილში სრულდება ტოლობა:

$$\lim_{I\in\mathbf{I}(x),\, I\to x} \frac{1}{|I|}\int_I f = f(x).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი მთელი k რიცხვი. ცხადია, $f_k = f\chi_{(k,k+1)}$ ფუნქცია იქნება $\mathbb{R}$-ზე ჯამებადი და მის მიმართ ლებეგის თეორემის გამოყენებით დავასკვნით, რომ თითქმის ყოველი $x \in \mathbb{R}$-სთვის,

$$\lim_{I\in\mathrm{I}(x),\, I\to x} \frac{1}{|I|}\int_I f_k = f_k(x).$$

შევნიშნოთ, რომ: ა) თუ $x \in (k, k+1)$ წერტილის შემცველი I მონაკვეთი საკმარისად მცირეა, მაშინ ამ მონაკვეთზე f და f_k ფუნქციებს ერთი და იგივე ინტეგრალური საშუალოები აქვთ; ბ) $(k, k+1)$ მონაკვეთის ნებისმიერი x წერტილისათვის, $f_k(x) = f(x)$. შედეგად, $(k, k+1)$ მონაკვეთის თითქმის ყოველი x წერტილისათვის შესრულებული იქნება ტოლობა:

$$\lim_{I\in\mathrm{I}(x),\, I\to x} \frac{1}{|I|}\int_I f = f(x).$$

აქედან, $k \in \mathbb{Z}$ ნებისმიერობის გათვალისწინებით, მარტივად გამომდინარეობს დასკვნა დასამტკიცებელი ტოლობის წრფის თითქმის ყოველ წერტილში შესრულების შესახებ. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

II. **ზომადი სიმრავლის სიმკვრივისა და გაიშვიათების წერტილები**. ვთქვათ, E რაიმე ზომადი სიმრავლეა წრფეზე. x წერტილს ეწოდება E სიმრავლის **სიმკვრივის წერტილი**, თუ

$$\lim_{h\to 0} \frac{|(x-h, x+h)\cap E|}{2h} = 1,$$

და ეწოდება E სიმრავლის **გაიშვიათების წერტილი**, თუ

$$\lim_{h\to 0} \frac{|(x-h, x+h)\cap E|}{2h} = 0.$$

შევნიშნოთ, რომ x არის სიმკვრივის წერტილი E-სთვის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x არის გაიშვიათების წერტილი E-ს დამატებისათვის.

სიმკვრივის წერტილის ცნება წააგავს სიმრავლის შიგა წერტილის ცნებას და გამოხატავს იმ მოვლენას, რომ x წერტილი თითქმის სრულადაა გარშემორტყმული E სიმრავლის წერტილებით, გაიშვიათების წერტილის ცნება კი წააგავს სიმრავლის გარე წერტილის ცნებას და გამოხატავს მოვლენას, როცა x წერტილი თითქმის სრულადაა გარშემორტყმული E სიმრავლის გარეთ მდებარე წერტილებით.

თეორემა 12.4.2. ვთქვათ, E ზომადი სიმრავლეა წრფეზე. მაშინ თითქმის ყოველი $x \in E$ წერტილი არის E სიმრავლის სიმკვრივის წერტილი, ხოლო თითქმის ყოველი $x \notin E$ წერტილი არის E სიმრავლის გაიშვიათების წერტილი.

დამტკიცება. ცხადია, χ_E ლოკალურად ჯამებადი ფუნქციაა. ამიტომ, თეორემა 12.4.1-ის ძალით, თითქმის ყოველი x წერტილისათვის გვექნება, რომ

$$\lim_{I \in \mathrm{I}(x),\ I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I \chi_E = \chi_E(x).$$

შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ $\frac{1}{|I|}\int_I \chi_E = \frac{|I \cap E|}{|I|}$ ტოლობას და ზღვარს განვიხილავთ მხოლოდ $I = (x-h, x+h)$ სახის მონაკვეთების მიხედვით, დავრწმუნდებით თეორემის სამართლიანობაში. □

III. **ლებეგის წერტილის ცნება.** ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}$ არის რაიმე ზომადი სიმრავლე, x არის E-ს შიგა წერტილი, $f \in L(E)$ და $f(x) \neq \pm\infty$. x წერტილში ინტეგრალის დიფერენცირებადობის გამომხატველი ტოლობა:

$$\lim_{I \in \mathrm{I}(x),\ I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I f = f(x),$$

შეიძლება შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\lim_{I \in \mathrm{I}(x),\ I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I [f(y) - f(x)] d\mathrm{m}(y) = 0. \tag{1}$$

თუ f ფუნქცია აკმაყოფილებს კიდევ უფრო ძლიერ პირობას შემდეგი ტოლობის სახით:

$$\lim_{I \in \mathrm{I}(x),\ I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f(x)| d\mathrm{m}(y) = 0, \tag{2}$$

მაშინ ამბობენ, რომ x არის f ფუნქციის **ლებეგის წერტილი**.

ინტეგრალის დიფერენცირებადობისა და ლებეგის წერტილის ცნების გამომხატველ პირობებს (ე.ი. (1) და (2) პირობებს) შეიძლება შევხედოთ როგორც f ფუნქციის საშუალოდ უწყვეტობას x წერტილში. (2) პირობის შემთხვევაში, უწყვეტობის ფაქტორი უფრო გამოკვეთილია, რაც აიხსნება იმით, რომ (1) ტოლობის შესრულება შეიძლება გამოწვეული იყოს $f(y) - f(x)$ ნაზრდის დადებითი და უარყოფითი მნიშვნელობების ურთიერთჩაქრობის (ე.წ. ინტერფერენციის) ხარჯზე, მაშინ როცა (2) ტოლობის შესრულება უკავშირდება ნაზრდის აბსოლუტური სიდიდის სიმცირეს.

აღვნიშნავთ, რომ ლებეგის წერტილებში უზრუნველყოფილია ფუნქციის გასაშუალების მთელი რიგი პროცესების კრებადობა (მაგალითად, ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის არითმეტიკული საშუალოების კრებადობა). რაც აიხსნება ზემოთ ნახსენები საშუალოდ უწყვეტობის მოვლენით.

თეორემა 12.4.3. ნებისმიერი $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ფუნქციისათვის თითქმის ყოველი $x \in \mathbb{R}$ წერტილი არის ლებეგის წერტილი.

დამტკიცება. განვიხილოთ ჯამებადი f ფუნქციის შემთხვევა. ლოკალურად ჯამებად ფუნქციებზე დებულების გავრცელება ხდება თეორემა 12.4.1-სთვის გამოყენებული სქემით.

მსჯელობა თითქმის სრულად იმეორებს ლებეგის თეორემის შემთხვევაში გამოყენებულ სქემას.

თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ თეორემა ცხადია უწყვეტი და ჯამებადი g ფუნქციისათვის. უფრო მეტიც, ასეთი ფუნქციებისათვის (2) ტოლობა შესრულდება უკლებლივ ყოველ წერტილში.

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\lambda > 0$-სთვის შემდეგი სიმრავლე:

$$E_\lambda = \Big\{x : \varlimsup_{I \in \mathrm{I}(x),\, I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f(x)| > 2\lambda\Big\}$$

არის ნული ზომის.

ადვილი დასანახია, რომ ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომლისთვისაც არ სრულდება (2) ტოლობა, წარმოდგება $E_{1/k}$ $(k \in \mathbb{N})$ სიმრავლეების გაერთიანების სახით. ამიტომ E_λ $(\lambda > 0)$ სიმრავლეთა ნულზომიანობის დამტკიცების შემთხვევაში საჭირო დასკვნა დადგენილი იქნება.

ვთქვათ, $\lambda > 0$. თეორემა 11.4.4-ის ძალით ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ უწყვეტი და ჯამებადი g ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| < \varepsilon. \tag{3}$$

g-ს უწყვეტობის გამო ნებისმიერი x-სთვის,

$$\lim_{I \in \mathrm{I}(x),\, I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I |g - g(x)| = 0. \tag{4}$$

განვიხილოთ რაიმე x წერტილი. შევაფასოთ $\frac{1}{|I|}\int_I |f - f(x)|$ გამოსახულება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f - f(x)| \leq \frac{1}{|I|} \int_I |f - g| \ + \ \frac{1}{|I|} \int_I |g - g(x)| \ + \ |g(x) - f(x)|.$$

აქედან, (4)-ის გათვალისწინებით ადვილი დასანახია, რომ

$$\varlimsup_{I \in \mathrm{I}(x),\, I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f(x)| \leq \varlimsup_{I \in \mathrm{I}(x),\, I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I |f - g| \ + \ |g(x) - f(x)| \leq$$
$$\leq M(f - g)(x) \ + \ |g(x) - f(x)|. \tag{5}$$

(5)-დან გამომდინარე დავწერთ,

$$E_\lambda \subset \{x : M(f-g)(x) > \lambda\} \cup \{x : |g(x) - f(x)| > \lambda\} = A \cup B.$$

M ოპერატორისათვის სუსტი $(1,1)$ ტიპის უტოლობის ძალით:

$$|A| \leq \frac{5}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f-g|.$$

B სიმრავლის ზომა კი, ჩებიშევის უტოლობით, შემდეგნაირად შეფასდება:

$$|B| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f-g|.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ (3)-ს, დავწერთ, რომ

$$|E_\lambda|_* \leq \frac{6\varepsilon}{\lambda}.$$

საიდანაც, $\varepsilon > 0$-ის ნებისმიერობის საფუძველზე დავასკვნით E_λ სიმრავლის ნულზომიანობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

IV. **ზომად ფუნქციათა აპროქსიმაციულად უწყვეტობა**. ამ პუნქტში განვიხილავთ უწყვეტობის ცნების კიდევ ერთ ვარიანტს - აპროქსიმაციულად უწყვეტობას, რომლის განსაზღვრა ხდება სიმკვრივის წერტილის ცნების საფუძველზე.

ვთქვათ, f არის $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია, $A \subset E$ და $x \in A$. f ფუნქციას ეწოდება A **სიმრავლის გასწვრივ უწყვეტი** x წერტილში, თუ f-ის შეზღუდვა A-ზე არის უწყვეტი x-ში.

$E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება **აპროქსიმაციულად უწყვეტი** $x \in E$ წერტილში, თუ მოიძებნება ზომადი $A \subset \mathbb{R}$ სიმრავლე თვისებებით:

- $x \in A$ და x არის A-ს სიმკვრივის წერტილი;
- f არის $A \cap E$ სიმრავლის გასწვრივ უწყვეტი x-ში.

ყოველი უწყვეტობის წერტილი არის აპროქსიმაციულად უწყვეტობის წერტილიც (ამის დასადგენად საკმარისია, A სიმრავლის როლში ავიღოთ რიცხვითი წრფე). დირიხლეს ფუნქციის, ე.ი. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქციის მაგალითი კი გვიჩვენებს, რომ შებრუნებული დასკვნა, საზოგადოდ, არაა სამართლიანი.

ლუზინის თეორემა ადგენს გარკვეულ სიახლოვეს ზომად ფუნქციათა და უწყვეტ ფუნქციათა კლასებს შორის. ამ სიახლოვის კიდევ ერთი გამოხატულებაა შემდეგი დებულება.

თეორემა 12.4.4. ზომად $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ზომადი და სასრული f ფუნქცია აპროქსიმაციულად უწყვეტია თითქმის ყოველ $x \in E$ წერტილში.

დამტკიცება. N-ით აღვნიშნოთ E სიმრავლის ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც f არაა აპროქსიმაციულად უწყვეტი.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. ლუზინის თეორემის ძალით (იხ. თეორემა 7.9.2) შეგვიძლია ვიპოვოთ ზომადი $F \subset E$ სიმრავლე თვისებებით: $|E \setminus F| < \varepsilon$ და f ფუნქციის შეზღუდვა F სიმრავლეზე არის უწყვეტი. თუ გავითვალისწინებთ, რომ ზომადი სიმრავლის თითქმის ყოველი წერტილი მისივე სიმკვრივის წერტილია, დავასკვნით f-ის აპროქსიმაციულად უწყვეტობას F-ის თითქმის ყოველ წერტილში. აქედან გამომდინარე, N ჩართულია $E \setminus F$ სიმრავლისა და F-ის ნულზომიანი ქვესიმრავლის გაერთიანებაში. რის საფუძველზეც ვღებულობთ $|N|_* < \varepsilon$ შეფასებას. აქედან კი, $\varepsilon > 0$ ნებისმიერობის გათვალისწინებით ვასკვნით N სიმრავლის ნულზომიანობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

ამოცანები

1. აჩვენეთ, რომ თუ x არის ზომადი E სიმრავლის სიმკვრივის წერტილი, მაშინ
$$\lim_{I \in \mathrm{I}(x),\, I \to x} \frac{|I \cap E|}{|I|} = 1.$$
2. აჩვენეთ, რომ სიმრავლის სიმკვრივემ წერტილში შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი $\alpha \in (0,1)$ მნიშვნელობა, ე.ი. ნებისმიერი $\alpha \in (0,1)$-სთვის მოიძებნება ზომადი E სიმრავლე, ისეთი, რომ $\lim\limits_{h \to 0} |(-h,h) \cap E|/2h = \alpha$.
3. აჩვენეთ, რომ წერტილში სიმრავლის სიმკვრივე შეიძლება არ არსებობდეს, ე.ი. ააგეთ ზომადი E სიმრავლე, რომლისთვისაც არ არსებობს ზღვარი: $\lim\limits_{h \to 0} |(-h,h) \cap E|/2h$.
4. აჩვენეთ, რომ $f \in L(\mathbb{R})$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალის დიფერენცირებადობის წერტილი (ე.ი. წერტილი, რომელშიც $\frac{1}{|I|}\int_I f \to f(x)$) შეიძლება არ იყოს f ფუნქციის ლებეგის წერტილი.
5. აჩვენეთ, რომ $f \in L([a,b])$ ფუნქციის ყოველი ლებეგის წერტილი არის მისი აპროქსიმაციულად უწყვეტობის წერტილი. ააგეთ ფუნქციის მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ შებრუნებული დებულება საზოგადოდ სამართლიანი არაა.
6. აჩვენეთ, რომ $\mathbb{R}$-ზე განსაზღვრული ზომადი და შემოსაზღვრული ფუნქციისათვის ყოველი აპროქსიმაციულად უწყვეტობის წერტილი არის მისი ლებეგის წერტილი.

§ 5. საკითხი ლებეგის ინტეგრალის მეშვეობით პირველყოფილი ფუნქციის აღდგენის შესახებ

განვიხილოთ დიფერენცირებისა და ლებეგის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციათა ურთიერთშებრუნებადობის საკითხის მეორე ასპექტი: არის თუ არა ლებეგის მიხედვით ინტეგრება შებრუნებული ოპერაცია გაწარმოებისათვის?

კერძოდ, ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: **ვთქვათ, f არის $[a, b]$ სეგმენტზე წარმოებადი ფუნქცია და ცნობილია, რომ $f' \in L([a, b])$. მაშინ სამართლიანია თუ არა წარმოდგენა:**

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f' \qquad (x \in [a, b])? \tag{1}$$

ე.ი. ლებეგის ინტეგრალი აღადგენს თუ არა პირველყოფილ ფუნქციას მისი სასრული და ჯამებადი წარმოებულის მეშვეობით?

შემოსაზღვრული წარმოებულის შემთხვევაში ამ კითხვაზე დადებითი პასუხი მოცემული იყო §9.4-ში. სრული ზოგადობით საკითხის გადაწყვეტა მოითხოვს დამტკიცების გაცილებით რთული მეთოდების გამოყენებას.

დასმული საკითხის გადაწყვეტა მჭიდროდაა დაკავშირებული შემდეგ ამოცანასთან: **დავახასიათოთ შემდეგი სამი თვისების მქონე f ფუნქციები**: (i) f **თითქმის ყველგან წარმოებადია**; (ii) $f' \in L([a, b])$ **და** (iii) f **ფუნქციისათვის ადგილი აქვს** (1) **წარმოდგენას**. აქ f' გაიგება, როგორც $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობები f-ის არაწარმოებადობის წერტილებში მიიჩნევა ნულის ტოლად.

(i)-(iii) თვისებების მქონე ფუნქციის შესახებ ამბობენ, რომ ის **წარმოდგება ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით**. ასეთ ტერმინს გამართლება აქვს შემდეგი დებულების საფუძველზე: **$[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული f ფუნქციისათვის შემდეგი წინადადებები ტოლფასია**:

- **f ფუნქციას აქვს (i)-(iii) თვისებები;**
- **f წარმოდგება რაიმე ჯამებადი ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით, ე.ი. მოიძებნება $g \in L([a, b])$ ფუნქცია, ისეთი, რომ**

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} g \qquad (x \in [a, b]).$$

ცხადია, მეორე წინადადება არის პირველის შედეგი. შებრუნებული იმპლიკაციის დასადგენად უნდა გამოვიყენოთ ლებეგის თეორემა ინტეგრალის დიფერენცირების შესახებ. ამ თეორემის ძალით, თითქმის ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში f წარმოებადია და სრულდება ტოლობა $f'(x) = g(x)$. აქედან გამომდინარე, f-ს აქვს (i)-(iii) თვისებები.

ამრიგად, თუ f ფუნქცია წარმოდგება ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით, მაშინ ეს წარმოდგენა აუცილებლად f-ის წარმოებულის განუსაზღვრელი ინტეგრალის მეშვეობით მოხდება.

ამ თავის შემდგომი პარაგრაფები დაეთმობა ზემოთ დასმული ორი ამოცანის შესწავლას. ორივე მათგანი გადაწყვეტილი იყო ლებეგის მიერ.

შენიშვნა 12.5.1. არსებობს წარმოებადი ფუნქცია, რომლის წარმოებული არის შემოუსაზღვრელი, მაგრამ არის ჯამებადი. ასეთი F ფუნქციის ასაგებად საჭიროა განვიხილოთ $[0,1]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული არაუარყოფითი f ფუნქცია თვისებებით: f უწყვეტია ყოველ $x \in [0,1)$ წერტილში, f შემოუსაზღვრელია, $f \in L([0,1])$ და

$$\int_{[1-\varepsilon,1]} f = \overline{o}(\varepsilon) \quad (\varepsilon \to 0). \tag{2}$$

ასეთი თვისებების f ფუნქცია ჩავთვალოთ ცნობილად. მაშინ F ფუნქცია განვსაზღვროთ, როგორც f-ის ლებეგის ინტეგრალი ცვლადი ზედა საზღვრით: $F(x) = \int_{[0,x]} f \quad (x \in [0,1])$.

$[0,1)$ მონაკვეთზე f ფუნქციის უწყვეტობის გამო გვექნება, რომ ყოველი $x \in [0,1)$ წერტილისათვის, $F'(x) = f(x)$. რაც შეეხება $x = 1$ წერტილში წარმოებადობას: (2) პირობის გათვალისწინებით, მარტივი დასანახია, რომ $F'(1)$ არსებობს და ნულის ტოლია. ამრიგად, F ფუნქციას ყოველ წერტილში აქვს წარმოებული, რომელიც ერთდროულად არის შემოუსაზღვრელიც და ჯამებადიც.

ახლა ავაგოთ ზემოთ მითითებული თვისების მქონე f ფუნქცია. ამისათვის $[0,1)$ მონაკვეთი დავყოთ

$$\Delta_k = \left[1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1 - \frac{1}{2^k}\right) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

მონაკვეთებად.

შემდგომში შევთანხმდეთ, რომ $I \subset [0,1]$ მონაკვეთისათვის და $h \neq 0$ რიცხვისათვის, $f_{I,h}$-ით აღნიშნული იქნება $[0,1]$-ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც ნულის ტოლია I მონაკვეთის გარეთ და რომლის გრაფიკი Ox ღერძთან ერთად ქმნის ტოლფერდა სამკუთხედს I მონაკვეთის ტოლი ფუძით და წვეროთი (c,h) წერტილში, სადაც c არის I-ს შუაწერტილი.

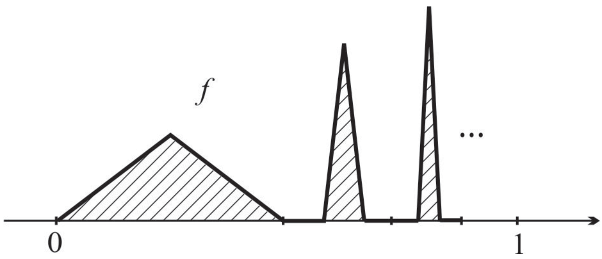
ყოველი k-სათვის Δ_k-ს კონცენტრული $I_k \subset \Delta_k$ მონაკვეთი შევარჩიოთ იმდენად მცირე, რომ $f_{I_k,k}$ ფუნქცია აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$\int_{[0,1]} f_{I_k,k} \leq \frac{|\Delta_k|}{k}. \tag{3}$$

ახლა განვიხილოთ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელიც ყოველ Δ_k უბანზე $f_{I_k,k}$ ფუნქციის ტოლია (ნახ. 12.2).

შევამოწმოთ (2)-ის სამართლიანობა. დანარჩენი თვისებები ცხადია. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0,1)$ რიცხვი. k_ε იყოს ინდექსი, რომლისთვისაც $\frac{1}{2^{k_\varepsilon}} \leq \varepsilon < \frac{1}{2^{k_\varepsilon - 1}}$. მაშინ (3)-ის ძალით გვექნება, რომ

$$\int_{[1-\varepsilon,1]} f \leq \int_{\left[1-\frac{1}{2^{k_\varepsilon-1}},1\right]} f = \sum_{k=k_\varepsilon}^{\infty} \int_{\Delta_k} f_{I_k,k} \leq$$



ნახ. 12.2.

$$\leq \sum_{k=k_\varepsilon}^{\infty} \frac{|\Delta_k|}{k} \leq \frac{1}{k_\varepsilon} \sum_{k=k_\varepsilon}^{\infty} |\Delta_k| = \frac{1}{k_\varepsilon} \; \frac{1}{2^{k_\varepsilon - 1}} \leq \frac{2\varepsilon}{k_\varepsilon}.$$

რითაც ცხადია, (2) დადგენილია.

შენიშვნა 12.5.2. ლებეგის ინტეგრალი სრულად ვერ წყვეტს პირველყოფილის აღდგენის ამოცანას, რადგანაც არსებობენ ფუნქციები არაჯამებადი წარმოებულით. ასეთი ფუნქციის ასაგებად საჭიროა განვიხილოთ $[0,1]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული და ყოველ $x \in [0,1)$ წერტილში უწყვეტი f ფუნქცია, რომლის არასაკუთრივი ინტეგრალი:

$$v.p. \int_{[0,1]} f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[0,1-\varepsilon]} f,$$

არის პირობით კრებადი (ე.ი. კრებადია, მაგრამ არაა აბსოლუტურად კრებადი), ამასთან, 1-ის მიდამოში f ფუნქცია განიცდის ძლიერ ოსცილაციას იმ თვალსაზრისით, რომ

$$v.p. \int_{[1-\varepsilon,1]} f = \overline{o}(\varepsilon) \quad (\varepsilon \to 0). \tag{4}$$

ასეთი თვისებების f ფუნქცია ჩავთვალოთ ცნობილად. მაშინ F ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} f, & x \in [0,1); \\ v.p. \int_{[0,1]} f, & x = 1. \end{cases}$$

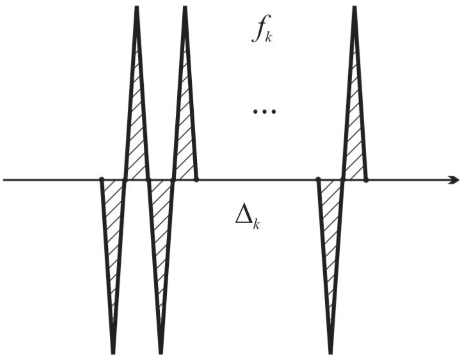
$[0,1)$ მონაკვეთზე f ფუნქციის უწყვეტობის გამო გვექნება, რომ ყოველი $x \in [0,1)$ წერტილისათვის, $F'(x) = f(x)$. რაც შეეხება $x = 1$ წერტილში წარმოებადობას: (4) პირობის გათვალისწინებით მარტივი დასანახია, რომ $F'(1)$ არსებობს და ნულის ტოლია. ამრიგად, F ფუნქციას ყოველ წერტილში აქვს წარმოებული. ვაჩვენოთ F'-ის არაჯამებადობა. მართლაც, $[0,1)$ მონაკვეთზე F' ემთხვევა f ფუნქციას, რომლის რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალი ამ მონაკვეთზე არაა აბსოლუტურად კრებადი. ეს უკანასკნელი პირობა

კი, თეორემა 9.3.1-ის ძალით, იწვევს იმას, რომ $f \notin L([0,1))$. შედეგად, $F' \notin L([0,1])$.

ახლა ავაგოთ ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებების მქონე f ფუნქცია. ვისარგებლოთ წინა შენიშვნის აღნიშვნებით. ყოველი k-სათვის Δ_k დავყოთ ერთი და იგივე სიგრძის $I_{k,1}, \ldots, I_{k,4^k}$ მონაკვეთებად და განვიხილოთ ფუნქცია:

$$f_k = \sum_{m=1}^{4^k} (-1)^m f_{I_{k,m}, 2^k}.$$

ამრიგად, f_k ფუნქციის გრაფიკზე რიგ-რიგობითაა განლაგებული ქვემოთ და ზემოთ მიმართული სამკუთხა უბნები $I_{k,m}$ ფუძით და 2^k-ს ტოლი სიმაღლით (ნახ. 12.3).



ნახ. 12.3.

ცხადია, f_k უწყვეტია და ნულის ტოლია Δ_k-ს გარეთ. ამასთან, ადვილი შესამოწმებელია, რომ:

$$\int_{\Delta_k} |f_k| = \frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\int_{\Delta_k} f_k = 0, \tag{6}$$

ყოველი $I \subset \Delta_k$ მონაკვეთისათვის სრულდება შეფასება:

$$\left| \int_I f_k \right| \leq \frac{|\Delta_k|}{2^k}. \tag{7}$$

ახლა განვიხილოთ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელიც თითოეულ Δ_k უბანზე f_k ფუნქციის ტოლია. ცხადია, f უწყვეტია ყოველ $x \in [0,1)$ წერტილში. არასაკუთრივი $v.p. \int_{[0,1]} f$ ინტეგრალის პირობით კრებადობა ადვილად მტკიცდება f_k ფუნქციების $(5)-(7)$ თვისებების საფუძველზე. დავადგინოთ (4)-ის სამართლიანობა. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0,1)$ რიცხვი. k_ε იყოს

ინდექსი, რომლისთვისაც $1-\varepsilon$ წერტილი მოთავსებულია Δ_{k_ε} მონაკვეთში. $(5)-(7)$ პირობების გათვალისწინებით ადვილი დასანახია, რომ

$$\left|v.p.\int_{[1-\varepsilon,1]} f\right| = \left|\int_{[1-\varepsilon,1]\cap\Delta_{k_\varepsilon}} f_{k_\varepsilon} + \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty}\int_{\Delta_k} f_k\right| =$$

$$= \left|\int_{[1-\varepsilon,1]\cap\Delta_{k_\varepsilon}} f_{k_\varepsilon}\right| \leq \frac{|\Delta_{k_\varepsilon}|}{2^{k_\varepsilon}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{k_\varepsilon}}.$$

ამით, (4) დამტკიცებულია.

შენიშვნა 12.5.3. პირველყოფილის აღდგენის ამოცანის სრული გადაწყვეტა მოიცემა ა. დანჟუას მიერ შემოღებული ინტეგრების პროცესით (იხ. მაგ. წიგნები: [28], [30], [1], [12]).

შენიშვნა 12.5.4. 12.5.1 და 12.5.2 შენიშვნებში მოცემული მაგალითები შეიძლება აიგოს სხვა გზითაც (იხ. ამოცანები პარაგრაფის ბოლოს).

ამოცანები

1. განვიხილოთ $[0,1]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული f ფუნქცია: $f(0)=0$ და $f(x)=x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x}$, როცა $x\in(0,1]$. აჩვენეთ, რომ f ყოველ წერტილში წარმოებადია და მისი წარმოებული არის შემოუსაზღვრელი და ჯამებადი ფუნქცია.
2. განვიხილოთ $[0,1]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული f ფუნქცია: $f(0)=0$ და $f(x)=x^2\cos\frac{\pi}{x^2}$, როცა $x\in(0,1]$. აჩვენეთ, რომ f ყოველ წერტილში წარმოებადია და მისი წარმოებული არის არაჯამებადი ფუნქცია.

§ 6. ზრდადი ფუნქციის დიფერენციალური თვისებები

ამ თავის დარჩენილ ნაწილში ვიგულისხმებთ, რომ $[a,b]$ არის სასრული სიგრძის გადაუგვარებელი სეგმენტი და განვიხილავთ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ფუნქციებს.

თეორემა 12.6.1. ყოველი ზრდადი ფუნქცია არის შემოსაზღვრული, ზომადი და მისი წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ზრდადი $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ფუნქცია. f-ის შემოსაზღვრულობა ცხადია. გადავიდეთ f-ის ზომადობის დამტკიცებაზე. ნებისმიერი $t\in\mathbb{R}$ რიცხვისათვის $\{f<t\}$ სიმრავლე იქნება ან ცარიელი, ანაც ერთ-ერთი $[a,c]$ და $[a,c)$ სახის მონაკვეთებს შორის. მართლაც, $\{f<t\}$ სიმრავლის არაცარიელობის შემთხვევაში განვიხილოთ $c=\sup\{x\in[a,b]: f(x)<t\}$ რიცხვი. მაშინ, f ფუნქციის ზრდადობის გამო, ადვილი დასანახია, რომ $\{f<t\}$ არის $[a,c]$ ან $[a,c)$ მონაკვეთი შესაბამისად, იმისდა მიხედვით, $f(c)<t$ თუ $f(c)\geq t$. ამით f ფუნქციის ზომადობა დადგენილია.

f ფუნქციის ზრდადობის გათვალისწინებით, ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი წინადადებების სამართლიანობა:

- ყოველ $x_0 \in [a, b)$ წერტილში არსებობს f-ის მარჯვენა ზღვარი - $f(x_0+0)$, რომელიც $\inf\{f(x) : x_0 < x \leq b\}$ გამოსახულების ტოლია;
- ყოველ $x_0 \in (a, b]$ წერტილში არსებობს f-ის მარცხენა ზღვარი - $f(x_0 - 0)$, რომელიც $\sup\{f(x) : a \leq x < x_0\}$ გამოსახულების ტოლია;
- ყოველი $x_0 \in [a, b]$ წერტილისათვის სრულდება შეფასებები: $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0+0)$. აქ $f(b+0)$ მიიჩნევა $f(b)$-ს ტოლად, ხოლო $f(a - 0)$ კი $f(a)$-ს ტოლად;
- f ფუნქცია წყვეტილია $x_0 \in [a, b]$ წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.

თუ x_0 არის f ფუნქციის წყვეტის წერტილი, მაშინ x_0-ის შესაბამისი f-ის **ნახტომის ინტერვალი** ვუწოდოთ $I(x_0) = (f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ მონაკვეთს. შევნიშნოთ, რომ ნახტომის ინტერვალები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი x და y წყვეტის წერტილები, სადაც $x < y$. მაშინ, f-ის ზრდადობის გათვალისწინებით, ადვილი დასანახია შემდეგი შეფასებების სამართლიანობა:

$$f(x - 0) < f(x + 0) \leq f\Big(\frac{x + y}{2}\Big) \leq f(y - 0) < f(y + 0).$$

რაც იწვევს $I(x)$ და $I(y)$ ნახტომის ინტერვალების თანაუკვეთობას.

ზემოაღნიშნულის შემდეგ, f ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლის არაუმეტეს თვლადობის დასადგენად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ წრფის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ინტერვალთა ნებისმიერი Λ კლასი არაუმეტეს თვლადია. მართლაც, ყოველი $I \in \Lambda$ ინტერვალიდან ავარჩიოთ რაიმე რაციონალური x_I რიცხვი. მაშინ, Λ-ში შემავალი ინტერვალების თანაუკვეთობის გამო, ერთმანეთისაგან განსხვავებული I და J ინტერვალებისათვის x_I და x_J წერტილები განსხვავებული იქნებიან. აქედან გამომდინარე, Λ კლასი ეკვივალენტური იქნება $\{x_I : I \in \Lambda\}$ სიმრავლისა, ეს უკანასკნელი კი არაუმეტეს თვლადია, როგორც $\mathbb{Q}$-ს ქვესიმრავლე. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 12.6.1. $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი არაუმეტეს თვლადი E სიმრავლისათვის არსებობს ზრდადი ფუნქცია (იხ. ამოცანა 1 პარაგრაფის ბოლოს), რომელიც წყვეტილია ყოველ $x \in E$ წერტილში და უწყვეტია ყოველ $x \notin E$ წერტილში.

ვთქვათ, f თითქმის ყოველ წერტილში წარმოებადი ფუნქციაა. შევთანხმდეთ, რომ f'-ით აღვნიშნოთ ფუნქცია, რომელიც $f'(x)$-ის ტოლია f-ის წარმოებულის არსებობის წერტილებში და ნულის ტოლია დარჩენილ წერტილებში.

სამართლიანია შემდეგი უმნიშვნელოვანესი თეორემა ზრდადი ფუნქციის დიფერენციალური თვისებების შესახებ.

თეორემა 12.6.2. თუ f ფუნქცია ზრდადია, მაშინ f წარმოებადია თითქმის ყველგან, $f' \in L([a,b])$ და სრულდება შეფასება:

$$\int_{[a,b]} f' \leq f(b) - f(a).$$

ვთქვათ, f რაიმე ფუნქციაა და $x \in [a,b]$. f **ფუნქციის ზედა და ქვედა წარმოებულები** x **წერტილში** შესაბამისად აღინიშნებიან $\overline{D}(f)(x)$ და $\underline{D}(f)(x)$ ჩანაწერებით და განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$\overline{D}(f)(x) = \lim_{\delta\to 0}\left[\sup_{0<|h|<\delta} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right];$$

$$\underline{D}(f)(x) = \lim_{\delta\to 0}\left[\inf_{0<|h|<\delta} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right].$$

ცხადია, $\underline{D}(f)(x) \leq \overline{D}(f)(x)$ და $\underline{D}(f)(x) \geq 0$, როცა f არის ზრდადი. f ფუნქცია წარმოებადია x წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\underline{D}(f)(x)$ და $\overline{D}(f)(x)$ არიან ერთმანეთის ტოლი სასრული რიცხვები. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ზედა და ქვედა წარმოებულები წარმოადგენენ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ფარდობის ზღვრებს გარკვეული მიმდევრობების გასწვრივ, ე.ი. მოიძებნებიან $h_n \to 0$ და $h_n^* \to 0$ მიმდევრობები, რომელთათვისაც

$$\overline{D}(f)(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \quad \text{და} \quad \underline{D}(f)(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n^*)-f(x)}{h_n^*}.$$

ლემა 12.6.1. ვთქვათ, f მკაცრად ზრდადი ფუნქციაა, $0 \leq C < \infty$ და $E \subset [a,b]$ სიმრავლის ყოველი წერტილისათვის, $\underline{D}(f)(x) \leq C$. მაშინ $f(E)$ ანასახის გარე ზომისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$|f(E)|_* \leq C|E|_*.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. E სიმრავლე დავფაროთ ღია შემოსაზღვრული G სიმრავლით, რომელიც E-სთან ახლოა იმ თვალსაზრისით, რომ აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$|G| < |E|_* + \varepsilon. \tag{1}$$

Π იყოს ყველა იმ $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ სეგმენტის კლასი, რომელიც შედის G სიმრავლეში და აკმაყოფილებს პირობას:

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < C + \varepsilon.$$

Λ იყოს ყველა იმ $[f(\alpha), f(\beta)]$ სახის სეგმენტის კლასი, სადაც $[\alpha,\beta] \in \Pi$. f ფუნქციის მკაცრად ზრდადობის გათვალისწინებით ადვილი დასანახია,

რომ: 1) Λ კლასის ყოველი სეგმენტი გადაუგვარებელია; 2) ყოველი $I \in \Lambda$ სეგმენტისათვის არსებობს ერთადერთი $[\alpha, \beta] \in \Pi$ სეგმენტი, რომლისთვისაც $I = [f(\alpha), f(\beta)]$, ამასთან, $[\alpha, \beta] = f^{-1}(I)$.

ჩანაწერების სიმოკლისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა: თუ $I = [\alpha, \beta] \in \Pi$, მაშინ I^{Λ} იყოს $[f(\alpha), f(\beta)]$ სეგმენტი.

Π კლასის განსაზღვრის ძალით სრულდება შეფასება:

$$|I^{\Lambda}| < (C + \varepsilon)|I| \quad (I \in \Pi). \tag{2}$$

ამ შეფასების ეკვივალენტური ფორმულირება მოიცემა შემდეგნაირად:

$$|I| < (C + \varepsilon)|f^{-1}(I)| \quad (I \in \Lambda). \tag{3}$$

დამტკიცებისათვის არსებითი გარემოებაა ის ფაქტი, რომ Λ კლასი წარმოადგენს $f(E)$ სიმრავლის ვიტალის აზრით დაფარვას. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილი. $\underline{D}(f)(x) < C + \varepsilon$ პირობის გამო მოიძებნება Π კლასის სეგმენტების (I_n) მიმდევრობა, რომლის წევრების ერთ-ერთი ბოლო არის x წერტილი და $|I_n| \to 0$ $(n \to \infty)$. მაშინ ცხადია, $f(x) \in I_n^{\Lambda}$ $(n \in \mathbb{N})$ და ამასთან, (2)-ის ძალით სამართლიანია $|I_n^{\Lambda}| \le (C + \varepsilon)|I_n|$ $(n \in \mathbb{N})$ შეფასება. ამრიგად, ნებისმიერი $x \in E$-სათვის, Λ კლასში მოიძებნა $f(x)$ წერტილის შემცველი და მისკენ მოჭიმვადი სეგმენტთა მიმდევრობა, ე.ი. Λ კლასი ვიტალის აზრით ფარავს $f(E)$ სიმრავლეს. აქვე შევნიშნოთ, რომ f-ის ზრდადობის ძალით Λ კლასის წევრები ჩართული არიან $[f(a), f(b)]$ სეგმენტში.

გამოვიყენოთ 12.2.2 თეორემა $f(E)$ სიმრავლისა და Λ კლასისათვის. შედეგად, ვიპოვით წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სეგმენტთაგან შედგენილ $\Lambda' \subset \Lambda$ ქვეკლასს, რომლისთვისაც

$$|f(E)|_* \le \sum_{I \in \Lambda'} |I|.$$

ცხადია, რომ $f^{-1}(I)$ $(I \in \Lambda')$ სეგმენტებიც იქნებიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი, საიდანაც (1) და (3) შეფასებებისა და Π კლასის განსაზღვრების საფუძველზე დავწერთ,

$$|f(E)|_* \le \sum_{I \in \Lambda'} |I| < \sum_{I \in \Lambda'} (C + \varepsilon)|f^{-1}(I)| =$$

$$= (C + \varepsilon)\left| \bigcup_{I \in \Lambda'} f^{-1}(I) \right| \le (C + \varepsilon)|G| < (C + \varepsilon)(|E|_* + \varepsilon).$$

თუ მიღებულ შეფასებაში გავითვალისწინებთ $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობას, მაშინ დავასკვნით, რომ $|f(E)|_* \le C|E|_*$. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 12.6.2. ვთქვათ, f მკაცრად ზრდადი ფუნქციაა, $0 < C < \infty$ და $E \subset [a,b]$ სიმრავლის ყოველი წერტილისათვის, $\overline{D}(f)(x) \geq C$. მაშინ $f(E)$ ანასახის გარე ზომისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$|f(E)|_* \geq C|E|_*.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, N არის E-ს ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც f ფუნქცია განიცდის წყვეტას. თეორემა 12.6.1-ის ძალით, N არაუმეტეს თვლადია. ცხადია, ასეთივე იქნება $f(N)$ ანასახიც. შემდეგ, იმის გათვალისწინებით, რომ არაუმეტეს თვლადი სიმრავლის გამოკლება გავლენას არ ახდენს სიმრავლის გარე ზომის მნიშვნელობაზე და f მკაცრად ზრდადია, დავწერთ ტოლობებს:

$$|E|_* = |E \setminus N|_*, \quad |f(E)|_* = |f(E) \setminus f(N)|_* = |f(E \setminus N)|_*.$$

ამრიგად, თუ დებულებას დავამტკიცებთ $E \setminus N$ სიმრავლისათვის, მაშინ ის დადგენილი იქნება E სიმრავლისთვისაც.

ზემოაღნიშნულის საფუძველზე, საკმარისია მსჯელობა ჩავატაროთ იმ შემთხვევაში, როცა f ფუნქცია უწყვეტია E სიმრავლის ყოველ წერტილში.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, C)$ რიცხვი. $f(E)$ სიმრავლე დავფაროთ ღია შემოსაზღვრული G სიმრავლით, რომელიც $f(E)$-სთან ახლოა იმ თვალსაზრისით, რომ აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$|G| < |f(E)|_* + \varepsilon. \tag{4}$$

Π იყოს ყველა იმ $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$ სეგმენტის კლასი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$[f(\alpha), f(\beta)] \subset G, \quad \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > C - \varepsilon.$$

დამტკიცებისათვის არსებითი გარემოებაა ის ფაქტი, რომ Π კლასი წარმოადგენს E სიმრავლის ვიტალის აზრით დაფარვას. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილი. $\overline{D}(f)(x) > C - \varepsilon$ პირობის გამო მოიძებნებიან $I_n = [\alpha_n, \beta_n] \subset [a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ სეგმენტები, რომელთა ერთ-ერთი ბოლო არის x წერტილი, $|I_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ და

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} > C - \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ადვილი დასანახია, რომ x წერტილში f ფუნქციის უწყვეტობის ძალით იარსებებს ისეთი n_0 ნომერი, რომლიდანაც დაწყებული $[f(\alpha_n), f(\beta_n)]$ მონაკვეთები შევლენ G სიმრავლეში. შედეგად, $I_{n_0}, I_{n_0+1}, \ldots$ სეგმენტები შევლენ Π კლასში. ისინი იმავდროულად ქმნიან მოცემული x წერტილის შემცველ და მისკენ მოჭიმვად მიმდევრობას. ამით დადგენილია, რომ Π კლასი ვიტალის აზრით

ფარავს E სიმრავლეს. აქვე შევნიშნოთ, რომ Π კლასის წევრები ჩართული არიან $[a,b]$ სეგმენტში.

Λ იყოს ყველა იმ $[f(\alpha),f(\beta)]$ სახის სეგმენტის კლასი, სადაც $[\alpha,\beta]\in\Pi$. ჩანაწერების სიმოკლისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა: თუ $I=[\alpha,\beta]\in\Pi$, მაშინ I^Λ იყოს $[f(\alpha),f(\beta)]$ სეგმენტი. Π კლასის განსაზღვრის ძალით სრულდება შეფასება:

$$|I|<\frac{|I^\Lambda|}{C-\varepsilon}\quad (I\in\Pi). \tag{5}$$

გამოვიყენოთ 12.2.2 თეორემა E სიმრავლისა და Π კლასისათვის. შედეგად, ვიპოვით წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სეგმენტთაგან შედგენილ $\Pi'\subset\Pi$ ქვეკლასს, რომლისთვისაც

$$|E|_*\le\sum_{I\in\Pi'}|I|.$$

f ფუნქციის მკაცრად ზრდადობის გათვალისწინებით, ადვილი დასანახია, რომ I^Λ $(I\in\Pi')$ სეგმენტებიც იქნებიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი, საიდანაც, (4) და (5) შეფასებებისა და Π კლასის განსაზღვრების საფუძველზე დავწერთ,

$$|E|_*\le\sum_{I\in\Pi'}|I|<\sum_{I\in\Pi'}\frac{|I^\Lambda|}{C-\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{C-\varepsilon}\left|\bigcup_{I\in\Pi'}I^\Lambda\right|\le\frac{|G|}{C-\varepsilon}<\frac{|f(E)|_*+\varepsilon}{C-\varepsilon}.$$

თუ მიღებულ შეფასებაში გავითვალისწინებთ $\varepsilon\in(0,C)$ რიცხვის ნებისმიერობას, დავასკვნით, რომ $|f(E)|_*\ge C|E|_*$. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 12.6.2. ზემოთ მოცემულ ლემებს აქვთ ნათელი გეომეტრიული შინაარსი. სახელდობრ, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ფარდობას შეიძლება შევხედოთ, როგორც $[x,x+h]$ მონაკვეთის გაჭიმვის კოეფიციენტს f ფუნქციის მოქმედებისას. 12.6.1 და 12.6.2 ლემების თანახმად, თუ გაჭიმვის კოეფიციენტი ზემოდან ან ქვემოდან ფასდება E სიმრავლის ყოველი წერტილის ლოკალურ არეალში, მაშინ იგივე შეფასება ვრცელდება გაჭიმვის გლობალურ $\frac{|f(E)|_*}{|E|_*}$ კოეფიციენტზეც.

ლემა 12.6.3. ვთქვათ, f ზრდადი ფუნქციაა. მაშინ $\{x\in[a,b]:\overline{D}(f)(x)=\infty\}$ სიმრავლე ნული ზომისაა.

დამტკიცება. ნებისმიერი g ფუნქციისათვის აღვნიშნოთ:

$$E_n(g)=\{x\in[a,b]:\overline{D}(g)(x)\ge n\}\quad (n\in\mathbb{N});$$

$$E_\infty(g)=\{x\in[a,b]:\overline{D}(g)(x)=\infty\}.$$

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა f მკაცრად ზრდადი ფუნქციაა. ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ რიცხვისათვის ლემა 12.6.2-ისა და $f(E_n(f)) \subset [f(a), f(b)]$ ჩართვის ძალით, სამართლიანი იქნება შეფასება:

$$|E_n(f)|_* \leq \frac{f(b) - f(a)}{n}.$$

შედეგად, $|E_n(f)|_* \to 0 \ (n \to \infty)$. საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ $E_\infty(f) \subset E_n(f)$ $(n \in \mathbb{N})$ ჩართვებს, მივიღებთ $|E_\infty(f)|_* = 0$ ტოლობას, რომლის ძალითაც ვასკვნით, რომ $E_\infty(f)$ სიმრავლე ნული ზომისაა.

გადავიდეთ ზოგად შემთხვევაზე. ვთქვათ, f ნებისმიერი ზრდადი ფუნქციაა. g იყოს $g(x) = f(x)+x$ ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია. ცხადია, g მკაცრად ზრდადია, ამასთან, ადვილი შესამოწმებელია $E_\infty(g) = E_\infty(f)$ ტოლობა. უკანასკნელი ორი პირობიდან გამომდინარე, უკვე განხილული შემთხვევის საფუძველზე დავასკვნით, რომ $E_\infty(f)$ სიმრავლე არის ნული ზომის.

ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 12.6.2-ის დამტკიცება. E იყოს ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც f ფუნქცია არაა წარმოებადი. დავამტკიცოთ, რომ E ნული ზომის სიმრავლეა.

E წარმოდგება შემდეგი ორი სიმრავლის გაერთიანების სახით:

$$E_1 = \{x \in [a,b] : \underline{D}(f)(x) < \overline{D}(f)(x)\};$$

$$E_2 = \{x \in [a,b] : \underline{D}(f)(x) = \overline{D}(f)(x) = \infty\}.$$

ლემა 12.6.3-ის ძალით E_2 ნული ზომისაა. ამგვარად, დასამტკიცებელი გვრჩება E_1 სიმრავლის ნულზომიანობა. ადვილი დასანახია, რომ E_1 თავის მხრივ წარმოდგება შემდეგი სახის სიმრავლეების თვლადი გაერთიანების სახით:

$$E_{p,q} = \{x \in [a,b] : \underline{D}(f)(x) < p < q < \overline{D}(f)(x)\},$$

სადაც p და q რაციონალური რიცხვებია და $0 < p < q$. ამრიგად, საკითხი დაიყვანება $E_{p,q}$ სახის ყოველი სიმრავლის ნულზომიანობის დამტკიცებაზე.

ვთქვათ, $p, q \in \mathbb{Q}$ და $0 < p < q$. თუ გამოვიყენებთ ლემა 12.6.1-ს $E = E_{p,q}$ და $C = p$ პარამეტრებისათვის გვექნება, რომ

$$|f(E_{p,q})|_* \leq p|E_{p,q}|_*.$$

მეორე მხრივ, ლემა 12.6.2-ის გამოყენება $E = E_{p,q}$ და $C = q$ პარამეტრებისათვის გვაძლევს შეფასებას:

$$|f(E_{p,q})|_* \geq q|E_{p,q}|_*.$$

შედეგად, $p|E_{p,q}|_* \geq q|E_{p,q}|_*$. რაც შესაძლებელია მხოლოდ $|E_{p,q}|_* = 0$ შემთხვევაში. ამრიგად, დავადგინეთ, რომ $E_{p,q}$ ნული ზომის სიმრავლეა. ამით f ფუნქციის თითქმის ყველგან წარმოებადობა დამტკიცებულია.

გადავიდეთ მსჯელობის შემდგომ ეტაპზე და დავამტკიცოთ f' ფუნქციის ზომადობა.

გავაგრძელოთ f ფუნქცია $[a, b+1]$ სეგმენტზე ისე, რომ $(b, b+1]$ მონაკვეთის წერტილებში მისი მნიშვნელობები $f(b)$ რიცხვის ტოლი იყოს. ახლა f შეიძლება განვიხილოთ, როგორც $[a, b+1]$ სეგმენტზე ზრდადი ფუნქცია.

ყოველი n-სთვის Δ_n იყოს $[a, b]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$\Delta_n(x) = \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n} \qquad (x \in [a, b]).$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი n-სთვის $f(\cdot + 1/n)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე ზრდადი ფუნქცია. თეორემა 12.6.1-ის თანახმად f და $f(\cdot + 1/n)$ ზომადი ფუნქციებია. რის შედეგადაც, ვასკვნით Δ_n ფუნქციების ზომადობას. ახლა შევნიშნოთ, რომ $[a, b)$ მონაკვეთის ყოველ x წერტილში, რომელშიც f ფუნქცია წარმოებადია, $(\Delta_n(x))$ მიმდევრობის ზღვარი იქნება $f'(x)$ რიცხვი. შედეგად, ზომად ფუნქციათა (Δ_n) მიმდევრობა $[a, b]$ მონაკვეთის თითქმის ყოველ წერტილში კრებადი იქნება f' ფუნქციისაკენ. საიდანაც, ლებეგის ზომის სისრულისა და თეორემა 7.7.1-ის საფუძველზე დავასკვნით f'-ის ზომადობას.

f' ფუნქციის არაუარყოფითობის გამო აზრი აქვს $\int_{[a,b]} f'$ ინტეგრალს. მოვახდინოთ ამ ინტეგრალის შეფასება. ფატუს თეორემის (იხ. აგრეთვე შენიშვნა 8.5.1) საფუძველზე დავწერთ,

$$\int_{[a,b]} f' \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{[a,b]} \Delta_n. \tag{6}$$

განვიხილოთ ნებისმიერი n. f და $f(\cdot + 1/n)$ ფუნქციები ზომადობისა და შემოსაზღვრულობის გამო არიან $[a, b]$ მონაკვეთზე ჯამებადი. აქედან გამომდინარე,

$$\int_{[a,b]} \Delta_n = n \int_{[a,b]} f(\cdot + 1/n) \; - \; n \int_{[a,b]} f.$$

f და $f(\cdot + 1/n)$ ფუნქციები შემოსაზღვრულია და მათი წყვეტის წერტილთა სიმრავლეები არაუმეტეს თვლადია, ამიტომ უკანასკნელ ტოლობაში მოცემული ინტეგრალები შეიძლება გავიგოთ რიმანის აზრით. ამის შემდეგ $x = t - 1/n$ ცვლადის შეცვლის საფუძველზე დავწერთ,

$$\int_{[a,b]} \Delta_n = n \int_{[a+1/n, b+1/n]} f \; - \; n \int_{[a,b]} f =$$

$$= n \int_{[b, b+1/n]} f \; - \; n \int_{[a, a+1/n]} f.$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f(x) = f(b)$, როცა $x \in [b, b+1/n]$ და $f(x) \geq f(a)$, როცა $x \in [a, a+1/n]$, მივიღებთ შეფასებას:

$$\int_{[a,b]} \Delta_n \leq f(b) - f(a). \tag{7}$$

(6)-ის და (7)-ის ძალით გვექნება,

$$\int_{[a,b]} f' \leq f(b) - f(a).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 12.6.3. კანტორის ფუნქციის მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ზრდადი ფუნქციისათვის შეიძლება შესრულდეს მკაცრი უტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f' < f(b) - f(a)$$

მართლაც, კანტორის θ ფუნქცია მუდმივია კანტორის სიმრავლის ყოველ დამატებით ინტერვალზე. ამიტომ ყოველ ასეთ ინტერვალზე θ-ს წარმოებული იგივურად უდრის ნულს. შედეგად, θ' ფუნქცია თითქმის ყველგან ნულის ტოლია. რის გამოც, $\int_{[0,1]} \theta' = 0$. მეორე მხრივ კი გვაქვს, რომ $\theta(1) - \theta(0) = 1 - 0 = 1$.

შენიშვნა 12.6.4. ზრდადი f ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით წარმოდგენისთვის საკმარისია სრულდებოდეს ტოლობა

$$\int_{[a,b]} f' = f(b) - f(a). \tag{8}$$

მართლაც, თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს (ე.ი. ზრდადი f ფუნქცია აკმაყოფილებს (8) ტოლობას, მაგრამ არ წარმოდგება განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით), მაშინ, თეორემა 12.6.2-ის გათვალისწინებით, მოიძებნება $x \in (a, b)$, რომლისთვისაც $\int_{[a,x]} f' < f(x) - f(a)$. კვლავ თეორემა 12.6.2-ის გათვალისწინებით, $[x, b]$ სეგმენტზე შესრულებული იქნება შეფასება: $\int_{[x,b]} f' \leq f(b) - f(x)$. შედეგად, მივიღებთ, რომ

$$\int_{[a,b]} f' = \int_{[a,x]} f' + \int_{[x,b]} f' <$$
$$< [f(x) - f(a)] + [f(b) - f(x)] = f(b) - f(a).$$

რაც ეწინააღმდეგება (8)-ს.

შენიშვნა 12.6.5. $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი ნული ზომის E სიმრავლისათვის არსებობს ზრდადი ფუნქცია (იხ. ამოცანა 3 პარაგრაფის ბოლოს), რომელიც არაა წარმოებადი E სიმრავლის არცერთ წერტილში.

შენიშვნა 12.6.6. ცხადია, რომ 12.6.1 და 12.6.2 თეორემების ანალოგები სამართლიანია ნებისმიერი კლებადი ფუნქციისთვისაც.

შენიშვნა 12.6.7. ცნობილია, რომ არსებობენ უწყვეტი ფუნქციები, რომელთაც არცერთ წერტილში არა აქვთ წარმოებული. თეორემა 12.6.2-ის ძალით, შეუძლებელია ასეთი ტიპის ფუნქცია იყოს მონოტონური განსაზღვრის არის რაიმე ქვესეგმენტზე.

ამოცანები

1. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $[a, b]$ მონაკვეთის x_n წერტილთა სასრული ან თვლადი სიმრავლე და ვთქვათ, ყოველ x_n წერტილს შეესაბამება h_n დადებითი რიცხვი, ამასთან, $\sum_n h_n < \infty$. f იყოს შემდეგი ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია:
$$f(x) = \sum_{x_n \le x} h_n \quad (x \in [a, b]).$$
დაამტკიცეთ, რომ: 1) f ფუნქცია წყვეტილია ყოველ x_n წერტილში და უწყვეტია ყველა დანარჩენ წერტილში; 2) f ფუნქცია მარჯვნიდან უწყვეტია ყოველ x_n წერტილში.
2. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს მკაცრად ზრდადი ფუნქცია, რომელიც წყვეტილია ყოველ რაციონალურ წერტილში და უწყვეტია ყველა სხვა წერტილში.
3. ვთქვათ, $E \subset [a, b]$ ნული ზომის რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო (G_n) არის ღია სიმრავლეთა რაიმე მიმდევრობა თვისებებით: $E \subset G_n$, $|G_n| < 1/2^n$. f იყოს შემდეგი ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია:
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |[a, x] \cap G_n| \quad (x \in [a, b]).$$
აჩვენეთ, რომ f ფუნქცია ზრდადია და არაა წარმოებადი E სიმრავლის წერტილებში, კერძოდ, $f'(x) = \infty$, როცა $x \in E$.
4. ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის არსებობს თუ არა სეგმენტი, რომელზეც f არის მონოტონური?
5. ვთქვათ, f ფუნქციას ყოველ წერტილში აქვს არაუარყოფითი ქვედა წარმოებული. აჩვენეთ, რომ f ზრდადია.
6. ვთქვათ, f ფუნქციის ზედა და ქვედა წარმოებულები შემოსაზღვრული ფუნქციებია. აჩვენეთ, რომ მოიძებნება $C \ge 0$ მუდმივი, ისეთი, რომ $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|$ $(x, y \in [a, b])$.

§ 7. შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციები

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს f ფუნქცია და $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ არის $[a, b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება. მაშინ
$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$
ჯამს ეწოდება f ფუნქციის **ვარიაციული ჯამი**, რომელიც შეესაბამება P დანაწილებას და ის აღინიშნება $V_f(P)$ ჩანაწერით.

f ფუნქციას ეწოდება **შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია**, თუ მისი ვარიაციული ჯამები ერთობლივ შემოსაზღვრულია, ე.ი.

$$\sup_P V_f(P) < \infty, \tag{1}$$

სადაც სუპრემუმი აიღება $[a, b]$ სეგმენტის ყველა შესაძლო P დანაწილების მიხედვით.

$[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის კლასს $BV([a, b])$ ჩანაწერით აღნიშნავენ.

(1) სუპრემუმს f ფუნქციის **სრულ ვარიაციას** უწოდებენ და $V_f([a, b])$ ჩანაწერით აღნიშნავენ. ცხადია, $0 \leq V_f([a, b]) \leq \infty$.

ვთქვათ, $[c, d]$ არის $[a, b]$-ს გადაუგვარებელი ქვესეგმენტი. f-ს უწოდებენ $[c, d]$ **ქვესეგმენტზე შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციას**, თუ $f|_{[c,d]} \in BV([c, d])$. $[c, d]$-ზე f-ის სრული ვარიაცია ეწოდება $V_{f|_{[c,d]}}([c, d])$ რიცხვს და ის აღინიშნება $V_f([c, d])$ ჩანაწერით.

შევთანხმდეთ აგრეთვე, რომ თუ $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ არის რაიმე $[c, d] \subset [a, b]$ ქვესეგმენტის დანაწილება, მაშინაც $V_f(P)$-თი აღვნიშნოთ $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ ჯამი. ცხადია, $V_f([c, d])$ არის აღნიშნული ტიპის ჯამების სუპრემუმი.

გადაგვარებულ ქვესეგმენტზე ფუნქციის ვარიაცია ჩავთვალოთ ნულის ტოლად.

სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- **მონოტონური ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციისაა;**
- **თუ f ფუნქცია აკმაყოფილებს ე.წ. ლიფშიცის პირობას: მოიძებნება $C \geq 0$ მუდმივი, ისეთი, რომ $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ $(x, y \in [a, b])$, მაშინ f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა;**
- **თუ f ფუნქცია ყველა წერტილში წარმოებადია და მისი წარმოებული შემოსაზღვრულია, მაშინ f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა;**
- **ვთქვათ, f რაიმე ფუნქციაა და $[c, d] \subset [a, b]$. მაშინ $V_f([c, d]) \leq V_f([a, b])$. შედეგად, თუ f შემოსაზღვრული ვარიაციისა $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ის შემოსაზღვრული ვარიაციის იქნება $[c, d]$ ქვესეგმენტზეც;**
- **შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია შემოსაზღვრულია.**

პირველი წინადადება გამომდინარეობს იქედან, რომ ზრდადი f ფუნქციისათვის ნებისმიერი $V_f(P)$ ვარიაციული ჯამი $f(b) - f(a)$ რიცხვის ტოლია, ხოლო კლებადი ფუნქციის შემთხვევაში, ვარიაციული ჯამები $f(a) - f(b)$ რიცხვს უტოლდებიან.

მეორე წინადადება მიიღება შემდეგი შეფასებიდან:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{n} C|x_k - x_{k-1}| = C|b-a|,$$

სადაც $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ არის $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილება.

ვთქვათ, f წარმოებადი ფუნქციაა და $|f'(x)| \le C$ $(x \in [a,b])$. ლაგრანჟის ფორმულის გამოყენებით, ნებისმიერი $x, y \in [a,b]$ წერტილებისათვის გვექნება, რომ $|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \le C|x-y|$, ე.ი. f აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას. აღნიშნულის გამო, მესამე წინადადება არის მეორის შედეგი.

ვაჩვენოთ მეოთხე წინადადება. განვიხილოთ $[c,d]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ დანაწილება. P შევავსოთ $[a,b]$ სეგმენტის P^* დანაწილებამდე a და b წერტილების მეშვეობით. მაშინ გვექნება, რომ

$$|f(c) - f(a)| + V_f(P) + |f(b) - f(d)| = V_f(P^*).$$

შედეგად,

$$V_f(P) \le V_f(P^*) \le V_f([a,b]).$$

ცხადია, ამით მეოთხე წინადადება დამტკიცებულია.

გადავიდეთ მეხუთე წინადადებაზე. ვთქვათ, f შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა. ნებისმიერი $x \in (a,b)$ წერტილისათვის განვიხილოთ $P = (a, x, b)$ დანაწილება. მაშინ გვექნება, რომ

$$|f(x)| \le |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| =$$

$$= |f(a)| + V_f(P) \le |f(a)| + V_f([a,b]).$$

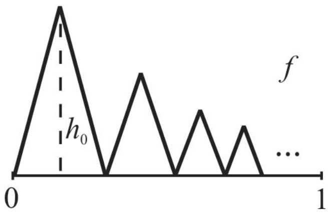
რითაც f-ის შემოსაზღვრულობა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 12.7.1. არსებობენ უწყვეტი ფუნქციები შემოუსაზღვრელი ვარიაციით. ასეთი ფუნქციის ასაგებად გამოვიყენოთ 12.5.1 შენიშვნაში მოცემული კონსტრუქცია.

$I \subset [0,1]$ მონაკვეთისათვის და $h \neq 0$ რიცხვისათვის $f_{I,h}$-ით აღვნიშნოთ $[0,1]$-ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც ნულის ტოლია I მონაკვეთის გარეთ და რომლის გრაფიკი Ox ღერძთან ერთად ქმნის ტოლფერდა სამკუთხედს I მონაკვეთის ტოლი ფუძით და წვეროთი (c,h) წერტილში, სადაც c არის I-ს შუაწერტილი.

ვთქვათ, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < 1$ და $x_k \to 1$ $(k \to \infty)$. Δ_k-თი აღვნიშნოთ $[x_k, x_{k+1}]$ მონაკვეთი. $(h_k)_{k=0}^{\infty}$ იყოს დადებით რიცხვთა მიმდევრობა, ისეთი, რომ $h_k \to 0$ $(k \to \infty)$ და $\sum_{k=0}^{\infty} h_k = \infty$.

ახლა განვიხილოთ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელიც ყოველ Δ_k უბანზე f_{Δ_k, h_k} ფუნქციის ტოლია და $f(1) = 0$ (ნახ. 12.4).



ნახ. 12.4.

$x \in [0,1)$ წერტილებში f-ის უწყვეტობა არის f_{Δ_k,h_k} ფუნქციების უწყვეტობის შედეგი, ხოლო $x=1$ წერტილში f-ის უწყვეტობა გამომდინარეობს $h_k \to 0$ პირობიდან.

ვაჩვენოთ, რომ f ფუნქცია შემოუსაზღვრელი ვარიაციისაა. ყოველი k-სათვის y_k იყოს $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$ მონაკვეთის შუაწერტილი. გვექნება, რომ

$$|f(y_k) - f(x_k)| + |f(x_{k+1}) - f(y_k)| = 2h_k.$$

ყოველი $n \geq 2$-სთვის განვიხილოთ $[0,1]$ სეგმენტის $P_n = (x_0, y_0, x_1, \ldots, x_n, y_n, x_{n+1}, 1)$ დანაწილება. მაშინ

$$V_f(P_n) = \sum_{k=0}^{n}(|f(y_k) - f(x_k)| + |f(x_{k+1}) - f(y_k)|) = \sum_{k=0}^{n} 2h_k.$$

საიდანაც, $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$ მწკრივის განშლადობის საფუძველზე ვწერთ:

$$V_f([a,b]) \geq \sup_{n \geq 2} V_f(P_n) = \infty.$$

შედეგად, f ფუნქცია შემოუსაზღვრელი ვარიაციისაა.

თეორემა 12.7.1. ვთქვათ, f და g შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციებია. მაშინ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა მათი ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი. გარდა ამისა, თუ მოიძებნება $\varepsilon > 0$, ისეთი, რომ $|g(x)| \geq \varepsilon$ ყოველი $x \in [a,b]$-სთვის, მაშინ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა f/g ფარდობაც.

დამტკიცება. ვთქვათ, $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ არის $[a,b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება. მაშინ გვექნება,

$$V_P(f \pm g) = \sum_{k=1}^{n} |(f \pm g)(x_k) - (f \pm g)(x_{k-1})| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq V_f([a,b]) + V_g([a,b]); \quad (2)$$

$$V_P(fg) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \, |g(x_k)| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \, |f(x_{k-1})| \leq$$

$$\leq V_f([a,b]) \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \ + \ V_g([a,b]) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|. \qquad (3)$$

(2)-დან უშუალოდ ვასკვნით, რომ $f+g \in BV([a,b])$. (3)-დან კი იმის გათვალისწინებით, რომ შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ვღებულობთ $fg \in BV([a,b])$ მიკუთვნებას.

გადავიდეთ თეორემის ბოლო წინადადების დამტკიცებაზე. ვთქვათ, $|g(x)| \geq \varepsilon > 0$ ყოველი $x \in [a,b]$-სთვის. მაშინ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ დანაწილებისათვის გვექნება,

$$V_{1/g}(P) = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{g(x_k)} - \frac{1}{g(x_{k-1})} \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{g(x_k) - g(x_{k-1})}{g(x_k)g(x_{k-1})} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} V_g([a,b]).$$

აქედან გამომდინარე, $1/g \in BV([a,b])$. შედეგად, თუ გავითვალისწინებთ უკვე დამტკიცებულ წინადადებას $BV([a,b])$ კლასის ფუნქციათა ნამრავლის შესახებ, დავასკვნით, რომ $f/g \in BV([a,b])$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 12.7.2. ვთქვათ, f რაიმე ფუნქციაა და $a < c < b$. მაშინ

$$V_f([a,b]) = V_f([a,c]) + V_f([c,b]).$$

ე.ი. სრული ვარიაცია, განხილული როგორც სეგმენტის ფუნქცია, არის ადიციური.

დამტკიცება. ვთქვათ, P არის $[a,b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება. Q-თი აღვნიშნოთ დანაწილება, რომელიც P-ს ტოლია იმ შემთხვევაში, როცა P შეიცავს c წერტილს და მიიღება P დანაწილებისათვის c წერტილის დამატებით მაშინ, როცა P არ შეიცავს c წერტილს. Q_1 იყოს Q დანაწილების კვალი $[a,c]$ სეგმენტზე, ე.ი. $[a,c]$-ს დანაწილება, რომელიც წარმოიქმნება $[a,c]$-ში მოხვედრილი Q დანაწილების წერტილებისაგან, ხოლო Q_2 იყოს ანალოგიურად განსაზღვრული Q დანაწილების კვალი $[c,b]$ სეგმენტზე.

მარტივი დასანახია, რომ დანაწილებისათვის ახალი წერტილის დამატებით ვარიაციული ჯამი არ იკლებს. ამ ფაქტისა და $V_f(Q) = V_f(Q_1) + V_f(Q_2)$ ცხადი ტოლობის გათვალისწინებით დავწერთ,

$$V_f(P) \leq V_f(Q) = V_f(Q_1) + V_f(Q_2) \leq V_f([a,c]) + V_f([c,b]).$$

შედეგად, P დანაწილების ნებისმიერობის გამო მივიღებთ შეფასებას:

$$V_f([a,b]) \leq V_f([a,c]) + V_f([c,b]). \qquad (4)$$

დავამტკიცოთ (4)-ის შებრუნებული შეფასება. ვთქვათ, P_1 და P_2 არიან შესაბამისად $[a, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტების ნებისმიერად არჩეული დანაწილებები. განვიხილოთ P_1 და P_2 დანაწილებებში შემავალი წერტილების ერთობლივად განხილვის შედეგად მიღებული $[a, b]$ სეგმენტის P დანაწილება. მაშინ ცხადია, რომ $V_f(P_1) + V_f(P_2) = V_f(P)$. შედეგად, დავწერთ,

$$V_f(P_1) + V_f(P_2) = V_f(P) \leq V_f([a, b]).$$

P_1 და P_2 დანაწილებების ნებისმიერობიდან გამომდინარე, მიღებული შეფასების მარცხენა მხარეში შეგვიძლია გადავიდეთ სუპრემუმებზე. რაც მოგვცემს (4)-ის შებრუნებულ უტოლობას:

$$V_f([a, c]) + V_f([c, b]) \leq V_f([a, b]).$$

ამით, ცხადია, თეორემა დამტკიცებულია. □

იმის გათვალისწინებით, რომ მონოტონური ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციისაა, თეორემა 12.7.2-დან მივიღებთ შემდეგ დებულებას.

თეორემა 12.7.3. თუ $[a, b]$ სეგმენტი შეიძლება დაიყოს სასრული რაოდენობის ქვესეგმენტებად, რომელთაგან თითოეულზე f ფუნქცია მონოტონურია, მაშინ f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა.

შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქციისათვის T_f-ით აღვნიშნოთ მისი **სრული ვარიაცია ცვლადი ზედა საზღვრით**, ე.ი.

$$T_f(x) = V_f([a, x]) \quad (x \in [a, b])$$

ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია. შევნიშნოთ, რომ T_f ფუნქცია ზრდადია. ეს გამომდინარეობს სრული ვარიაციის, როგორც სეგმენტის ფუნქციის, ზრდადობის თვისებიდან.

თეორემა 12.7.4. შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი f ფუნქციისათვის სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით:

$$f = T_f - (T_f - f).$$

დამტკიცება. დასამტკიცებელი გვაქვს $T_f - f$ ფუნქციის ზრდადობა. ამრიგად, ნებისმიერი $x, y \in [a, b], x < y$, წერტილებისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$T_f(x) - f(x) \leq T_f(y) - f(y).$$

თეორემა 12.7.2-ის ძალით, $T_f(y) - T_f(x) = V_f([x, y])$. შედეგად, დასამტკიცებელი შეფასება ასე გადაიწერება:

$$f(y) - f(x) \leq V_f([x, y]).$$

ეს უკანასკნელი კი სამართლიანია, რადგანაც $[x, y]$ სეგმენტის უმარტივესი $P = (x, y)$ დანაწილებისათვის გვაქვს, რომ

$$|f(y) - f(x)| = V_f(P) \leq V_f([x, y]).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ზრდადი ფუნქციები შემოსაზღვრული ვარიაციისა არიან, ამიტომ, თეორემა 12.7.1-ის ძალით, ასეთივე იქნება მათი სხვაობაც. აქედან და თეორემა 12.7.4-დან ვღებულობთ შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციათა შემდეგ დახასიათებას, რომელიც დამტკიცებული იყო კ. ჟორდანის მიერ.

თეორემა 12.7.5. ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციისაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის წარმოდგება ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით.

შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქციის წარმოდგენას ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით f-ის **ჟორდანის დაშლას** უწოდებენ.

12.7.5 და 12.6.2 თეორემებიდან მიიღება შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციათა დიფერენციალური თვისებების შესახებ.

თეორემა 12.7.6. ყოველი შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია თითქმის ყველგან წარმოებადია და მისი წარმოებული ჯამებადი ფუნქციაა.

ამოცანები

1. ააგეთ შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია, რომელიც არ ეკუთვნის ლიფშიცის კლასს.
2. ვთქვათ, f შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქციაა: $f(0) = 0$ და $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$, როცა $0 < x \leq 1$. აჩვენეთ, რომ f უწყვეტია და არაა შემოსაზღვრული ვარიაციის.
3. ვთქვათ, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ და f შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქციაა: $f(0) = 0$ და $f(x) = x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}$, როცა $0 < x \leq 1$. აჩვენეთ, რომ f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha > \beta$.
4. ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციისათვის არსებობს თუ არა $[c, d] \subset [a, b]$ ქვესეგმენტი, რომელზეც ამ ფუნქციას აქვს შემოსაზღვრული ვარიაცია?
5. ვთქვათ, f შემოუსაზღვრელი ვარიაციის ფუნქციაა. აჩვენეთ, რომ მოიძებნება $x \in [a, b]$ წერტილი, რომლის შემცველ ყოველ $[c, d] \subset [a, b]$ ქვესეგმენტზე f შემოუსაზღვრელი ვარიაციისაა.
6. აჩვენეთ, რომ თუ f შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა, მაშინ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა $|f|$. ააგეთ ფუნქციის მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს შებრუნებული დებულების მცდარობას.
7. აჩვენეთ, რომ თუ f უწყვეტი ფუნქციაა და $|f|$ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა, მაშინ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა f ფუნქციაც.

§ 8. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები. ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით წარმოდგენადი ფუნქციების დახასიათება

f ფუნქციას ეწოდება **აბსოლუტურად უწყვეტი**, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

სადაც $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ არის $[a, b]$ სეგმენტში შემავალი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალების ნებისმიერი სასრული კლასი.

ყველა აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის კლასი $AC([a, b])$ ჩანაწერით აღინიშნება.

სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- **აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია არის უწყვეტი;**
- **ლიფშიცის კლასის ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი;**
- **თუ f ფუნქცია ყველა წერტილში წარმოებადია და მისი წარმოებული შემოსაზღვრულია, მაშინ f აბსოლუტურად უწყვეტია;**
- **ვთქვათ, f და g აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებია. მაშინ აბსოლუტურად უწყვეტია მათი ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი. გარდა ამისა, თუ g არსად არ ხდება ნულის ტოლი, მაშინ აბსოლუტურად უწყვეტია f/g ფარდობაც.**

აბსოლუტურად უწყვეტობის პირობის გამოყენება ერთი (a_1, b_1) ინტერვალისაგან შედგენილი კლასისათვის გვაძლევს f ფუნქციის თანაბრად უწყვეტობას. ამით მტკიცდება პირველი წინადადება. მეორე წინადადება უშუალოდ მოწმდება, ხოლო მესამე კი არის მეორის უშუალო შედეგი. მეოთხე წინადადების დამტკიცება ხდება თეორემა 2.7.1-ის შემთხვევაში გამოყენებული სტანდარტული შეფასებების მეშვეობით.

თეორემა 12.8.1. ყოველი აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია არის შემოსაზღვრული ვარიაციის.

დამტკიცება. δ იყოს დადებითი რიცხვი, რომელიც f ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის თვისების საფუძველზე შეესაბამება $\varepsilon = 1$ რიცხვს.

შევნიშნოთ, რომ თუ $I \subset [a, b]$ ქვესეგმენტის სიგრძე δ-ზე ნაკლებია, მაშინ $V_f(I) \leq 1$. მართლაც, I-ს ნებისმიერი P დანაწილებით წარმოქმნილი ინტერვალების სიგრძეების ჯამი I-ს სიგრძის ტოლია და შედეგად, δ-ზე ნაკლებია. ამასთანავე, ცხადია, რომ ეს ინტერვალები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია. შედეგად, δ რიცხვის შერჩევის ძალით, სამართლიანი იქნება $V_f(P) < 1$ შეფასება, საიდანაც, P-ს ნებისმიერობის გამო, მივიღებთ $V_f(I) \leq 1$ შეფასებას.

ახლა, თუ $[a,b]$ სეგმენტს დავყოფთ δ-ზე ნაკლები სიგრძის $I_1,\dots,I_n$ ქვესეგმენტებად, მაშინ გაკეთებული შენიშვნის ძალით, თითოეული I_k მონაკვეთისათვის გვექნება, რომ $V_f(I_k)\le 1$. შედეგად, სრული ვარიაციის ადიციურობის თვისების საფუძველზე (იხ. თეორემა 12.7.2) მივიღებთ,

$$V_f([a,b]) = V_f(I_1)+\cdots+V_f(I_n)\le n.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 12.8.1. არსებობენ ერთდროულად უწყვეტი და შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციები, რომლებიც არ არიან აბსოლუტურად უწყვეტი. ასეთ მაგალითს გვაძლევს კანტორის ფუნქცია. მართლაც, ყოველი ნატურალური n-სთვის განვიხილოთ კანტორის სიმრავლის აგების n ეტაპის შესრულების შემდეგ დარჩენილი 2^n ცალი სეგმენტის კლასი:

$$\{\Delta(i_1,\dots,i_n):\ i_1,\dots,i_n=0,2\}.$$

მოვახდინოთ ამ კლასის სეგმენტების ერთინდექსიანი ნუმერაცია:

$$[a_1,b_1],\dots,[a_{2^n},b_{2^n}].$$

შევნიშნოთ, რომ $[a_k,b_k]$ სეგმენტები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და

$$\sum_{k=1}^{2^n}(b_k-a_k)=\frac{2^n}{3^n}. \tag{1}$$

მეორე მხრივ, $[a_k,b_k]$ სეგმენტთა გაერთიანების ყოველ დამატებით ინტერვალზე კანტორის θ ფუნქცია მუდმივია. რის გამოც გვექნება,

$$\sum_{k=1}^{2^n}|\theta(b_k)-\theta(a_k)|=\sum_{k=1}^{2^n}(\theta(b_k)-\theta(a_k))=\theta(1)-\theta(0)=1. \tag{2}$$

ყოველი n-სთვის (1) და (2) პირობების ერთდროულად შესრულება იწვევს იმას, რომ $\varepsilon=1$ რიცხვისათვის არ არსებობს აბსოლუტურად უწყვეტობის განსაზღვრებით გათვალისწინებული $\delta>0$ რიცხვი. შედეგად, კანტორის θ ფუნქცია არაა აბსოლუტურად უწყვეტი.

12.8.1 და 12.7.6 თეორემებიდან ვღებულობთ შემდეგ მნიშვნელოვან დებულებას.

თეორემა 12.8.2. ყოველი აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია თითქმის ყველგან წარმოებადია და მისი წარმოებული ჯამებადი ფუნქციაა.

თეორემა 12.8.3. ყოველი $f\in L([a,b])$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი არის აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $f \in L([a,b])$ და

$$F(x) = \int_{[a,x]} f \qquad (x \in [a,b]).$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$. ლებეგის ინტეგრალის, როგორც სიმრავლის ფუნქციის, აბსოლუტურად უწყვეტობის თვისების ძალით (იხ. თეორემა 8.8.8) იარსებებს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ

$$\int_E |f| < \varepsilon, \tag{3}$$

ყოველი ზომადი E სიმრავლისათვის, რომლის ზომა აკმაყოფილებს $|E| < \delta$ უტოლობას.

განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვეინტერვალების ნებისმიერი $\{(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)\}$ კლასი, რომელიც აკმაყოფილებს $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ პირობას. მაშინ ინტეგრალის ცნობილი თვისებებისა და (3)-ის საფუძველზე დავწერთ, რომ

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{(a_k,b_k)} f \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{(a_k,b_k)} |f| = \int_{\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)} |f| < \varepsilon.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 12.8.4. თუ აბსოლუტურად უწყვეტი f ფუნქციის წარმოებული თითქმის ყველგან ნულის ტოლია, მაშინ f ფუნქცია მუდმივია. შედეგად, თუ აბსოლუტურად უწყვეტ f და g ფუნქციებს თითქმის ყველგან ერთი და იგივე წარმოებული აქვთ, მაშინ ისინი ერთმანეთისაგან მუდმივით განსხვავდებიან.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $c \in (a,b]$ წერტილისათვის, $f(c) = f(a)$. რითაც თეორემა დამტკიცებული იქნება.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. E იყოს (a,c) ინტერვალის ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც f ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია. ცხადია, E სრული ზომის სიმრავლეა (a,c) ინტერვალში. Π იყოს ყველა იმ $[\alpha,\beta]$ სეგმენტის კლასი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$[\alpha,\beta] \subset (a,c), \tag{4}$$

$$\frac{|f(\beta) - f(\alpha)|}{\beta - \alpha} < \varepsilon. \tag{5}$$

ადვილი დასანახია, რომ Π კლასი ქმნის E სიმრავლის ვიტალის აზრით დაფარვას. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილი. $f'(x) = 0$ პირობის გამო მოიძებნება $\eta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} < \varepsilon,$$

ყოველთვის, როცა $0 < h < \eta$. შედეგად, x-ის ნებისმიერი საკმარისად მცირე მარჯვენა $[x, x+h]$ მიდამო შედის Π კლასში. აღნიშნულის გამო, Π ქმნის E სიმრავლის ვიტალის აზრით დაფარვას.

გამოვიყენოთ 12.2.2 თეორემა E სიმრავლისა და Π კლასისათვის. შედეგად, ვიპოვით წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სეგმენტთაგან შედგენილ $\Pi' \subset \Pi$ ქვეკლასს, რომლისთვისაც

$$\left| E \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right| = 0.$$

საიდანაც, (4)-ის და იმის გათვალისწინებით, რომ E სრული ზომის სიმრავლეა (a, c) ინტერვალში, მივიღებთ ტოლობას:

$$\sum_{I \in \Pi'} |I| = c - a.$$

შემდეგ, Π'-დან გამოვყოთ სასრული ქვეკლასი Π'', რომელიც აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$\sum_{I \in \Pi''} |I| > c - a - \delta. \tag{6}$$

სადაც $\delta \in (0, c-a)$ არის რიცხვი, რომელიც f ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის თვისების საფუძველზე შეესაბამება ε რიცხვს.

რაიმე I მონაკვეთზე f ფუნქციის ნაზრდის აღსანიშნად გამოვიყენოთ $\Delta(f, I)$ ჩანაწერი, ე.ი. $\Delta(f, I) = f(\beta) - f(\alpha)$, სადაც α არის I-ს მარცხენა, ხოლო β კი - I-ს მარჯვენა ბოლო.

Π'' კლასის თვისებებისა და (5) შეფასების საფუძველზე დავწერთ,

$$\sum_{I \in \Pi''} |\Delta(f, I)| < \sum_{I \in \Pi''} \varepsilon |I| \le \varepsilon (c - a). \tag{7}$$

შევნიშნოთ, რომ Π'' კლასის მონაკვეთები ჩაკეტილია, რის გამოც ისინი ვერ ამოწურავენ ღია (a, c) მონაკვეთს. განვიხილოთ ყველა იმ ინტერვალის Λ კლასი, რომლებიც Π'' კლასის სეგმენტების გაერთიანებას შეავსებენ (a, c) ინტერვალამდე. ცხადია, Λ კლასიც სასრულია და შედგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წევრებისაგან. ამასთან, (6)-ის ძალით, $\sum_{I \in \Lambda} |I| < \delta$. Λ კლასის აღნიშნული თვისებებისა და δ რიცხვის შერჩევის გამო გვექნება, რომ

$$\sum_{I \in \Lambda} |\Delta(f, I)| < \varepsilon. \tag{8}$$

Π'' და Λ კლასების მონაკვეთები ერთობლიობაში ქმნიან (a,c) მონაკვეთის დანაწილებას, რის საფუძველზე დავწერთ,

$$f(c)-f(a)=\sum_{I\in\Pi''}\Delta(f,I)+\sum_{I\in\Lambda}\Delta(f,I).$$

საიდანაც (7)-ის და (8)-ის ძალით ვღებულობთ, რომ

$$|f(c)-f(a)|<\varepsilon(c-a+1).$$

ეს შეფასება კი, $\varepsilon>0$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო, გვაძლევს $f(c)=f(a)$ ტოლობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი თეორემა ახასიათებს იმ ფუნქციებს, რომლებიც წარმოდგებიან ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით.

თეორემა 12.8.5. ფუნქცია წარმოდგება ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის აბსოლუტურად უწყვეტია.

დამტკიცება. აუცილებლობა არის თეორემა 12.8.3-ის შედეგი. დავამტკიცოთ საკმარისობასთან დაკავშირებული წინადადება. ვთქვათ, f აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა. თეორემა 12.8.2-ის ძალით f თითქმის ყველგან წარმოებადია და f' ჯამებადი ფუნქციაა. განვიხილოთ f'-ის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი g, ე.ი.

$$g(x)=\int_{[a,x]}f' \qquad (x\in[a,b]).$$

თეორემა 12.8.3-ის თანახმად g ფუნქცია აბოლუტურად უწყვეტია. ამასთან, ინტეგრალის დიფერენცირების შესახებ ლებეგის თეორემის ძალით g ფუნქციის წარმოებული თითქმის ყველგან f' ფუნქციის ტოლია. ამრიგად, აბსოლუტურად უწყვეტ f და g ფუნქციებს თითქმის ყველგან ერთი და იგივე წარმოებული აქვთ. საიდანაც თეორემა 12.8.4-ის საფუძველზე ვასკვნით, რომ f და g მუდმივით განსხვავდებიან: $f=C+g$. თუ გავითვალისწინებთ $g(x)=0$ პირობას, დავასკვნით C მუდმივის $f(a)$ რიცხვთან ტოლობას. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$f(x)=f(a)+\int_{[a,x]}f' \qquad (x\in[a,b]).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამოცანები

1. ვთქვათ, f აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$-სთვის მოიძებნება $\delta>0$, რომლისთვისაც

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\delta,$$

სადაც $\{(a_k, b_k)\}$ არის $[a, b]$ სეგმენტში შემავალი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ინტერვალების ნებისმიერი თვლადი კლასი.

2. ვთქვათ, f ფუნქცია ისეთია, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, რომლისთვისაც
$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$
სადაც $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ არის $[a, b]$ სეგმენტში შემავალი ინტერვალების ნებისმიერი სასრული კლასი. დაამტკიცეთ, რომ f ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას.
3. ვთქვათ, $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in [0, 1])$. აჩვენეთ, რომ f აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა, მაგრამ არ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას.
4. აჩვენეთ, რომ თუ f აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ აბსოლუტურად უწყვეტია $|f|$.
5. აჩვენეთ, რომ თუ f უწყვეტი ფუნქციაა და $|f|$ აბსოლუტურად უწყვეტია, მაშინ აბსოლუტურად უწყვეტია f ფუნქციაც.

§ 9. პირველყოფილი ფუნქციის აღდგენა ჯამებადი წარმოებულის შემთხვევაში

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ლებეგის მიხედვით ინტეგრება წარმოადგენს გაწარმოების შებრუნებულ ოპერაციას, ჯამებადი წარმოებულის მქონე ფუნქციათა კლასის ფარგლებში.

თეორემა 12.9.1. ვთქვათ, f წარმოებადი ფუნქციაა და ცნობილია, რომ $f' \in L([a, b])$. მაშინ სამართლიანია წარმოდგენა:
$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f' \qquad (x \in [a, b]).$$

თეორემა 12.9.1 მიიღება ლებეგის ინტეგრალის სახით წარმოდგენადი ფუნქციების დახასიათებიდან (იხ. თეორემა 12.7.5) შემდეგი დებულების საფუძველზე.

თეორემა 12.9.2. ვთქვათ, f წარმოებადი ფუნქციაა და ცნობილია, რომ $f' \in L([a, b])$. მაშინ f აბსოლუტურად უწყვეტია.

ლემა 12.9.1. ვთქვათ, $E \subset [a, b]$ და $0 < C < \infty$. თუ ყოველ $x \in E$ წერტილში f ფუნქცია წარმოებადია და $|f'(x)| < C$, მაშინ $f(E)$ ანასახის გარე ზომისათვის სამართლიანია შეფასება:
$$|f(E)|_* \le C|E|_*.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\alpha > 0$. აღვნიშნოთ
$$E_\alpha = \{x \in E : |f(y) - f(x)| < C|y - x|, \text{ როცა } |y - x| < \alpha\}.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$|f(E_\alpha)|_* \le C|E_\alpha|_*. \tag{1}$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და E_α სიმრავლე დავფაროთ მონაკვეთების სასრული ან უსასრულო (I_k) მიმდევრობით, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\sum_k |I_k| < |E_\alpha|_* + \varepsilon; \tag{2}$$

$$|I_k| < \alpha \ \text{ ყოველი } k\text{-სათვის}. \tag{3}$$

ასეთი (I_k) მიმდევრობა შემდეგნაირად შეირჩევა: ჯერ E_α დავფაროთ J_m მონაკვეთებით, რომლებიც აკმაყოფილებენ $\sum_m |J_m| < |E_\alpha|_* + \varepsilon$ შეფასებას, შემდეგ კი, თითოეული J_m მონაკვეთი დავყოთ α-ზე ნაკლები სიგრძის ქვემონაკვეთებად.

ნებისმიერი k-სათვის განვიხილოთ E_α სიმრავლის $E_\alpha \cap I_k$ პორცია. (3)-ის ძალით, ყოველი $x, y \in E_\alpha \cap I_k$ წერტილებისათვის გვექნება,

$$|f(y) - f(x)| < C|y - x| \le C|I_k|.$$

საიდანაც, ადვილი დასანახია, რომ $f(E_\alpha \cap I_k)$ სიმრავლე შეიძლება მოვათავსოთ $C|I_k|$ სიგრძის სეგმენტში. შედეგად,

$$|f(E_\alpha \cap I_k)|_* \le C|I_k|.$$

აქედან, (2)-ის გამოყენებით დავწერთ,

$$|f(E_\alpha)|_* \le \sum_k |f(E_\alpha \cap I_k)|_* \le \sum_k C|I_k| \le C(|E_\alpha|_* + \varepsilon).$$

მიღებული შეფასებიდან $\varepsilon > 0$-ის ნებისმიერობის საფუძველზე ვღებულობთ (1) უტოლობას.

ახლა (1)-ის გამოყენებით ვაჩვენოთ $|f(E)|_* \le C|E|_*$ შეფასება.

შევნიშნოთ, რომ $E_{1/n}$ $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეები ქმნიან ზრდად მიმდევრობას და $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$. შედეგად, $f(E_{1/n})$ სიმრავლეებიც შექმნიან ზრდად მიმდევრობას და სამართლიანი იქნება $f(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_{1/n})$ ტოლობა. აღნიშნულიდან გამომდინარე, თუ გამოვიყენებთ გარე ზომის ქვემოდან უწყვეტობის თვისებას (იხ. თეორემა 5.8.1), დავწერთ,

$$|E|_* = \lim_{n\to\infty} |E_{1/n}|_* \ \text{ და } \ |f(E)|_* = \lim_{n\to\infty} |f(E_{1/n})|_*. \tag{4}$$

(1)-ის ძალით გვაქვს, რომ

$$|f(E_{1/n})|_* \le C|E_{1/n}|_* \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{5}$$

(4) და (5) თანაფარდობებიდან ვღებულობთ დასამტკიცებელ შეფასებას. □

შენიშვნა 12.9.1. ლემა 12.9.1 სამართლიანი რჩება, თუ E სიმრავლის წერტილებში, f ფუნქციის წარმოებადობისა და $|f'(x)| < C$ უტოლობის ნაცვლად, მოვითხოვთ შემდეგ უფრო სუსტ პირობას: $\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} < C$. დამტკიცება ხდება სავსებით ანალოგიურად.

ლემა 12.9.2. თუ f ფუნქცია წარმოებადია, მაშინ f' ფუნქცია ზომადია.

დამტკიცება. დამტკიცება სრულად იმეორებს 9.4.1 თეორემისთვის გამოყენებულ მსჯელობებს.

თავიდანვე შევნიშნოთ, რომ წარმოებადობიდან გამომდინარე, f ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. გავაგრძელოთ f ფუნქცია $[a, b+1]$ სეგმენტზე ისე, რომ $(b, b+1]$ მონაკვეთის x წერტილებში მისი მნიშვნელობები გამოითვლებოდეს შემდეგნაირად:

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x - b).$$

ახლა f შეიძლება განვიხილოთ როგორც $[a, b+1]$ სეგმენტზე წარმოებადი (და შედეგად, უწყვეტი) ფუნქცია.

ყოველი k-სთვის განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული Δ_k ფუნქცია:

$$\Delta_k(x) = \frac{f(x+1/k) - f(x)}{1/k} \qquad (x \in [a, b]).$$

ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილში გვაქვს, რომ $f'(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \Delta_k(x)$. ამრიგად, f' არის უწყვეტ Δ_k ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი ზღვარი. საიდანაც ვასკვნით f'-ის ზომადობას. $\square$

ლემა 12.9.3. ვთქვათ, f წარმოებადი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი ზომადი $E \subset [a, b]$ სიმრავლისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$|f(E)|_* \le \int_E |f'|.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და ყოველი n-სთვის E_n-ით აღვნიშნოთ $\{x \in E : (n-1)\varepsilon \le |f'(x)| < n\varepsilon\}$ სიმრავლე. ცხადია, E_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება E-ს ტოლია, ამასთან, f'-ის ზომადობის გამო (იხ. ლემა 12.9.2) E_n სიმრავლეები ზომადია. E_n სიმრავლეთა აღნიშნული თვისებებისა და ლემა 12.9.1-ის ძალით გვექნება,

$$|f(E)|_* \le \sum_{n=1}^{\infty} |f(E_n)|_* \le \sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon|E_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\varepsilon|E_n| \ + \ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon|E_n| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f'| \ + \ \varepsilon|E| = \int_E |f'| \ + \ \varepsilon|E|.$$

საიდანაც, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის გათვალისწინებით ვღებულობთ დასამტკიცებელ შეფასებას. $\square$

თეორემა 12.9.2-ის დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $c, d \in [a, b]$, $c < d$, წერტილებისათვის სამართლიანი იქნება შეფასება:

$$|f(d) - f(c)| \leq \int_{(c,d)} |f'|. \tag{6}$$

მართლაც, f ფუნქციის უწყვეტობის საფუძველზე, ადვილი დასანახია, რომ $f(c)$ და $f(d)$ ბოლოების მქონე სეგმენტი ჩართულია $f([c, d])$ სეგმენტში. შედეგად, ლემა 12.9.3-ის ძალით დავწერთ,

$$|f(d) - f(c)| \leq |f([c, d])| \leq \int_{[c,d]} |f'| = \int_{(c,d)} |f'|.$$

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. გამოვიყენოთ $|f'|$ ფუნქციისათვის ინტეგრალის, როგორც სიმრავლის ფუნქციის, აბსოლუტურად უწყვეტობის თვისება და ვიპოვოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$\int_E |f'| < \varepsilon, \text{ როცა } |E| < \delta. \tag{7}$$

განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვეინტერვალების ნებისმიერი სასრული $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ კლასი, რომლისთვისაც $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$. მაშინ (6) და (7) შეფასებების ძალით გვექნება,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{(a_k,b_k)} |f'| = \int_{\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)} |f'| < \varepsilon.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 12.9.2. 12.1.1 და 12.9.1 თეორემები პასუხს იძლევიან ამ თავის დასაწყისში დასმულ საკითხზე გაწარმოებისა და ლებეგის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის შესახებ. თეორემა 12.1.1-ის ძალით, თუ f ფუნქციას ვაინტეგრებთ და შემდეგ გავაწარმოებთ, თითქმის ყველა წერტილში f ფუნქციას დავუბრუნდებით; ხოლო თეორემა 12.9.1-ის თანახმად - თუ f ფუნქციას გავაწარმოებთ და შემდეგ ვაინტეგრებთ, კვლავ საწყის ფუნქციას მივიღებთ.

შენიშვნა 12.9.3. გაწარმოებისა და ლებეგის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის მოვლენა კიდევ უფრო ნათლად ივვეთება, თუ ყოველ წერტილში გაწარმოების ნაცვლად განვიხილავთ თითქმის ყველგან გაწარმოების ოპერაციას და ვისარგებლებთ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების თვისებებით.

$C^{(1)}([a,b])$-თი აღვნიშნოთ უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა კლასი. შევთანხმდეთ, რომ $C^{(1)}([a,b])$ კლასის ნებისმიერი ორი ფუნქცია, რომლებიც მუდმივით განსხვავდებიან, გაიგივებულია.

გაწარმოების ოპერაცია გავიგოთ, როგორც $C^{(1)}([a,b])$ კლასის ასახვა $C([a,b])$ კლასში, რომელიც $f \in C^{(1)}([a,b])$ ფუნქციას შეუსაბამებს მის წარმოებულ f' ფუნქციას, ინტეგრების ოპერაცია კი გავიგოთ, როგორც $C([a,b])$ კლასიდან $C^{(1)}([a,b])$ კლასში მოქმედი ასახვა, რომელიც $f \in C([a,b])$ ფუნქციას შეუსაბამებს მის რიმანის განუსაზღვრელ F ინტეგრალს. მაშინ გაწარმოებისა და რიმანის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის პრინციპი გამოიხატება შემდეგი დებულებით.

- **გაწარმოების ოპერაცია არის $C^{(1)}([a,b])$ და $C([a,b])$ კლასებს შორის მოქმედი ბიექციური ასახვა, რომლის შებრუნებულ ასახვას წარმოადგენს რიმანის მიხედვით ინტეგრების ოპერაცია.**

ქვემოთ ანალოგიური დებულება მოცემული იქნება ლებეგის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციის შემთხვევაში.

ვთქვათ, f თითქმის ყოველ წერტილში წარმოებადი ფუნქციაა. წინა პარაგრაფების მსგავსად, შევთანხმდეთ, რომ f'-ით აღვნიშნოთ ფუნქცია, რომელიც $f'(x)$-ის ტოლია f-ის წარმოებულის არსებობის წერტილებში და ნულის ტოლია დარჩენილ წერტილებში.

შევთანხმდეთ აგრეთვე, რომ აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა $AC([a,b])$ კლასის ნებისმიერი ორი ფუნქცია, რომლებიც მუდმივით განსხვავდებიან, გაიგივებულია.

აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა თვისებების ძალით (იხ. 12.8.2 და 12.8.3 თეორემები), გაწარმოების ოპერაცია შეიძლება გავიგოთ, როგორც $AC([a,b])$ კლასიდან $L([a,b])$ კლასში მოქმედი ასახვა, რომელიც $AC([a,b])$ კლასის f ფუნქციას შეუსაბამებს მის წარმოებულ f' ფუნქციას; ხოლო ინტეგრების ოპერაცია კი შეიძლება გავიგოთ, როგორც $L([a,b])$ და $AC([a,b])$ კლასებს შორის მოქმედი ასახვა, რომელიც $f \in L([a,b])$ ფუნქციას შეუსაბამებს მის ლებეგის განუსაზღვრელ F ინტეგრალს.

მაშინ 12.8.3, 12.8.4 და 12.1.1 თეორემების გათვალისწინებით, გაწარმოებისა და ლებეგის მიხედვით ინტეგრების ოპერაციების ურთიერთშებრუნებადობის პრინციპი შეიძლება გამოვხატოთ შემდეგი დებულებით.

- **გაწარმოების ოპერაცია არის $AC([a,b])$ და $L([a,b])$ კლასებს შორის მოქმედი ბიექციური ასახვა, რომლის შებრუნებულ ასახვას წარმოადგენს ლებეგის მიხედვით ინტეგრების ოპერაცია.**

ამოცანები

1. ვთქვათ, f რაიმე ფუნქციაა და $E = \{x : f'(x) = 0\}$. დაამტკიცეთ, რომ $f(E)$ არის ნული ზომის სიმრავლე.

თ ა ვ ი 13

შემოსაზღვრული ვარიაციისა და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების ზოგიერთი თვისება

ამ თავში გრძელდება შემოსაზღვრული ვარიაციისა და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების თვისებათა შესწავლა. კერძოდ, დამტკიცებულია ამ ტიპის ფუნქციების დახასიათებები, როცა აპრიორულად ცნობილია უწყვეტობის თვისების შესრულება, მოცემულია მათი გამოყენება წირის სიგრძის გამოთვლის ამოცანის და აგრეთვე, ლებეგ-სტილტიესის ზომათა ძირითადი ტიპების შესასწავლად.

§ 1. შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქციები

თეორემა 13.1.1. თუ შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქცია უწყვეტია x წერტილში, მაშინ მისი სრული ვარიაცია ცვლადი ზედა საზღვრით - T_f აგრეთვე უწყვეტია x წერტილში.

დამტკიცება. დავუშვათ $x \in [a, b)$. ვაჩვენოთ T_f-ის მარჯვნიდან უწყვეტობა x-ში. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. ვიპოვოთ $[x, b]$ მონაკვეთის $P = (x, t_1, \dots, t_n)$ დანაწილება, რომლისთვისაც

$$V_f([x, b]) \leq V_f(P) + \varepsilon. \tag{1}$$

შემდეგ, f ფუნქციის x წერტილში უწყვეტობის საფუძველზე ვიპოვოთ $y \in (x, t_1)$ წერტილი, ისეთი, რომ

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon. \tag{2}$$

$[y, b]$ მონაკვეთის $(y, t_1, \dots, t_n)$ დანაწილება აღვნიშნოთ Q-თი. მაშინ (1) და (2) თანაფარდობებიდან მივიღებთ, რომ

$$V_f([x, b]) \leq V_f(P) + \varepsilon \leq |f(y) - f(x)| + V_f(Q) + \varepsilon <$$
$$< V_f(Q) + 2\varepsilon \leq V_f([y, b]) + 2\varepsilon.$$

საიდანაც, $V_f([x, y]) \leq 2\varepsilon$. შედეგად, $T_f(y) - T_f(x) \leq 2\varepsilon$. უკანასკნელი შეფასებიდან, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობისა და T_f-ის ზრდადობის გამო, ვასკვნით T_f-ის მარჯვნიდან უწყვეტობას x წერტილში.

ანალოგიურად დამტკიცდება T_f-ის მარცხნიდან უწყვეტობა $x \in (a, b]$ შემთხვევაში. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.1.1-დან შედეგის სახით ვღებულობთ შემდეგ დებულებას.

თეორემა 13.1.2. **თუ შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ მისი სრული ვარიაცია ცვლადი ზედა საზღვრით - T_f აგრეთვე უწყვეტია.**

თეორემა 13.1.2-დან თეორემა 12.7.4-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ შემდეგ დებულებას.

თეორემა 13.1.3. **შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქცია წარმოიდგინება ერთდროულად ზრდადი და უწყვეტი ფუნქციების სხვაობის სახით.**

შენიშვნა 13.1.1. 13.1.1-13.1.3 თეორემების ანალოგები სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა, უწყვეტობის ნაცვლად, განვიხილავთ მარჯვნიდან (მარცხნიდან) უწყვეტობის პირობას.

აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებისთვის სამართლიანია თეორემა 13.1.2-ის შემდეგი ვარიანტი.

თეორემა 13.1.4. **თუ f ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია, მაშინ მისი სრული ვარიაცია ცვლადი ზედა საზღვრით - T_f აგრეთვე აბსოლუტურად უწყვეტია.**

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. δ იყოს დადებითი რიცხვი, რომელიც, f ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის პირობის მიხედვით, შეესაბამება $\varepsilon/2$-ს.

ვთქვათ, $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ არის $[a, b]$ სეგმენტის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვეინტერვალების კლასი, რომლისთვისაც $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$. ვაჩვენოთ, რომ

$$\sum_{k=1}^{n} |T_f(b_k) - T_f(a_k)| < \varepsilon,$$

რითაც თეორემა დამტკიცებული იქნება.

ყოველი $k \in \overline{1, n}$-სთვის ვიპოვოთ $[a_k, b_k]$ სეგმენტის ისეთი $P_k = (x_{k,0}, \ldots, x_{k,m_k})$ დანაწილება, რომ

$$V_f([a_k, b_k]) < V_f(P_k) + \frac{\varepsilon}{2n}.$$

მაშინ სამართლიანი იქნება შეფასება:

$$\sum_{k=1}^{n} |T_f(b_k) - T_f(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} V_f([a_k, b_k]) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} V_f(P_k) = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} |f(x_{k,i}) - f(x_{k,i-1})|. \tag{3}$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $(x_{k,i-1}, x_{k,i})$ $(k \in \overline{1,n},\ i \in \overline{1,m_k})$ ინტერვალების სიგრძეთა ჯამი იგივეა, რაც (a_k, b_k) ინტერვალების სიგრძეთა ჯამი, δ რიცხვის შერჩევის საფუძველზე დავწერთ,

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} |f(x_{k,i}) - f(x_{k,i-1})| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

(3)-დან და (4)-დან ვღებულობთ საჭირო შეფასებას. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 13.1.4-დან თეორემა 12.7.4-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ შემდეგ დებულებას.

თეორემა 13.1.5. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია წარმოიდგინება ერთდროულად ზრდადი და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების სხვაობის სახით.

$[a,b]$ სეგმენტის $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ დანაწილების პარამეტრი აღვნიშნოთ $\lambda(P)$-თი, ე.ი. $\lambda(P) = \max\limits_{1 \le k \le n} |x_k - x_{k-1}|$.

თეორემა 13.1.6. თუ f უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ

$$V_f([a,b]) = \lim_{\lambda(P) \to 0} V_f(P).$$

ე.ი. სრული ვარიაცია არის ვარიაციული ჯამების ზღვარი, როცა დანაწილების პარამეტრი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებიმიერი $\alpha < V_f([a,b])$ რიცხვი და ვაჩვენოთ, რომ $V_f(P) > \alpha$, როცა $\lambda(P)$ საკმარისად მცირეა. ამით თეორემა დამტკიცებული იქნება.

$Q = (a, t_1, \ldots, t_m, b)$ იყოს $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილება, ისეთი, რომ $V_f(Q) > \alpha$.

$\delta > 0$ რიცხვი შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ აკმაყოფილებდეს შემდეგ ორ პირობას:

$$\delta < \min\{t_1 - a, t_2 - t_1, \ldots, b - t_m\}; \tag{5}$$

$$|f(x) - f(y)| < \frac{V_f(Q) - \alpha}{2m}, \quad \text{როცა} \quad |x - y| < \delta. \tag{6}$$

შევნიშნოთ, რომ (6)-ის მიღწევისათვის უნდა ვისარგებლოთ f ფუნქციის თანაბრად უწყვეტობით.

განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ დანაწილება, რომლისთვისაც $\lambda(P) < \delta$. $P + Q$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ დანაწილება,

რომელიც შედგენილია P და Q დანაწილებების წერტილთა ერთობლიობაში განხილვით. (5) პირობის გამო $t_1, \ldots, t_m$ წერტილები განაწილდებიან m ცალ $[x_{k-1}, x_k]$ სახის სხვადასხვა სეგმენტში. ამის გამო $V_f(P)$ ვარიაციული ჯამიდან $V_f(P+Q)$ ვარიაციულ ჯამზე გადასვლისას არაუმეტეს m ცალი

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

სახის შესაკრები შეიცვლება

$$|f(t_i) - f(x_{k-1})| + |f(x_k) - f(t_i)|$$

სახის ჯამით. შედეგად, (6) პირობის ძალით, თითოეული ასეთი ჩანაცვლებისას ვარიაციული ჯამი იზრდება $\frac{V_f(Q)-\alpha}{m}$-ზე ნაკლები სიდიდით. აღნიშნულის საფუძველზე დავწერთ,

$$V_f(P) > V_f(P+Q) - m\,\frac{V_f(Q)-\alpha}{m} \geq V_f(Q) - (V_f(Q) - \alpha) = \alpha.$$

ამრიგად, $V_f(P) > \alpha$, როცა $\lambda(P) < \delta$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

f ფუნქციის **რხევა** $E \subset [a, b]$ **სიმრავლეზე** ეწოდება

$$\omega_f(E) = M_f(E) - m_f(E)$$

სიდიდეს, სადაც $M_f(E)$ აღნიშნავს f-ის სუპრემუმს E სიმრავლეზე, ხოლო $m_f(E)$ კი - f-ის ინფიმუმს ამავე სიმრავლეზე. ცხადია, თუ f უწყვეტია და E წარმოადგენს სეგმენტს, მაშინ, სუპრემუმისა და ინფიმუმის ნაცვლად, შეგვიძლია მაქსიმუმი და მინიმუმი ვიგულისხმოთ.

$[a, b]$ სეგმენტის $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ დანაწილებისათვის, ზოგჯერ, უფრო მოსახერხებელია f ფუნქციის $V_f(P)$ ვარიაციული ჯამის ნაცვლად რხევათა ჯამის განხილვა:

$$\Omega_f(P) = \sum_{k=1}^{n} \omega_f([x_{k-1}, x_k]).$$

ცხადია, $V_f(P) \leq \Omega_f(P)$. არსებითია ის გარემოება, რომ $\Omega_f(P)$ ჯამი, თავის მხრივ, ზემოდან ფასდება გარკვეული ვარიაციული ჯამით. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. ადვილი დასანახია, რომ ყოველი $k \in \overline{1, n}$-სათვის შეიძლება ისე შევარჩიოთ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტის τ_k და t_k წერტილები, რომ სრულდებოდეს პირობა

$$\omega_f([x_{k-1}, x_k]) < |f(t_k) - f(\tau_k)| + \frac{\varepsilon}{n}.$$

P^*-ით აღვნიშნოთ $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილება, რომელიც შედგენილია P დანაწილების შევსებით τ_k და t_k $(k \in \overline{1, n})$ წერტილების მეშვეობით. მაშინ მარტივად დავრწმუნდებით, რომ $\Omega_f(P) \leq V_f(P^*) + \varepsilon$. ამრიგად, შესრულებულია შეფასებები:

$$V_f(P) \leq \Omega_f(P) \leq V_f(P^*) + \varepsilon. \tag{7}$$

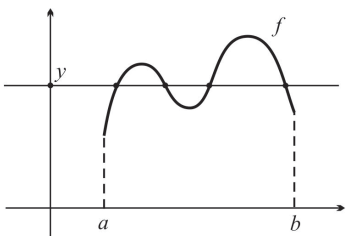
(7) შეფასებისა და თეორემა 13.1.4-ის საფუძველზე ვღებულობთ შემდეგ დებულებას.

თეორემა 13.1.7. ნებისმიერი f ფუნქციისათვის, $V_f([a,b]) = \sup_P \Omega_f(P)$**; ხოლო თუ f უწყვეტია, მაშინ** $V_f([a,b]) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \Omega_f(P)$.

შენიშვნა 13.1.2. თეორემა 13.1.6 და თეორემა 13.1.7-ის მეორე ნაწილი არ არიან სამართლიანი ნებისმიერი ფუნქციებისათვის. ამაში გვარწმუნებს $[-1,1]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქციის მაგალითი: $f(0) = 1$ და $f(x) = 0$, როცა $x \neq 0$.

§ 2. შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქციების დახასიათება ბანახის ინდიკატრისის მეშვეობით

ვთქვათ, f უწყვეტი ფუნქციაა. ყოველ $y \in \mathbb{R}$ რიცხვს შევუსაბამოთ $N_f(y)$ რიცხვი, რომელიც გამოსახავს $f(x) = y$ განტოლების ამონახსნთა რაოდენობას. თუ აღნიშნულ განტოლებას უამრავი ამონახსნი აქვს, მაშინ მიიჩნევა, რომ $N_f(y) = \infty$. ასეთი წესით განსაზღვრულ N_f ფუნქციას f ფუნქციის **ბანახის ინდიკატრისს** უწოდებენ (ნახ. 13.1).



ნახ. 13.1.

როგორც ქვემოთ მოცემული შედეგებიდან დავრწმუნდებით, ბანახის ინდიკატრისის მეშვეობით საინტერესოდ აღიწერება უწყვეტ ფუნქციათა ვარიაციული თვისებები.

თეორემა 13.2.1. ყოველი უწყვეტი f ფუნქციისათვის ბანახის N_f ინდიკატრისი ზომადია და

$$V_f([a,b]) = \int_{\mathbb{R}} N_f.$$

ვთქვათ, Π არის $[a,b]$ მონაკვეთის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ქვესიმრავლეთა რაიმე არაცარიელი კლასი. უწყვეტი f ფუნქციისათვის $N_{f,\Pi}$-ით აღვნიშნოთ ფუნქცია, რომელიც ყოველ $y \in \mathbb{R}$ რიცხვს შეუსაბამებს რაოდენობას ყველა იმ $E \in \Pi$ სიმრავლისა, რომელშიც $f(x) = y$ განტოლებას აქვს ამონახსნი. თუ Π-ს როლში ავიღებთ $[a,b]$-ს ყველა ერთელემენტიანი $\{x\}$ სიმრავლის კლასს, მაშინ ცხადია, რომ $N_{f,\Pi}$ დაემთხვევა ბანახის N_f ინდიკატრისს.

როცა Π კლასი ერთი E სიმრავლისაგან შედგება, $N_{f,\{E\}}$-ის ნაცვლად სიმარტივისათვის დავწეროთ $N_{f,E}$.

როცა Π არის მცირე სიგრძის მონაკვეთების კლასი, რომელიც ქმნის $[a,b]$-ს დაყოფას, მაშინ $N_{f,\Pi}$ ფუნქცია მარტივი სტრუქტურისაა და ამასთან, ახლოს დგას N_f ბანახის ინდიკატრისთან. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ასეთი აპროქსიმაციის არსებობა არის ძირითადი არგუმენტი თეორემა 13.2.1-ის დამტკიცებისას.

ლემა 13.2.1. ვთქვათ, f უწყვეტი ფუნქციაა. თუ $I \subset [a,b]$ არის რაიმე გადაუგვარებელი მონაკვეთი, მაშინ $N_{f,I}$ ფუნქცია ზომადია და

$$\int_{\mathbb{R}} N_{f,I} = \omega_f(I).$$

დამტკიცება. ლემის დასკვნა გამომდინარეობს შემდეგი ორი წინადადებიდან:

1) $N_{f,I}$ ემთხვევა $f(I)$ სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას;

2) $f(I)$ სიმრავლე წარმოადგენს $m_f(I)$ და $M_f(I)$ ბოლოების მქონე მონაკვეთს.

1) გამომდინარეობს $N_{f,I}$ ფუნქციის განსაზღვრებიდან, ხოლო 2) არის f ფუნქციის უწყვეტობის შედეგი.

ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 13.2.2. ვთქვათ, f უწყვეტი ფუნქციაა, $P = (x_0, x_1 \dots, x_n)$ არის $[a,b]$ მონაკვეთის დანაწილება, ხოლო Π არის $[x_0,x_1], (x_1,x_2], \dots, (x_{n-1},x_n]$ მონაკვეთების კლასი. მაშინ $N_{f,\Pi}$ ფუნქცია ზომადია და

$$\int_{\mathbb{R}} N_{f,\Pi} = \Omega_f(P).$$

დამტკიცება. დასამტკიცებელი წინადადებები გამომდინარეობს ლემა 13.2.1-დან შემდეგი ორი მარტივად შესამოწმებელი ფაქტის გათვალისწინებით:

1) $N_{f,\Pi} = N_{f,[x_0,x_1]} + N_{f,(x_1,x_2]} + \dots + N_{f,(x_{n-1},x_n]}$;

2) უწყვეტი ფუნქციის სუპრემუმი (ინფიმუმი) ერთი და იგივეა $[c,d]$ და $(c,d]$ სახის მონაკვეთებზე. □

ყოველი n-სთვის Π_n იყოს $[a,b]$ სეგმენტის 2^n ცალ ტოლი სიგრძის ნაწილად დაყოფით მიღებული კლასი:

$$\Pi_n = \{I_{n,1}, \ldots, I_{n,2^n}\},$$

სადაც $I_{n,1} = \left[a, a+\frac{b-a}{2^n}\right]$ და $I_{n,k} = \left(a+(k-1)\frac{b-a}{2^n}, a+k\frac{b-a}{2^n}\right]$, $k \in \overline{2, 2^n}$.

ლემა 13.2.3. ვთქვათ, f უწყვეტი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი $y \in \mathbb{R}$ წერტილისათვის,

$$N_{f,\Pi_1}(y) \leq N_{f,\Pi_2}(y) \leq \ldots \quad \textbf{და} \quad N_f(y) = \lim_{n\to\infty} N_{f,\Pi_n}(y).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$. თუ $f(x) = y$ განტოლებას აქვს ამონახსნი $I \in \Pi_n$ მონაკვეთში, მაშინ ამონახსნი ექნება I-ს ორ ნაწილად დაყოფით მიღებულ ერთ-ერთ მონაკვეთში მაინც. შედეგად, Π_{n+1}-ში იმ მონაკვეთების რიცხვი, რომლებშიც ამოხსნადია $f(x) = y$ განტოლება, არანაკლებია $N_{f,\Pi_n}(y)$ რიცხვზე. ამრიგად, $N_{f,\Pi_n}(y) \leq N_{f,\Pi_{n+1}}(y)$. ამით $(N_{f,\Pi_n}(y))$ მიმდევრობის ზრდადობა დადგენილია.

ვთქვათ, $m \leq N_f(y)$ რაიმე ნატურალური რიცხვია. მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ $f(x) = y$ განტოლების m ცალი ამონახსნი: $x_1, \ldots, x_m$. ვიგულისხმოთ, რომ $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. n შევარჩიოთ იმდენად დიდი, რომ სრულდებოდეს პირობა

$$\frac{b-a}{2^n} < \min_{1\leq k\leq m}(x_k - x_{k-1}).$$

ამ პირობის ძალით $x_1, \ldots, x_m$ ფესვები გადანაწილდებიან Π_n კლასის m ცალ განსხვავებულ მონაკვეთში. შედეგად, სამართლიანი იქნება შეფასება: $N_{f,\Pi_n}(y) \geq m$.

ამრიგად, ნებისმიერი $m \leq N_f(y)$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n, რომ $N_{f,\Pi_n}(y) \geq m$, საიდანაც $(N_{f,\Pi_k}(y))$ მიმდევრობის ზრდადობის გათვალისწინებით, ვასკვნით $N_f(y) = \lim_{k\to\infty} N_{f,\Pi_k}(y)$ ტოლობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.2.1-ის დამტკიცება. N_f ფუნქციის ზომადობა არის 13.2.2 და 13.2.3 ლემების შედეგი. შემდეგ, ლემა 13.2.3-დან ლევის თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\int_{\mathbb{R}} N_f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} N_{f,\Pi_n}.$$

საიდანაც ლემა 13.2.2-ის ძალით ვღებულობთ,

$$\int_{\mathbb{R}} N_f = \lim_{n\to\infty} \Omega_f(P_n),$$

სადაც P_n არის $[a,b]$ სეგმენტის ის დანაწილება, რომელიც მას ჰყოფს 2^n ცალ ტოლი სიგრძის მონაკვეთად. აქედან, თეორემა 13.1.7-ის გათვალისწინებით, ვასკვნით $\int_{\mathbb{R}} N_f = V_f([a,b])$ ტოლობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.2.1-დან მიიღება შემდეგი ორი საინტერესო შედეგი.

თეორემა 13.2.2. უწყვეტი f ფუნქცია არის შემოსაზღვრული ვარიაციის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ბანახის N_f ინდიკატრისი ჯამებადია.

თეორემა 13.2.3. თუ f შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ ყველა იმ $y \in \mathbb{R}$ წერტილის სიმრავლე, რომლისთვისაც $f(x) = y$ განტოლებას აქვს უსასრულო რაოდენობის ამონახსნი, არის ნული ზომის.

§ 3. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების დახასიათება (N) თვისების ტერმინებში

შემდეგი განსაზღვრება ეკუთვნის ნ. ლუზინს: ამბობენ, რომ f ფუნქციას აქვს (N) **თვისება**, თუ f-ის მოქმედებისას ნებისმიერი ნული ზომის E სიმრავლის $f(E)$ ანასახი აგრეთვე ნული ზომის სიმრავლეა.

თეორემა 13.3.1. ყოველ აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას აქვს (N) თვისება.

ვიდრე თეორემის დამტკიცებაზე გადავიდოდეთ, ორი საყურადღებო რამ შევნიშნოთ:

- **აბსოლუტურად უწყვეტობის განსაზღვრება მიიღებს ეკვივალენტურ ფორმას, თუ მასში, ნაზრდების $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)|$ ჯამის ნაცვლად, განვიხილავთ რხევათა $\sum_{k=1}^{n} \omega_f([a_k, b_k])$ ჯამს.** ამის შესამოწმებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ რხევათა ჯამი ტოლია შემცირებულ ინტერვალებზე აღებული ნაზრდების ჯამის. სახელდობრ,
$$\sum_{k=1}^{n} \omega_f([a_k, b_k]) = \sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|,$$
სადაც α_k და β_k არიან $[a_k, b_k]$ სეგმენტის ის წერტილები, რომლებშიც f ფუნქცია შესაბამისად აღწევს მინიმუმსა და მაქსიმუმს;
- **აბსოლუტურად უწყვეტობის განსაზღვრების ორივე ვარიანტში, შეიძლება, წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი (a_k, b_k) ინტერვალების სასრული კლასის ნაცვლად, განვიხილოთ არაუმეტეს თვლადი კლასი.** ეს წინადადება მოწმდება უშუალოდ.

თეორემა 13.1.1-ის დამტკიცება. ვთქვათ, f არის აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია და E ნული ზომის სიმრავლეა. ვაჩვენოთ, რომ $|f(E)| = 0$. სასრული რაოდენობის წერტილები გავლენას არ ახდენენ სიმრავლის ზომაზე, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $E \subset (a, b)$.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. $\delta > 0$ იყოს რიცხვი, რომლისთვისაც შესრულებულია პირობა:

$$\sum_k \omega_f([a_k, b_k]) < \varepsilon, \tag{1}$$

ყოველთვის, როცა $\{(a_k, b_k)\}$ არის $[a, b]$ სეგმენტის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვეინტერვალების არაუმეტეს თვლადი კლასი, რომლისთვისაც $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$.

E-ს ნულზომიანობისა და $E \subset (a, b)$ ჩართვის გამო მოიძებნება ღია G სიმრავლე თვისებებით: $E \subset G \subset (a, b)$ და $|G| < \delta$. $\{(a_k, b_k)\}$ იყოს G-ს შემადგენელი ინტერვალების კლასი. (a_k, b_k) ინტერვალები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და $\sum_k (b_k - a_k) = |G| < \delta$.

გვაქვს, რომ

$$f(E) \subset f(G) = \bigcup_k f((a_k, b_k)) \subset \bigcup_k f([a_k, b_k]).$$

აქედან გამომდინარე,

$$|f(E)|_* \le \sum_k |f([a_k, b_k])|_*.$$

f-ის უწყვეტობის გამო, $f([a_k, b_k]) = [m_f([a_k, b_k]), M_f([a_k, b_k])]$, საიდანაც ვღებულობთ ტოლობას:

$$|f([a_k, b_k])| = M_f([a_k, b_k]) - m_f([a_k, b_k]) = \omega_f([a_k, b_k]).$$

ამრიგად,

$$|f(E)|_* \le \sum_k \omega_f([a_k, b_k]).$$

აქედან (1)-ის ძალით ვღებულობთ, რომ $|f(E)|_* < \varepsilon$. შედეგად, თუ გავითვალისწინებთ $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობას, დავასკვნით $f(E)$ სიმრავლის ნულზომიანობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

როგორც ვიცით, აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია არის უწყვეტი და შემოსაზღვრული ვარიაციის, ხოლო თეორემა 13.3.1-ის ძალით მას აქვს (N) თვისებაც. ქვემოთ მოცემული თეორემა გვიჩვენებს, რომ აღნიშნული სამი პირობა საკმარისიცაა ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობისათვის.

თეორემა 13.3.2. ვთქვათ, f არის შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქცია. იმისათვის, რომ f იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი, აუცილებელი და საკმარისია, მას ჰქონდეს (N) თვისება.

თეორემა 13.3.2 ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად დამტკიცებული იყო ს. ბანახისა და მ. ზარეცკის მიერ.

თეორემა 13.3.2 მტკიცდება იმავე სქემით, რომელიც უკვე გამოვიყენეთ 12.9 პარაგრაფში.

ლემა 13.3.1. თუ ზომადი f ფუნქცია თითქმის ყველგან წარმოებადია, მაშინ f' ფუნქცია ზომადია.

დამტკიცება. გავაგრძელოთ f ფუნქცია $[a, b+1]$ სეგმენტზე ისე, რომ $(b, b+1]$ მონაკვეთის წერტილებში მისი მნიშვნელობები $f(b)$ რიცხვის ტოლი იყოს. ახლა f შეიძლება განვიხილოთ, როგორც $[a, b+1]$ სეგმენტზე მოცემული ზომადი ფუნქცია.

ყოველი n-სთვის Δ_n იყოს $[a, b]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$\Delta_n(x) = \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n} \qquad (x \in [a, b]).$$

ცვლადის გარდაქმნა, რომელიც ახდენს არგუმენტის ძვრას, ინარჩუნებს ფუნქციის ზომადობას. რის გამოც, ყოველი n-სთვის $f(\cdot + 1/n)$ იქნება $[a, b]$-ზე მოცემული ზომადი ფუნქცია. შედეგად, ვასკვნით Δ_n ფუნქციების ზომადობას. ახლა შევნიშნოთ, რომ $[a, b)$ მონაკვეთის ყოველ x წერტილში, რომელშიც f ფუნქცია წარმოებადია, $(\Delta_n(x))$ მიმდევრობის ზღვარი იქნება $f'(x)$ რიცხვი. ამრიგად, ზომად ფუნქციათა (Δ_n) მიმდევრობა $[a, b]$ მონაკვეთის თითქმის ყოველ წერტილში კრებადია f' ფუნქციისაკენ, საიდანაც, ლებეგის ზომის სისრულისა და თეორემა 7.7.1-ის საფუძველზე, დავასკვნით f'-ის ზომადობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 13.3.1. შესაძლებელია ლემა 13.3.1-ზე ძლიერი დებულების დამტკიცება: ნებისმიერი ზომადი f ფუნქციისათვის ზომადია ყველა იმ წერტილის E სიმრავლე, რომელშიც f წარმოებადია და ზომადია აგრეთვე f', როგორც E-ზე განსაზღვრული ფუნქცია.

ლემა 13.3.2. ვთქვათ, f ზომადი და თითქმის ყველგან წარმოებადი ფუნქციაა. თუ f წარმოებადია ზომადი $E \subset [a, b]$ სიმრავლის ყოველ წერტილში, მაშინ

$$|f(E)|_* \leq \int_E |f'|.$$

ჩვენ არ მოგვყავს ლემა 13.3.2-ის დამტკიცება, რადგანაც ის ზუსტად იმეორებს 12.9.3 ლემის დამტკიცებას, იმ განსხვავებით, რომ 12.9.2 ლემის ნაცვლად გამოიყენება ზემოთ მოცემული ლემა 13.3.1.

თეორემა 13.3.2-ის დამტკიცება. თეორემა 13.3.1-ის გათვალისწინებით, დასამტკიცებელი გვაქვს მხოლოდ საკმარისობის ნაწილი.

ვთქვათ, f შემოსაზღვრული ვარიაციის უწყვეტი ფუნქციაა, რომელსაც აქვს (N) თვისება. თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $c, d \in [a,b]$, $c < d$, წერტილებისათვის სამართლიანი იქნება შეფასება:

$$|f(d) - f(c)| \leq \int_{(c,d)} |f'|. \tag{2}$$

E-თი აღვნიშნოთ $[c,d]$ სეგმენტის ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც f არის წარმოებადი, ხოლო H იყოს $[c,d] \setminus E$ სიმრავლე. შემოსაზღვრული ვარიაციის თვისება უზრუნველყოფს თითქმის ყველგან წარმოებადობას, რის გამოც H ნული ზომის სიმრავლე იქნება. ამასთანავე, (N) თვისების გათვალისწინებით, გვექნება, რომ

$$|f(H)| = 0. \tag{3}$$

f ფუნქციის უწყვეტობის გამო, $f(c)$ და $f(d)$ ბოლოების მქონე სეგმენტი ჩართულია $f([c,d])$ სეგმენტში. შედეგად, ლემა 13.3.2-ის და (3)-ის ძალით დავწერთ,

$$|f(d) - f(c)| \leq |f([c,d])| \leq |f(E)|_* + |f(H)|_* \leq$$
$$\leq \int_E |f'| \leq \int_{[c,d]} |f'| = \int_{(c,d)} |f'|.$$

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი. გამოვიყენოთ $|f'|$ ფუნქციისათვის ინტეგრალის, როგორც სიმრავლის ფუნქციის, აბსოლუტურად უწყვეტობის თვისება და ვიპოვოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$\int_A |f'| < \varepsilon, \text{ როცა } |A| < \delta. \tag{4}$$

განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვეინტერვალების ნებისმიერი სასრული $\{(a_1,b_1), \dots, (a_n,b_n)\}$ კლასი, რომლისთვისაც $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$. მაშინ (2) და (4) შეფასებების ძალით, გვექნება,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{(a_k,b_k)} |f'| = \int_{\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)} |f'| < \varepsilon.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

როგორც შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, (N) თვისების მეშვეობით ხერხდება იმ უწყვეტი ფუნქციების დახასიათება, რომლებიც ინარჩუნებენ სიმრავლის ზომადობის თვისებას.

თეორემა 13.3.3. ვთქვათ, f უწყვეტი ფუნქციაა. იმისათვის, რომ ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლის $f(E)$ ანასახი იყოს ზომადი, აუცილებელი და საკმარისია, f ფუნქციას ჰქონდეს (N) თვისება.

ლემა 13.3.3. თუ f უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ ნებისმიერი ჩაკეტილი $E \subset [a, b]$ სიმრავლის $f(E)$ ანასახი აგრეთვე ჩაკეტილი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, y არის $f(E)$ სიმრავლის ზღვარითი წერტილი. მაშინ მოიძებნება $f(E)$ სიმრავლის წერტილთა (y_n) მიმდევრობა, რომელიც y წერტილისკენაა კრებადი. ყოველი n-სთვის x_n იყოს E სიმრავლის წერტილი, რომლისთვისაც $y_n = f(x_n)$. მაშინ (x_n) იქნება შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი (ე.ი. კომპაქტური) E სიმრავლის წერტილთა მიმდევრობა. შედეგად, იარსებებს მისი (x_{n_k}) ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადი იქნება რაიმე $x \in E$ წერტილისაკენ. აქედან გამომდინარე, f-ის უწყვეტობის გათვალისწინებით, გვექნება, რომ $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x)$ $(k \to \infty)$. მეორე მხრივ, (y_{n_k}) როგორც (y_n)-ის ქვემიმდევრობა, კრებადია y წერტილისაკენ. ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $y = f(x)$. ამრიგად, ვაჩვენეთ, რომ $y \in E$. ამით ლემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 13.3.2. ლემა 13.3.3 კონკრეტულ სიტუაციაში გამოხატავს მეტრიკულ სივრცეებს შორის მოქმედი უწყვეტი ასახვის ზოგად თვისებას: კომპაქტური სიმრავლის უწყვეტი ანასახი აგრეთვე კომპაქტური სიმრავლეა. ამ დებულების დამტკიცება ლემა 13.3.3-ის დამტკიცების ანალოგიურია.

ლემა 13.3.3-დან უშუალოდ მიიღება შემდეგი დებულება.

ლემა 13.3.4. თუ f უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ ნებისმიერი F_σ ტიპის $E \subset [a, b]$ სიმრავლის $f(E)$ ანასახი აგრეთვე F_σ ტიპის სიმრავლეა.

ლემა 13.3.5. ნებისმიერი ზომადი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე წარმოდგება სახით: $E = A \cup B$, სადაც A არის F_σ ტიპის სიმრავლე, ხოლო B არის ნული ზომის სიმრავლე.

დამტკიცება. ზომადი სიმრავლე შესაძლებელია შიგნიდან მივაახლოვოთ ჩაკეტილი სიმრავლეების მეშვეობით (იხ. თეორემა 6.2.2), რის გამოც, ყოველი n-სთვის იარსებებს ჩაკეტილი $F_n \subset E$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $|F_n| > |E| - 1/n$. A-ს როლში ავიღოთ F_n $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეთა გაერთიანება, ხოლო B მივიჩნიოთ $E \setminus A$ სხვაობის ტოლად. F_n სიმრავლეთა შერჩევის გათვალისწინებით, ადვილი დასანახია, რომ A და B აკმაყოფილებენ მოთხოვნილ პირობებს. ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 13.3.3-ის დამტკიცება. ვთქვათ, f უწყვეტი ფუნქციაა, რომელსაც აქვს (N) თვისება. განვიხილოთ ნებისმიერი ზომადი $E \subset [a, b]$ სიმრავლე. ლემა 13.3.5-ის საფუძველზე, E წარმოვადგინოთ სახით: $E = A \cup B$, სადაც A არის F_σ ტიპის სიმრავლე, ხოლო B არის ნული ზომის სიმრავლე. ლემა 13.3.4-ის ძალით, $f(A)$ იქნება F_σ ტიპის, ხოლო (N) თვისების საფუძველზე, $f(B)$ იქნება ნული ზომის სიმრავლე. შედეგად, $f(E) = f(A) \cup f(B)$ ტოლობის გათვალისწინებით, ვასკვნით $f(E)$-ს ზომადობას.

გადავიდეთ აუცილებლობის ნაწილზე. ვთქვათ, f ფუნქციას არა აქვს (N)-თვისება. ვაჩვენოთ, რომ ასეთ შემთხვევაში მოიძებნება ზომადი სიმრავლე, რომლის ანასახი არაზომადია. დაშვების ძალით მოიძებნება ნული ზომის $E \subset [a,b]$ სიმრავლე, რომლის $f(E)$ ანასახის გარე ზომა ნულზე მეტია. თუ $f(E)$ არაა ზომადი, მაშინ სწორედ E სიმრავლის შემთხვევაში იქნება დარღვეული ანასახის ზომადობის პირობა. თუ $f(E)$ ზომადია, მაშინ ვისარგებლოთ იმით, რომ ყოველი დადებითი ზომის სიმრავლე შეიცავს არაზომად ქვესიმრავლეს (იხ. თეორემა 6.4.2) და განვიხილოთ $f(E)$-ს რაიმე არაზომადი M ქვესიმრავლე. მაშინ $f^{-1}(M) \subset E$ ჩართვის გამო, $H = f^{-1}(M)$ სიმრავლე იქნება ნული ზომის. H-ის ანასახი კი არის არაზომადი M სიმრავლე. ამრიგად, H სიმრავლის შემთხვევაში დაირღვა ანასახის ზომადობის პირობა. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

13.3.1 და 13.3.3 თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 13.3.4. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია ნებისმიერ ზომად სიმრავლეს კვლავ ზომად სიმრავლეში ასახავს.

შემდეგი თეორემა იძლევა მარტივ წესს ანასახი $f(E)$ სიმრავლის ზომის გამოსათვლელად, იმ შემთხვევაში, როცა აბსოლუტურად უწყვეტი f ფუნქცია არის მკაცრად ზრდადი.

თეორემა 13.3.5. ვთქვათ, f არის მკაცრად ზრდადი და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია. მაშინ ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლისათვის $f(E)$ ანასახი ზომადია და

$$|f(E)| = \int_E f'. \tag{5}$$

დამტკიცება. თუ E სიმრავლე არის რაიმე $[\alpha,\beta]$ სეგმენტი, მაშინ $f(E) = [f(\alpha), f(\beta)]$ და $|f(E)| = f(\beta) - f(\alpha) = \int_{[\alpha,\beta]} f'$. (5) ტოლობა ანალოგიურად მტკიცდება $E = (\alpha,\beta)$ შემთხვევაშიც. აქედან მარტივად მიიღება (5)-ის სამართლიანობა ღია $E \subset (a,b)$ სიმრავლეებისათვის. შემდეგ, დამატებით სიმრავლეზე გადასვლით დავრწმუნდებით, რომ (5) სრულდება ნებისმიერი ჩაკეტილი $E \subset [a,b]$ სიმრავლისთვისაც. საბოლოოდ განვიხილოთ ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლის შემთხვევა. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $E \subset (a,b)$. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი და $f(E)$ სიმრავლისათვის ვიპოვოთ ჩაკეტილი M_ε და ღია M^ε სიმრავლეები თვისებებით:

$$M_\varepsilon \subset f(E) \subset M^\varepsilon,$$

$$|f(E)| - \varepsilon < |M_\varepsilon| \le |f(E)| \le |M^\varepsilon| < |f(E)| + \varepsilon.$$

აღვნიშნოთ $E_\varepsilon = f^{-1}(M_\varepsilon)$ და $E^\varepsilon = f^{-1}(M^\varepsilon)$. E_ε სიმრავლე ჩაკეტილია, ხოლო E^ε კი, არის ღია. შედეგად,

$$|M_\varepsilon| = \int_{E_\varepsilon} f', \quad |M^\varepsilon| = \int_{E^\varepsilon} f'.$$

f' ფუნქციის არაუარყოფითობის საფუძველზე გვაქვს, რომ

$$\int_{E_\varepsilon} f' \leq \int_E f' \leq \int_{E^\varepsilon} f'.$$

შედეგად,

$$|M_\varepsilon| \leq \int_E f' \leq |M^\varepsilon|.$$

საბოლოოდ, ვღებულობთ შეფასებებს:

$$|f(E)| - \varepsilon \leq \int_E f' \leq |f(E)| + \varepsilon.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობას, დავასკვნით (5) ტოლობის სამართლიანობას. თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 13.3.3. დამტკიცებაში მცირედი ცვლილებებით შესაძლებელია თეორემა 13.3.5-ში მკაცრად ზრდადობის მოთხოვნა შევასუსტოთ და შევცვალოთ ზრდადობის მოთხოვნით.

ამოცანები

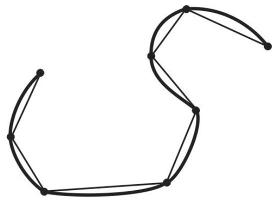
1. ვთქვათ, f ფუნქცია წარმოებადია ყველგან, გარდა წერტილთა არაუმეტეს თვლადი სიმრავლისა და f' ჯამებადი ფუნქციაა. დაამტკიცეთ, რომ f აბსოლუტურად უწყვეტია.
2. ვთქვათ, f ყველგან წარმოებადი ფუნქციაა. დაამტკიცეთ, რომ f-ს აქვს (N)-თვისება.
3. ვთქვათ, f ზრდადი უწყვეტი ფუნქციაა და $E = \{x : f'(x) = \infty\}$. აჩვენეთ, რომ f აბსოლუტურად უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(E)$ ნული ზომისაა.

§ 4. წრფევადი წირები

წირი $\mathbb{R}^n$ **სივრცეში** (მოკლედ, **წირი**) ეწოდება ნებისმიერ უწყვეტ $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ვექტორ-ფუნქციას, სადაც $[a,b]$ არის წრფის რაიმე გადაუგვარებელი სეგმენტი. $\gamma([a,b]) = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ სიმრავლეს γ **წირის კვალს** უწოდებენ. ზოგჯერ, როცა ეს გაურკვევლობას არ იწვევს, წირს მისსავე კვალთან აიგივებენ.

ვთქვათ, γ რაიმე წირია. $[a,b]$ სეგმენტის $P = (t_0, \ldots, t_m)$ დანაწილებისათვის γ_P-თი აღვნიშნოთ ტეხილი, რომლის ერთმანეთის მომდევნო

წვეროებია $\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_m)$ წერტილები. γ_P შეიძლება განვიხილოთ, როგორც γ წირში ჩახაზული ტეხილი (ნახ. 13.2).



ნახ. 13.2.

γ_P ტეხილის სიგრძედ, ბუნებრივია, მიიჩნევა მისი შემადგენელი მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამი:

$$l_{\gamma_P} \equiv \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|. \tag{1}$$

აქ $\|\cdot\|$ აღნიშნავს ევკლიდურ ნორმას $\mathbb{R}^n$-ში, ე.ი. $\|x\| = (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{1/2}$.

შემდეგი დებულება, კერძოდ, გვიჩვენებს, რომ ნებისმიერი წირისათვის არსებობს მასში ჩახაზული ტეხილების სიგრძეთა ზღვარი, როცა P დანაწილების პარამეტრი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

თეორემა 13.4.1. ნებისმიერი γ წირისათვის არსებობს $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} l_{\gamma_P}$ ზღვარი და მისი მნიშვნელობა γ-ში ჩახაზული ტეხილების სიგრძეთა სუპრემუმის ტოლია, ე.ი.

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} l_{\gamma_P} = \sup_P l_{\gamma_P}.$$

თეორემის დამტკიცებისთვის ჩვენ გამოვიყენებთ განსახილავი სიდიდეების კავშირს ვექტორ-ფუნქციის ვარიაციულ თვისებებთან.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ვექტორ-ფუნქციის ვარიაციული ჯამი - $V_f(P)$, სრული ვარიაცია - $V_f([a, b])$ და შემოსაზღვრული ვარიაციის თვისება განისაზღვრებიან სკალარული ფუნქციის შემთხვევის მსგავსად, ოღონდ ყველგან, განსაზღვრებებში, $|f(x_k) - f(x_{k-1})|$ მოდული უნდა შეიცვალოს $||f(x_k) - f(x_{k-1})||$ ნორმით. მაშინ, (1) ტოლობის გათვალისწინებით, ცხადია, რომ γ_P ტეხილის სიგრძე უდრის $V_\gamma(P)$ ვარიაციულ ჯამს, ხოლო $\sup\limits_P l_{\gamma_P}$ სუპრემუმი კი არის γ ვექტორ-ფუნქციის სრული $V_\gamma([a, b])$ ვარიაციის ტოლი. ამრიგად, თეორემა 13.4.1 ამტკიცებს ტოლობას:

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} V_\gamma(P) = V_\gamma([a, b]),$$

ე.ი. იმას, რომ უწყვეტი ვექტორ-ფუნქციისათვის ვარიაციული ჯამები მიის-წრაფვიან სრული ვარიაციისაკენ, როცა დანაწილების პარამეტრი ნულისაკენ მიისწრაფვის. ასეთი დებულება უკვე დავადგინეთ სკალარული ფუნქციებისათვის (იხ. თეორემა 13.1.6). ვექტორული შემთხვევისათვის კი დამტკიცება სავსებით ანალოგიურია, ოღონდ იმ განსხვავებით, რომ გამოსახულებები მოდულის ნაცვლად უნდა მოვათავსოთ ნორმის ნიშნის ქვეშ.

თეორემა 13.4.1 საშუალებას გვაძლევს, განვსაზღვროთ წირის სიგრძე. სახელდობრ, γ **წირის სიგრძე** აღინიშნება l_γ-თი და ეწოდება $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} l_{\gamma_P}$ ზღვარს.

ცხადია, რომ წირის სიგრძე ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა γ მუდმივი ფუნქციაა.

γ წირს ეწოდება **წრფევადი**, თუ მისი სიგრძე სასრული რიცხვია.

f ვექტორ-ფუნქციისათვის $f_1, \ldots, f_n$-ით აღვნიშნოთ მისი საკოორდინატო ფუნქციები, ე.ი. $f_k(t)$ ტოლია $f(t)$ ვექტორის k-ური კოორდინატის.

შემდეგი თეორემა, რომელიც ადგენს წირის წრფევადობის კრიტერიუმს, ეკუთვნის კ. ჟორდანს.

თეორემა 13.4.2. γ **წირი არის წრფევადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი საკოორდინატო** $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ **ფუნქციები არიან შემოსაზღვრული ვარიაციის.**

დამტკიცება. გავითვალისწინოთ, რომ ყოველი $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ვექტორისათვის,

$$\max_{1\le k\le n} |x_k| \le ||x|| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

შედეგად, $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P = (t_0, \ldots, t_m)$ დანაწილებისათვის სამართლიანი იქნება შეფასებები:

$$\sum_{k=1}^{m} |\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \qquad (i \in \overline{1,n});$$

$$\sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \le \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})|.$$

საიდანაც, თეორემა 13.4.1-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ

$$V_{\gamma_i}([a,b]) \le l_\gamma \quad (i \in \overline{1,n});$$

$$l_\gamma \le \sum_{i=1}^{n} V_{\gamma_i}([a,b]).$$

მიღებული შეფასებები გვარწმუნებენ თეორემის სამართლიანობაში. □

შენიშვნა 13.4.1. თეორემა 13.4.2-ს შეიძლება მივცეთ შემდეგი ეკვივალენტური ფორმულირება: ვექტორ-ფუნქცია არის შემოსაზღვრული ვარიაციის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი საკოორდინატო ფუნქციები არიან შემოსაზღვრული ვარიაციის.

შენიშვნა 13.4.2. თეორემა 13.4.2-ის დამტკიცებისას დადგინდა შემდეგი კავშირი წირის სიგრძესა და საკოორდინატო ფუნქციების სრულ ვარიაციებს შორის:

$$\max_{1 \le i \le n} V_{\gamma_i}([a,b]) \le l_\gamma \le \sum_{i=1}^{n} V_{\gamma_i}([a,b]).$$

ვთქვათ, γ რაიმე წირია და $[c,d] \subset [a,b]$. $l_\gamma([c,d])$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც შეესაბამება $t \in [c,d]$ პარამეტრის მნიშვნელობებს, ე.ი. $l_\gamma([c,d]) = l_{\gamma|_{[c,d]}}$. შევნიშნოთ, რომ წირის სიგრძე არის რკალის ადიციური ფუნქცია, ე.ი. თუ γ რაიმე წირია და $a < c < b$, მაშინ

$$l_\gamma([a,b]) = l_\gamma([a,c]) + l_\gamma([c,b]). \tag{2}$$

მართლაც, (2) ნიშნავს γ ვექტორ-ფუნქციის ვარიაციის ადიციურობას, ანუ ტოლფასია ტოლობის:

$$V_\gamma([a,b]) = V_\gamma([a,c]) + V_\gamma([c,b]).$$

უკანასკნელი ტოლობა კი მტკიცდება ზუსტად თეორემა 12.7.2-ის მსგავსად.

თეორემა 13.4.3. თუ γ წირი უწყვეტად დიფერენცირებადია (ე.ი. $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ საკოორდინატო ფუნქციები უწყვეტად დიფერენცირებადი არიან), მაშინ γ წრფევადია და მისი სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$l_\gamma = \int_{[a,b]} \sqrt{(\gamma_1')^2 + \dots + (\gamma_n')^2}.$$

დამტკიცება. დამტკიცება ჩავატაროთ ტიპური $n = 2$ შემთხვევისათვის.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. $\delta > 0$ რიცხვი შევარჩიოთ ისე, რომ სრულდებოდეს პირობები:

$$|\gamma_1'(t) - \gamma_1'(\tau)| < \varepsilon \ \text{ და } \ |\gamma_2'(t) - \gamma_2'(\tau)| < \varepsilon, \ \text{ როცა } \ |t - \tau| < \delta; \tag{3}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\gamma_1'(\xi_k)^2 + \gamma_2'(\xi_k)^2}\,(t_k - t_{k-1}) - \int_{[a,b]} \sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2} \right| < \varepsilon, \tag{4}$$

სადაც $P = (t_0, \dots, t_m)$ არის $[a,b]$-ს ნებისმიერი დანაწილება, რომლისთვისაც $\lambda(P) < \delta$, ხოლო $\xi_1, \dots, \xi_m$ არიან ნებისმიერი წერტილები, არჩეულნი, შესაბამისად, $[t_0, t_1], \dots, [t_{m-1}, t_m]$ მონაკვეთებიდან.

ვთქვათ, $P = (t_0, \ldots, t_m)$ არის $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილება, ისეთი, რომ $\lambda(P) < \delta$. შევაფასოთ γ_P ტეხილის სიგრძის გადახრა განსახილავი ინტეგრალისაგან. ლაგრანჟის ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$l_{\gamma_P} = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{(\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1}))^2 + (\gamma_2(t_k) - \gamma_2(t_{k-1}))^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\gamma_1'(\xi_k)^2 + \gamma_2'(\eta_k)^2}\, (t_k - t_{k-1}),$$

სადაც ყოველი k-სათვის ξ_k და η_k არიან $[t_{k-1}, t_k]$ მონაკვეთის რომელიღაც წერტილები. უკანასკნელი ჯამი, საზოგადოდ, არაა ინტეგრალური ჯამი, ξ_k და η_k წერტილების შესაძლო განსხვავების გამო, თუმცა შესაძლებელია მისი გადახრის ეფექტური შეფასება ξ_k წერტილების მეშვეობით წარმოქმნილი ინტეგრალური ჯამიდან:

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\gamma_1'(\xi_k)^2 + \gamma_2'(\eta_k)^2}\, (t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\gamma_1'(\xi_k)^2 + \gamma_2'(\xi_k)^2}\, (t_k - t_{k-1}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \left| \sqrt{\gamma_1'(\xi_k)^2 + \gamma_2'(\eta_k)^2} - \sqrt{\gamma_1'(\xi_k)^2 + \gamma_2'(\xi_k)^2}\, \right| (t_k - t_{k-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} |\gamma_2'(\eta_k) - \gamma_2'(\xi_k)|\, (t_k - t_{k-1}) < \sum_{k=1}^{m} \varepsilon (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon(b-a). \qquad (5)$$

(5) შეფასების მიღებისას ჩვენ გამოვიყენეთ (3) შეფასება და კიდევ შემდეგი მარტივი უტოლობა: $|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x - y\| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$. შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი უტოლობა გამოყენებულია $x = (\gamma_1'(\xi_k),\ \gamma_2'(\eta_k))$ და $y = (\gamma_1'(\xi_k), \gamma_2'(\xi_k))$ წყვილების შემთხვევაში.

(4)-დან და (5)-დან ვღებულობთ,

$$\left| l_{\gamma_P} - \int_{[a,b]} \sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2}\, \right| < \varepsilon(b - a + 1).$$

საიდანაც ვასკვნით თეორემის სამართლიანობას. □

ვთქვათ, γ წრფევადი წირია. მაშინ, თეორემა 13.4.2-ისა და შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციების თვისებათა ძალით, ყოველი γ_i საკოორდინატო ფუნქცია თითქმის ყველგან წარმოებადია და მისი γ_i' წარმოებული ჯამებადია. აღნიშნულის გამო, ნებისმიერი წრფევადი წირისათვის აზრი აქვს

$$\int_{[a,b]} \sqrt{(\gamma_1')^2 + \cdots + (\gamma_n')^2}$$

ლებეგის ინტეგრალს. ქვემოთ მოცემული თეორემა იძლევა იმ წრფევადი წირების დახასიათებას, რომელთა სიგრძის გამოთვლა შესაძლებელია აღნიშნული ინტეგრალის მეშვეობით.

თეორემა 13.4.4. ნებისმიერი წრფევადი γ წირისათვის სამართლიანია უტოლობა:

$$\int_{[a,b]} \sqrt{(\gamma_1')^2 + \cdots + (\gamma_n')^2} \leq l_\gamma. \tag{6}$$

ამასთან, ეს უტოლობა გადაიქცევა ტოლობად მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ საკოორდინატო ფუნქციები არიან აბსოლუტურად უწყვეტი.

γ წირისათვის s_γ-თი აღვნიშნოთ $[a, b]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$s_\gamma(a) = 0 \;\text{ და }\; s_\gamma(t) = l_\gamma([a, t]), \;\text{ როცა }\; t \in (a, b].$$

ამრიგად, s_γ ფუნქცია ზომავს წირის იმ რკალის სიგრძეს, რომელიც წარმოქმნილია $[a, t]$ სეგმენტში მოთავსებული პარამეტრის მნიშვნელობებით.

თეორემა 13.4.4-ის დამტკიცება ეფუძნება s_γ ფუნქციის თვისებებს, რომლებიც მოიცემა შემდეგი დებულებით.

თეორემა 13.4.5. ნებისმიერი წრფევადი γ წირისათვის s_γ არის ზრდადი და უწყვეტი ფუნქცია, რომლის წარმოებული თითქმის ყოველ $t \in [a, b]$ წერტილში აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$s_\gamma'(t) = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \cdots + \gamma_n'(t)^2}. \tag{7}$$

დამტკიცება. წირის სიგრძის ადიციურობის თვისებიდან(იხ. (2) ტოლობა) გამომდინარე, s_γ ზრდადი ფუნქციაა. უწყვეტობის დასადგენად გამოვიყენოთ ის ფაქტი, რომ წირის სიგრძე წარმოადგენს ვექტორ-ფუნქციის სრულ ვარიაციას. ამ ინტერპრეტაციით, s_γ არის γ ვექტორ-ფუნქციის სრული ვარიაცია ცვლადი ზედა საზღვრით: $s_\gamma(t) = V_\gamma([a, t])$. ამ შენიშვნის შემდეგ, s_γ-ს უწყვეტობა მტკიცდება ზუსტად სკალარული შემთხვევის მსგავსად (იხ. თეორემა 13.1.1).

ახლა გადავიდეთ (7)-ის დამტკიცებაზე. E იყოს ყველა იმ $t \in (a, b)$ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც თითოეული $s_\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ფუნქცია წარმოებადია. ცხადია, E სრული ზომისაა.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $[c, d] \subset [a, b]$ ქვესეგმენტისათვის, პარამეტრის $t \in [c, d]$ მნიშვნელობების შესაბამისი რკალის სიგრძე მეტია ან ტოლია $\gamma(c)$ და $\gamma(d)$ წერტილების შემაერთებელი ქორდის სიგრძეზე, ე.ი. $l_\gamma([c, d]) \geq \|\gamma(d) - \gamma(c)\|$. აღნიშნულის გათვალისწინებით, ყოველი $t \in E$ წერტილისათვის და $h \in (0, b - t)$ რიცხვისათვის გვექნება,

$$s_\gamma(t + h) - s_\gamma(t) = l_\gamma([t, t + h]) \geq$$

$$\geq \|\gamma(t + h) - \gamma(t)\| = \sqrt{(\gamma_1(t + h) - \gamma_1(t))^2 + \cdots + (\gamma_n(t + h) - \gamma_n(t))^2}.$$

თუ მიღებულ უტოლობაში ორივე მხარეს გავყოფთ h-ზე და h-ს მივასწრაფებთ ნულისაკენ, დავასკვნით, რომ E სიმრავლის ყოველ წერტილში სრულდება შეფასება:

$$s'_\gamma(t) \geq \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \cdots + \gamma'_n(t)^2}.$$

H იყოს ყველა იმ $t \in E$ წერტილის სიმრავლე, რომლისთვისაც $s'_\gamma(t) > \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \cdots + \gamma'_n(t)^2}$. ვაჩვენოთ, რომ $|H| = 0$, რითაც თეორემა დამტკიცებული იქნება.

ყოველი $m \in \mathbb{N}$-სთვის შემოვიღოთ H_m სიმრავლე, რომელიც შედგება შემდეგი თვისების მქონე ყველა $t \in E$ წერტილისაგან: თუ $t \in [\alpha, \beta]$ და $0 < \beta - \alpha < \frac{1}{m}$, მაშინ

$$\frac{s_\gamma(\beta) - s_\gamma(\alpha)}{\beta - \alpha} > \sqrt{\left(\frac{\gamma_1(\beta) - \gamma_1(\alpha)}{\beta - \alpha}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\gamma_n(\beta) - \gamma_n(\alpha)}{\beta - \alpha}\right)^2 + \frac{1}{m}}.$$

უკანასკნელი უტოლობა, ეკვივალენტური ფორმით, ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$l_\gamma([\alpha, \beta]) > \|\gamma(\beta) - \gamma(\alpha)\| + \frac{\beta - \alpha}{m}.$$

x წერტილში f ფუნქციის წარმოებადობის შემთხვევაში, $f'(x)$ უდრის $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ ფარდობის ზღვარს, როცა $\alpha \to x$, $\beta \to x$ და $x \in [\alpha, \beta]$. აღნიშნულის გათვალისწინებით, ადვილი შესამოწმებელია, რომ H წარმოადგენს H_m ($m \in \mathbb{N}$) სიმრავლეების გაერთიანებას.

განვიხილოთ ნებისმიერი m და ვაჩვენოთ H_m სიმრავლის ნულზომიანობა. ცხადია, ამით თეორემა დამტკიცებული იქნება. ვთქვათ, ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. $[a, b]$ სეგმენტის $P = (t_0, \dots, t_r)$ დანაწილება შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ სრულდებოდეს პირობები: $\lambda(P) < 1/m$ და $l_\gamma < l_{\gamma_P} + \varepsilon$. Ω იყოს ყველა იმ $k \in \overline{1, r}$ ინდექსის სიმრავლე, რომლისთვისაც $[t_{k-1}, t_k]$ მონაკვეთი შეიცავს H_m სიმრავლის ერთს მაინც წერტილს. ცხადია, $[t_{k-1}, t_k]$ ($k \in \Omega$) მონაკვეთები დაფარავენ H_m სიმრავლეს. ამასთან, H_m სიმრავლის განსაზღვრისა და $\lambda(P) < 1/m$ პირობის გამო, გვექნება,

$$l_\gamma([t_{k-1}, t_k]) > \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| + \frac{t_k - t_{k-1}}{m}.$$

შედეგად, დავწერთ,

$$l_\gamma = \sum_{k=1}^{r} l_\gamma([t_{k-1}, t_k]) = \sum_{k \in \Omega} l_\gamma([t_{k-1}, t_k]) + \sum_{k \notin \Omega} l_\gamma([t_{k-1}, t_k]) \geq$$

$$\geq \sum_{k \in \Omega} \left(\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| + \frac{t_k - t_{k-1}}{m}\right) + \sum_{k \notin \Omega} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| + \sum_{k\in\Omega} \frac{t_k - t_{k-1}}{m} \geq l_{\gamma_P} + \frac{|H_m|_*}{m}.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $l_\gamma < l_{\gamma_P} + \varepsilon$, მივიღებთ შეფასებას:

$$|H_m|_* \leq m\varepsilon.$$

საიდანაც, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის ძალით, დავასკვნით H_m სიმრავლის ნულზომიანობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 13.4.4-ის დამტკიცება უკვე დაიყვანება ცნობილ დებულებებზე. სახელდობრ, უნდა გავითვალისწინოთ თეორემები 12.6.2 და 12.8.5 (იხ. აგრეთვე შენიშვნა 12.6.4) და ზემოთ დადგენილი თეორემა 13.4.5.

აქვე მოვიყვანოთ თეორემა 13.4.4-ის ერთი საინტერესო გამოყენება, დაკავშირებული ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სრული ვარიაციის გამოთვლასთან.

თეორემა 13.4.6. ვთქვათ, $f \in L([a,b])$ **და** $F(x) = \int_{[a,x]} f \ (x \in [a,b])$**. მაშინ**

$$V_F([a,b]) = \int_{[a,b]} |f|.$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ F აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა და $F'(x) = f(x)$ თითქმის ყველგან. აღნიშნულის გათვალისწინებით, თეორემა 13.4.4-ის გამოყენება ერთგანზომილებიანი $\gamma = F$ წირისათვის გვაძლევს, რომ

$$V_F([a,b]) = l_F = \int_{[a,b]} |F'| = \int_{[a,b]} |f|.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

წრფევადი γ წირისათვის განვიხილოთ შემდეგი წესით განსაზღვრული $\overline{\gamma} : [0, l_\gamma] \to \mathbb{R}^n$ ვექტორული ფუნქცია: $\tau \in [0, l_\gamma]$ რიცხვისათვის $\overline{\gamma}(\tau)$ ტოლია ისეთი $\gamma(t)$ წერტილის, რომლისთვისაც $l_\gamma([a,t]) = \tau$. შევნიშნოთ, რომ $\overline{\gamma}(\tau)$-ს განსაზღვრა კორექტულია. მართლაც, თუ $l_\gamma([a,t_1]) = l_\gamma([a,t_2]) = \tau$, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $\overline{\gamma}$ ფუნქცია მუდმივია $[t_1, t_2]$ სეგმენტზე. ამრიგად, თუ წირზე, მისი სათავიდან დაწყებული, გავივლით τ რიცხვის ტოლ მანძილს, მაშინ მივალთ წერტილში, რომელიც მიიჩნევა $\overline{\gamma}(\tau)$-ს მნიშვნელობად.

თეორემა 13.4.7. ნებისმიერი წრფევადი და დადებითი სიგრძის γ **წირისათვის** $\overline{\gamma}$ **წირს აქვს თვისებები:**

- $\overline{\gamma}$**-ის კვალი და სიგრძე ემთხვევა** γ**-ს კვალსა და სიგრძეს, ე.ი.** $\overline{\gamma}([0, l_\gamma]) = \gamma([a,b])$ **და** $l_{\overline{\gamma}} = l_\gamma$**;**
- $l_{\overline{\gamma}}([0,\tau]) = \tau$ **ყოველი** $\tau \in [0, l_\gamma]$**-სათვის;**

- $\overline{\gamma}$ **აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას:**

$$\|\overline{\gamma}(\tau_2) - \overline{\gamma}(\tau_1)\| \leq |\tau_2 - \tau_1| \qquad (\tau_1, \tau_2 \in [0, l_\gamma]).$$

შედეგად, $\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_n$ **საკოორდინატო ფუნქციები არიან აბსოლუტურად უწყვეტი;**

- **თითქმის ყოველი** $\tau \in [0, l_\gamma]$ **წერტილისათვის,**

$$\sqrt{\overline{\gamma}_1'(\tau)^2 + \cdots + \overline{\gamma}_n'(\tau)^2} = 1.$$

დამტკიცება. $\overline{\gamma}([0, l_\gamma]) = \gamma([a, b])$ ტოლობა უშუალოდ გამომდინარეობს $\overline{\gamma}$ წირის განსაზღვრიდან. $l_{\overline{\gamma}} = l_\gamma$ ტოლობის დასადგენად კი უნდა გავითვალისწინოთ $\overline{\gamma}$ და γ წირებში ჩახაზულ ტეხილთა კლასების იგივეობა.

ვთქვათ, $\tau \in [0, l_\gamma]$ და $t \in [a, b]$ წერტილი აკმაყოფილებს $l_\gamma([a, t]) = \tau$ ტოლობას. ადვილი დასანახია, რომ

$$\overline{\gamma}|_{[0,\tau]} = \overline{\gamma|_{[a,t]}}.$$

საიდანაც, პირველი წინადადების ძალით დავწერთ,

$$l_{\overline{\gamma}}([0, \tau]) = l_{\overline{\gamma}|_{[0,\tau]}} = l_{\overline{\gamma|_{[a,t]}}} = l_{\gamma|_{[a,t]}} = l_\gamma([a, t]) = \tau.$$

ამით მეორე წინადადება დამტკიცებულია.

ვთქვათ, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq l_\gamma$. მაშინ, მეორე წინადადების გათვალისწინებით, გვექნება,

$$\|\overline{\gamma}(\tau_2) - \overline{\gamma}(\tau_1)\| \leq l_{\overline{\gamma}}([\tau_1, \tau_2]) = l_{\overline{\gamma}}([0, \tau_2]) - l_{\overline{\gamma}}([0, \tau_1]) = \tau_2 - \tau_1.$$

რითაც მესამე წინადადება დამტკიცებულია.

მეოთხე წინადადება არის მეორე წინადადებისა და თეორემა 13.4.5-ის შედეგი. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თუ წირს გავაიგივებთ მის კვალთან, მაშინ შეიძლება $\overline{\gamma}$ განვიხილოთ როგორც $\Gamma = \gamma([a, b])$ წირის ახალი პარამეტრიზაცია. $\overline{\gamma}$-ს უწოდებენ $\Gamma = \gamma([a, b])$ წირის **ბუნებრივ** (ან კიდევ, **რკალის სიგრძის მიხედვით**) **პარამეტრიზაციას**. ამრიგად, წირი შეიძლება აღწერილი იყოს ცუდი თვისებების, კერძოდ, არააბსოლუტურად უწყვეტი γ პარამეტრიზაციით, მაგრამ, თეორემა 13.4.7-ის ძალით, შესაძლებელია მისი ახლებური პარამეტრიზაცია, რომელსაც უკვე აქვს აბსოლუტურად უწყვეტობის თვისება.

თუ τ პარამეტრს მივიჩნევთ დროდ, ხოლო $\overline{\gamma}(\tau)$-ს კი - წერტილის მოძრაობის აღმწერ ფუნქციად, მაშინ, ასეთი ფიზიკური ინტერპრეტაციის ფარგლებში, ბუნებრივი პარამეტრიზაცია შეიძლება განვიხილოთ, როგორც $\Gamma = \gamma([a, b])$ წირზე ისეთნაირად განხორციელებული მოძრაობა, რომლის პირობებშიც განვლილი მანძილის სიდიდე ემთხვევა მოძრაობის დაწყებიდან გასულ დროს.

შენიშვნა 13.4.3. წრფევადი წირის სიგრძის გამოთვლის შესახებ ამოცანა (მსგავსად პირველყოფილის აღდგენის შესახებ ამოცანისა) იყო ერთ-ერთი ძირითადი ინდიკატორი რიმანის ინტეგრალის განზოგადების აუცილებლობისა. კერძოდ, ცნობილი იყო, რომ

$$l_\gamma = \int_{[a,b]} \sqrt{(\gamma_1')^2 + \cdots + (\gamma_n')^2}.$$

ფორმულა ძალას კარგავდა უწყვეტად დიფერენცირებადი წირების კლასის გარეთ. ამის დამადასტურებელ მაგალითად გამოდგება $\gamma(t) = (t, f(t))$ $(t \in [0,1])$ ტოლობით განსაზღვრული ბრტყელი წირი, სადაც f არის ვოლტერას ტიპის ფუნქცია, აგებული 9.4 პარაგრაფში. მაშინ $\sqrt{1+(f')^2}$ იქნება შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია, რომელიც არაინტეგრებადია რიმანის აზრით. ამრიგად, რიმანის ინტეგრალის მეშვეობით ვერ ხერხდება თვით ისეთი წრფევადი წირების სიგრძის გამოთვლა, რომელთაც აქვთ ყოველ წერტილში წარმოებადი საკოორდინატო ფუნქციები (გეომეტრიული ტერმინებით რომ ვთქვათ, ყოველ წერტილში აქვთ მხები). ამის საპირისპიროდ, ამ პარაგრაფის 13.4.4 და 13.4.2 თეორემები, 12.9.1 და 12.7.6 თეორემებთან ერთად, გვიჩვენებენ, რომ იგივე სიტუაციაში ლებეგის ინტეგრალი იძლევა სასურველ შედეგს.

ამოცანები

1. ვთქვათ, γ არის კანტორის წირი, ე.ი. $\gamma(t) = (t, \theta(t))$ $(t \in [0,1])$, სადაც θ არის კანტორის ფუნქცია. გამოთვალეთ γ წირის სიგრძე.
2. ვთქვათ, f არის შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია. დაამტკიცეთ, რომ თითქმის ყოველი $x \in [a,b]$ წერტილისათვის $T_f'(x) = |f(x)|$.

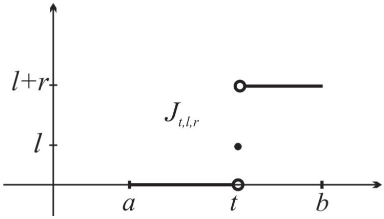
§ 5. ნახტომთა ფუნქციები

$[a,b]$ სეგმენტის t წერტილისა და l და r რიცხვებისათვის $J_{t,l,r}$-ით აღვნიშნოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია (ნახ. 13.3):

$$J_{t,l,r}(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad a \le x < t, \\ l, & \text{თუ} \quad x = t, \\ l + r, & \text{თუ} \quad t < x \le b. \end{cases}$$

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $[a,b]$ სეგმენტის წერტილთა სასრული ან უსასრულო (t_n) მიმდევრობა, რომლის წევრები წყვილ-წყვილად განსხვავებულია. დავუშვათ, ყოველ t_n-თან დაკავშირებულია l_n და r_n რიცხვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\sum_n |l_n| + \sum_n |r_n| < \infty. \tag{1}$$



ნახ. 13.3.

მოვითხოვოთ აგრეთვე, რომ $l_n = 0$, თუ $t_n = a$ და $r_n = 0$, თუ $t_n = b$. ასეთ პირობებში აღვნიშნოთ:

$$J_{(t,l,r)} = \sum_n J_{t_n,l_n,r_n}.$$

შევნიშნოთ, რომ განსახილავი ფუნქციური მწკრივის ყოველ წერტილში კრებადობა უზრუნველყოფილია (1) პირობის საფუძველზე. $J_{(t,l,r)}$ ფუნქციას ეწოდება t, l და r **მიმდევრობების შესაბამისი ნახტომთა ფუნქცია**. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნახტომთა ფუნქცია შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი ეკვივალენტური ფორმით:

$$J_{(t,l,r)}(x) = \sum_{t_n \le x} l_n + \sum_{t_n < x} r_n \qquad (x \in [a,b]). \tag{2}$$

(2) წარმოდგენის საფუძველზე გვექნება:

- **ნებისმიერ $x \in (a,b]$ წერტილში არსებობს $J_{(t,l,r)}$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი, რომელიც გამოითვლება შემდეგნაირად:**

$$J_{(t,l,r)}(x-0) = \sum_{t_n < x} l_n + \sum_{t_n < x} r_n; \tag{3}$$

- **ნებისმიერ $x \in [a,b)$ წერტილში არსებობს $J_{(t,l,r)}$ ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი, რომელიც გამოითვლება შემდეგნაირად:**

$$J_{(t,l,r)}(x+0) = \sum_{t_n \le x} l_n + \sum_{t_n \le x} r_n. \tag{4}$$

(2) – (4) ტოლობებიდან გამომდინარე ვასკვნით შემდეგი წინადადების სამართლიანობას:

- **$J_{(t,l,r)}$ უწყვეტია t_n წერტილებისაგან განსხვავებულ ყოველ წერტილში;**
- **$J_{(t,l,r)}$ ფუნქცია უწყვეტია t_n წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $l_n = r_n = 0$;**
- **$t_n \in (a,b]$ წერტილში $J_{(t,l,r)}$ ფუნქციის მარცხენა ნახტომი l_n რიცხვის ტოლია, ე.ი. $J_{(t,l,r)}(t_n) - J_{(t,l,r)}(t_n - 0) = l_n$;**

- $t_n \in [a, b)$ **წერტილში** $J_{(t,l,r)}$ **ფუნქციის მარჯვენა ნახტომი** r_n **რიცხვების ტოლია, ე.ი.** $J_{(t,l,r)}(t_n + 0) - J_{(t,l,r)}(t_n) = r_n$**;**
- **თუ ცნობილია, რომ** l_n **და** r_n **ერთდროულად ნულის ტოლი არ ხდებიან არცერთი** n**-სთვის, მაშინ** $J_{(t,l,r)}$ **ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე ემთხვევა** t_n **წერტილთა სიმრავლეს.**

აქვე შევნიშნოთ, რომ **ნახტომთა ფუნქცია არ შეიცვლება, თუ მისი წარმომქნელი** $(t_n), (l_n)$ **და** (r_n) **მიმდევრობების წევრებს ჩავუტარებთ ერთი და იმავე გადანაცვლებას**. ეს წინადადება მიიღება (1) პირობის საფუძველზე.

შემდგომში ტერმინით - **ნახტომთა ფუნქცია**, მოხსენიებული იქნება $J_{(t,l,r)}$ სახის ნებისმიერი ფუნქცია და აგრეთვე, იგივურად ნულის ტოლი ფუნქცია.

შენიშვნა 13.5.1. ნახტომთა ფუნქციების მარტივ მაგალითებს გვაძლევენ ე.წ. უბან-უბან მუდმივი ფუნქციები.

f ფუნქციას ეწოდება **უბან-უბან მუდმივი**, თუ მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტის $P = (t_0, \ldots, t_n)$ დანაწილება, ისეთი, რომ f მუდმივია თითოეულ (t_{k-1}, t_k) ინტერვალზე.

ნებისმიერი f ფუნქციისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

(i) f არის უბან-უბან მუდმივი;

(ii) $f - f(a)$ არის ნახტომთა ფუნქცია, რომელიც წარმოქმნილია სასრული (t_n), (l_n) და (r_n) მიმდევრობებით.

$(ii) \Rightarrow (i)$ იმპლიკაციის შესამოწმებლად საკმარისია გავითვალისწინოთ, რომ $J_{t,l,r}$ სახის ფუნქცია მუდმივია ნებისმიერ I მონაკვეთზე, რომელიც არ შეიცავს t წერტილს.

$(i) \Rightarrow (ii)$ იმპლიკაციის დასადგენად განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის $P = (t_0, \ldots, t_n)$ დანაწილება, ისეთი, რომ f მუდმივია ყოველ (t_{k-1}, t_k) ინტერვალზე. $(t_0, t_1), \ldots, (t_{n-1}, t_n)$ ინტერვალებზე f-ის მიერ მიღებული მნიშვნელობები შესაბამისად აღვნიშნოთ $y_1, \ldots, y_n$-ით. l_k და r_k რიცხვები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: $l_0 = 0, r_0 = y_1 - f(a), l_1 = f(t_1) - y_1,\ r_1 = y_2 - f(t_1),\ \ldots,$ $l_n = f(b) - y_n, r_n = 0$. მაშინ ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f - f(a) = \sum_{k=0}^{n} J_{t_k, l_k, r_k}$.

თეორემა 13.5.1. $J_{(t,l,r)}$ **ნახტომთა ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციისაა, ამასთან, მისი სრული ვარიაცია არის** $\sum_n |l_n| + \sum_n |r_n|$ **ჯამის ტოლი.**

ლემა 13.5.1. ვთქვათ, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ფუნქციური მწკრივი ყოველ წერტილში კრებადია და $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. მაშინ

$$V_f([a,b]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V_{f_n}([a,b]).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P = (x_0, \ldots, x_m)$ დანაწილება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი N-სთვის სამართლიანია შეფასებები:

$$V_f(P) = \sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_k) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_{k-1}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x_k) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x_{k-1}) \right| + \sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_k) - \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_{k-1}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{N} |f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})| + 2 \sum_{k=0}^{m} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_k) \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} |f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})| + 2 \sum_{k=0}^{m} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_k) \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} V_{f_n}(P) + 2 \sum_{k=0}^{m} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_k) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} V_{f_n}([a,b]) + 2 \sum_{k=0}^{m} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x_k) \right|.$$

თუ გავითვალისწინებთ $\sum_n f_n(x)$ მწკრივის კრებადობას ყოველ $x \in [a,b]$ წერტილში და მიღებულ შეფასებაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $N \to \infty$, გვექნება, რომ

$$V_f(P) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V_{f_n}([a,b]).$$

საიდანაც, P დანაწილების ნებისმიერობის საფუძველზე მივიღებთ საჭირო უტოლობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 13.5.2. ლემა 13.5.1-ში დადგენილი უტოლობა სამართლიანია ფუნქციათა სასრული ჯამის შემთხვევაშიც. ამ სიტუაციაში დამტკიცება კიდევ უფრო მარტივდება, რადგანაც შეფასებებში აღარ გვექნება მწკრივის ნაშთითი წევრი.

შენიშვნა 13.5.3. ნებისმიერი f და g ფუნქციებისათვის სრულდება უტოლობა: $V_{f\pm g}[a,b] \geq |V_f([a,b]) - V_g([a,b])|$. მართლაც, $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი P დანაწილებისათვის, $|x \pm y| \geq |(|x| - |y|)|$ რიცხვითი უტოლობის საფუძველზე მარტივად ვაჩვენებთ, რომ $V_{f\pm g}(P) \geq |V_f(P) - V_g(P)|$, საიდანაც მივიღებთ დასამტკიცებელ შეფასებას.

ლემა 13.5.2. ვთქვათ, $f_1, \ldots, f_N$ ფუნქციებისათვის მოიძებნებიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $(a_1,b_1), \ldots, (a_N,b_N) \subset [a,b]$ ინტერვალები, ისეთები, რომ ყოველი f_n ფუნქცია მუდმივია $[a,b] \setminus (a_n,b_n)$ სიმრავლის შემადგენელ ორივე სეგმენტზე. მაშინ $f = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n$ ჯამისათვის სრულდება ტოლობა:

$$V_f([a,b]) = \sum_{n=1}^{N} V_{f_n}([a,b]).$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $N \geq 2$ და $V_{f_n}([a,b]) > 0$ ყოველი n-სთვის (ე.ი. არცერთი f_n ფუნქცია არაა მუდმივი).

ლემა 13.5.1-ის ძალით გვექნება, რომ

$$V_f([a,b]) \leq \sum_{n=1}^{N} V_{f_n}([a,b]).$$

ვაჩვენოთ შებრუნებული შეფასების სამართლიანობა. განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ რიცხვები, ისეთები, რომ

$$\alpha_1 < V_{f_1}([a,b]), \ \ldots \ , \alpha_N < V_{f_N}([a,b]).$$

ლემის პირობის ძალით, ყოველი $n \in \overline{1,N}$-სთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ $[a_n,b_n]$ სეგმენტის P_n დანაწილება, რომლისთვისაც $V_{P_n}(f_n) > \alpha_n$. P იყოს $[a,b]$ სეგმენტის ის დანაწილება, რომელსაც გვაძლევენ ერთობლიობაში განხილული $P_1, \ldots, P_N$ დანაწილებების შემადგენელი წერტილები a და b ბოლოებთან ერთად. კვლავ ლემის პირობის გათვალისწინებით, ადვილი დასანახია, რომ

$$V_f(P) = \sum_{n=1}^{N} V_{f_n}(P_n).$$

შედეგად,

$$V_f(P) > \sum_{n=1}^{N} \alpha_n.$$

α_n რიცხვები შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერად ახლოს $V_{f_n}([a,b])$ ვარიაციებთან. რის გამოც, უკანასკნელი შეფასების გათვალისწინებით, ვასკვნით

$V_f([a,b]) \geq \sum\limits_{n=1}^{N} V_{f_n}([a,b])$ უტოლობის სამართლიანობას. რითაც ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.5.1-ის დამტკიცება. აღვნიშნოთ $J_n = J_{t_n, l_n, r_n}$ და $J = J_{(t,l,r)}$. მარტივი შესამოწმებელია, რომ

$$V_{J_n}([a,b]) = |l_n| + |r_n|. \tag{5}$$

ვთქვათ, (t_n) სასრული მიმდევრობაა. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ J_n ფუნქციები დააკმაყოფილებენ ლემა 13.5.2-ის პირობებს. შედეგად, ლემა 13.5.2-ის და (5) ტოლობის გამოყენებით, გვექნება,

$$V_J([a,b]) = \sum_n V_{J_n}([a,b]) = \sum_n |l_n| + \sum_n |r_n|.$$

ახლა დავუშვათ, (t_n) არის უსასრულო მიმდევრობა. ლემა 13.5.1-ის და (5)-ის საფუძველზე დავწერთ,

$$V_J([a,b]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V_{J_n}([a,b]) = \sum_{n=1}^{\infty} |l_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |r_n|. \tag{6}$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $N \in \mathbb{N}$ და აღვნიშნოთ $S_N = \sum_{n=1}^{N} J_n$, $Q_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} J_n$. შენიშვნა 13.5.2-ის გათვალისწინებით გვექნება, რომ

$$V_J([a,b]) = V_{S_N + Q_N}([a,b]) \geq V_{S_N}([a,b]) - V_{Q_N}([a,b]). \tag{7}$$

ლემა 13.5.2-ის და (5)-ის ძალით,

$$V_{S_N}([a,b]) = \sum_{n=1}^{N} |l_n| + \sum_{n=1}^{N} |r_n|; \tag{8}$$

ხოლო ლემა 13.5.1-ის ძალით,

$$V_{Q_N}([a,b]) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |l_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |r_n|. \tag{9}$$

თუ (8) და (9) შეფასებებს გავითვალისწინებთ (7)-ში და გადავალთ ზღვარზე, როცა $N \to \infty$, მივიღებთ,

$$V_J([a,b]) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |l_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |r_n|. \tag{10}$$

(6)-ის და (10)-ის საფუძველზე თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.5.2. $J_{(t,l,r)}$ ნახტომთა ფუნქციის წარმოებული თითქმის ყველგან ნულის ტოლია.

თეორემა 13.5.2-ის დამტკიცებისთვის დაგვჭირდება შემდეგი საინტერესო დებულება ზრდად ფუნქციათა მწკრივის გაწარმოების შესახებ, რომელიც ეკუთვნის გ. ფუბინის.

თეორემა 13.5.3. ვთქვათ, (f_n) არის ზრდადი ფუნქციების მიმდევრობა, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ მწკრივი კრებადია ყოველ $x \in [a,b]$ წერტილში და $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. მაშინ თითქმის ყოველ $x \in [a,b]$ წერტილში წარმოებადია თითოეული $f, f_1, f_2, \dots$ ფუნქციებს შორის და სრულდება ტოლობა

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ f_n ფუნქციები არაუარყოფითია (წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილავდით $f_n - f_n(a)$ ფუნქციებს). თეორემა 12.6.2-ის ძალით $f, f_1, f_2, \dots$ ფუნქციები თითქმის ყველგან წარმოებადი არიან. შედეგად, მოიძებნება სრული ზომის $E \subset [a,b]$ სიმრავლე, რომლის ყოველ წერტილში წარმოებადია ყოველი $f, f_1, f_2, \dots$ ფუნქცია. მსჯელობების სიმოკლისათვის ჩავთვალოთ, რომ $E = [a,b]$.

აღვნიშნოთ

$$h_n = f - (f_1 + \dots + f_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ჩვენი მიზანია, ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} h_n'(x) = 0 \ \text{ თითქმის ყველგან.} \tag{11}$$

$h_n = \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k$ ტოლობიდან გამომდინარე h_n $(n \in \mathbb{N})$ ზრდადი ფუნქციაა. რის გამოც, თეორემა 12.6.2-ის ძალით, დავწერთ,

$$\int_{[a,b]} h_n' \le h_n(b) - h_n(a).$$

$(h_n(x))$ მიმდევრობის ზღვარი ყოველ $x \in [a,b]$ წერტილში ნულის ტოლია. შედეგად, გვექნება,

$$\int_{[a,b]} h_n' \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{12}$$

შევნიშნოთ, რომ (h_n') არის არაუარყოფით ფუნქციათა კლებადი მიმდევრობა. ამის გამო (11) პირობის შეუსრულებლობა მოგვცემს წინააღმდეგობას (12) პირობასთან. მართლაც, დავუშვათ, $\{\lim_{n\to\infty} h_n' > 0\}$ სიმრავლე დადებითი ზომისაა. მაშინ მარტივად ვიპოვით $\varepsilon > 0$ რიცხვს, რომლისთვისაც დადებითი ზომის იქნება $S = \{\lim_{n\to\infty} h_n' > \varepsilon\}$ სიმრავლე. შედეგად, (h_n') მიმდევრობის კლებადობის გამო გვექნება, რომ ყოველი n-სთვის,

$$\int_{[a,b]} h_n' \ge \int_S h_n' \ge \varepsilon |S|.$$

რაც ეწინააღმდეგება (12) პირობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 13.5.2-ის დამტკიცება. თავდაპირველად ორი რამ შევნიშნოთ:

- $J_{(t,l,r)}$ ნახტომთა ფუნქცია ზრდადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი l_n და r_n რიცხვი არაუარყოფითია. ამაში დარწმუნებისთვის უნდა გავითვალისწინოთ, ერთი მხრივ, ნახტომთა ფუნქციის (2) წარმოდგენა და მეორე მხრივ, ნახტომთა ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრების სახე.
- $J_{(t,l,r)}$ ფუნქცია შემდეგნაირად წარმოდგება ორი ზრდადი ნახტომთა ფუნქციის სხვაობის სახით: $J_{(t,l,r)} = f - g$, სადაც

$$f(x) = \sum_{t_n \le x} |l_n| + \sum_{t_n < x} |r_n|,$$

$$g(x) = \sum_{t_n \le x} (|l_n| - l_n) + \sum_{t_n < x} (|r_n| - r_n).$$

ამ შენიშვნების საფუძველზე საკმარისია თეორემა დავამტკიცოთ იმ შემთხვევაში, როცა $J_{(t,l,r)}$ ფუნქცია ზრდადია (ე.ი. როცა ყოველი l_n და r_n რიცხვი არაუარყოფითია).

$J_{(t,l,r)}$ ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, $J_{(t,l,r)} = \sum\limits_n J_{t_n,l_n,r_n}$. ამასთან, ცხადია, რომ ყოველი J_{t_n,l_n,r_n} ფუნქცია ზრდადია და $J'_{t_n,l_n,r_n}(x) = 0$ ყოველი $x \neq t_n$ წერტილისათვის. ამ თვისებების საფუძველზე დასამტკიცებელ დასკვნას უშუალოდ ვღებულობთ, როცა გვაქვს სასრული ჯამი (ე.ი. როცა (t_n) მიმდევრობა სასრულია), ხოლო უსასრულო ჯამის შემთხვევაში, დამატებით საჭიროა თეორემა 13.5.3-ის გამოყენება. თეორემა დამტკიცებულია. □

ამოცანები

1. ნახტომთა ფუნქციის წარმოებულის თითქმის ყველგან ნულთან ტოლობა დაამტკიცეთ ვიტალის თეორემის გამოყენებით. **მითითება:** დაუშვით საწინააღმდეგო და გამოიყენეთ, რომ $J_{(t,l,r)}$-ის განმსაზღვრელი ჯამიდან სასრული რაოდენობის წევრთა ჩამოცილებით, $[a,b]\setminus\{x_1, x_2, \dots\}$ სიმრავლის წერტილებში $J_{(t,l,r)}$-ის ზედა და ქვედა წარმოებულები არ იცვლება.

§ 6. შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის ლებეგის დაშლა

თუ f ფუნქციას ყოველ წერტილში აქვს ცალმხრივი ზღვრები, მაშინ შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$l_f(t) = f(t) - f(t-0) \qquad (t \in (a,b]);$$

$$r_f(t) = f(t+0) - f(t) \qquad (t \in [a,b)).$$

$l_f(a)$ და $r_f(b)$ ჩავთვალოთ ნულის ტოლად.

შევნიშნოთ, რომ 12.6.1 და 12.7.4 თეორემების ძალით შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი f ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია, ამასთან, f-ს ყოველ წყვეტის წერტილში აქვს ცალმხრივი ზღვრები.

თეორემა 13.6.1. ვთქვათ, f შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა და t_n წერტილები ქმნიან მისი ყველა წყვეტის წერტილის სიმრავლეს. მაშინ

$$\sum_n |l_f(t_n)| + \sum_n |r_f(t_n)| \leq V_f([a,b]).$$

ე.ი. შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის ცალმხრივ ნახტომთა მოდულების ჯამი არ აღემატება ფუნქციის სრულ ვარიაციას.

დამტკიცება. განვიხილოთ (t_n) მიმდევრობის ნებისმიერი საწყისი ნაწილი: $t_1, \dots, t_N$, და ვაჩვენოთ შეფასება:

$$\sum_{n=1}^{N} |l_f(t_n)| + \sum_{n=1}^{N} |r_f(t_n)| \leq V_f([a,b]).$$

ამით თეორემა დამტკიცებული იქნება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a = t_1 < \cdots < t_N = b$. ყოველი $n \in \{1, \dots, N-1\}$ ინდექსისათვის τ_n იყოს $[t_n, t_{n+1}]$ სეგმენტის შუაწერტილი. მაშინ მარტივი დასანახია, რომ სრულდება შეფასებები:

$$|r_f(t_1)| \leq \omega_f([t_1, \tau_1]),\ \dots,\ |r_f(t_{N-1})| \leq \omega_f([t_{N-1}, \tau_{N-1}]);$$
$$|l_f(t_2)| \leq \omega_f([\tau_1, t_2]),\ \dots,\ |l_f(t_N)| \leq \omega_f([\tau_{N-1}, t_N]).$$

P იყოს $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილება, რომელიც მიიღება $t_1, \dots, t_N$ და $\tau_1, \dots, \tau_{N-1}$ წერტილებისაგან. მაშინ, თეორემა 13.1.7-ის გათვალისწინებით, დავწერთ,

$$\sum_{n=1}^{N} |r_f(t_n)| + \sum_{n=1}^{N} |l_f(t_n)| = \sum_{n=1}^{N-1} |r_f(t_n)| + \sum_{n=2}^{N} |l_f(t_n)| \leq$$
$$\leq \omega_f([t_1, \tau_1]) + \omega_f([\tau_1, t_2]) + \ \dots\ + \omega_f([t_{N-1}, \tau_{N-1}]) + \omega_f([\tau_{N-1}, t_N]) =$$
$$= \Omega_f(P) \leq V_f([a,b]).$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

ვთქვათ, f არის შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია და t_n წერტილები ქმნიან მის წყვეტის წერტილთა სიმრავლეს. მაშინ, თეორემა 13.6.1-ის საფუძველზე, შესაძლებელია განვსაზღვროთ f **ფუნქციის ნახტომთა ფუნქცია**:

$$J_f = \sum_n J_{t_n, l_f(t_n), r_f(t_n)}.$$

უწყვეტი შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის ნახტომთა ფუნქცია მივიჩნიოთ იგივურად ნულის ტოლად.

შენიშვნა 13.6.1. შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი f ფუნქციისათვის და ნებისმიერი გადაუგვარებელი $[c,d] \subset [a,b]$ ქვესეგმენტისათვის გვექნება, რომ

$$\sum_{t_n \in (c,d]} |l_f(t_n)| + \sum_{t_n \in [c,d)} |r_f(t_n)| \leq V_f([c,d])$$

(ე.ი. ცალმხრივ ნახტომთა მოდულების ჯამი, აღებული ქვესეგმენტში მოთავსებული წყვეტის წერტილების მიხედვით, არ აღემატება ამ ქვესეგმენტზე ფუნქციის ვარიაციას). ეს შეფასება მიიღება თეორემა 13.6.1-დან, თუ მას გამოვიყენებთ f ფუნქციის შეზღუდვისათვის $[c,d]$ მონაკვეთზე.

შენიშვნა 13.6.2. შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი f ფუნქციისათვის 13.5.1 და 13.6.1 თეორემების ძალით, სრულდება შემდეგი თანაფარდობები:

$$V_{J_f}([a,b]) = \sum_n |l_f(t_n)| + \sum_n |r_f(t_n)| \leq V_f([a,b]).$$

შენიშვნა 13.6.3. ადვილი დასანახია, რომ შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქციის მარჯვნიდან უწყვეტობის შემთხვევაში, მისი ნახტომთა J_f ფუნქციაც მარჯვნიდან უწყვეტია.

თეორემა 13.6.2. შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი f ფუნქციისათვის $f - J_f$ სხვაობა უწყვეტია და $f = (f - J_f) + J_f$ არის f-ის ერთადერთი შესაძლო დაშლა უწყვეტი შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციისა და ნახტომთა ფუნქციის ჯამის სახით.

ლემა 13.6.1. თუ f და g ნახტომთა ფუნქციების სხვაობა უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ $f = g$.

დამტკიცება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f - g$ სხვაობა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f-ს და g-ს ერთი და იგივე წყვეტის წერტილები აქვთ და ამასთან, წყვეტის წერტილებში f და g ფუნქციების მარცხენა და მარჯვენა ნახტომები ერთმანეთს ემთხვევა. ნახტომთა ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება მისი წყვეტის წერტილებითა და ამ წერტილებში არსებული მარცხენა და მარჯვენა ნახტომებით, ამიტომ, ზემოაღნიშნულის ძალით, ვასკვნით $f = g$ ტოლობას. ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 13.6.2-ის დამტკიცება. ნახტომთა ფუნქციების თვისებების გათვალისწინებით J_f და f ფუნქციებს აქვთ ერთი და იგივე წყვეტის წერტილები და ამასთან, წყვეტის წერტილებში J_f და f ფუნქციების მარცხენა და მარჯვენა ნახტომები ერთმანეთს ემთხვევიან. შედეგად, $f - J_f$ იქნება უწყვეტი ფუნქცია. თეორემა 13.6.1-ის თანახმად, J_f არის შემოსაზღვრული ვარიაციის, ამიტომ $f - J_f$ ფუნქციაც იქნება შემოსაზღვრული ვარიაციის. ამრიგად, $f - J_f$ და J_f ფუნქციები გვაძლევენ f-ის დაშლას, უწყვეტი შემოსაზღვრული ვარიაციის

ფუნქციისა და ნახტომთა ფუნქციის ჯამის სახით. დაშლის ერთადერთობა კი არის ლემა 13.6.1-ის შედეგი. თეორემა დამტკიცებულია. □

ვთქვათ, f შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა. როგორც ვიცით, f თითქმის ყველგან წარმოებადია და $f' \in L([a,b])$. f'-ის განუსაზღვრელი ინტეგრალი აღვნიშნოთ A_f-ით, ე.ი.

$$A_f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f' \qquad (x \in [a,b]).$$

A_f ფუნქციას ვუწოდოთ f ფუნქციის **აბსოლუტურად უწყვეტი კომპონენტი.**

f ფუნქციას ვუწოდოთ **სინგულარული**, თუ: 1) f არის უწყვეტი და შემოსაზღვრული ვარიაციის; 2) $f(a) = 0$ და 3) f-ის წარმოებული თითქმის ყველა წერტილში ნულის ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ სინგულარული ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ის იგივურად ნულის ტოლია. მართლაც, აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია, რომლის წარმოებული თითქმის ყველგან ნულის ტოლია, არის მუდმივი (იხ. თეორემა 12.8.4), ხოლო მუდმივ ფუნქციებს შორის მხოლოდ ნულოვანი ფუნქციაა სინგულარული.

აქვე შევნიშნოთ, რომ არანულოვანი სინგულარული ფუნქციის მაგალითს გვაძლევს კანტორის θ ფუნქცია.

შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქციისათვის აღვნიშნოთ

$$S_f = f - J_f - A_f.$$

თეორემა 13.5.2-ის ძალით, J_f-ის წარმოებული თითქმის ყველგან ნულის ტოლია, ხოლო ლებეგის თეორემის თანახმად, A_f-ის წარმოებული თითქმის ყველგან $f'(x)$-ს უდრის. აქედან გამომდინარე, თუ გავითვალისწინებთ $f - J_f$ ფუნქციის უწყვეტობას, დავასკვნით, რომ S_f სინგულარულია. S_f ფუნქციას f-ის **სინგულარულ კომპონენტს** უწოდებენ.

თეორემა 13.6.3. შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი f ფუნქციისათვის,

$$f = A_f + J_f + S_f$$

ტოლობა იძლევა f-ის ერთადერთ შესაძლო დაშლას აბსოლუტურად უწყვეტი, ნახტომთა და სინგულარული ფუნქციების ჯამის სახით.

დამტკიცება. დავუშვათ, f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა და

$$f = A + J + S,$$

სადაც A აბსოლუტურად უწყვეტია, J ნახტომთა ფუნქციაა, ხოლო S არის სინგულარული. დასამტკიცებელი გვაქვს, რომ $A = A_f, J = J_f$ და $S = S_f$.

თეორემა 13.6.2-ის საფუძველზე გვექნება,

$$J = J_f \quad \text{და} \quad A + S = A_f + S_f.$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით, $S - S_f = A_f - A$. შედეგად, სინგულარული $S - S_f$ ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი $A_f - A$ ფუნქციის ტოლი. ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $S - S_f$ იგივურად ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარე, გვექნება, რომ $S = S_f$ და $A = A_f$. თეორემა დამტკიცებულია. □

შემოსაზღვრული ვარიაციის f ფუნქციის წარმოდგენას A_f, J_f და S_f კომპონენტების ჯამის სახით, მის **ლებეგის დაშლას** უწოდებენ.

§ 7. ზრდადი ფუნქციის ლებეგის დაშლა

თეორემა 13.7.1. თუ f არის ზრდადი ფუნქცია, მაშინ f-ის ლებეგის დაშლის სამივე A_f, J_f და S_f კომპონენტი აგრეთვე ზრდადი ფუნქციაა.

ლემა 13.7.1. თუ f არის ზრდადი ფუნქცია, მაშინ J_f და $f - J_f$ ფუნქციებიც ზრდადია.

დამტკიცება. f-ის ზრდადობის გამო, მის ყოველ წყვეტის წერტილში მარჯვენა და მარცხენა ნახტომები არაუარყოფითია. საიდანაც გამომდინარეობს J_f ფუნქციის ზრდადობა.

ახლა ვაჩვენოთ $f - J_f$ ფუნქციის ზრდადობა. f-ის ზრდადობის გათვალისწინებით, ადვილი დასანახია, რომ ყოველი $x \in [a, b]$-სთვის,

$$J_f(x) = [f(a+0) - f(a)] + \sum_{a<t_n<x} [f(t_n+0) - f(t_n-0)] + [f(x) - f(x-0)],$$

სადაც t_n წერტილები ქმნიან f-ის ყველა წყვეტის წერტილის სიმრავლეს. უკანასკნელი წარმოდგენიდან გამომდინარე, ნებისმიერი $x, y \in [a, b], x < y$, წერტილებისათვის გვექნება,

$$J_f(y) - J_f(x) = [f(x+0) - f(x)] + \sum_{x<t_n<y} [f(t_n+0) - f(t_n-0)] + [f(y) - f(y-0)].$$

ამრიგად, $J_f(y) - J_f(x)$ სხვაობა ტოლია f ფუნქციის იმ ნახტომთა ჯამის, რომლებიც შეესაბამება $[c, d]$ ქვესეგმენტში მოთავსებულ წყვეტის წერტილებს. ასეთი ჯამი კი, შენიშვნა 13.6.1-ის ძალით არ აღემატება $V_f([x, y])$ ვარიაციას, რომელიც f-ის ზრდადობის გამო $f(y) - f(x)$ სხვაობის ტოლია. შედეგად, მივიღეთ, რომ $J_f(y) - J_f(x) \le f(y) - f(x)$. საიდანაც, $f(x) - J_f(x) \le f(y) - J_f(y)$. ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 13.7.2. თუ f არის ზრდადი და უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ S_f ფუნქცია ზრდადია.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ უწყვეტ ზრდად ფუნქციას აქვს ნულოვანი ნახტომთა ფუნქცია. ამიტომ გვაქვს $f = A_f + S_f$ ტოლობა. ამრიგად, S_f-ის ზრდადობა ტოლფასია $f - A_f$ ფუნქციის ზრდადობის. განვიხილოთ ნებისმიერი $x, y \in [a, b]$, $x < y$, წერტილები. დასამტკიცებელი $f(x) - A_f(x) \leq f(y) - A_f(y)$ შეფასება ტოლფასია შეფასებისა: $A_f(y) - A_f(x) \leq f(y) - f(x)$, რომელიც, A_f კომპონენტის განსაზღვრიდან გამომდინარე, გადაიწერება შემდეგნაირად

$$\int_{[x,y]} f' \leq f(y) - f(x).$$

ეს უკანასკნელი შეფასება კი სამართლიანია 12.6.2 თეორემის ძალით. ამით $f - A_f$ ფუნქციის ზრდადობა და, მასთან ერთად ლემა, დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 13.7.1-ის დამტკიცება. A_f კომპონენტის ზრდადობა გამომდინარეობს f' ფუნქციის არაუარყოფითობიდან, ხოლო J_f ფუნქციის ზრდადობა კი არის ლემა 13.7.1-ის შედეგი.

ახლა დავადგინოთ S_f სინგულარული კომპონენტის ზრდადობა. შევნიშნოთ, რომ

$$A_f = A_{f-J_f} \text{ და } S_f = S_{f-J_f}.$$

მართლაც, J_f-ის წარმოებულის თითქმის ყველგან ნულთან ტოლობის გამო (იხ. თეორემა 13.5.2), f და $f - J_f$ ფუნქციების აბსოლუტურად უწყვეტი კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევა, ე.ი. $A_f = A_{f-J_f}$. შედეგად, $S_{f-J_f} = (f - J_f) - A_{f-J_f} = (f - J_f) - A_f = S_f$.

ლემა 13.7.1-ისა და თეორემა 13.6.2-ის ძალით, $f - J_f$ ფუნქცია არის ზრდადი და უწყვეტი. საიდანაც, $S_f = S_{f-J_f}$ ტოლობისა და ლემა 13.7.2-ის საფუძველზე, ვასკვნით S_f ფუნქციის ზრდადობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 8. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის ზომები

ვთქვათ, φ არის $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. $\bar{\varphi}$ იყოს φ-ს შემდეგნაირი გაგრძელება რიცხვით ღერძზე:

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(a), & \text{თუ } -\infty < x < a, \\ \varphi(x), & \text{თუ } a \leq x \leq b, \\ \varphi(b), & \text{თუ } b < x < \infty. \end{cases}$$

განვიხილოთ ლებეგ-სტილტიესის $\mathrm{m}_{\bar{\varphi}}$ ზომის შეზღუდვა $\mathcal{L}_{\bar{\varphi}} \cap [a, b]$ კლასზე და მას ვუწოდოთ **φ ფუნქციით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის ზომა $[a, b]$ სეგმენტზე**. $\mathcal{L}_{\bar{\varphi}} \cap [a, b]$ კლასი აღვნიშნოთ $\mathcal{L}_{\varphi}$ ჩანაწერით.

ამ და მომდევნო სამ პარაგრაფში ზრდადი ფუნქციების შესახებ დადგენილი დებულებები გამოყენებული იქნება ლებეგ-სტილტიესის ერთგანზომილებიანი ზომების შესასწავლად.

შემდეგი თეორემა გვაძლევს აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის ზომების დახასიათებას.

თეორემა 13.8.1. **$[a, b]$ სეგმენტზე მოცემული ლებეგ-სტილტიესის ნებისმიერი m_φ ზომისათვის შემდეგი სამი წინადადება ერთმანეთის ეკვივალენტურია:**

- **φ ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი;**
- **$\mathcal{L} \cap [a, b] \subset \mathcal{L}_\varphi$ და მოიძებნება არაუარყოფითი $f \in L([a, b])$ ფუნქცია, ისეთი, რომ ნებისმიერი $A \in \mathcal{L} \cap [a, b]$ სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა:**

$$\mathrm{m}_\varphi(A) = \int_A f;$$

- **სამართლიანია იმპლიკაცია:**

$$(A \in \mathcal{L} \cap [a, b],\ |A| = 0) \ \Rightarrow\ (A \in \mathcal{L}_\varphi,\ \mathrm{m}_\varphi(A) = 0).$$

ლემა 13.8.1. **ვთქვათ, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ზრდადი და უწყვეტი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი $A \subset \mathbb{R}$ სიმრავლისათვის სრულდება $\mathrm{v}^*_\varphi(A) = |\varphi(A)|_*$ ტოლობა (ე.ი. A სიმრავლის „φ-გარე ზომა“ ტოლია $\varphi(A)$ სიმრავლის გარე ზომის).**

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. ვიპოვოთ $(a_n, b_n]$ მონაკვეთების სასრული ან უსასრულო მიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\sum_n (\varphi(b_n) - \varphi(a_n)) < \mathrm{v}^*_\varphi(A) + \varepsilon.$$

φ ფუნქციის უწყვეტობისა და ზრდადობის ძალით, ყოველი n-სთვის $(a_n, b_n]$ მონაკვეთის $\varphi((a_n, b_n]) = J_n$ ანასახი იქნება მონაკვეთი, რომლის ბოლოებსაც წარმოადგენენ $\varphi(a_n)$ და $\varphi(b_n)$ რიცხვები. შედეგად, $\varphi(A) \subset \bigcup_n \varphi((a_n, b_n])$ ჩართვის გათვალისწინებით დავწერთ,

$$|\varphi(A)|_* \le \left| \bigcup_n J_n \right| \le \sum_n |J_n| = \sum_n (\varphi(b_n) - \varphi(a_n)) < \mathrm{v}^*_\varphi(A) + \varepsilon. \qquad (1)$$

ახლა დავამტკიცოთ $\mathrm{v}^*_\varphi(A) < |\varphi(A)|_* + \varepsilon$ შეფასება. ამისათვის განვიხილოთ $\varphi(A)$ სიმრავლის დაფარვა $(c_n, d_n]$ მონაკვეთების სასრული ან უსასრულო მიმდევრობით, რომლისთვისაც

$$\sum_n (d_n - c_n) < |\varphi(A)|_* + \varepsilon.$$

φ ფუნქციის ზრდადობისა და უწყვეტობის ძალით, ყოველი n-სთვის $(c_n, d_n]$ მონაკვეთის $\varphi^{-1}((c_n, d_n])$ წინასახე იქნება $(a_n, b_n]$ მონაკვეთი, ისეთი, რომ $\varphi(a_n) = c_n$ და $\varphi(b_n) = d_n$. შედეგად, $A \subset \bigcup_n (a_n, b_n]$ ჩართვის გათვალისწინებით დავწერთ,

$$\mathrm{v}_\varphi^*(A) \leq \mathrm{v}_\varphi^*\left(\bigcup_n (a_n, b_n]\right) \leq \sum_n \mathrm{v}_\varphi((a_n, b_n]) =$$

$$= \sum_n (\varphi(b_n) - \varphi(a_n)) = \sum_n (d_n - c_n) < |\varphi(A)|_* + \varepsilon. \qquad (2)$$

(1) და (2) შეფასებებიდან, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის საფუძველზე, ვასკვნით $\mathrm{v}_\varphi^*(A) = |\varphi(A)|_*$ ტოლობას. ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 13.8.1-ის დამტკიცება. $1) \Rightarrow 2)$ **იმპლიკაცია**: თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ φ-ს ზრდადობისა და აბსოლუტურად უწყვეტობის გამო, $\varphi' \geq 0$ და $\varphi' \in L([a, b])$.

განვიხილოთ $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ν ფუნქცია:

$$\nu(A) = \int_A \varphi' \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b]).$$

ლებეგის ინტეგრალის თვისებების ძალით, ასეთი ფუნქცია წარმოადგენს ზომას $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ კლასზე.

ნებისმიერი $c, d \in [a, b], c < d$, წერტილებისათვის, φ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის ძალით, გვაქვს, რომ

$$\mathrm{m}_\varphi([c, d]) = \mathrm{m}_\varphi((c, d]) = \varphi(d) - \varphi(c) = \int_{[c,d]} \varphi' = \int_{(c,d]} \varphi'. \qquad (4)$$

შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{I} \cap [a, b]$ ნახევარრგოლი შედგება $[a, b]$ სეგმენტში მოთავსებული $[a, d]$ და $(c, d]$ სახის მონაკვეთებისაგან. ამასთან, თეორემა 3.3.3-ის თანახმად, $\mathcal{I} \cap [a, b]$ კლასით წარმოქმნილი σ-ალგებრა არის $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ კლასის ტოლი, ე.ი.

$$\sigma a(\mathcal{I} \cap [a, b]) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b].$$

აღნიშნულის გათვალისწინებით, (4) ტოლობისა და ზომის გაგრძელების ერთადერთობის შესახებ 5.5.1 თეორემის საფუძველზე დავასკვნით, რომ $\mathrm{m}_\varphi(A) = \nu(A) = \int_A \varphi'$ ნებისმიერი $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ სიმრავლისათვის. აქედან, 6.5.3 შენიშვნის გათვალისწინებით, ადვილად მიიღება მეორე წინადადების სამართლიანობა.

2) $\Rightarrow$ 1) **იმპლიკაცია**: ვთქვათ, $f \in L([a,b])$ არის არაუარყოფითი ფუნქცია მეორე წინადადებიდან. მაშინ ყოველი $x \in [a,b]$ წერტილისათვის გვექნება, რომ

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \mathrm{m}_{\varphi}((a,x]) = \int_{(a,x]} f = \int_{[a,x]} f.$$

საიდანაც, ჯამებადი ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალის (როგორც წერტილის ფუნქციის) აბსოლუტურად უწყვეტობის გათვალისწინებით, ვასკვნით φ-ს აბსოლუტურად უწყვეტობას.

1) $\Leftrightarrow$ 3) **ეკვივალენტობა**: შევნიშნოთ, რომ მესამე წინადადების შესრულების შემთხვევაში φ იქნება უწყვეტი. მართლაც, ნებისმიერი $x \in [a,b]$ წერტილისათვის სრულდება პირობა: $\mathrm{m}_{\varphi}(\{x\}) = 0$, რაც, ადვილი დასანახია, რომ გამოიწვევს φ-ს უწყვეტობას x წერტილში. ამ შენიშვნის საფუძველზე, შეგვიძლია φ ჩავთვალოთ უწყვეტ ფუნქციად.

თეორემა 13.3.2-ის ძალით φ-ს აბსოლუტურად უწყვეტობა ტოლფასია იმისა, რომ φ-ს ჰქონდეს (N) თვისება. ეს თვისება კი, ლემა 13.8.1-ის გათვალისწინებით, ტოლფასია მესამე წინადადების.

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 13.8.1. თეორემა 13.8.1 გამოკვეთს ზომის თეორიისათვის ერთ უმნიშვნელოვანეს ზოგად პრინციპს. სახელდობრ, თეორემის მეორე წინადადება გვეუბნება, რომ m_{φ} არის რაღაც ჯამებადი ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი (ე.ი. m_{φ} ზომა დაიყვანება ეტალონურად მიჩნეულ ლებეგის m ზომაზე ინტეგრების პროცესის მეშვეობით). მესამე პირობა კი გამოხატავს m_{φ} ზომის არაკონტრასტულობას ლებეგის ზომასთან მიმართებაში, იმ თვალსაზრისით, რომ m_{φ} არ ახდენს დადებითი მასის თავმოყრას ლებეგის აზრით ნულზომიან სიმრავლეებზე. აღნიშნული ორი თვისების ეკვივალენტობა სრულდება ზოგად სიტუაციაშიც, როცა σ-ალგებრაზე მოცემულ ეტალონად მიჩნეულ μ ზომასთან მიმართებაში შეისწავლება იგივე σ-ალგებრაზე განსაზღვრული რაიმე ν ზომა. შესაბამისი დებულება ცნობილია რადონ-ნიკოდიმის თეორემის სახელწოდებით და დამტკიცებული იქნება მე-15 თავში.

შემდგომში, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულ ლებეგ-სტილტიესის m_{φ} ზომას ვუწოდოთ **აბსოლუტურად უწყვეტი**, თუ მისი წარმომქმნელი φ ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი.

შენიშვნა 13.8.2. თეორემა 13.8.1-ის ძალით, აბსოლუტურად უწყვეტი m_{φ} ზომისთვის სრულდება $\mathcal{L} \cap [a,b] \subset \mathcal{L}_{\varphi}$ ჩართვა. ეს ჩართვა შეიძლება მკაცრი იყოს. მართლაც, თუ φ ფუნქცია მუდმივია რაიმე $[c,d] \subset [a,b]$ მონაკვეთზე, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი $A \subset [c,d]$ ქვესიმრავლე იქნება m_{φ}-ზომადი, რაც, ლებეგის აზრით არაზომადი $A \subset [c,d]$ ქვესიმრავლის არსებობის გათვალისწინებით, იწვევს $\mathcal{L} \cap [a,b] \subset \mathcal{L}_{\varphi}$ მკაცრ ჩართვას.

§ 9. ნახტომთა ფუნქციებით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის ზომები

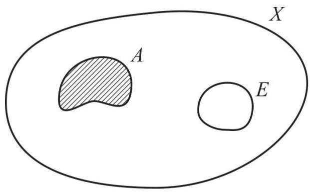
ვთქვათ, φ არის ნახტომთა ფუნქცია $[a,b]$ სეგმენტზე, რომელიც წყვეტილია t_n წერტილებში და t_n-ში მარცხენა და მარჯვენა ნახტომები, შესაბამისად, l_n და r_n რიცხვების ტოლია. ნახტომთა ფუნქციის თვისებებიდან გამომდინარე, φ არის ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი r_n რიცხვი ნულის ტოლია და ყოველი l_n რიცხვი დადებითია. შედეგად, ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ნახტომთა φ ფუნქციისათვის სამართლიანია წარმოდგენა:

$$\varphi(x)=\sum_{t_n\le x} l_n \qquad (x\in[a,b]). \tag{1}$$

სადაც $l_n>0$ ყოველი n-სთვის.

ვთქვათ, (X,S,μ) ზომიანი სივრცეა. ამბობენ, რომ μ **თავმოყრილია $A\subset X$ სიმრავლეზე**, თუ (ნახ. 13.4)

$$(E\subset X\setminus A \;\; E\in \mathrm{S})\Rightarrow \mu(E)=0.$$



ნახ. 13.4.

μ ზომას ეწოდება **დისკრეტული**, თუ ის თავმოყრილია რაიმე არაუმეტეს თვლად სიმრავლეზე.

შენიშვნა 13.9.1. ვთქვათ, μ დისკრეტული ზომაა, რომელიც თავმოყრილია A სიმრავლეზე. თუ A სიმრავლის ელემენტებს გადავნომრავთ: $A=\{t_n : n\in N\subset\mathbb{N}\}$ და აღვნიშნავთ $l_n=\mu(\{t_n\})$, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

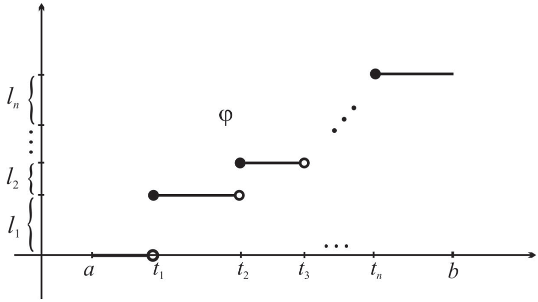
$$\mu(E)=\sum_{t_n\in E\cap A} l_n \qquad (E\in \mathrm{S}).$$

შენიშვნა 13.9.2. თუ m_φ არის $[a,b]$ მონაკვეთზე მოცემული ლებეგ-სტილტიესის დისკრეტული ზომა, მაშინ ნებისმიერი $E\subset[a,b]$ ქვესიმრავლე იქნება m_φ-ზომადი. მართლაც, განვიხილოთ არაუმეტეს თვლადი $A\subset[a,b]$ სიმრავლე, რომელზეც თავმოყრილია m_φ ზომა. მაშინ $[a,b]\setminus A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\cap[a,b]\subset\mathcal{L}_\varphi$ და $\mathrm{m}_\varphi([a,b]\setminus A)=0$. საიდანაც, m_φ ზომის სისრულის გათვალისწინებით, მივიღებთ $\mathcal{L}_\varphi=2^{[a,b]}$ ტოლობას.

თეორემა 13.9.1. $[a, b]$ **სეგმენტზე მოცემული ლებეგ-სტილტიესის ნებისმიერი** m_φ **ზომისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:**

- φ **არის ნახტომთა ფუნქცია მუდმივის სიზუსტით;**
- m_φ **არის დისკრეტული ზომა.**

ნახ. 13.5-ზე გამოსახულია დისკრეტული ზომის წარმომქმნელი ნახტომთა φ ფუნქცია, რომელსაც აქვს სასრული რაოდენობის წყვეტის წერტილები.



ნახ. 13.5.

დამტკიცება. $1) \Rightarrow 2)$ **იმპლიკაცია**: ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ φ არის ნახტომთა ფუნქცია, რომლის წყვეტის წერტილებია t_n წერტილები, ხოლო მათში მარცხენა ნახტომები არიან, შესაბამისად, $l_n > 0$ რიცხვები.

განვიხილოთ φ ფუნქციის $\bar{\varphi}$ გაგრძელება რიცხვით ღერძზე წინა პარაგრაფში მითითებული წესით. (1)-ის გათვალისწინებით, ადვილი დასანახია $\bar{\varphi}$-სათვის შემდეგი წარმოდგენის სამართლიანობა:

$$\bar{\varphi}(x) = \sum_{t_n \le x} l_n \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

განვიხილოთ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ν ფუნქცია:

$$\nu(E) = \sum_{t_n \in E} l_n \qquad (E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ ასეთი ფუნქცია წარმოადგენს ზომას $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ კლასზე.

(2)-ის გათვალისწინებით ყოველი $(c, d]$ მონაკვეთისათვის გვექნება,

$$\mathrm{m}_{\bar{\varphi}}((c,d]) = \bar{\varphi}(d) - \bar{\varphi}(c) = \sum_{t_n \in (c,d]} l_n = \nu((c,d]).$$

საიდანაც, ზომის გაგრძელების ერთადერთობის შესახებ 5.5.1 თეორემის ძალით, მივიღებთ $\mathrm{m}_{\bar{\varphi}}(E) = \nu(E)$ ტოლობას ნებისმიერი $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ სიმრავლისათვის. აქედან, თავის მხრივ, მიიღება, რომ $\mathrm{m}_{\bar{\varphi}}$ წარმოადგენს t_n წერტილებისაგან შედგენილ A სიმრავლეზე თავმოყრილ დისკრეტულ ზომას. ცხადია, ასეთივე იქნება m_{φ} ზომაც. ამით $1) \Rightarrow 2)$ იმპლიკაცია დამტკიცებულია.

$2) \Rightarrow 1)$ **იმპლიკაცია**: ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ m_{φ} არანულოვანი დისკრეტული ზომაა. ვთქვათ, m_{φ} თავმოყრილია არაუმეტეს თვლად $A = \{t_n : n \in N \subset \mathbb{N}\}$ სიმრავლეზე. ადვილი დასანახია, რომ ასეთივე იქნება $\mathrm{m}_{\bar{\varphi}}$ ზომაც. აღვნიშნოთ $l_n = \mathrm{m}_{\varphi}(\{t_n\})$. მაშინ ყოველი $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლისათვის,

$$\mathrm{m}_{\bar{\varphi}}(E) = \sum_{t_n \in E} l_n.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ $\bar{\varphi}(d) - \bar{\varphi}(c) = \mathrm{m}_{\bar{\varphi}}((c,d])$ ტოლობას, ყოველი $x \in (a,b]$ წერტილისათვის დავწერთ,

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(a) = \sum_{t_n \in (a,x]} l_n = \sum_{t_n \le x} l_n.$$

ეს წარმოდგენა კი იწვევს იმას, რომ $\varphi - \varphi(a)$ არის ნახტომთა ფუნქცია. ამით $2) \Rightarrow 1)$ იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 10. სინგულარული ფუნქციებით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის ზომები

ლებეგ-სტილტიესის m_{φ} ზომას ეწოდება **სინგულარული**, თუ ის თავმოყრილია ლებეგის აზრით ნულზომიან რაიმე სიმრავლეზე.

შენიშვნა 13.10.1. ლებეგის აზრით ნულზომიანი ყოველი სიმრავლე თავის მხრივ ჩართულია ასეთივე ტიპის ბორელის სიმრავლეში (იხ. ლემა 5.4.2). ამიტომ სინგულარული ზომის განსაზღვრება ეკვივალენტურ ფორმას მიიღებს, თუ მასში ნულზომიან სიმრავლეს დამატებით მოვთხოვთ ბორელის კლასისადმი მიკუთვნებას.

ლებეგ-სტილტიესის m_{φ} ზომას ეწოდება **უწყვეტი**, თუ ყოველი $x \in [a,b]$ წერტილისათვის $\mathrm{m}_{\varphi}(\{x\}) = 0$ (ე.ი. ყოველი ერთწერტილიანი სიმრავლის m_{φ}-ზომა ნულის ტოლია).

შენიშვნა 13.10.2. ადვილი დასანახია, რომ $[a,b]$ მონაკვეთზე მოცემული ლებეგ-სტილტიესის m_{φ} ზომის უწყვეტობა ტოლფასია φ ფუნქციის უწყვეტობის.

შენიშვნა 13.10.3. ყოველი დისკრეტული ლებეგ-სტილტიესის m_φ ზომა სინგულარულია, ამასთან, თუ m_φ არაა იგივურად ნულის ტოლი, მაშინ m_φ არაა უწყვეტი.

თეორემა 13.10.1. $[a,b]$ **სეგმენტზე მოცემული ლებეგ-სტილტიესის ნებისმიერი** m_φ **ზომისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:**

- φ **არის სინგულარული ფუნქცია მუდმივის სიზუსტით;**
- m_φ **არის სინგულარული და უწყვეტი ზომა.**

დამტკიცება. 1) $\Rightarrow$ 2) **იმპლიკაცია**: $E \subset [a,b]$ იყოს ლებეგის აზრით სრული ზომის სიმრავლე, რომლის წერტილებში φ ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია. ლემა 13.3.2-ის ძალით, $\varphi(E)$ ანასახის ლებეგის ზომა ნულის ტოლია, საიდანაც, ლემა 13.8.1-ის საფუძველზე, ვასკვნით $\mathrm{m}_\varphi(E)=0$ ტოლობას. აქედან გამომდინარეობს, რომ m_φ ზომა თავმოყრილია ლებეგის აზრით ნულზომიან $[a,b]\setminus E$ სიმრავლეზე. ამით 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია დამტკიცებულია.

2) $\Rightarrow$ 1) **იმპლიკაცია**: შენიშვნა 13.10.1-ის ძალით მოიძებნება ლებეგის აზრით სრული ზომის $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a,b]$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mathrm{m}_\varphi(E)=0$. ლემა 13.8.1-ის საფუძველზე გვექნება, რომ $|\varphi(E)|=0$. A იყოს E-ს ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც φ არის წარმოებადი. ზრდადობის გამო, φ თითქმის ყველგან (ლებეგის ზომის მიხედვით) წარმოებადია. შედეგად, $|A| = b-a$. ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის აღვნიშნოთ $A_\varepsilon = \{x \in A : \varphi'(x) > \varepsilon\}$. ლემა 12.6.2-ის ძალით დავწერთ,

$$0 = |\varphi(E)| \geq |\varphi(A)|_* \geq \varepsilon |A_\varepsilon|_*.$$

ამრიგად, $|A_\varepsilon|=0$. საიდანაც, $A \cap \{\varphi' > 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty A_{1/n}$ ტოლობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ: $|A \cap \{\varphi'>0\}| = 0$. შედეგად, $\varphi'(x)=0$ თითქმის ყოველ $x \in [a,b]$ წერტილში, ლებეგის ზომის მიხედვით. აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ შენიშვნა 13.10.2-ის თანახმად, φ არის უწყვეტი, დავასკვნით φ ფუნქციის სინგულარულობას მუდმივის სიზუსტით. ამით 2) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 13.10.4. განვიხილოთ კანტორის θ ფუნქცია. თეორემა 13.10.1-ის ძალით, m_θ არის $[0,1]$ მონაკვეთზე მოცემული სინგულარული ზომა. ყურადღება შევაჩეროთ m_θ-ზომად სიმრავლეთა $\mathcal{L}_\theta$ კლასზე. სახელდობრ, ვაჩვენოთ, რომ $\mathcal{L} \cap [0,1] \subset \mathcal{L}_\theta$ და $\mathcal{L}_\theta \subset \mathcal{L} \cap [0,1]$ ჩართვებს შორის არცერთი არაა სამართლიანი.

$\mathrm{m}_\theta([0,1] \setminus \mathbb{D}) = 0$ ტოლობისა და შენიშვნა 6.5.3-ის ძალით, $[0,1]$-ის ნებისმიერი ქვესიმრავლე, რომელიც კანტორის სიმრავლის გარეთ მდებარეობს, იქნება m_θ-ზომადი (კერძოდ, ნულის ტოლი m_θ ზომის მქონე). შედეგად, ნებისმიერ ინტერვალში ლებეგის აზრით არაზომადი ქვესიმრავლის

არსებობის გამო, დავასკვნით, რომ $\mathcal{L}_\theta \subset \mathcal{L} \cap [0,1]$ ჩართვა არაა სამართლიანი.

თეორემა 6.5.1-ის ძალით არსებობს $A \subset [0,1]$ სიმრავლე, რომელიც არაა m_θ-ზომადი. შევნიშნოთ, რომ $A \setminus \mathbb{D} \subset [0,1] \setminus \mathbb{D}$ ჩართვის გამო, $A \setminus \mathbb{D}$ სიმრავლე არის m_θ-ზომადი. შედეგად, $A \cap \mathbb{D}$ სიმრავლე არ იქნება m_θ-ზომადი. მეორე მხრივ, $A \cap \mathbb{D}$ ზომადია ლებეგის აზრით, როგორც ნულის ტოლი ლებეგის ზომის მქონე $\mathbb{D}$ სიმრავლის ქვესიმრავლე. ამრიგად, $A \cap \mathbb{D} \in (\mathcal{L} \cap [0,1]) \setminus \mathcal{L}_\theta$, ე.ი. $\mathcal{L} \cap [0,1] \subset \mathcal{L}_\theta$ ჩართვა არაა სამართლიანი.

§ 11. ლებეგ-სტილტიესის ზომის დაშლა სამი კომპონენტის ჯამის სახით

ვთქვათ, φ არის $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. მაშინ 13.7.1 და 13.6.3 თეორემების ძალით, φ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტი, დისკრეტული და სინგულარული კომპონენტები აგრეთვე ზრდადი ფუნქციებია და სრულდება წარმოდგენა: $\varphi = A_\varphi + J_\varphi + S_\varphi$. ამასთან, J_φ კომპონენტის შემთხვევაში, ადგილი აქვს მარჯვნიდან უწყვეტობას (იხ. 13.6.3 შენიშვნა). შედეგად, შეგვიძლია განვიხილოთ m_{A_φ}, m_{J_φ} და m_{S_φ} ლებეგ-სტილტიესის ზომები. შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ეს ზომები ახდენენ m_φ-ს დაშლას სამ კომპონენტად.

თეორემა 13.11.1. **$[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული ლებეგ-სტილტიესის ნებისმიერი m_φ ზომა ბორელის $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a,b]$ კლასზე იშლება m_{A_φ}, m_{J_φ} და m_{S_φ} ზომების ჯამის სახით, ე.ი. ყოველი $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a,b]$ სიმრავლისათვის,**

$$\mathrm{m}_\varphi(A) = \mathrm{m}_{A_\varphi}(A) + \mathrm{m}_{J_\varphi}(A) + \mathrm{m}_{S_\varphi}(A).$$

ამასთან, ეს ტოლობა გვაძლევს ბორელის კლასზე m_φ ზომის ერთადერთ შესაძლო დაშლას ლებეგ-სტილტიესის სამი ზომის ჯამის სახით, რომელთაგან პირველი არის აბსოლუტურად უწყვეტი, მეორე - დისკრეტული, ხოლო მესამე კი - სინგულარული და უწყვეტი.

შენიშვნა 13.11.1. საზოგადოდ, m_φ, m_{A_φ}, m_{J_φ} და m_{S_φ} ზომების განსაზღვრის არეები განსხვავებული კლასებია. იმთავითვე ცნობილია მხოლოდ ის, რომ ბორელის კლასი შედის თითოეულ მათგანში. ამითაა გამოწვეული m_φ ზომის კომპონენტებად დაშლისას ბორელის კლასით შემოფარგვლა. თანაც ბორელის კლასზე ლებეგ-სტილტიესის ზომის ყოფაქცევა სრულ ინფორმაციას იძლევა თავად ზომის შესახებ. ამიტომ თეორემა 13.11.1-ში $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a,b]$ კლასის განხილვით ზოგადობა პრინციპულად არ იზღუდება.

ლემა 13.11.1. ვთქვათ, φ და ψ რიცხვით ღერძზე განსაზღვრული ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქციებია. მაშინ ყოველი $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\mathrm{m}_{\varphi+\psi}(A) = \mathrm{m}_{\varphi}(A) + \mathrm{m}_{\psi}(A).$$

შედეგად, ანალოგიური დასკვნა სამართლიანია $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი φ და ψ ფუნქციების შემთხვევაშიც.

დამტკიცება. განვიხილოთ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ν ფუნქცია:

$$\nu(A) = \mathrm{m}_{\varphi}(A) + \mathrm{m}_{\psi}(A) \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

ცხადია, ასეთი ფუნქცია წარმოადგენს ზომას $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ კლასზე.

ყოველი $(c, d]$ მონაკვეთისათვის გვაქვს, რომ

$$\mathrm{m}_{\varphi+\psi}((c, d]) = (\varphi + \psi)(d) - (\varphi + \psi)(c) =$$

$$= [\varphi(d) - \varphi(c)] + [\psi(d) - \psi(c)] = \mathrm{m}_{\varphi}((c, d]) + \mathrm{m}_{\psi}((c, d]) = \nu((c, d]).$$

საიდანაც, ზომის გაგრძელების ერთადერთობის შესახებ 5.5.1 თეორემის ძალით, მივიღებთ $\mathrm{m}_{\varphi+\psi}(A) = \nu(A)$ ტოლობას ნებისმიერი $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ სიმრავლისათვის. ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 13.11.1-ის დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ $\varphi = A_{\varphi} + J_{\varphi} + S_{\varphi}$ წარმოდგენას და გამოვიყენებთ ლემა 13.11.1-ს, ყოველი $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ სიმრავლისათვის გვექნება, რომ

$$\mathrm{m}_{\varphi}(A) = \mathrm{m}_{A_{\varphi}}(A) + \mathrm{m}_{J_{\varphi}}(A) + \mathrm{m}_{S_{\varphi}}(A).$$

ახლა ვაჩვენოთ წარმოდგენის ერთადერთობა. დავუშვათ, ყოველი $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ სიმრავლისათვის,

$$\mathrm{m}_{\varphi}(A) = \mathrm{m}_{\varphi_1}(A) + \mathrm{m}_{\varphi_2}(A) + \mathrm{m}_{\varphi_3}(A),$$

სადაც m_{φ_1} არის აბსოლუტურად უწყვეტი, m_{φ_2} - დისკრეტული, ხოლო m_{φ_3} - სინგულარული და უწყვეტი. მაშინ, 13.8.1, 13.9.1 და 13.10.1 თეორემების თანახმად, φ_1 ფუნქცია იქნება აბსოლუტურად უწყვეტი, φ_2 - ნახტომთა ფუნქცია მუდმივის სიზუსტით, ხოლო φ_3 - სინგულარული მუდმივის სიზუსტით. ლემა 13.11.1-ის ძალით, ყოველი $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ სიმრავლისათვის შესრულდება ტოლობა:

$$\mathrm{m}_{\varphi}(A) = \mathrm{m}_{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3}(A).$$

საიდანაც, თუ A-ს როლში ავიღებთ $(a, x]$ სახის მონაკვეთებს, დავასკვნით, რომ ყოველი $x \in (a, b]$-სთვის,

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)(x) - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)(a).$$

შედეგად, ყოველი $x \in [a,b]$-სთვის,

$$\varphi(x) = [\varphi_1(x) - \varphi_1(a) + \varphi(a)] + [\varphi_2(x) - \varphi_2(a)] + [\varphi_3(x) - \varphi_3(a)].$$

მიღებულ წარმოდგენაში პირველი ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია, მეორე არის ნახტომთა ფუნქცია, ხოლო მესამე კი - სინგულარული ფუნქცია. მაშინ, ლებეგის დაშლის ერთადერთობის გამო (იხ. თეორემა 13.6.3), გვექნება, რომ $A_\varphi = \varphi_1 - \varphi_1(a) + \varphi(a)$, $J_\varphi = \varphi_2 - \varphi_2(a)$ და $S_\varphi = \varphi_3 - \varphi_3(a)$. აქედან კი, უშუალოდ მიიღება $\mathrm{m}_{A_\varphi} = \mathrm{m}_{\varphi_1}$, $\mathrm{m}_{J_\varphi} = \mathrm{m}_{\varphi_2}$ და $\mathrm{m}_{S_\varphi} = \mathrm{m}_{\varphi_3}$ ტოლობები. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თ ა ვ ი 14

ინტეგრება და დიფერენცირება $\mathbb{R}^n$ სივრცეში

მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში, უპირველესად, გარკვევას მოითხოვს, თუ რა უნდა მივიჩნიოთ დიფერენცირებად, ე.ი. ინტეგრების შებრუნებულ ოპერაციად. თუ გავაკეთებთ ზოგად მონახაზს, პასუხი ასეთია:

- განუსაზღვრელ ინტეგრალს უნდა შევხედოთ, როგორც სიმრავლის ფუნქციას;
- დიფერენცირება უნდა გავიგოთ, როგორც ფუნქციის ინტეგრალური საშუალოების კრებადობა.

ასეთი მიდგომა უკვე გამოყენებული იქნა ერთგანზომილებიან სიტუაციაში, როცა ჩვეულებრივი დიფერენცირების ოპერაციის განმსაზღვრელი გამოსახულება: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ გარდავქმენით $I=[x,x+h]$ მონაკვეთზე აღებულ $\frac{1}{|I|}\int_I f$ ინტეგრალურ საშუალოდ, შემდეგ კი ვაჩვენეთ ამ საშუალოების თითქმის ყველგან კრებადობა f ფუნქციისაკენ. ეს გზა შეიძლება გავიმეოროთ მრავალგანზომილებიან შემთხვევაშიც. თუმცა, იმთავითვე ისმის საკითხი იმის შესახებ, თუ რა ტიპის სიმრავლეები შეასრულებენ ერთგანზომილებიანი მონაკვეთის მსგავს როლს? ასეთი შესაძლებლობა კი მრავალია. მაგალითად, n-განზომილებიანი კუბური მონაკვეთი, n-განზომილებიანი ბირთვი, n-განზომილებიანი მონაკვეთი, n-განზომილებიანი მართკუთხა პარალელეპიპედი - თითოეული ამ ტიპის სიმრავლეთა შორის შეიძლება მივიჩნიოთ ინტეგრალურ საშუალოთა წარმომქმნელად. ასეთი დაწვრილებითი განხილვა სულაც არაა ზედმეტი, რადგან, როგორც ირკვევა, მაგალითად, ბირთვების მეშვეობით წარმოქმნილი დიფერენცირების პროცესი წარმოადგენს ინტეგრების შებრუნებულ ოპერაციას, ხოლო n-განზომილებიანი მონაკვეთების მეშვეობით წარმოქმნილი კი - არა. ასე რომ, ლებეგის ჯერადი ინტეგრალის დიფერენცირების პროცესის თვისებები არსებითადაა დამოკიდებული ინტეგრალური საშუალოების წარმომქმნელი სიმრავლეების გეომეტრიულ აგებულებაზე.

§ 1. დიფერენცირების ბაზისის ცნება

ვიტყვით, რომ მოცემული გვაქვს B **დიფერენცირების ბაზისი** $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, თუ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის $B(x)$ არის სიმრავლეთა რაიმე კლასი შემდეგი თვისებებით:

- ყოველი $I \in B(x)$ სიმრავლე შეიცავს x წერტილს,
- ყოველი $I \in B(x)$ სიმრავლე არის შემოსაზღვრული, ლებეგის აზრით ზომადი და $|I| > 0$,
- $B(x)$ კლასიდან შეიძლება ამოვარჩიოთ (I_k) მიმდევრობა, რომელიც "მოიჭიმება" x წერტილისაკენ, ე.ი. $\operatorname{diam} I_k \to 0 \ (k \to \infty)$.

გადმოცემის სისრულისათვის ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი განსაზღვრებები:

- **n-განზომილებიანი მონაკვეთი** ეწოდება n ცალი ერთგანზომილებიანი მონაკვეთის დეკარტულ ნამრავლს,
- **n-განზომილებიანი კუბური მონაკვეთი** ეწოდება ერთი და იგივე სიგრძის n ცალი ერთგანზომილებიანი მონაკვეთის დეკარტულ ნამრავლს,
- **n-განზომილებიანი მართკუთხა პარალელეპიპედი** (ორგანზომილებიან შემთხვევაში - მართკუთხედი) ეწოდება n-განზომილებიანი მონაკვეთის მობრუნებით მიღებულ სიმრავლეს.

შევთანხმდეთ, რომ შემდგომში:

- $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის გარე ზომა და ზომადობის შემთხვევაში ლებეგის ზომა აღნიშნული იქნებიან, შესაბამისად, $|E|_*$ და $|E|$ ჩანაწერებით;
- $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციის ლებეგის ინტეგრალი - $\int_A f d\mathrm{m}$, აღნიშნული იქნება $\int_A f$ ჩანაწერით;
- სიმრავლისა და ფუნქციის ზომადობა განხილული იქნება ლებეგის ზომის მიმართ;
- ყოველთვის განხილული იქნება გადაუგვარებელი და სასრული ზომის მონაკვეთები.

ვთქვათ, B რაიმე დიფერენცირების ბაზისია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. ვიტყვით, რომ $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალი **წარმოებადია** (ან კიდევ, **დიფერენცირებადია**) x **წერტილში** B **ბაზისის მიხედვით**, თუ არსებობს სასრული ზღვარი:

$$\lim_{I \in B(x),\, I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I f. \tag{1}$$

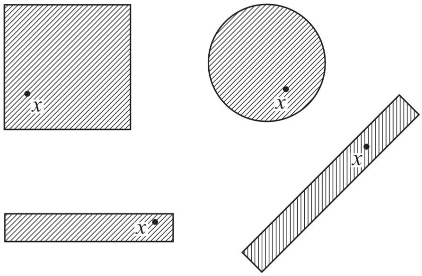
შენიშვნა 14.1.1. (1) ზღვარი (a-ს ტოლი მნიშვნელობით) შემდეგნაირად გაიგება: ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$\left| \frac{1}{|I|} \int_I f - a \right| < \varepsilon,$$

ყოველთვის, როცა $I \in B(x)$ და $\operatorname{diam} I < \delta$.

(1) ზღვრის მნიშვნელობას ეწოდება f **ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებული** x **წერტილში** B **ბაზისის მიხედვით.**

I_1, I_2, I_3 და I_4 ჩანაწერებით აღვნიშნოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული ბაზისები $\mathbb{R}^n$ სივრცეში (ნახ. 14.1):



ნახ. 14.1.

- $\mathrm{I}_1(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ შედგება x-ის შემცველი ყველა n-განზომილებიანი კუბური მონაკვეთისაგან;
- $\mathrm{I}_2(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ შედგება x-ის შემცველი ყველა n-განზომილებიანი ბირთვისაგან;
- $\mathrm{I}_3(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ შედგება x-ის შემცველი ყველა n-განზომილებიანი მონაკვეთისაგან;
- $\mathrm{I}_4(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ შედგება x-ის შემცველი ყველა n-განზომილებიანი მართკუთხა პარალელეპიპედისაგან.

ცხადია, ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ოთხივე ზემოთ მოცემული ბაზისი გაიგივება, როგორც ერთგანზომილებიანი მონაკვეთების I ბაზისი.

B ბაზისისათვის Δ_B ჩანაწერით აღვნიშნოთ $B(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ კლასების გაერთიანება, ე.ი. $\Delta_B = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} B(x)$. Δ_B კლასის სიმრავლეებს B **ბაზისის შემადგენელი სიმრავლეები** ეწოდებათ.

ვთქვათ, B რაიმე ბაზისია. ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისათვის განვიხილოთ მასთან შემდეგი წესით დაკავშირებული $M_B(f)$ ფუნქცია:

$$M_B(f)(x) = \sup_{I \in B(x)} \frac{1}{|I|} \int_I |f| \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

M_B ოპერატორს უწოდებენ B **ბაზისის შესაბამის მაქსიმალურ ოპერატორს.**

ადვილი შესამოწმებელია, რომ M_B ოპერატორს აქვს შემდეგი თვისებები:

$$0 \leq M_B(f)(x) \leq \infty, \tag{2}$$

$$M_B(f+g)(x) \le M_B(f)(x) + M_B(g)(x), \tag{3}$$

$$M_B(\alpha f)(x) = |\alpha| M_B(f)(x). \tag{4}$$

ვთქვათ, B რაიმე ბაზისია და $r > 0$. განვიხილოთ $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციასთან შემდეგი წესით დაკავშირებული $M_B^r(f)$ ფუნქცია:

$$M_B^r(f)(x) = \sup_{I \in B(x),\ \operatorname{diam} I < r} \frac{1}{|I|} \int_I |f| \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

M_B^r-ს უწოდებენ B **ბაზისის შესაბამის** r**-წაკვეთილ მაქსიმალურ ოპერატორს**.

ადვილი დასანახია, რომ წაკვეთილ მაქსიმალურ ოპერატორს აქვს (2)-(4)-ის ანალოგიური თვისებები, ამასთან, $M_B^{r_1}(f)(x) \le M_B^{r_2}(f)(x)$, როცა $r_1 < r_2$, $M_B^r(f)(x) \le M_B(f)(x)$ და $M_B(f)(x) = \lim\limits_{r \to \infty} M_B^r(f)(x)$.

§ 2. ინტეგრალთა დიფერენცირება ვიტალის თვისების მქონე ბაზისების მიხედვით

ჩვენი უახლოესი მიზანია ისეთი ბაზისების მითითება, რომელთა მიერ წარმოქმნილი დიფერენცირების პროცესი წარმოადგენს ინტეგრების შებრუნებულ ოპერაციას. ამ თვალსაზრისით, არსებითია შემდეგი განსაზღვრება:

ვიტყვით, რომ დიფერენცირების B ბაზისს აქვს **ვიტალის თვისება**, თუ მოიძებნება $c > 0$ რიცხვი, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი წინადადება: ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე დაფარულია რაიმე $\Pi \subset \Delta_B$ კლასის სიმრავლეებით, რომელთა დიამეტრები ერთობლივ შემოსაზღვრულია. მაშინ Π-დან შეიძლება გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეებისაგან შედგენილი, არაუმეტეს თვლადი Π' ქვეკლასი, ისეთი, რომ

$$\sum_{I \in \Pi'} |I| \ge c|E|_*.$$

სამართლიანია ინტეგრალთა დიფერენცირების შესახებ ლებეგის თეორემის შემდეგი მრავალგანზომილებიანი ანალოგი.

თეორემა 14.2.1. ვთქვათ, B არის ვიტალის თვისების მქონე ბაზისი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. მაშინ ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელ ინტეგრალს თითქმის ყოველ $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილში აქვს წარმოებული B ბაზისის მიხედვით, რომელიც $f(x)$-ის ტოლია. უფრო მეტიც, ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისათვის თითქმის ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილი არის ლებეგის წერტილი B ბაზისის მიხედვით, ე.ი.

$$\lim_{I \in B(x),\ I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f(x)| = 0.$$

თეორემა 14.2.1 მტკიცდება თეორემა 12.1.2-ის მსგავსად. დამტკიცებისათვის არსებითი მნიშვნელობისაა სუსტი ტიპის შეფასება მაქსიმალური ოპერატორისათვის, რომელიც მოიცემა შემდეგი დებულებით.

თეორემა 14.2.2. ვთქვათ, B არის ვიტალის თვისების მქონე ბაზისი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. მაშინ ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისათვის სრულდება შეფასება:

$$|\{M_B(f) > \lambda\}|_* \leq \frac{1/c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \qquad (0 < \lambda < \infty), \tag{1}$$

სადაც c არის მუდმივი ვიტალის თვისების განსაზღვრებიდან.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $r > 0$ რიცხვისათვის r-წაკვეთილი მაქსიმალური M_B^r ოპერატორი აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$|\{M_B^r(f) > \lambda\}|_* \leq \frac{1/c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \qquad (0 < \lambda < \infty).$$

ამის შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\{M_B^k(f) > \lambda\}$ $(k \in \mathbb{N})$ წარმოადგენს სიმრავლეთა ზრდად მიმდევრობას, რომლის ზღვარი არის $\{M_B(f) > \lambda\}$ სიმრავლე, გარე ზომის ქვემოდან უწყვეტობის საფუძველზე მივიღებთ საჭირო შეფასებას.

ვთქვათ, $r > 0$ და $\lambda \in (0, \infty)$. ყოველი $x \in \{M_B^r(f) > \lambda\}$ წერტილისათვის ვიპოვოთ $I_x \in B(x)$ სიმრავლე, ისეთი, რომ

$$\operatorname{diam} I_x < r, \tag{2}$$

$$\frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} |f| > \lambda. \tag{3}$$

(3) შეფასება შემდეგნაირად შეიძლება გადავწეროთ:

$$|I_x| < \frac{1}{\lambda} \int_{I_x} |f|. \tag{4}$$

სიმრავლეების $\Pi = \{I_x\}$ კლასი ფარავს $\{M_B^r(f) > \lambda\}$ სიმრავლეს, ამასთან, (2)-ის ძალით, Π კლასის სიმრავლეებს აქვთ ერთობლივ შემოსაზღვრული დიამეტრები. ეს საფუძველს გვაძლევს, ვიტალის თვისების გამოყენებით Π-დან გამოვყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეებისაგან შედგენილი არაუმეტეს თვლადი Π' ქვეკლასი, რომლისთვისაც

$$\sum_{I \in \Pi'} |I| \geq c|\{M_B^r(f) > \lambda\}|_*. \tag{5}$$

$I \in \Pi'$ სიმრავლეების წყვილ-წყვილად თანაუკვეთობისა და $(4), (5)$ პირობების ძალით დავწერთ,

$$|\{M_B^r(f) > \lambda\}|_* \leq \frac{1}{c} \sum_{I \in \Pi'} |I| < \frac{1}{c} \sum_{I \in \Pi'} \frac{1}{\lambda} \int_I |f| =$$

$$= \frac{1}{c\lambda} \int_{\bigcup\limits_{I \in \Pi'} I} |f| \leq \frac{1}{c\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 14.2.1. თეორემა 14.2.2-ში, განსხვავებით თეორემა 12.3.1-საგან, არაა გაკეთებული დასკვნა $M_B(f)$ მაქსიმალური ფუნქციის ზომადობის შესახებ. თუმცა, თეორემა 14.2.1-ის დასამტკიცებლად სრულიად საკმარისია $\{M_B(f) > \lambda\}$ სიმრავლის გარე ზომისთვის მოცემული (1) შეფასება.

ვიტყვით, რომ სიმრავლეების Π კლასი **ვიტალის აზრით ფარავს** $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეს, თუ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისათვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $I \in \Pi$ სიმრავლე შემდეგი თვისებებით: $x \in I$ და $\operatorname{diam} I < \varepsilon$.

B ბაზისს ვუწოდოთ **კომპაქტური**, თუ მისი შემადგენელი ყოველი I სიმრავლე „თითქმის" კომპაქტურია, ე.ი. მოიძებნება კომპაქტური $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე, ისეთი, რომ $|I \triangle E| = 0$.

ცხადია, რომ კომპაქტური იქნება ნებისმიერი B ბაზისი, რომლის შემადგენელ სიმრავლეებს აქვთ ნული ზომის საზღვარი. მაგალითად, კომპაქტური არიან I_1 და I_2 ბაზისები.

ვიტალის 12.2.2 თეორემის მსგავსად მტკიცდება მისი შემდეგი მრავალგანზომილებიანი ანალოგი.

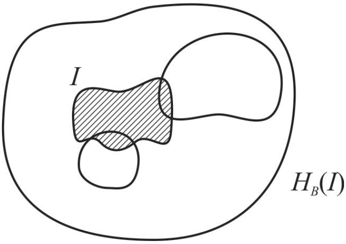
თეორემა 14.2.3. ვთქვათ, B არის ვიტალის თვისების მქონე კომპაქტური ბაზისი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. თუ $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე ვიტალის აზრით დაფარულია $\Pi \subset \Delta_B$ კლასით, მაშინ Π-დან შეიძლება გამოვყოთ, წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეებისაგან შედგენილი, არაუმეტეს თვლადი Π' ქვეკლასი, რომელიც თითქმის ფარავს E სიმრავლეს, ე.ი.

$$\left| E \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right|_* = 0.$$

შენიშვნა 14.2.2. შემდეგ პარაგრაფში ნაჩვენები იქნება, რომ კუბური მონაკვეთების I_1 და ბირთვების I_2 ბაზისებს აქვთ ვიტალის თვისება. ასე რომ, მათთვის სამართლიანია ამ პარაგრაფში მოცემული სამივე თეორემა.

§ 3. ვიტალის თვისების მქონე ბაზისების კონკრეტული მაგალითები

ვთქვათ, B რაიმე დიფერენცირების ბაზისია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. $I \in \Delta_B$ სიმრავლის **B-მოარშიება** ვუწოდოთ შემდეგი თვისებების მქონე ყველა E



ნახ. 14.2.

სიმრავლის გაერთიანებას: $E \in \Delta_B$, $E \cap I \neq \emptyset$ და $|E| < 2|I|$. $I \in \Delta_B$ სიმრავლის B-მოარშიება აღვნიშნოთ $H_B(I)$ ჩანაწერით (ნახ. 14.2).

ვიტყვით, რომ B ბაზისს აქვს **შემოსაზღვრული მოარშიების თვისება**, თუ მოიძებნება $C > 0$ მუდმივი, ისეთი, რომ ყოველი $I \in \Delta_B$ სიმრავლისათვის სრულდება შეფასება:

$$|H_B(I)|_* \leq C|I|.$$

თეორემა 14.3.1. თუ B ბაზისს აქვს შემოსაზღვრული მოარშიების თვისება, მაშინ B ბაზისს აქვს ვიტალის თვისება.

დამტკიცება. მსჯელობა მიმდინარეობს თეორემა 12.2.1-ის დამტკიცების სქემის მიხედვით.

ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე დაფარულია რაიმე $\Pi \subset \Delta_B$ კლასის სიმრავლეებით, რომელთა დიამეტრები ერთობლივ შემოსაზღვრულია. უკანასკნელი პირობის ძალით, Π კლასის სიმრავლეთა შორის შეგვიძლია ავირჩიოთ ზომის თვალსაზრისით თითქმის ყველაზე დიდი, ე.ი. $I_1 \in \Pi$, რომლისთვისაც

$$|I_1| > \frac{1}{2}\sup\{|I| : I \in \Pi\}.$$

დავუშვათ, წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $I_1, \dots, I_k \in \Pi$ სიმრავლეები უკვე არჩეულია. განვიხილოთ ყველა იმ $I \in \Pi$ სიმრავლის Π_k კლასი, რომელიც არ კვეთს არცერთს $I_1, \dots, I_k$ სიმრავლეებს შორის. თუ Π_k კლასი ცარიელია, მაშინ აგება დასრულებულად მივიჩნიოთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი, I_{k+1}-ის როლში ავიღოთ თითქმის ყველაზე დიდი Π_k კლასის წევრებს შორის, ე.ი. $I_{k+1} \in \Pi_k$, რომლისთვისაც

$$|I_{k+1}| > \frac{1}{2}\sup\{|I| : I \in \Pi_k\}.$$

აღწერილი სქემის გამოყენებით, Π კლასიდან გამოვყოფთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეების სასრულ ან თვლად $\Pi' = \{I_k\}$ ქვეკლასს. დავადგინოთ, რომ Π' აკმაყოფილებს საჭირო შეფასებას. განვიხილოთ ის შემთხვევა,

როცა Π' თვლადი კლასია. სასრული კლასის შემთხვევაში, დამტკიცება ანალოგიური და კიდევ უფრო მარტივია.

შესაძლებელია ორი ქვეშემთხვევა იმისდა მიხედვით $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \infty$, თუ $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \infty$.

პირველ ქვეშემთხვევაში დებულება ცხადია.

მეორე ქვეშემთხვევაში გვექნება, რომ

$$|I_k| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

საიდანაც გამომდინარეობს შემდეგი წინადადება: ნებისმიერი $I \in \Pi$ სიმრავლე კვეთს ერთს მაინც I_k სიმრავლეებს შორის, ე.ი. ნებისმიერი $I \in \Pi$-სთვის,

$$I \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset. \tag{1}$$

მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, აგებიდან გამომდინარე, ყოველი k-სთვის შესრულდება შეფასება: $|I_k| > |I|/2$, რაც ეწინააღმდეგება $|I_k| \to 0$ პირობას.

Θ_1 იყოს ყველა იმ $I \in \Pi$ სიმრავლის კლასი, რომელიც კვეთს I_1-ს, ხოლო $k \geq 2$-სთვის Θ_k იყოს ყველა იმ $I \in \Pi$ სიმრავლის კლასი, რომელიც კვეთს I_k-ს და არ კვეთს არცერთს $I_1, \ldots, I_{k-1}$ სიმრავლეებს შორის. აგების გათვალისწინებით, ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი k-სთვის,

$$I \in \Theta_k \;\Rightarrow\; (I \cap I_k \neq \emptyset,\ |I| < 2|I_k|) \;\Rightarrow I \subset H_B(I_k). \tag{2}$$

(1)-ის და (2)-ის ძალით ვწერთ,

$$E \subset \bigcup_{I \in \Pi} I = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{I \in \Theta_k} I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} H_B(I_k). \tag{3}$$

(3)-დან კი, შემოსაზღვრული მოარშიების თვისების გათვალისწინებით, ვღებულობთ, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \geq \frac{1}{C} \sum_{k=1}^{\infty} |H_B(I_k)|_* \geq \frac{1}{C} \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} H_B(I_k) \right|_* \geq \frac{1}{C} |E|_*,$$

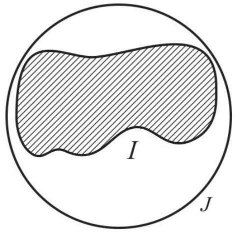
სადაც C არის მუდმივი მოარშიების თვისებიდან.

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ზომად სიმრავლეთა Δ კლასს ეწოდება **რეგულარული**, თუ მოიძებნება $C \geq 1$ რიცხვი შემდეგი თვისებით: ყოველი $I \in \Delta$ სიმრავლისათვის მოიძებნება I-ს შემცველი ჩაკეტილი J ბირთვი, ისეთი, რომ $|J| \leq C|I|$ (ნახ. 14.3).

B ბაზისს ეწოდება **რეგულარული**, თუ Δ_B კლასი არის რეგულარული.

ცხადია, კუბური მონაკვეთების I_1 და ბირთვების I_2 ბაზისებს აქვთ რეგულარობის თვისება. ამასთანავე, მარტივად მოწმდება, რომ $n \geq 2$ შემთხვევაში, n-განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 ბაზისს (შედეგად, n-განზომილებიანი



ნახ. 14.3.

მართკუთხა პარალელეპიპედების I_4 ბაზისსაც) არა აქვს რეგულარობის თვისება.

თეორემა 14.3.2. თუ B ბაზისი რეგულარულია, მაშინ B ბაზისს აქვს შემოსაზღვრული მოარშიების თვისება და შედეგად, აქვს ვიტალის თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ, $I \in \Delta_B$. ვისარგებლოთ B-ს რეგულარობის თვისებით და ვიპოვოთ $J_I \supset I$ ბირთვი, რომელისთვისაც $|J_I| \le C|I|$, სადაც C მუდმივია B-ს რეგულარულობის თვისებიდან. ვაჩვენოთ $H_B(I) \subset (1+2\sqrt[n]{2C})J_I$ ჩართვა. საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$|H_B(I)|_* \le (1+2\sqrt[n]{2C})^n|J_I| \le (1+2\sqrt[n]{2C})^n C|I|.$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $E \in \Delta_B$ სიმრავლე თვისებებით: $E \cap I \neq \emptyset$ და $|E| < 2|I|$. ვისარგებლოთ B-ს რეგულარულობის თვისებით და ვიპოვოთ $J_E \supset E$ ბირთვი, რომლისთვისაც $|J_E| \le C|E|$. მაშინ გვექნება, რომ

$$|J_E| \le C|E| < 2C|I|.$$

შედეგად,

$$\frac{|J_E|}{|J_I|} \le \frac{2C|I|}{|I|} = 2C.$$

საიდანაც, $J_E \cap J_I \neq \emptyset$ პირობის გათვალისწინებით ვასკვნით, რომ

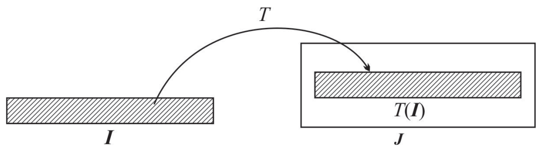
$$E \subset J_E \subset (1+2\sqrt[n]{2C})J_I.$$

აქედან, თავის მხრივ, ვღებულობთ $H_B(I) \subset (1+2\sqrt[n]{2C})J_I$ ჩართვას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

B ბაზისს ეწოდება **ამოზნექილი**, თუ B-ს შემადგენელი ყოველი სიმრავლე ამოზნექილია.

$\mathbb{R}^n$ სივრცის ქვესიმრავლეთა კლასში შემოვიღოთ დალაგების მიმართება შემდეგი წესით: I სიმრავლეს ვუწოდოთ J სიმრავლეზე ნაკლები ან ტოლი (ჩანაწერი: $I \prec J$), თუ მოიძებნება $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ძვრა, ისეთი, რომ $|T(I) \setminus$

$J| = 0$, ე.ი ძვრა, რომლის მოქმედების შედეგად $T(I)$ აღმოჩნდება სრულად ან თითქმის შემავალი J სიმრავლეში (ნახ. 14.4).



ნახ. 14.4.

B ბაზისს ეწოდება **მონოტონური**, თუ B-ს შემადგენელი ნებისმიერი ორი I და J სიმრავლე ერთმანეთის სადარია, ე.ი. $I \prec J$ ან $J \prec I$.

ადვილი დასანახია, რომ: 1) კუბური მონაკვეთების I_1 და ბირთვების I_2 ბაზისებს აქვთ მონოტონურობის თვისება; 2) $n \geq 2$ შემთხვევაში, n-განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 და n-განზომილებიანი მართკუთხა პარალელეპიპედების I_4 ბაზისებს არა აქვთ მონოტონურობის თვისება.

თეორემა 14.3.3. თუ B ბაზისი ამოზნექილი და მონოტონურია, მაშინ B ბაზისს აქვს შემოსაზღვრული მოარშიების თვისება და შედეგად, აქვს ვიტალის თვისება.

დამტკიცება. ტექნიკური გადატვირთულობის გამო, ჩვენ არ მოგვყავს თეორემის დამტკიცება სრული ზოგადობით. შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევით, როცა B ბაზისის შემადგენელი ამოზნექილი სიმრავლეები წარმოადგენენ n-განზომილებიან მონაკვეთებს.

ვთქვათ, $I \in \Delta_B$. განვიხილოთ ნებისმიერი $E \in \Delta_B$ მონაკვეთი თვისებებით: $E \cap I \neq \emptyset$ და $|E| < 2|I|$. დავუშვათ, $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ და $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. მაშინ, B-ს მონოტონურობის საფუძველზე, გვექნება, რომ:

$$|I_1| \leq |E_1|, \ \ldots\ , |I_n| \leq |E_n|; \tag{4}$$

ან

$$|I_1| \geq |E_1|, \ \ldots\ , |I_n| \geq |E_n|. \tag{5}$$

(4)-ის შესრულების შემთხვევაში, $|E| < 2|I|$ შეფასებიდან გამომდინარე, სამართლიანი იქნება უტოლობები:

$$|E_1| < 2|I_1|, \ \ldots\ , |E_n| < 2|I_n|.$$

საიდანაც, $E \cap I \neq \emptyset$ პირობის გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ $E \subset 5I$.

(5)-ის შესრულების შემთხვევაში კი, $E \cap I \neq \emptyset$ პირობის გათვალისწინებით, უშუალოდ მივიღებთ $E \subset 5I$ ჩართვას.

ამრიგად, $H_B(I) \subset 5I$. შედეგად, $|H_B(I)|_* \leq 5^n |I|$. ამით შემოსაზღვრული მოარშიების თვისება დადგენილია. $\square$

შენიშვნა 14.3.1. როგორც უკვე ვაჩვენეთ, რეგულარული ბაზისებისათვის სამართლიანია თეორემა განუსაზღვრელი ინტეგრალის თითქმის ყველგან დიფერენცირების შესახებ. დავამტკიცოთ, რომ ანალოგიური დასკვნა სამართლიანია ბაზისის წერტილოვნად რეგულარობის შემთხვევაშიც, ე.ი. როცა ცნობილია, რომ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის $B(x)$ კლასი არის რეგულარული.

ყოველი x-სთვის $C(x)$ იყოს მუდმივი $B(x)$ კლასის რეგულარობის თვისებიდან. აღვნიშნოთ

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : C(x) \leq k\} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

ცხადია, რომ $\mathbb{R}^n$ წარმოდგება E_k სიმრავლეების გაერთიანების სახით. ყოველი k-სათვის B_k ბაზისი განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$B_k(x) = \begin{cases} B(x), & \text{თუ} \quad x \in E_k, \\ \mathrm{I}_1(x), & \text{თუ} \quad x \notin E_k. \end{cases}$$

ცხადია, თითოეული B_k ბაზისი რეგულარულია. შედეგად, თითოეული მათგანისათვის სამართლიანია თეორემა ინტეგრალის თითქმის ყველგან დიფერენცირების შესახებ.

განვიხილოთ ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქცია. მაშინ, ზემოაღნიშნულის გამო, ყოველი k-სათვის E_k სიმრავლის თითქმის ყოველ x წერტილში სრულდება ტოლობა:

$$\lim_{I \in B(x),\, I \to x} \frac{1}{|I|} \int_I f = f(x). \tag{6}$$

შედეგად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, დავასკვნით (6) ტოლობის სამართლიანობას $\mathbb{R}^n$ სივრცის თითქმის ყოველ წერტილში.

იგივე ტიპის მსჯელობის გამოყენებით მტკიცდება შემდეგი კიდევ უფრო ზოგადი დებულება: ვთქვათ, B ბაზისი ისეთია, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველ წერტილში $B(x)$ ემთხვევა ერთ-ერთს $B_k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ ოჯახებს შორის, სადაც B_k ბაზისები ფლობენ ინტეგრალის თითქმის ყველგან დიფერენცირების თვისებას. მაშინ B ბაზისსაც აქვს მსგავსი თვისება.

შენიშვნა 14.3.2. რეგულარული და წერტილოვნად რეგულარული ბაზისებისათვის განუსაზღვრელი ინტეგრალის თითქმის ყველგან დიფერენცირების შესახებ თეორემა დამტკიცებული იყო ა. ლებეგის მიერ. 14.3.1 და 14.3.3 თეორემები კი ეკუთვნის ა. მორსს.

შენიშვნა 14.3.3. $\mathbb{R}^n$-ზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება **ლოკალურად ჯამებადი**, თუ f ჯამებადია ნებისმიერ შემოსაზღვრულ და ზომად სიმრავლეზე. ყველა ლოკალურად ჯამებადი ფუნქციის კლასი აღინიშნება $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ჩანაწერით.

თეორემა 14.2.1 სამართლიანია ლოკალურად ჯამებადი ფუნქციებისთვისაც. დამტკიცება ხდება თეორემა 12.4.1-ის შემთხვევაში გამოყენებული სქემის მიხედვით.

შენიშვნა 14.3.4. $Q(x,h)$-ით აღვნიშნოთ კუბური ინტერვალი, ცენტრით x წერტილში, რომლის წიბოს სიგრძე $2h$-ის ტოლია, ე.ი.

$$Q(x,h) = (x_1 - h, x_1 + h) \times \cdots \times (x_n - h, x_n + h).$$

ვთქვათ, E რაიმე ზომადი სიმრავლეა $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. x წერტილს ეწოდება E სიმრავლის **სიმკვრივის წერტილი**, თუ

$$\lim_{h\to 0} \frac{|Q(x,h) \cap E|}{(2h)^n} = 1,$$

და ეწოდება E სიმრავლის **გაიშვიათების წერტილი**, თუ

$$\lim_{h\to 0} \frac{|Q(x,h) \cap E|}{(2h)^n} = 0.$$

შევნიშნოთ, რომ x არის სიმკვრივის წერტილი E-სთვის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x არის გაიშვიათების წერტილი E-ს დამატებისათვის.

თეორემა 12.4.2-ის მსგავსად მტკიცდება, რომ ნებისმიერი ზომადი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის თითქმის ყოველი $x \in E$ წერტილი არის E სიმრავლის სიმკვრივის წერტილი, ხოლო თითქმის ყოველი $x \notin E$ წერტილი არის E სიმრავლის გაიშვიათების წერტილი.

შენიშვნა 14.3.5. ვთქვათ, f არის $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია $A \subset E$ და $x \in A$. f ფუნქციას ეწოდება A **სიმრავლის გასწვრივ უწყვეტი** x წერტილში, თუ f-ის შეზღუდვა A-ზე არის უწყვეტი x-ში.

$E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება **აპროქსიმაციულად უწყვეტი** $x \in E$ წერტილში, თუ მოიძებნება ზომადი $A \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე თვისებებით:

- $x \in A$ და x არის A-ს სიმკვრივის წერტილი;
- f არის $A \cap E$ სიმრავლის გასწვრივ უწყვეტი x-ში.

თეორემა 12.4.4-ის მსგავსად მტკიცდება, რომ ზომად $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ზომადი სასრული f ფუნქცია აპროქსიმაციულად უწყვეტია თითქმის ყოველ $x \in E$ წერტილში.

შენიშვნა 14.3.6. ზემოთ მოცემული იყო რამდენიმე საკმარისი პირობა საიმისოდ, რომ B ბაზისით წარმოქმნილი დიფერენცირების პროცესი იყოს ინტეგრების შებრუნებული ოპერაცია (ე.ი. სრულდებოდეს თეორემა ინტეგრალის თითქმის ყველგან წარმოებადობის შესახებ). კერძოდ, მივუთითეთ

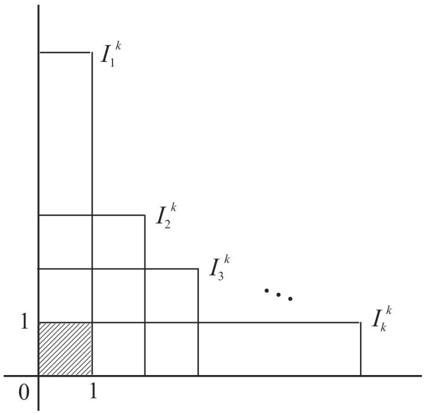
ოთხი თვისება: რეგულარობა, ამოზნექილობა და მონოტონურობა (ერთდროულად), შემოსაზღვრული მოარშიების თვისება და ვიტალის თვისება. მათგან ყველაზე ზოგადია ვიტალის თვისება.

უკვე აღნიშნული გვაქვს, რომ n-განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 ბაზისს არა აქვს რეგულარობისა და მონოტონურობის თვისებები. ვაჩვენოთ, რომ მას არა აქვს არც ვიტალის თვისება (ცხადია, ამით ნაჩვენები იქნება, რომ არც I_4 ბაზისს არა აქვს ვიტალის თვისება).

$k \in \mathbb{N}$ რიცხვისათვის Π_k-თი აღვნიშნოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული ორგანზომილებიანი $I_1^k, \dots, I_k^k$ მონაკვეთების კლასი:

$$I_m^k = [0, m] \times \left[0, \frac{k}{m}\right] \qquad (m \in \overline{1, k}).$$

Π_k ოჯახს **k-ური რანგის ბორის კიბეს** უწოდებენ (ნახ. 14.5).



ნახ. 14.5.

ადვილი დასანახია, რომ Π_k კლასს აქვს შემდეგი თვისებები:

- თითოეული I_m^k მონაკვეთის ზომა k-ს ტოლია,
- $I_1^k \cap \dots \cap I_k^k$ თანაკვეთა $[0,1] \times [0,1]$ კვადრატის ტოლია,
- $|I_1^k \cup \dots \cup I_k^k| = |I_1^k| + |I_2^k \setminus I_1^k| + \dots + |I_k^k \setminus I_{k-1}^k| = k + \frac{k}{2} + \dots + \frac{k}{k} = k\big(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\big) > k \ln(k+1)$.

ვთქვათ, Π' არის Π_k კლასიდან გამოყოფილი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წევრებისაგან შედგენილი ნებისმიერი ქვეკლასი. ზემოთ მოცემული თვისებებიდან გამომდინარე, Π' ქვეკლასი ან ცარიელია ან შედგება ერთი მართკუთხედისაგან. შედეგად, $\bigcup_{I \in \Pi_k} I$ გაერთიანებიდან $\bigcup_{I \in \Pi'} I$ გაერთიანებაზე გადასვლისას ზომა $\ln(k+1)$-ზე მეტჯერ მცირდება. საიდანაც, ნატურალური k

რიცხვის ნებისმიერობის გათვალისწინებით, ვასკვნით, რომ n-განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 ბაზისს არა აქვს ვიტალის თვისება. შემდეგ პარაგრაფში ბორის კიბის კონსტრუქციის გამოყენებით დადგენილი იქნება I_3 ბაზისის კიდევ უფრო ნეგატიური თვისება, რაც გამოიხატება იმაში, რომ მისთვის არაა სამართლიანი ინტეგრალთა დიფერენცირების შესახებ ლებეგის თეორემის ანალოგი.

შენიშვნა 14.3.7. B იყოს ბაზისი, რომლისთვისაც $B(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ კლასი შედგება $I \cup (\mathbb{Q}^n \cap (kI))$ სახის სიმრავლეებისაგან, სადაც I არის x წერტილის შემცველი ნებისმიერი კუბური ინტერვალი, ხოლო k არის ნებისმერი ნატურალური რიცხვი. არაა ძნელი შესამოწმებელი, რომ B ბაზისს არა აქვს ვიტალის თვისება, თუმცა, მიუხედავად ამისა, მისთვის სამართლიანია ინტეგრალთა დიფერენცირების შესახებ ლებეგის თეორემის ანალოგი. ამრიგად, ვიტალის თვისება არის საკმარისი, მაგრამ არა აუცილებელი პირობა საიმისოდ, რომ ბაზისისათვის სამართლიანი იყოს ინტეგრალთა დიფერენცირების შესახებ ლებეგის თეორემის ანალოგი.

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ, რომ n-განზომილებიანი მართკუთხა პარალელეპიპედების ნებისმიერი ოჯახის გაერთიანება ზომადი სიმრავლეა.

§ 4. ინტეგრებისა და დიფერენცირების ურთიერთშებრუნებადობის დარღვევა n-განზომილებიანი მონაკვეთების ბაზისის შემთხვევაში

n-განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 ბაზისით წარმოქმნილ დიფერენცირების პროცესს აქვს სპეციალური სახელწოდება - **ძლიერად დიფერენცირება**.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ინტეგრების შემდგომ ჩატარებული ძლიერად დიფერენცირების პროცესი, საზოგადოდ, არ გვაბრუნებს საწყის ფუნქციასთან (ე.ი. I_3 ბაზისისათვის არაა სამართლიანი ინტეგრალთა დიფერენცირების შესახებ ლებეგის თეორემის ანალოგი).

თეორემა 14.4.1. არსებობს არაუარყოფითი $f \in L(\mathbb{R}^2)$ ფუნქცია, ისეთი, რომ

$$\overline{\lim_{I \in \mathrm{I}_3(x),\, I \to x}} \frac{1}{|I|} \int_I f = \infty$$

თითქმის ყოველ $x \in \mathbb{R}^2$ წერტილში.

შენიშვნა 14.4.1. თეორემა 14.4.1-ში მოცემული ტიპის ფუნქციების მაგალითები თავდაპირველად აგებული იყო ს. საქსის და აგრეთვე, ჰ. ბუზემანისა და ვ. ფელერის მიერ.

ლემა 14.4.1. **ვთქვათ,** Q **რაიმე კვადრატული მონაკვეთია. მაშინ ნებისმიერი** $\lambda \in (0,1)$ **რიცხვისათვის სამართლიანია შეფასება:**

$$|\{M_{\mathrm{I}_3}(\chi_Q) > \lambda\}| \geq \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{1}{\lambda}\ |Q|.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ Q არის ერთეულოვანი კვადრატი, ე.ი. $Q = [0,1] \times [0,1]$.

k იყოს ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც $\frac{1}{k+1} \leq \lambda < \frac{1}{k}$. გვექნება, რომ

$$\{M_{\mathrm{I}_3}(\chi_Q) > \lambda\} \supset \{M_{\mathrm{I}_3}(\chi_Q) \geq 1/k\}.$$

განვიხილოთ k-ური რანგის ბორის კიბე - Π_k. მისი შემადგენელი მართკუთხედების თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $I \in \Pi_k$-სათვის,

$$\frac{1}{|I|} \int_I \chi_Q = \frac{|Q \cap I|}{|I|} = \frac{|Q|}{|I|} = \frac{1}{k}.$$

შედეგად,

$$\{M_{\mathrm{I}_3}(\chi_Q) \geq 1/k\} \supset \bigcup_{I \in \Pi_k} I.$$

საიდანაც, ბორის კიბის შემადგენელი მართკუთხედების გაერთიანების ზომისათვის დადგენილი შეფასების გათვალისწინებით დავწერთ,

$$|\{M_{\mathrm{I}_3}(\chi_Q) \geq 1/k\}| \geq \left| \bigcup_{I \in \Pi_k} I \right| \geq k \ln(k+1) = k \ln(k+1)\ |Q|.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ $k+1 \geq \frac{1}{\lambda}$ და $k \geq \frac{1}{2\lambda}$ შეფასებებს, გვექნება, რომ

$$|\{M_{\mathrm{I}_3}(\chi_Q) > \lambda\}| \geq |\{M_{\mathrm{I}_3}(\chi_Q) \geq 1/k\}| \geq k \ln(k+1)\ |Q| \geq \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{1}{\lambda}\ |Q|.$$

ლემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 14.4.2. ვთქვათ, Q რაიმე კვადრატული მონაკვეთია. ლემა 14.4.1-ში დადგენილი შეფასება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$|\{M_{\mathrm{I}_3}(\chi_Q) > \lambda\}| \geq \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda}\ |Q|\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_Q\right).$$

აქედან კი, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \ln \frac{1}{\lambda} = \infty$ ტოლობის გათვალისწინებით, დავასკვნით, რომ M_{I_3} ძლიერ მაქსიმალურ ოპერატორს არა აქვს სუსტი $(1,1)$ ტიპი. ეს ფაქტი უმთავრეს როლს ასრულებს თეორემა 14.4.1-ის დამტკიცებისას.

შენიშვნა 14.4.3. ვთქვათ, Q რაიმე კვადრატული ინტერვალია და $0 < \lambda < h$. მაშინ $\{M_{\mathrm{I}_3}(h\chi_Q) > \lambda\} = \{M_{\mathrm{I}_3}(\chi_Q) > \lambda/h\}$ ტოლობის გათვალისწინებით ლემა 14.4.1-დან მიიღება შეფასება:

$$|\{M_{\mathrm{I}_3}(h\chi_Q) > \lambda\}| \geq \frac{h}{2\lambda} \ln \frac{h}{\lambda}\ |Q|.$$

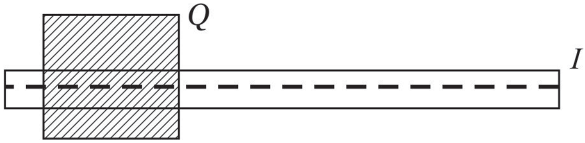
Q კვადრატის გვერდის სიგრძე აღვნიშნოთ $\delta(Q)$ ჩანაწერით.

ლემა 14.4.2. ვთქვათ, Q კვადრატული მონაკვეთია და $\lambda \in (0,1)$. თუ ორგანზომილებიანი I მონაკვეთი ისეთია, რომ

$$\frac{|I \cap Q|}{|I|} > \lambda,$$

მაშინ I-ს გვერდების სიგრძეები არ აღემატებიან $\delta(Q)/\lambda$ რიცხვს.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. I-ს რომელიმე გვერდის სიგრძე მეტია $\delta(Q)/\lambda$ რიცხვზე. დავუშვათ, ასეთია ჰორიზონტალური გვერდები. თუ I მართკუთხედს წარმოვადგენთ ჰორიზონტალური კვეთების გაერთიანებად, მაშინ თითოეულ კვეთაზე Q კვადრატის მიერ დატოვებული კვალის ხვედრითი წილი ნაკლები იქნება λ რიცხვზე (ნახ. 14.6).



ნახ. 14.6.

რაც, ადვილი დასანახია, რომ გამოიწვევს $|I \cap Q| \le \lambda |I|$ შეფასებას. ეს კი ეწინააღმდეგება ლემის პირობას.

ლემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 14.4.4. ვთქვათ, Q რაიმე ჩაკეტილი კვადრატული მონაკვეთია და $0 < \lambda < h$. მაშინ ლემა 14.4.2-დან ადვილად მიიღება შემდეგი ჩართვა:

$$\{M_{\mathrm{I}_3}(h\chi_Q) > \lambda\} \subset (2h/\lambda + 1)Q.$$

მართლაც, დავუშვათ $x \in \{M_{\mathrm{I}_3}(h\chi_Q) > \lambda\}$. მაშინ მოიძებნება ორგანზომილებიანი $I \ni x$ მონაკვეთი, რომლისთვისაც $|Q \cap I|/|I| > \lambda/h$. საიდანაც, $I \cap Q \neq \emptyset$ პირობისა და ლემა 14.4.2-ის გათვალისწინებით, ვღებულობთ, რომ $x \in I \subset (2h/\lambda + 1)Q$.

შემდეგი ლემა ეკუთვნის ა. კალდერონს და ის ეფექტურად გამოიყენება სხვადასხვა კონტრმაგალითების აგებისას განსაკუთრებულობათა გამკვრივების ეტაპზე.

ლემა 14.4.3. ვთქვათ, $E_k \subset \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ ზომადი სიმრავლეებია, რომლებიც შედიან რაიმე ფიქსირებულ ბირთვში და აკმაყოფილებენ $\sum_{k=1}^{\infty} |E_k| = \infty$ პირობას. მაშინ შეიძლება $x_k \in \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ წერტილები შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ სიმრავლეთა $(E_k + x_k)$ მიმდევრობის ზედა ზღვარი იყოს სრული ზომის სიმრავლე $\mathbb{R}^n$ სივრცეში.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ლემის სამართლიანობა მარტივად მიიღება შემდეგი დებულებიდან: ვთქვათ, $s \in \mathbb{N}$ და $E_k \subset [-s,s]^n$ $(k \in \mathbb{N})$ არიან ზომადი სიმრავლეები, რომლებიც აკმაყოფილებენ $\sum_{k=1}^{\infty} |E_k| = \infty$ პირობას. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0,1)$ რიცხვისათვის მოიძებნებიან $p \in \mathbb{N}$ რიცხვი და $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$ წერტილები, ისეთები, რომ

$$\left| [-s,s]^n \cap \bigcup_{k=1}^{p} (E_k + x_k) \right| > (2s)^n - \varepsilon. \tag{1}$$

დავამტკიცოთ ეს დებულება.

$E \subset [-s,s]^n$ სიმრავლისათვის აღვნიშნოთ:

$$E(x) = (E+x) \cap [-s,s]^n \quad (x \in \mathbb{R}^n), \qquad E^{\star} = [-s,s]^n \setminus E.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი $p \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$ და $t \in \mathbb{R}^n$ პარამეტრებისათვის სრულდება ტოლობები:

$$\chi_{E_1(x_1)^{\star} \cap \dots \cap E_p(x_p)^{\star}}(t) = \chi_{E_1(x_1)^{\star}}(t) \dots \chi_{E_p(x_p)^{\star}}(t),$$

$$\chi_{E_j(x_j)^{\star}}(t) = \chi_{[-s,s]^n}(t)\,(1 - \chi_{E_j}(t - x_j)) \quad (j \in \overline{1,p}).$$

უკანასკნელი ტოლობისა და 10.6.6 თეორემის საფუძველზე, ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\chi_{E_1(x_1)^{\star}}(t) \dots \chi_{E_p(x_p)^{\star}}(t),$$

როგორც $x_1, \dots, x_p, t$ ცვლადების ფუნქცია, არის ზომადი. შედეგად, ფუბინის თეორემის გამოყენებით დავწერთ,

$$\int_{[-2s,2s]^n \times \dots \times [-2s,2s]^n} |E_1(x_1)^{\star} \cap \dots \cap E_p(x_p)^{\star}|\, d(x_1, \dots, x_p) =$$
$$\int_{[-2s,2s]^n \times \dots \times [-2s,2s]^n} \left[\int_{[-s,s]^n} \chi_{E_1(x_1)^{\star}}(t) \dots \chi_{E_p(x_p)^{\star}}(t) dt \right] d(x_1, \dots, x_p) =$$
$$\int_{[-s,s]^n} \left[\int_{[-2s,2s]^n \times \dots \times [-2s,2s]^n} \chi_{E_1(x_1)^{\star}}(t) \dots \chi_{E_p(x_p)^{\star}}(t)\, d(x_1, \dots, x_p) \right] dt =$$
$$\int_{[-s,s]^n} \left[\prod_{j=1}^{p} \int_{[-2s,2s]^n} \chi_{E_j(x_j)^{\star}}(t) dx_j \right] dt.$$

ფიქსირებული $j \in \overline{1,p}$ და $t \in [0,1]^n$ პარამეტრებისათვის გამოვთვალოთ $\int_{[-2s,2s]^n} \chi_{E_j(x)^{\star}}(t) dx$ ინტეგრალი. გვექნება, რომ

$$\{x \in [-2s,2s]^n : \chi_{E_j(x)^{\star}}(t) = 1\} = \{x \in [-2s,2s]^n : E_j(x)^{\star} \ni t\}$$
$$= [-2s,2s]^n \setminus \{x \in [-2s,2s]^n : E_j(x) \ni t\} = [-2s,2s]^n \setminus (t - E_j).$$

საიდანაც, $t - E_j \subset [-2s, 2s]^n$ ჩართვის გათვალისწინებით, მივიღებთ ტოლობას:

$$\int_{[-2s,2s]^n} \chi_{E_j(x)^\star}(t)dx = (4s)^n - |E_j|.$$

ამრიგად,

$$\int_{[-2s,2s]^n \times \cdots \times [-2s,2s]^n} |E_1(x_1)^\star \cap \cdots \cap E_p(x_p)^\star| d(x_1, \ldots, x_p) = \prod_{j=1}^{p} \big[(4s)^n - |E_j|\big].$$

ამ ტოლობიდან დავასკვნით ისეთი $x_1, \ldots, x_p \in [-2s, 2s]^n$ წერტილების არსებობას, რომელთათვისაც

$$|E_1(x_1)^\star \cap \cdots \cap E_p(x_p)^\star| \le \frac{1}{|[-2s, 2s]^n \times \cdots \times [-2s, 2s]^n|} \prod_{j=1}^{p} \big[(4s)^n - |E_j|\big] = \frac{1}{(4s)^{pn}} \prod_{j=1}^{p} \big[(4s)^n - |E_j|\big] = \prod_{j=1}^{p} \left[1 - \frac{|E_j|}{(4s)^n}\right].$$

როგორც ვიცით: $\sum_{j=1}^{\infty} |E_j|/(4s)^n = \infty$, ამიტომ საკმარისად დიდი p-სათვის უკანასკნელი შეფასებიდან მივიღებთ, რომ

$$|E_1(x_1)^\star \cap \cdots \cap E_p(x_p)^\star| < \varepsilon.$$

საიდანაც,

$$[-s, s]^n \cap \bigcup_{k=1}^{p} (E_k + x_k) = [-s, s]^n \setminus [E_1(x_1)^\star \cap \cdots \cap E_p(x_p)^\star]$$

ტოლობის გათვალისწინებით მიიღება (1) შეფასება. ამით ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 14.4.4. არსებობენ დადებით რიცხვთა (h_k), (s_k) და (t_k) მიმდევრობები შემდეგი თვისებებით:

- $\lim\limits_{k\to\infty} h_k = \lim\limits_{k\to\infty} s_k = \infty, \quad h_k > s_k \ge 1 \ \ (k \in \mathbb{N})$,
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k t_k < \infty$,
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{s_k} \ln \frac{h_k}{s_k}\, t_k = \infty$,
- $\lim\limits_{k\to\infty} h_k \sqrt{t_k} = 0, \quad (2h_k + 1)\sqrt{t_k} < 1 \ \ (k \in \mathbb{N})$.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური j რიცხვისათვის არსებობენ დადებით რიცხვთა სასრული მიმდევრობები - $(h_k)_{k=1}^N$ და $(t_k)_{k=1}^N$, რომელთაც აქვთ შემდეგი თვისებები:

- $h_k > j \ \ (1 \le k \le N)$,
- $\sum\limits_{k=1}^{N} h_k t_k \le \frac{1}{2^j}$,
- $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{h_k}{j} \ln \frac{h_k}{j} \ t_k \ge 2^j$,
- $h_k \sqrt{t_k} < \frac{1}{3j} \ \ (1 \le k \le N)$.

საიდანაც ადვილად გამომდინარეობს დასამტკიცებელი წინადადება.

განვიხილოთ α და β დადებითი რიცხვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\alpha\beta = \frac{1}{2^j}, \quad \frac{\alpha}{j} \ln \frac{\alpha}{j} \ \beta = 2^j.$$

შემდეგ კი, ნატურალური N რიცხვი შევარჩიოთ ისე, რომ სრულდებოდეს შეფასება:

$$\alpha\sqrt{\frac{\beta}{N}} < \frac{1}{3j}.$$

$(h_k)_{k=1}^N$ და $(t_k)_{k=1}^N$ მიმდევრობები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$h_k = \alpha, \ \ t_k = \frac{\beta}{N} \quad (1 \le k \le N).$$

ადვილი დასანახია, რომ ასეთი $(h_k)_{k=1}^N$ და $(t_k)_{k=1}^N$ მიმდევრობები აკმაყოფილებენ საჭირო პირობებს. ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 14.4.1-ის დამტკიცება. განვიხილოთ (h_k), (s_k) და (t_k) მიმდევრობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ლემა 14.4.4-ის პირობებს. აღვნიშნოთ

$$Q_k = [-\sqrt{t_k}/2, \sqrt{t_k}/2]^2 \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

მაშინ 14.4.1 და 14.4.2 ლემების გათვალისწინებით (იხ. აგრეთვე 14.4.3 და 14.4.4 შენიშვნები) $h_k \chi_{Q_k}$ ფუნქციებს ექნებათ შემდეგი თვისებები:

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k |Q_k| < \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\{M_{\mathrm{I}_3}(h_k \chi_{Q_k}) > s_k\}| = \infty, \tag{3}$$

$$\{M_{\mathrm{I}_3}(h_k \chi_{Q_k}) > s_k\} \subset (-1,1)^2 \qquad (k \in \mathbb{N}), \tag{4}$$

$$\lim_{k \to \infty} h_k \delta(Q_k) = 0. \tag{5}$$

(3) და (4) პირობებისა და ლემა 14.4.3-ის საფუძველზე $x_k \in \mathbb{R}^2$ $(k \in \mathbb{N})$ წერტილები შეიძლება ისე შევარჩიოთ, რომ

$$\{M_{\mathrm{I}_3}(h_k\chi_{Q_k}) > s_k\} + x_k$$

სიმრავლეთა მიმდევრობის ზედა ზღვარი იყოს სრული ზომის სიმრავლე $\mathbb{R}^2$ სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ

$$M_{\mathrm{I}_3}(h_k\chi_{Q_k+x_k})(y + x_k) = M_{\mathrm{I}_3}(h_k\chi_{Q_k})(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^2).$$

საიდანაც ვღებულობთ,

$$\{M_{\mathrm{I}_3}(h_k\chi_{Q_k}) > s_k\} + x_k = \{M_{\mathrm{I}_3}(h_k\chi_{Q_k+x_k}) > s_k\}.$$

შედეგად,

$$\{M_{\mathrm{I}_3}(h_k\chi_{Q_k+x_k}) > s_k\}$$

სიმრავლეთა მიმდევრობის ზედა ზღვარი იქნება სრული ზომის სიმრავლე $\mathbb{R}^2$ სივრცეში.

განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული f ფუნქცია:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} h_k\chi_{Q_k+x_k}.$$

ცხადია, f არაუარყოფითია. (2)-ის ძალით გვექნება, რომ

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} h_k\chi_{Q_k+x_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} h_k|Q_k + x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} h_k|Q_k| < \infty.$$

მაშასადამე, $f \in L(\mathbb{R}^2)$.

განვიხილოთ ნებისმიერი x წერტილი, რომელიც ეკუთვნის

$$\{M_{\mathrm{I}_3}(h_k\chi_{Q_k+x_k}) > s_k\}$$

სიმრავლეთა მიმდევრობის ზედა ზღვარს. მაშინ მოიძებნება ნატურალურ რიცხვთა მკაცრად ზრდადი $k(j)$ მიმდევრობა, ისეთი, რომ ყოველი j-სათვის,

$$x \in \{M_{\mathrm{I}_3}(h_{k(j)}\chi_{Q_{k(j)}+x_{k(j)}}) > s_{k(j)}\}$$

შედეგად, მოიძებნება x-ის შემცველი ორგანზომილებიანი I_j მონაკვეთების მიმდევრობა, ისეთი, რომ ყოველი j-სათვის,

$$\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f \geq \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} h_{k(j)}\chi_{Q_{k(j)}+x_{k(j)}} > s_{k(j)}.$$

ვაჩვენოთ, რომ $\operatorname{diam} I_j \to 0 \ (j \to \infty)$. შედეგად, $s_k \to \infty$ პირობის გათვალისწინებით თეორემა დამტკიცებული იქნება. გვაქვს, რომ

$$\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} h_{k(j)}\chi_{Q_{k(j)}+x_{k(j)}} = \frac{h_{k(j)}|(Q_{k(j)}+x_{k(j)})\cap I_j|}{|I_j|} > s_{k(j)}.$$

აქედან გამომდინარე, ლემა 14.4.2-ის ძალით ვღებულობთ, რომ I_j-ს გვერდების სიგრძეები არ აღემატებიან

$$\frac{\delta(Q_{k(j)}+x_{k(j)})h_{k(j)}}{s_{k(j)}} = \frac{\delta(Q_{k(j)})h_{k(j)}}{s_{k(j)}}$$

რიცხვს. ამ რიცხვების მიმდევრობა კი, (5)-ის საფუძველზე მიისწრაფვის ნულისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია. □

ამოცანები

1. დაამტკიცეთ თეორემა 14.4.1-ის ანალოგი ნებისმიერი $n \geq 3$-სთვის, ე.ი. ააგეთ არაუარყოფითი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქცია, რომელიც $\mathbb{R}^n$ სივრცის თითქმის ყოველ x წერტილში აკმაყოფილებს თეორემა 14.4.1-ში მოცემულ ინტეგრალური საშუალოების განშლადობის პირობას.
2. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $n \geq 2$-სთვის არსებობს არაუარყოფითი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქცია, რომელიც $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველ x წერტილში აკმაყოფილებს თეორემა 14.4.1-ში მოცემულ პირობას.

§ 5. ინტეგრალთა დიფერენცირება ზოგადი ბაზისების მიხედვით. ზოგიერთი ცნობილი შედეგი

ამ პარაგრაფში დაუმტკიცებლადაა მოცემული რამდენიმე მნიშვნელოვანი შედეგი ინტეგრალთა დიფერენცირების შესახებ.

ვთქვათ, B რაიმე დიფერენცირების ბაზისია $\mathbb{R}^n$-ში და $f \in L(\mathbb{R}^n)$. ამბობენ, რომ $\int f$ **დიფერენცირებადია** B **ბაზისის მიხედვით** (ან კიდევ, B **ადიფერენცირებს** $\int f$**-ს**), თუ თითქმის ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის,

$$\lim_{I\in B(x),\, I\to x} \frac{1}{|I|}\int_I f = f(x).$$

ამბობენ, რომ B ბაზისი **ადიფერენცირებს** $\Omega \subset L(\mathbb{R}^n)$ **კლასს**, თუ ყოველი $f \in \Omega$ ფუნქციისათვის B ადიფერენცირებს $\int f$-ს.

B ბაზისს ეწოდება **ჰომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული**, თუ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის, ყოველი $R \in B(x)$ სიმრავლისათვის და ყოველი $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ჰომოთეტიისათვის გვაქვს, რომ $H(R) \in B(H(x))$.

ცხადია, რომ $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ და I_4 ბაზისებს აქვთ ჰომოთეტიის მიმართ ინვარიანტულობის თვისება.

თეორემა 14.2.1-ის თანახმად, ვიტალის თვისების მქონე ბაზისები ადიფერენცირებენ $L(\mathbb{R}^n)$ კლასს. მეორე მხრივ, როგორც წინა პარაგრაფში გავარკვიეთ - ეს დებულება ნებისმიერი (კერძოდ, I_3) ბაზისისათვის არაა სამართლიანი. ბუნებრივად ისმის იმ ბაზისების დახასიათების ამოცანა, რომლებიც ადიფერენცირებენ $L(\mathbb{R}^n)$ კლასს. ამ საკითხის გადაწყვეტას ჰომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული ბაზისებისათვის იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 14.5.1. ვთქვათ, B ჰომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული ბაზისია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **B ადიფერენცირებს $L(\mathbb{R}^n)$ კლასს;**
- **M_B მაქსიმალურ ოპერატორს აქვს სუსტი $(1,1)$ ტიპი.**

შენიშვნა 14.5.1. 12.1.2 და 14.2.1 თეორემების შემთხვევებში გამოყენებული სქემის მეშვეობით მტკიცდება, რომ მაქსიმალური ოპერატორისათვის სუსტი $(1,1)$ ტიპის უტოლობის სამართლიანობა, არა მხოლოდ ჰომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული, არამედ ნებისმიერი B ბაზისისათვის იწვევს $L(\mathbb{R}^n)$ კლასის დიფერენცირებას.

შენიშვნა 14.5.2. თეორემა 14.5.1-ის ძალით, მაქსიმალური ოპერატორისათვის სუსტი ტიპის უტოლობის დარღვევა იწვევს B ბაზისის მიმართ არადიფერენცირებადი ინტეგრალის მქონე ფუნქციის არსებობას. წინა პარაგრაფში ჩვენ უკვე ენახეთ ამ პრინციპის გამოვლინება მონაკვეთების I_3 ბაზისის შემთხვევაში.

საზოგადოდ, ნებისმიერი B ბაზისისათვის ისმის საკითხი იმ ფუნქციათა კლასის დახასიათების შესახებ, რომელთა ინტეგრალები დიფერენცირებადია B-ს მიმართ.

მაქსიმალური ოპერატორის არსებით როლს ინტეგრალთა დიფერენცირების შესწავლისას კიდევ ერთხელ უსვამს ხაზს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 14.5.2. ვთქვათ, B ჰომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული ბაზისია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, ხოლო $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ - მკაცრად ზრდადი ფუნქცია, ისეთი, რომ $\varphi(0) = 0$ და $\varliminf\limits_{t\to\infty} \varphi(t)/t > 0$. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **B ადიფერენცირებს $\varphi(L)(\mathbb{R}^n)$ კლასს;**
- **M_B მაქსიმალური ოპერატორი აკმაყოფილებს შეფასებას:**

$$|\{M_B(f) > \lambda\}| \le c\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) \quad (f \in \varphi(L)(\mathbb{R}^n), \lambda > 0),$$

სადაც c მუდმივი დამოუკიდებელია f-საგან და λ-საგან.

ბაზისების მეორე მნიშვნელოვან კლასს განსაზღვრავს ძვრის (ანუ პარალელური გადატანის) მიმართ ინვარიანტულობის თვისება. სახელდობრ, B ბაზისს ეწოდება **ძვრის მიმართ ინვარიანტული**, თუ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის, ყოველი $R \in B(x)$ სიმრავლისათვის და ყოველი $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ძვრისათვის გვაქვს, რომ $T(R) \in B(T(x))$.

ყოველი ძვრა წარმოდგება ორი ჰომოთეტიის კომპოზიციის სახით, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ჰომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული ბაზისი არის ძვრის მიმართ ინვარიანტულიც.

ძვრის მიმართ ინვარიანტული ბაზისებისათვის სამართლიანია 14.5.1 და 14.5.2 თეორემების ანალოგები იმ განსხვავებით, რომ მეორე პირობაში სუსტი ტიპის შეფასება სრულდება არა „გლობალური" M_B მაქსიმალური ოპერატორისათვის, არამედ საკმარისად მცირე r რიცხვის შესაბამისი M_B^r წაკვეთილი მაქსიმალური ოპერატორისათვის.

$\varphi(t) = t(1 + \ln^+ t)^a \quad (0 \le t < \infty)$ სახის ფუნქციისათვის $\varphi(L)(\mathbb{R}^n)$ ინტეგრალური კლასი აღვნიშნოთ $L(1 + \ln^+ L)^a(\mathbb{R}^n)$ ჩანაწერით.

ცნობილია საუკეთესო ინტეგრალური კლასი, რომელშიც გარანტირებულია ინტეგრალის ძლიერად დიფერენცირება. სახელდობრ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 14.5.3. (a) **n-განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 ბაზისი ადიფერენცირებს $L(1 + \ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ კლასს;**

(b) **$L(1+\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$-ზე ფართო ნებისმიერ $\varphi(L)(\mathbb{R}^n)$ ინტეგრალურ კლასში მოიძებნება არაუარყოფითი f ფუნქცია, რომელიც ყოველ $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილში აკმაყოფილებს პირობას:**

$$\overline{\lim_{I \in \mathrm{I}_3(x),\, I \to x}} \frac{1}{|I|} \int_I f = \infty.$$

თეორემა 14.5.3-ის პირველი ნაწილი დამტკიცებული იყო ბ. იესენის, ი. მარცინკევიჩისა და ა. ზიგმუნდის მიერ, ხოლო მეორე ნაწილი კი ეკუთვნის ს. საქსს.

B ბაზისს ეწოდება **სიმკვრივის ბაზისი**, თუ ნებისმიერი ზომადი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლისათვის თითქმის ყოველი $x \in E$ წერტილი არის B-სიმკვრივის წერტილი, ე.ი.

$$\lim_{I \in B(x),\, I \to x} \frac{|E \cap I|}{|I|} = 1,$$

და თითქმის ყოველი $x \notin E$ წერტილი არის B-გაიშვიათების წერტილი, ე.ი.

$$\lim_{I \in B(x),\, I \to x} \frac{|E \cap I|}{|I|} = 0.$$

სიმკვრივის თვისება ტოლფასია იმისა, რომ B ბაზისი ადიფერენცირებს სასრული ზომის სიმრავლეთა მახასიათებელი ფუნქციების კლასს.

ინტეგრალთა ძლიერად დიფერენცირება, მართალია, არ არის გარანტირებული $L(\mathbb{R}^n)$-ში, მაგრამ თეორემა 14.5.3-ის ძალით, მას ადგილი აქვს საკმაოდ ფართო - $L(1+\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ კლასში. აქედან გამომდინარეობს ძლიერად დიფერენცირებადობის შესრულება $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L(\mathbb{R}^n)$ $(p>1)$ კლასებში, ასევე ის ფაქტი, რომ I_3 არის სიმკვრივის ბაზისი.

აქვე აღვნიშნოთ, რომ n-განზომილებიანი მართკუთხედების I_4 ბაზისს აქვს n-განზომილებიანი მონაკვეთების I_3 ბაზისზე ბევრად ცუდი დიფერენციალური თვისებები. კერძოდ, როგორც ა. ზიგმუნდმა აჩვენა - I_4-ს არა აქვს სიმკვრივის თვისებაც კი. ამ შედეგის დამტკიცება იყენებს ძალზე გონებამახვილურ გეომეტრიულ მსჯელობებს და ეფუძნება კომბინატორული ხასიათის კონსტრუქციას, რომელიც ცნობილია პერონის ხის სახელწოდებით.

ინტეგრალთა დიფერენცირების თეორია და მისი გამოყენებები ჰარმონიული ანალიზის სხვადასხვა საკითხებში საკმაოდ სრულადაა გადმოცემული მ. გუზმანის [6,7] და ე. სტეინის [16] მონოგრაფიებში.

§ 6. ლებეგ-სტილტიესის ზომების დიფერენცირება

ვთქვათ, μ ლებეგ-სტილტიესის ზომაა $\mathbb{R}^n$-ში, ხოლო B რაიმე დიფერენცირების ბაზისია $\mathbb{R}^n$-ში, ამასთან, ცნობილია, რომ B-ს შემადგენელი ყოველი სიმრავლე μ-ზომადია (კერძოდ, ეს შესრულებულია, თუ B-ს შემადგენელი სიმრავლეები მიეკუთვნებიან ბორელის კლასს). ვიტყვით, რომ μ ზომა **წარმოებადია (ან კიდევ, დიფერენცირებადია)** x **წერტილში** B **ბაზისის მიხედვით**, თუ არსებობს სასრული ზღვარი:

$$\lim_{I\in B(x),\, I\to x} \frac{\mu(I)}{|I|}.$$

ამ ზღვრის მნიშვნელობას ეწოდება μ **ზომის წარმოებული** x **წერტილში** B **ბაზისის მიხედვით** და აღინიშნება $D_B(\mu)(x)$ ჩანაწერით.

ზრდადი და შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციების შესახებ მე-12 და მე-13 თავებში განვითარებული თეორია ვრცელდება მრავალგანზომილებიან ლებეგ-სტილტიესის ზომებზე და უფრო მეტიც, მონაკვეთის ადიციურ ფუნქციებზე (იხ. მაგ., [31, თავი IV]). ამ მიმართულებით ჩვენ შემოვიფარგლებით ქვემოთ მოცემული თეორემით, რომელიც ეკუთვნის ლებეგს.

თეორემა 14.6.1. ვთქვათ, μ ლებეგ-სტილტიესის ზომაა $\mathbb{R}^n$-ში, ხოლო B არის ვიტალის თვისების მქონე კომპაქტური ბაზისი $\mathbb{R}^n$-ში, რომლის შემადგენელი ყოველი სიმრავლე არის μ-ზომადი. მაშინ μ ზომა თითქმის ყველგან (ლებეგის ზომის მიხედვით) წარმოებადია B ბაზისის მიხედვით.

შენიშვნა 14.6.1. ცხადია, I_1 და I_2 ბაზისები ლებეგ-სტილტიესის ნებისმიერი μ ზომისათვის აკმაყოფილებენ თეორემა 14.6.1-ის პირობებს.

μ ზომის ზედა და ქვედა წარმოებულები x წერტილში B ბაზისის მიხედვით შესაბამისად აღინიშნებიან $\overline{D}_B(\mu)(x)$ და $\underline{D}_B(\mu)(x)$ ჩანაწერებით და განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$\overline{D}_B(\mu)(x) = \lim_{\delta\to 0}\left[\sup_{I\in B(x),\,\mathrm{diam}\, I<\delta}\frac{\mu(I)}{|I|}\right],$$

$$\underline{D}_B(\mu)(x) = \lim_{\delta\to 0}\left[\inf_{I\in B(x),\,\mathrm{diam}\, I<\delta}\frac{\mu(I)}{|I|}\right].$$

ცხადია, $\underline{D}_B(\mu)(x) \le \overline{D}_B(\mu)(x)$ და $\underline{D}_B(\mu)(x) \ge 0$. μ ზომა წარმოებადია x წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\underline{D}_B(\mu)(x)$ და $\overline{D}_B(\mu)(x)$ არიან ერთმანეთის ტოლი სასრული რიცხვები. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ზედა და ქვედა წარმოებულები წარმოადგენენ $\mu(I)/|I|$ფარდობის ზღვრებს გარკვეული მიმდევრობების გასწვრივ, ე.ი. მოიძებნებიან x წერტილისაკენ მოჭიმვადი $I_k \in B(x)$ და $I_k^* \in B(x)$ მიმდევრობები, რომელთათვისაც

$$\overline{D}(\mu)(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{\mu(I_k)}{|I_k|} \quad \text{და} \quad \underline{D}(\mu)(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{\mu(I_k^*)}{|I_k^*|}.$$

ქვემოთ მოცემულ ლემებში ვიგულისხმებთ, რომ μ ზომა და B ბაზისი აკმაყოფილებენ 14.6.1 თეორემის პირობებს.

ლემა 14.6.1. ვთქვათ, $0 \le C < \infty$ და $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის ყოველი წერტილისათვის სრულდება $\underline{D}_B(\mu)(x) \le C$ შეფასება. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს μ-ზომადი $Q \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე შემდეგი თვისებებით:

$$|E \setminus Q|_* = 0, \qquad \mu(Q) \le (C+\varepsilon)(|E|_* + \varepsilon).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. E სიმრავლე დავფაროთ ღია G სიმრავლით, რომელიც აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$|G| \le |E|_* + \varepsilon. \tag{1}$$

Π იყოს ყველა იმ $I \in \Delta_B$ სიმრავლის კლასი, რომელიც შედის G სიმრავლეში და აკმაყოფილებს პირობას:

$$\mu(I) < (C+\varepsilon)|I|. \tag{2}$$

Π კლასი ვიტალის აზრით დაფარავს E სიმრავლეს და ამიტომ, თეორემა 14.2.3-ის ძალით, მისგან გამოვყოფთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეებისაგან შედგენილ და არაუმეტეს თვლად Π' ქვეკლასს, რომელიც თითქმის

დაფარავს E სიმრავლეს, ე.ი.

$$\left|E \setminus \bigcup_{I\in\Pi'} I\right|_* = 0. \tag{3}$$

Q ავიღოთ $\bigcup_{I\in\Pi'} I$ გაერთიანების ტოლი. $\Pi' \subset \Delta_B$ ჩართვის საფუძველზე გვაქვს, რომ Q არის μ-ზომადი. (1) და (2) შეფასებებიდან გამომდინარე დავწერთ,

$$\mu(Q) = \sum_{I\in\Pi'} \mu(I) \le \sum_{I\in\Pi'} (C+\varepsilon)|I| \le (C+\varepsilon)|G| \le (C+\varepsilon)(|E|_* + \varepsilon). \tag{4}$$

(3) და (4) პირობებიდან ვასკვნით ლემის სამართლიანობას. □

შენიშვნა 14.6.2. ადვილი დასანახია, რომ Q სიმრავლისათვის (ლემა 14.6.1-დან) შესრულებული იქნება $|Q \cap E|_* = |E|_*$ ტოლობა.

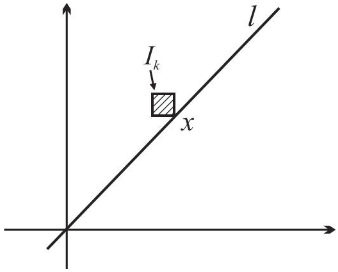
შენიშვნა 14.6.3. ვთქვათ, შესრულებულია ლემა 14.6.1-ის პირობები და დამატებით ცნობილია, რომ E არის μ-ზომადი სიმრავლე. მაშინ, საზოგადოდ, შეუძლებელია ვთქვათ, რომ შესრულებულია $\mu(E) \le C|E|_*$ შეფასება. მივუთითოთ შესაბამისი კონტრმაგალითი. l იყოს $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$ წრფე სიბრტყეზე. განვიხილოთ ორგანზომილებიანი მონაკვეთების $\mathcal{I}^2$ კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული σ ფუნქცია: ყოველი $I \in \mathcal{I}^2$-სათვის $\sigma(I)$ იყოს $I \cap l$ მონაკვეთის სიგრძის ტოლი. ცხადია, σ წარმოადგენს სასრულ ზომას. μ იყოს σ ზომის ლებეგისეული გაგრძელება. შენიშვნა 6.5.1-ის თანახმად, μ წარმოადგენს ლებეგ-სტილტიესის ზომას. ელემენტარული მსჯელობით შეიძლება დავადგინოთ, რომ l წრფეზე მდებარე ნებისმიერი E მონაკვეთისათვის $\mu(E)$ ზომის მნიშვნელობა E-ს სიგრძის ტოლია. B-ს როლში ავიღოთ I_1 ბაზისი. განვიხილოთ $E = l \cap [0,1]^2$ მონაკვეთი. მაშინ ყოველი $x \in E$ წერტილისათვის გვექნება, რომ $\underline{D}_{\mathrm{I}_1}(\mu)(x) = 0$. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ განვიხილავთ $\mu(I_k)/|I_k|$ საშუალოების მიმდევრობას, სადაც I_k $(k \in \mathbb{N})$ არის x-ში მარჯვენა-ქვედა წვეროს მქონე ჩაკეტილი კვადრატული ინტერვალი $1/k$-ს ტოლი დიამეტრით (ნახ. 14.7).

მეორე მხრივ კი, გვექნება, რომ $\mu(E) = \sqrt{2}$. ამრიგად, I_1, μ, E და $C = 0$ პარამეტრებისათვის დარღვეულია $\mu(E) \le C|E|$ უტოლობა.

ლემა 14.6.2. ვთქვათ, $0 < C < \infty$ და $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის ყოველი წერტილისათვის სრულდება $\overline{D}_B(\mu)(x) \ge C$ შეფასება. მაშინ ნებისმიერი μ-ზომადი $Q \supset E$ სიმრავლისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$\mu(Q) \ge C|E|_*.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon \in (0, C)$ რიცხვი. ლებეგ-სტილტიესის ზომების თვისებების საფუძველზე (იხ. §6.5) Q სიმრავლე შეიძლება



ნახ. 14.7.

დავფაროთ ღია G სიმრავლით, რომელიც აკმაყოფილებს შეფასებას:

$$\mu(G) \leq \mu(Q) + \varepsilon. \tag{5}$$

Π იყოს ყველა იმ $I \in \Delta_B$ სიმრავლის კლასი, რომელიც შედის G სიმრავლეში და აკმაყოფილებს პირობას:

$$\mu(I) > (C - \varepsilon)|I|. \tag{6}$$

Π კლასი ვიტალის აზრით დაფარავს E სიმრავლეს და ამიტომ თეორემა 14.2.3-ის ძალით, მისგან გამოვყოფთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეებისაგან შედგენილ და არაუმეტეს თვლად Π' ქვეკლასს, რომელიც თითქმის დაფარავს E სიმრავლეს, ე.ი.

$$\left| E \setminus \bigcup_{I \in \Pi'} I \right|_* = 0. \tag{7}$$

$(5) - (7)$ პირობებიდან გამომდინარე დავწერთ,

$$\mu(Q) \geq \mu(G) - \varepsilon \geq \sum_{I \in \Pi'} \mu(I) - \varepsilon \geq$$

$$\geq \sum_{I \in \Pi'} (C - \varepsilon)|I| - \varepsilon \geq (C - \varepsilon)|E|_* - \varepsilon.$$

საიდანაც, $\varepsilon \in (0, C)$ რიცხვის ნებისმიერობის გათვალისწინებით, ვასკვნით $\mu(Q) \geq C|E|_*$ შეფასების სამართლიანობას. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 14.6.3. $\{x \in \mathbb{R}^n : \overline{D}_B(\mu)(x) = \infty\}$ **სიმრავლის ლებეგის ზომა ნულის ტოლია.**

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ღია S ბირთვისათვის,

$$|\{x \in S : \overline{D}_B(\mu)(x) = \infty\}| = 0.$$

საიდანაც მარტივად მიიღება საჭირო დასკვნა.

აღვნიშნოთ:

$$E = \{x \in S : \overline{D}_B(\mu)(x) = \infty\};$$

$$E_k = \{x \in S : \overline{D}_B(\mu)(x) \geq k\} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

ლემა 14.6.2-ის ძალით, სამართლიანი იქნება შეფასებები:

$$|E_k|_* \leq \frac{\mu(S)}{k} \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{8}$$

შევნიშნოთ, რომ ლებეგ-სტილტიესის ზომა შემოსაზღვრულ სიმრავლეებზე ღებულობს სასრულ მნიშვნელობებს. შედეგად, $\mu(S) < \infty$. საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ $E \subset E_k$ $(k \in \mathbb{N})$ ჩართვებს და (8) შეფასებებს, მივიღებთ $|E|_* = 0$ ტოლობას.

ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 14.6.1-ის დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი ღია S ბირთვი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში. H იყოს ყველა იმ $x \in S$ წერტილის სიმრავლე, რომელშიც μ ზომა არაა წარმოებადი B ბაზისის მიხედვით. ვაჩვენოთ, რომ H ნული ზომის სიმრავლეა. ადვილი დასანახია, რომ ამით თეორემა დამტკიცებული იქნება.

H წარმოდგება შემდეგი ორი სიმრავლის გაერთიანების სახით:

$$H_1 = \{x \in S : \underline{D}_B(\mu)(x) < \overline{D}_B(\mu)(x)\};$$

$$H_2 = \{x \in S : \underline{D}_B(\mu)(x) = \overline{D}_B(\mu)(x) = \infty\}.$$

ლემა 14.6.3-ის ძალით, H_2 ნული ზომისაა. ამგვარად, დასამტკიცებელი გვრჩება H_1 სიმრავლის ნულზომიანობა. ადვილი დასანახია, რომ H_1, თავის მხრივ, წარმოდგება შემდეგი სახის სიმრავლეების თვლადი გაერთიანების სახით:

$$H_{p,q} = \{x \in S : \underline{D}_B(\mu)(x) < p < q < \overline{D}_B(\mu)(x)\},$$

სადაც p და q რაციონალური რიცხვებია და $0 < p < q$. ამრიგად, საკითხი დაიყვანება $H_{p,q}$ სახის ყოველი სიმრავლის ნულზომიანობის დამტკიცებაზე.

ვთქვათ, $p, q \in \mathbb{Q}$ და $0 < p < q$. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ლემა 14.6.1 გამოვიყენოთ ε, $E = H_{p,q}$ და $C = p$ პარამეტრებისათვის. შედეგად, მოვძებნით μ-ზომად Q სიმრავლეს, ისეთს, რომ

$$|Q \cap H_{p,q}|_* = |H_{p,q}|_*, \qquad \mu(Q) \leq (p+\varepsilon)(|H_{p,q}|_* + \varepsilon).$$

მეორე მხრივ, Q, $E = Q \cap H_{p,q}$ და $C = q$ პარამეტრებისათვის ლემა 14.6.2-ის გამოყენება გვაძლევს შეფასებას:

$$\mu(Q) \geq q|Q \cap H_{p,q}|_* = q|H_{p,q}|_*.$$

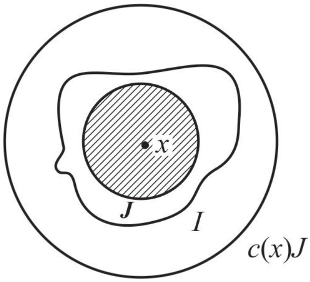
შედეგად, $(p+\varepsilon)(|H_{p,q}|_* + \varepsilon) \geq q|H_{p,q}|_*$. რაც, $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობისა და $|H_{p,q}|_* \leq |S| < \infty$ პირობის გათვალისწინებით, შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $|H_{p,q}|_* = 0$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

§ 7. სიმრავლის ფუნქციის აღდგენა ჯამებადი წარმოებულის შემთხვევაში

ამ პარაგრაფში განხილული იქნება ზომად სიმრავლეთა $\mathcal{L}_n$ კლასზე განსაზღვრული თვლადად ადიციური და შემოსაზღვრული ფუნქციები, რომელთაც სიმოკლისათვის **სიმრავლის ფუნქციის** ტერმინით მოვიხსენიებთ.

ν სიმრავლის ფუნქციას ეწოდება **აბსოლუტურად უწყვეტი ლებეგის ზომის მიმართ**, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ $|\nu(E)| < \varepsilon$ ყოველი ზომადი E სიმრავლისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს $|E| < \delta$ შეფასებას.

B ბაზისს ვუწოდოთ **ცენტრირებული**, თუ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის და $I \in B(x)$ სიმრავლისათვის მოიძებნება x-ში ცენტრის მქონე J ბირთვი, ისეთი, რომ $J \subset I \subset c(x)J$, სადაც $c(x)$ არის მხოლოდ x წერტილზე დამოკიდებული დადებითი მუდმივი (ნახ. 14.8).



ნახ. 14.8.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს B_1 და B_2 ბაზისები. ამბობენ, რომ B_1 არის B_2-ის **ქვებაზისი**, თუ $B_1(x) \subset B_2(x)$ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისათვის.

სამართლიანია შემდეგი თეორემები წარმოებულის მეშვეობით სიმრავლის ფუნქციის აღდგენის შესახებ.

თეორემა 14.7.1. ვთქვათ, B არის ვიტალის თვისების მქონე ბაზისი $\mathbb{R}^n$-ში. მაშინ ნებისმიერი ν სიმრავლის ფუნქციისათვის შემდეგი ოთხი წინადადება ერთმანეთის ეკვივალენტურია:

- **ν არის აბსოლუტურად უწყვეტი ლებეგის ზომის მიმართ;**
- **სამართლიანია იმპლიკაცია:** $(A \in \mathcal{L}_n,\ |A| = 0) \Rightarrow \nu(A) = 0$;
- **ν თითქმის ყოველ წერტილში წარმოებადია B ბაზისის მიხედვით, $D_B(\nu)$ ჯამებადია და შესრულებულია წარმოდგენა**

$$\nu(E) = \int_E D_B(\nu) \qquad (E \in \mathcal{L}_n)$$

(აქ $D_B(\nu)$ გაიგება, როგორც $\mathbb{R}^n$-ზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობები ν-ს არაწარმოებადობის წერტილებში მიიიჩნევა ნულის ტოლად);

- ν წარმოდგება რაიმე ჯამებადი ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით, ე.ი. მოიძებნება ჯამებადი g ფუნქცია, ისეთი, რომ

$$\nu(E) = \int_E g \qquad (E \in \mathcal{L}_n).$$

თეორემა 14.7.2. ვთქვათ, B არის ბაზისი, რომლისთვისაც მოიძებნება ვიტალის თვისების მქონე კომპაქტური და ცენტრირებული ქვებაზისი. თუ ν არის ყოველ $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილში B ბაზისის მიხედვით წარმოებადი სიმრავლის ფუნქცია და ცნობილია, რომ $D_B(\nu)$ ჯამებადია, მაშინ სამართლიანია წარმოდგენა:

$$\nu(E) = \int_E D_B(\nu) \qquad (E \in \mathcal{L}_n).$$

შენიშვნა 14.7.1. ცხადია, I_1 და I_2 ბაზისები აკმაყოფილებენ 14.7.1 და 14.7.2 თეორემების პირობებს.

თეორემა 14.7.1-ის მე-3 და მე-4 წინადადებების ეკვივალენტობა წარმოადგენს თეორემა 14.2.1-ის შედეგს. დანარჩენი იმპლიკაციები კი მიღებული იქნება მე-15 თავში, როგორც 15.2.2 და 15.3.1 თეორემების შედეგები.

თეორემა 14.7.2-ის დამტკიცების ნახვა შეიძლება [31]-ში (იხ. თავი IV, §14).

შენიშვნა 14.7.2. თეორემა 14.7.2-ში ცენტრირებულობის მოთხოვნა არსებითია. ავაგოთ შესაბამისი კონტრმაგალითი. B იყოს ბაზისი $\mathbb{R}^2$-ში, რომლისთვისაც $B(x)$ $(x \in \mathbb{R}^2)$ შედგება x-ში მარჯვენა-ქვედა წვეროს მქონე ყველა ჩაკეტილი კვადრატული მონაკვეთისაგან. ცხადია, B არის კომპაქტური ბაზისი. ცხადია ისიც, რომ B-ს არ მოეძებნება ცენტრირებული ქვებაზისი.

ν იყოს 14.6.3 შენიშვნაში მოცემული ლებეგ-სტილტიესის μ ზომის შეზღუდვა $\mathcal{L}_2$ კლასზე. ადვილი დასანახია, რომ $D_B(\nu)(x) = 0$ ნებისმიერი $x \in \mathbb{R}^2$ წერტილისათვის. შედეგად,

$$\int_{[0,1]^2} D_B(\nu) = 0 \neq 1 = \nu([0,1]^2).$$

თ ა ვ ი 15

ზომა და სიმრავლის ფუნქციები

ამ თავში შეისწავლება ერთსა და იმავე კლასზე განსაზღვრული ორი ზომის (უფრო მეტიც, ზომისა და სიმრავლის ფუნქციის) ურთიერთმიმართება, კერძოდ, საკითხი იმის შესახებ, თუ რა პირობებშია შესაძლებელი ν ზომის გამოსახვა ეტალონად არჩეული μ ზომის საშუალებით, იმ თვალსაზრისით, რომ ν მიიღებოდეს μ ზომისაგან ინტეგრების პროცესის მეშვეობით (ე.ი. ν იყოს μ ზომის მიხედვით ჯამებადი რაიმე ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი).

§ 1. მუხტის ცნება. ჰანისა და ჟორდანის დაშლები

(X, S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრული **მუხტი** ეწოდება $\nu : \mathrm{S} \to (-\infty, \infty]$ ფუნქციას, რომელიც ცარიელ სიმრავლეზე ღებულობს ნულის ტოლ მნიშვნელობას და აქვს თვლადად ადიციურობის თვისება.

ამრიგად, მუხტს მოეთხოვება ზომის ყველა თვისება, გარდა არაუარყოფითობისა. მუხტს **ნიშნიანი ზომის** ტერმინითაც მოიხსენიებენ. შევნიშნოთ, რომ განსაზღვრის თანახმად მუხტს აკრძალული აქვს $-\infty$-ის ტოლი მნიშვნელობის მიღება. ასეთი შეზღუდვა ბუნებრივია, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, $\infty - \infty$ სახის განუსაზღვრელობის გამო, აზრს დაკარგავდა მუხტის თვლადად ადიციურობის პირობა. აქვე შევნიშნოთ, რომ მუხტს აქვს ადიციურობის თვისება.

მუხტის ტიპის სიმრავლის ფუნქციების წარმოქმნის მექანიზმს გვაძლევს ლებეგის ინტეგრალი. კერძოდ, თუ f არის (X, S, μ) ზომიან სივრცეზე განსაზღვრული ჯამებადი ფუნქცია, მაშინ (იხ. თეორემა 8.8.3) f-ის განუსაზღვრელი ინტეგრალი - ν_f წარმოადგენს S σ-ალგებრაზე განსაზღვრულ სიმრავლის ფუნქციას, რომელიც არის შემოსაზღვრული, თვლადად ადიციური და ცარიელ სიმრავლეზე ღებულობს ნულის ტოლ მნიშვნელობას. ამრიგად, ნებისმიერი ჯამებადი f ფუნქციის განუსაზღვრელი ν_f ინტეგრალი წარმოადგენს მუხტს, ამასთან, f ფუნქციის არაუარყოფითობის შემთხვევაში, ν_f არის ზომა.

შევნიშნოთ ორი რამ ჯამებადი f ფუნქციით წარმოქმნილი ν_f მუხტის შესახებ:

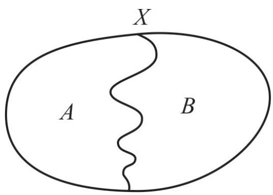
- თუ განვიხილავთ $A^+ = \{f \geq 0\}$ და $A^- = \{f < 0\}$ სიმრავლეებს, მივიღებთ ურთიერთდამატებით ზომად სიმრავლეებს, რომელთაგან პირველს შეიძლება შევხედოთ, როგორც დადებითი მუხტის გავრცელების არეალს, ხოლო მეორეს კი - როგორც უარყოფითი მუხტის გავრცელების არეალს;
- ν_f მუხტი წარმოდგება ორი ზომის სხვაობის სახით. ასეთი წარმოდგენა მიიღება f ფუნქციის დადებითი და უარყოფითი ნაწილების გამოყენებით: $\nu_f = \nu_{f^+} - \nu_{f^-}$.

ქვემოთ დადგენილი იქნება, რომ ანალოგიური დებულებები სამართლიანია ნებისმიერი მუხტისათვის.

ვთქვათ, ν არის (X, S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრული მუხტი. ზომად A სიმრავლეს (ე.ი. სიმრავლეს S კლასიდან) ეწოდება **უარყოფითი ν მუხტის მიმართ**, თუ A-ს ნებისმიერი ზომადი E ქვესიმრავლისათვის გვაქვს, რომ $\nu(E) \leq 0$; ანალოგიურად, ზომად A სიმრავლეს ეწოდება **დადებითი ν მუხტის** მიმართ, თუ A-ს ნებისმიერი ზომადი E ქვესიმრავლისათვის გვაქვს, რომ $\nu(E) \geq 0$.

თეორემა 15.1.1. (X, S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრული ნებისმიერი ν მუხტისათვის არსებობენ ურთიერთდამატებითი ზომადი A და B სიმრავლეები, ისეთები, რომ A უარყოფითია ν-ს მიმართ, ხოლო B დადებითია ν-ს მიმართ.

თეორემა 15.1.1-ში მითითებულ A და B სიმრავლეთა წყვილს უწოდებენ სივრცის **ჰანის აზრით დაშლას ν მუხტის მიმართ** (ნახ. 15.1).



ნახ. 15.1.

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ ν არის (X, S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრული რაიმე მუხტი. უარყოფითი და დადებითი სიმრავლეები განხილული იქნება ν მუხტთან მიმართებაში.

ლემა 15.1.1. თუ ზომადი A და B სიმრავლეები ისეთებია, რომ $B \subset A$ და $\nu(A) < \infty$, მაშინ $\nu(B) < \infty$.

დამტკიცება. მუხტის ადიციურობის თვისების ძალით გვაქვს, რომ $\nu(A) = \nu(B) + \nu(B \setminus A)$, საიდანაც, იმის გათვალისწინებით, რომ $\nu(B \setminus A) > -\infty$, უშუალოდ ვღებულობთ დასამტკიცებელ დასკვნას. $\square$

ლემა 15.1.2. თუ ზომადი A სიმრავლისათვის $\nu(A) < 0$, მაშინ არსებობს მისი A^* ქვესიმრავლე, რომელიც უარყოფითია და აკმაყოფილებს $\nu(A^*) < 0$ პირობას.

დამტკიცება. ზომადი E სიმრავლისათვის აღვნიშნოთ

$$\lambda(E) = \sup\{\nu(B) : B \in \mathbf{S}, B \subset E\}.$$

ცხადია, $\lambda(E) \geq \nu(\emptyset) = 0$. $\lambda(E)$ სიდიდეს შეიძლება შევხედოთ, როგორც E სიმრავლის „დადებით პოტენციალს“. შევნიშნოთ, რომ E სიმრავლე უარყოფითია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\lambda(E) = 0$.

ვთქვათ, ზომადი E სიმრავლე არაა უარყოფითი. მაშინ $\lambda(E) > 0$. $\lambda(E) < \infty$ შემთხვევაში B იყოს E-ს ისეთი ზომადი ქვესიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $\nu(B) \geq \lambda(E)/2$ პირობას, ხოლო $\lambda(E) = \infty$ შემთხვევაში B იყოს E-ს ისეთი ზომადი ქვესიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $\nu(B) \geq 1$ პირობას. მსჯელობის სიმოკლისათვის, ასეთ B სიმრავლეს ვუწოდოთ E სიმრავლის ბალასტი, ხოლო E-დან $E \setminus B$ სიმრავლეზე გადასვლის ოპერაციას კი - E სიმრავლის შემსუბუქება.

ახლა გადავიდეთ უშუალოდ ლემის დამტკიცებაზე. თუ A სიმრავლე უარყოფითია, მაშინ დებულება ცხადია. წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილოთ A-ს შემსუბუქების შედეგად მიღებული A_1 სიმრავლე. თუ A_1 სიმრავლე უარყოფითია, მაშინ პროცესი შევწყვიტოთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი, შემსუბუქების ოპერაცია კვლავ ჩავატაროთ უკვე A_1 სიმრავლესთან მიმართებაში და ა.შ. შესაძლებელია ორი შემთხვევა: i) რომელიმე n-ურ ეტაპზე შემსუბუქების პროცესი წყდება, ე.ი. მიიღება უარყოფითი სიმრავლე; ii) შემსუბუქების პროცესი უსასრულოდ გრძელდება (ე.ი. არცერთ ეტაპზე არ მიიღება უარყოფითი სიმრავლე).

აგების k-ურ ეტაპზე წარმოქმნილი ბალასტი აღვნიშნოთ B_k-თი. შევნიშნოთ, რომ:

- B_k სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია;
- თუ $\nu(B_k) < 1$, მაშინ $\nu(B_k) \geq \lambda(A_{k-1})/2 > 0$;
- შემსუბუქების ოპერაციის k-ჯერ ჩატარების შედეგად დარჩენილი A_k სიმრავლე უდრის $A \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_k)$ სიმრავლეს.

ახლა განვიხილოთ ორივე ზემოთ აღნიშნულ შემთხვევათაგან. პირველ შემთხვევაში გვაქვს, რომ A_n სიმრავლე უარყოფითია. ამასთან,

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^{n} \nu(B_k) + \nu(A_n),$$

ტოლობის საფუძველზე ვღებულობთ $\nu(A_n) < 0$ შეფასებას. შედეგად, A^*-ის როლში შეიძლება ავიღოთ A_n სიმრავლე.

მეორე შემთხვევაში, A^*-ის როლში ავიღოთ $A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ სიმრავლე და დავადგინოთ, რომ ის აკმაყოფილებს ლემის პირობებს. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k) + \nu(A^*).$$

საიდანაც ვღებულობთ $\nu(A^*) < 0$ შეფასებას.

ლემა 15.1.1-ის ძალით, $\nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) < \infty$. ამასთანავე, სრულდება ტოლობა:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k) = \nu\bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\bigg).$$

შედეგად, $\nu(B_k) \to 0$ $(k \to \infty)$. საიდანაც გამომდინარე, ყოველი საკმარისად დიდი k-სათვის შესრულებული იქნება $\lambda(A_{k-1}) \leq 2\nu(B_k)$ შეფასება. ამ შეფასების ძალით, $\lambda(A_k) \to 0$ $(k \to \infty)$. ახლა, თუ გავითვალისწინებთ $A^* \subset A_k$ $(k \in \mathbb{N})$ ჩართვებს, დავწერთ,

$$0 \leq \lambda(A^*) \leq \lambda(A_k) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

შედეგად, მივიღებთ $\lambda(A^*) = 0$ ტოლობას, რაც ნიშნავს A^* სიმრავლის უარყოფითობას. ამრიგად, A^* სიმრავლე აკმაყოფილებს საჭირო პირობებს. ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 15.1.3. თუ A_n $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეები უარყოფითი არიან, მაშინ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ სიმრავლე უარყოფითია.

დამტკიცება. ვთქვათ, A_n $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეები უარყოფითია. ლემის სამართლიანობა ადვილი შესამოწმებელია, როცა A_n სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია. ზოგადი შემთხვევის დაყვანა აღნიშნულზე კი ხორციელდება (A_n) მიმდევრობის გარდაქმნით (A_n^*) მიმდევრობად, სადაც $A_1^* = A_1$ და $A_n^* = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, როცა $n > 1$. ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 15.1.1-ის დამტკიცება. S_- იყოს კლასი, რომელიც შედგება ყველა უარყოფითი სიმრავლისაგან. აღვნიშნოთ

$$\alpha = \inf\{\nu(M) : M \in \mathrm{S}_-\}.$$

ცხადია, $\alpha \leq \nu(\emptyset) = 0$. ვთქვათ, (A_n) არის S_- კლასის სიმრავლეთა მიმდევრობა, რომელიც ახდენს α ინფიმუმის რეალიზაციას, ე.ი. აკმაყოფილებს $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(A_n) = \alpha$ პირობას. განვიხილოთ

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

სიმრავლე. ლემა 15.1.3-ის ძალით A უარყოფითია. აქედან გამომდინარე, გვექნება, რომ $\alpha \leq \nu(A) \leq \nu(A_n)$ ყოველი n-სთვის. ამრიგად, A არის უარყოფითი სიმრავლე, რომლისთვისაც $\nu(A) = \alpha$.

ვაჩვენოთ, რომ $B = X \setminus A$ სიმრავლე დადებითია, რითაც თეორემა დამტკიცებული იქნება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რაც ტოლფასია იმისა, რომ მოიძებნება ზომადი $E \subset X \setminus A$ სიმრავლე, რომლისთვისაც $\nu(E) < 0$. ლემა 15.1.2-ის ძალით, შეგვიძლია ვიპოვოთ უარყოფითი $E^* \subset E$ სიმრავლე, რომლისთვისაც $\nu(E^*) < 0$. მაშინ ლემა 15.1.3-ის თანახმად, $A \cup E^*$ იქნება უარყოფითი სიმრავლე და, ამასთან ერთად, გვექნება, რომ

$$\nu(A \cup E^*) = \nu(A) + \nu(E^*) < \nu(A) = \alpha.$$

დადგენილი $\nu(A \cup E^*) < \alpha$ შეფასება კი ეწინააღმდეგება α ინფიმუმის განსაზღვრას. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით, $X \setminus A$ არის დადებითი სიმრავლე. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 15.1.1. ვთქვათ, ν რაიმე მუხტია, ხოლო (A, B) სივრცის ჰანის დაშლაა ν-ს მიმართ. ჰანის დაშლა საშუალებას იძლევა, მარტივად ვაჩვენოთ მუხტის შემდეგი ორი თვისება:

- ν ქვემოდან შემოსაზღვრულია, ამასთან, $\nu(A)$ წარმოადგენს ν-ს მინიმალურ მნიშვნელობას;
- თუ ν სასრული ფუნქციაა, მაშინ ის შემოსაზღვრულია, ამასთან, $\nu(A)$ და $\nu(B)$ რიცხვები შესაბამისად წარმოადგენენ ν-ს მინიმალურ და მაქსიმალურ მნიშვნელობებს.

ჰანის დაშლა, საზოგადოდ, ერთადერთი არაა (ამაში მარტივად დავრწმუნდებით წრფის ლებეგის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასზე განსაზღვრული იგივურად ნულოვანი მუხტის მაგალითზე), თუმცა, ჰანის სხვადასხვა დაშლები ერთსა და იმავე შედეგს იძლევიან მუხტის დადებითი და უარყოფითი „მდგენელების“ გაზომვის თვალსაზრისით. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 15.1.2. ვთქვათ, სიმრავლეთა (A, B) და (A^*, B^*) წყვილები წარმოადგენენ სივრცის ჰანის დაშლებს, რომლებშიც A და A^* არიან უარყოფითი, ხოლო B და B^* კი - დადებითი კომპონენტები. მაშინ ნებისმიერი ზომადი E სიმრავლისათვის შესრულებულია ტოლობები:

$$\nu(E \cap A) = \nu(E \cap A^*), \;\; \nu(E \cap B) = \nu(E \cap B^*).$$

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ $A \setminus A^*$, $A^* \setminus A$, $B \setminus B^*$ და $B^* \setminus B$ სიმრავლეები არიან ნულოვანი იმ გაგებით, რომ მათ ნებისმიერ ზომად ქვესიმრავლეზე მუხტის მნიშვნელობა ნულის ტოლია. ზოგადობის შეუზღუდავად განვიხილოთ $A \setminus A^*$ სიმრავლის შემთხვევა. მართლაც, ავიღოთ რაიმე ზომადი $H \subset A \setminus A^*$ სიმრავლე. მაშინ გვექნება ჩართვები: $H \subset A$ და $H \subset X \setminus A^* = B^*$. პირველი

ჩართვის ძალით მივიღებთ, რომ $\nu(H) \leq 0$, ხოლო მეორე ჩართვა გვაძლევს $\nu(H) \geq 0$ შეფასებას. ამრიგად, $\nu(H) = 0$.

ვთქვათ, E რაიმე ზომადი სიმრავლეა. მაშინ, ზემოაღნიშნულის გათვალისწინებით, გვექნება, რომ

$$\nu(E \cap A) = \nu(E \cap (A \cap A^*)) + \nu(E \cap (A \setminus A^*)) = \nu(E \cap (A \cap A^*))$$

და

$$\nu(E \cap A^*) = \nu(E \cap (A^* \cap A)) + \nu(E \cap (A^* \setminus A)) = \nu(E \cap (A \cap A^*)).$$

შედეგად, $\nu(E \cap A) = \nu(E \cap A^*)$. ანალოგიურად მტკიცდება $\nu(E \cap B) = \nu(E \cap B^*)$ ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

დამტკიცებული თეორემა გვიჩვენებს, რომ სიმრავლის მუხტის დადებითი და უარყოფითი მდგენელების გაზომვა ერთ განსაზღვრულ შედეგს იძლევა იმისგან დამოუკიდებლად, თუ ჰანის რომელი დაშლის მეშვეობით იქნება გაზომვა გაკეთებული. ამ გარემოების გათვალისწინებით, შეიძლება შემოვიღოთ ზომად სიმრავლეთა კლასზე (ე.ი. S-ზე) განსაზღვრული შემდეგი ν^- და ν^+ ფუნქციები:

$$\nu^-(E) = -\nu(E \cap A), \;\; \nu^+(E) = \nu(E \cap B).$$

სადაც (A, B) არის სივრცის ჰანის რაიმე დაშლა, რომელშიც A არის უარყოფითი, ხოლო B კი - დადებითი კომპონენტი. ν^- და ν^+ ფუნქციებს, შესაბამისად, ν მუხტის **უარყოფით და დადებით ვარიაციებს** უწოდებენ. ადვილი შესამოწმებელია, რომ:

- ν^- და ν^+ ფუნქციები წარმოადგენენ ზომებს, ამასთან, ν^- შემოსაზღვრული ზომაა;
- თუ ν შემოსაზღვრულია (σ-შემოსაზღვრულია), მაშინ ν^+ შემოსაზღვრულია (σ-შემოსაზღვრულია);
- $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

მუხტის დაშლას დადებითი და უარყოფითი ვარიაციების სხვაობის სახით, მუხტის **ჟორდანის დაშლა** ეწოდება.

$\nu^+ + \nu^-$ ზომას ν მუხტის **სრულ ვარიაციას** უწოდებენ. ν მუხტის სრულ ვარიაციას $|\nu|$ ჩანაწერით აღნიშნავენ.

ამოცანები

1. ვთქვათ, ν მუხტია (X, S) ზომად სივრცეზე. დაამტკიცეთ, რომ:
$$\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) : F \subset E, F \in \mathrm{S}\},$$
$$\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) : F \subset E, F \in \mathrm{S}\}.$$
2. ვთქვათ, $f \in L(X, \mu)$. ა) აჩვენეთ, რომ $A = \{f < 0\}$ და $B = \{f \geq 0\}$ სიმრავლეები იძლევიან ν_f მუხტის ჰანის დაშლას μ ზომის მიმართ; ბ) დაახასიათეთ ν_f მუხტის ყველა შესაძლო ჰანის დაშლები μ ზომის მიმართ.

§ 2. აბსოლუტურად უწყვეტობა

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი. ν მუხტს ეწოდება **აბსოლუტურად უწყვეტი μ ზომის მიმართ** (აღნიშვნა: $\nu \ll \mu$), თუ

$$(E \in \mathrm{S}, \mu(E) = 0) \;\;\Rightarrow\;\; \nu(E) = 0.$$

ვიდრე აბსოლუტურად უწყვეტობის ცნების ანალიზს შევუდგებოდეთ, გავაკეთოთ მარტივი შენიშვნა იმის თაობაზე, რომ მუხტი შეიძლება არ იყოს ზომის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტი. მართლაც, ვთქვათ, (X, S, μ) რაიმე ზომიანი სივრცეა და $x_0 \in X$ წერტილი ისეთია, რომ $\{x_0\} \in \mathrm{S}$ და $\mu(\{x_0\}) = 0$. განვიხილოთ S-ზე განსაზღვრული შემდეგი ν ზომა: $\nu(E) = 1$, თუ $x_0 \in E$ და $\nu(E) = 0$, თუ $x_0 \notin E$. მაშინ ცხადია, რომ ν არაა აბსოლუტურად უწყვეტი μ-ს მიმართ.

თეორემა 15.2.1. ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი. შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია: 1) $\nu \ll \mu$; 2) $\nu^+ \ll \mu$ და $\nu^- \ll \mu$; 3) $|\nu| \ll \mu$.

დამტკიცება. ვთქვათ, შესრულებულია 1) პირობა. განვიხილოთ სიმრავლეთა (A, B) წყვილი, რომელიც წარმოადგენს (X, S) სივრცის ჰანის დაშლას ν მუხტის მიმართ. მაშინ ნებისმიერი $E \in \mathrm{S}, \mu(E) = 0$, სიმრავლისათვის გვექნება, რომ $0 \le \mu(E \cap A) \le \mu(E) = 0$ და $0 \le \mu(E \cap B) \le \mu(E) = 0$. აქედან გამომდინარე, $\nu \ll \mu$ პირობის ძალით დავწერთ:

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = 0, \quad \nu^-(E) = \nu(E \cap B) = 0.$$

ამით 1) $\Rightarrow$ 2) იმპლიკაცია დადგენილია. 2) $\Rightarrow$ 3) და 3) $\Rightarrow$ 1) იმპლიკაციები კი უშუალოდ გამომდინარეობენ $|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E)$ და $0 \le |\nu(E)| \le |\nu|(E)$ თანაფარდობებიდან. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ლებეგის ინტეგრალის თვისებებიდან გამომდინარე (იხ. თეორემა 8.8.1), ნებისმიერი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ν_f ინტეგრალი წარმოადგენს μ ზომის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტ მუხტს ზემოთ მოცემული აზრით. ამასთანავე, ჩვენთვის ცნობილია განუსაზღვრელი ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობის ცნების მეორე ვარიანტი (იხ. თეორემა 8.8.8), რომელიც გამოიხატება შემდგომში: ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ $(E \in \mathrm{S}, \mu(E) < \delta) \Rightarrow |\nu_f(E)| < \varepsilon$. შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ შემოსაზღვრული მუხტისათვის ზომის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტობის ცნების ორივე ვერსია ერთი და იგივე დატვირთვის მატარებელია.

თეორემა 15.2.2. ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული შემოსაზღვრული მუხტი. ν აბსოლუტურად უწყვეტია μ ზომის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი

$\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ $(E \in \mathrm{S}, \mu(E) < \delta) \Rightarrow |\nu(E)| < \varepsilon$.

დამტკიცება. საკმარისობის ნაწილი ადვილი შესამოწმებელია. დავადგინოთ აუცილებლობასთან დაკავშირებული დებულება. აქ მოგვიწევს გავიმეოროთ ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობის დამტკიცებისას გამოყენებული მსჯელობა (იხ. თეორემა 8.8.8).

ჟორდანის დაშლისა და 15.2.1 თეორემის საფუძველზე საკმარისია განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა ν წარმოადგენს ზომას. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, მოიძებნება $\varepsilon > 0$ და ზომად სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობა, ისეთი, რომ ყოველი n-სთვის,

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{და} \quad \nu(E_n) \geq \varepsilon.$$

განვიხილოთ სიმრავლეთა (E_n) მიმდევრობის ზედა ზღვარი:

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

მაშინ, ბორელ-კანტელის ლემის (იხ. თეორემა 4.4.4) საფუძველზე, მივიღებთ $\mu(E) = 0$ ტოლობას. მეორე მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ν შემოსაზღვრული ზომაა და გამოვიყენებთ ზომის ზემოდან უწყვეტობის თვისებას, გვექნება,

$$\nu(E) = \lim_{n \to \infty} \nu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right).$$

საიდანაც, $\nu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \geq \nu(E_n) \geq \varepsilon$ შეფასების გათვალისწინებით, დავასკვნით, რომ $\nu(E) \geq \varepsilon$. ეს კი ეწინააღმდეგება $\nu \ll \mu$ პირობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 15.2.1. ადვილი დასანახია, რომ თეორემა 15.2.2-ის საკმარისობასთან დაკავშირებული ნაწილი სამართლიანია ნებისმიერი (თუნდაც შემოუსაზღვრელი) ν მუხტისათვის. რაც შეეხება აუცილებლობის გამომხატველ ნაწილს, ის, მუხტის შემოსაზღვრულობის მოთხოვნის გარეშე, საზოგადოდ, სამართლიანი არაა. შესაბამის კონტრმაგალითს მივიღებთ, თუ ზომიანი სივრცის როლში ავიღებთ ლებეგის ზომით აღჭურვილ $(0, 1)$ მონაკვეთს, ხოლო ν მუხტს კი განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად:

$$\nu(E) = \int_E \frac{1}{x} d\mathrm{m}(x),$$

სადაც E არის $(0,1)$-ის ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი ქვესიმრავლე.

ამოცანები

1. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, ხოლო μ და ν ზომებია S-ზე. დაამტკიცეთ, რომ $\mu \ll \mu + \nu$.
2. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა და μ_n $(n \in \mathbb{N})$ შემოსაზღვრული ზომებია S-ზე. დაამტკიცეთ, რომ მოიძებნება შემოსაზღვრული μ ზომა S-ზე, რომლისთვისაც $\mu_n \ll \mu$ ყოველი n-სთვის.

§ 3. რადონ-ნიკოდიმის თეორემა

შემდეგი თეორემა წარმოადგენს ზომის თეორიის ერთ-ერთ უმთავრეს დებულებას.

თეორემა 15.3.1. (რადონი-ნიკოდიმი). ვთქვათ, (X, S, μ) σ-შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა და ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- **ν წარმოდგება ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით, ე.ი. მოიძებნება $f \in L(X, \mu)$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $\nu(E) = \int_E f d\mu$ $(E \in \mathrm{S})$;**
- **ν არის შემოსაზღვრული და აბსოლუტურად უწყვეტი μ ზომის მიმართ.**

ლემა 15.3.1. ვთქვათ, $f_1, \dots, f_n$ არაუარყოფითი და (X, S, μ) ზომიან სივრცეზე ჯამებადი ფუნქციებია. თუ S-ზე განსაზღვრული ν ზომა, ისეთია, რომ

$$\nu_{f_k} \le \nu \text{ ყოველი } k \in \overline{1, n}\text{-სთვის,}$$

მაშინ

$$\nu_{\max(f_1, \dots, f_n)} \le \nu.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $h = \max(f_1, \dots, f_n)$. შევნიშნოთ, რომ X შეიძლება დავშალოთ ზომად და წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ X_k $(k \in \overline{1, n})$ სიმრავლეებად, რომელთათვისაც სრულდება პირობა:

$$X_k \subset \{h = f_k\} \quad (k \in \overline{1, n}).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთი სიმრავლეები შეიძლება შევარჩიოთ შემდეგნაირად: $X_1 = \{h = f_1\}$ და

$$X_k = \{h = f_k\} \setminus (\{h = f_1\} \cup \dots \cup \{h = f_{k-1}\}) \quad (k \in \overline{2, n}).$$

ნებისმიერი $E \in \mathrm{S}$-სთვის გვექნება, რომ

$$\int_E h d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E \cap X_k} h d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E \cap X_k} f_k d\mu \le \sum_{k=1}^n \nu(E \cap X_k) = \nu(E).$$

ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 15.3.2. ვთქვათ, (X, S, μ) შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა. თუ S კლასზე განსაზღვრული ν ზომა არის არანულოვანი და აბსოლუტურად უწყვეტი μ ზომის მიმართ, მაშინ მოიძებნებიან $\varepsilon > 0$ რიცხვი და $M \in \mathrm{S}$ სიმრავლე თვისებებით: $\mu(M) > 0$ და $\nu(E) \geq \varepsilon\mu(E)$ ყოველთვის, როცა $E \subset M$ და $E \in \mathrm{S}$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ლემის დასკვნა ტოლფასია შემდეგი პირობის: მოიძებნებიან $\varepsilon > 0$ რიცხვი და $M \in \mathrm{S}$ სიმრავლე თვისებებით: $\mu(M) > 0$ და M დადებითია $\nu - \varepsilon\mu$ მუხტის მიმართ.

ყოველი ნატურალური n-სთვის განვიხილოთ $\nu - \frac{1}{n}\mu$ მუხტი და მის მიმართ სივრცის ჰანის დაშლა - (A_n, B_n), სადაც A_n უარყოფითი სიმრავლეა, ხოლო B_n - დადებითი. თუ რომელიმე n-სთვის ვაჩვენებთ, რომ $\mu(B_n) > 0$, მაშინ, ცხადია, საძიებელი M სიმრავლის როლში შეგვიძლია ავიღოთ B_n სიმრავლე.

A_n-ის განსაზღვრის საფუძველზე გვექნება,

$$\nu(A_n) \leq \frac{1}{n}\mu(A_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ μ შემოსაზღვრულია, ხოლო ν არანულოვანია, დავასკვნით ისეთი n-ის არსებობას, რომლისთვისაც

$$\nu(A_n) < \nu(X).$$

მაშინ ასეთი n-სთვის მივიღებთ $\nu(B_n) > 0$ შეფასებას. საიდანაც, ν ზომის μ ზომისადმი აბსოლუტურად უწყვეტობის საფუძველზე დავასკვნით, რომ $\mu(B_n) > 0$. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 15.3.3. ვთქვათ, (X, S, μ) არის შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცე, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული ზომა, რომელიც აბსოლუტურად უწყვეტია μ ზომის მიმართ. თუ არაუარყოფითი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქცია ისეთია, რომ

$$\nu_f \leq \nu \ \text{ და } \ \nu_f \neq \nu,$$

მაშინ მოიძებნება არაუარყოფითი $g \in L(X, \mu)$ ფუნქცია, ისეთი, რომ

$$\nu_g \leq \nu \ \text{ და } \ \int_X g d\mu > \int_X f d\mu.$$

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ $\nu - \nu_f$ წარმოადგენს S-ზე განსაზღვრულ ზომას, რომელიც არანულოვანია და აბსოლუტურად უწყვეტია μ ზომის მიმართ. ლემა 5.3.2-ის ძალით, მოიძებნებიან $\varepsilon > 0$ რიცხვი და $M \in \mathrm{S}$ სიმრავლე თვისებებით: $\mu(M) > 0$ და $\nu(E) - \nu_f(E) \geq \varepsilon\mu(E)$, ყოველთვის, როცა $E \subset M$ და $E \in \mathrm{S}$.

განვიხილოთ $g = f + \varepsilon\chi_M$ ფუნქცია. μ ზომის შემოსაზღვრულობის ძალით, M სასრული ზომის სიმრავლეა, საიდანაც ვასკვნით, რომ $g \in L(X, \mu)$. M-ის

შერჩევიდან გამომდინარე, ნებისმიერი $A \in S$ სიმრავლისათვის დავწერთ,

$$\nu_g(A) = \nu_f(A) + \nu_{\varepsilon\chi_M}(A) = \nu_f(A \setminus M) + \nu_f(A \cap M) + \varepsilon\mu(A \cap M) \leq$$

$$\leq \nu_f(A \setminus M) + \nu(A \cap M) \leq \nu(A \setminus M) + \nu(A \cap M) = \nu(A).$$

ამასთან, $\mu(M) > 0$ პირობის ძალით, გვაქვს, რომ

$$\int_X g d\mu = \int_X f d\mu + \varepsilon\mu(M) > \int_X f d\mu.$$

ამით ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 15.3.1-ის დამტკიცება. ლებეგის ინტეგრალის თვისებების საფუძველზე ვიცით, რომ მეორე წინადადება არის პირველის შედეგი. ამრიგად, დასადგენი გვაქვს შებრუნებული იმპლიკაცია. ჟორდანის დაშლისა და 15.2.1 თეორემის გათვალისწინებით, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ν წარმოადგენს ზომას.

თავდაპირველად f ფუნქცია ვიპოვოთ იმ შემთხვევაში, როცა μ ზომა შემოსაზღვრულია.

Π-თი აღვნიშნოთ ყველა იმ არაუარყოფითი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის კლასი, რომლის მიერ წარმოქმნილი ν_f ზომა მაჟორირდება ν ზომით, ე.ი. $\nu_f \leq \nu$. განვიხილოთ შემდეგი სუპრემუმი:

$$\alpha = \sup\Big\{\int_X f d\mu : f \in \Pi\Big\}.$$

შევნიშნოთ, რომ ν ზომის შემოსაზღვრულობის გამო, $\alpha < \infty$. (f_n) იყოს Π კლასის ფუნქციათა ისეთი მიმდევრობა, რომელზეც რეალიზდება α სუპრემუმი, ე.ი. სრულდება პირობა:

$$\int_X f_n d\mu \to \alpha \quad (n \to \infty).$$

ყოველი n-სთვის h_n იყოს $f_1, \dots, f_n$ ფუნქციების მაქსიმუმი. მაშინ ლემა 15.3.1-ის ძალით, ყოველი n-სთვის გვექნება, რომ $\nu_{h_n} \leq \nu$. შედეგად, $h_n \in \Pi$ $(n \in \mathbb{N})$. ცხადია, (h_n) ზრდადი მიმდევრობაა, რის გამოც, (h_n)-ის ზღვარი არსებობს ყოველი $x \in X$-სთვის. f-ით აღვნიშნოთ (h_n) მიმდევრობის ზღვარითი ფუნქცია, ე.ი.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) \quad (x \in X).$$

მაშინ $h_n \in \Pi$ პირობისა და ლევის თეორემის ძალით, ნებისმიერი $E \in \mathrm{S}$ სიმრავლისათვის გვექნება,

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E h_n d\mu \leq \nu(E).$$

ამით დადგენილია $\nu_f \leq \nu$ შეფასება. შედეგად, $f \in \Pi$. ამასთან, $h_n \in \Pi$ და $h_n \geq f_n$ პირობების გათვალისწინებით, დავწერთ,

$$\alpha \geq \lim_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \alpha.$$

მაშასადამე,

$$\int_X f d\mu = \alpha.$$

ამრიგად, α სუპრემუმი მიიღწევა f ფუნქციისათვის. f-ის „ექსტრემალურობის" გამომხატველი აღნიშნული თვისება არის საფუძველი ჩვენთვის საჭირო $\nu_f = \nu$ ტოლობის დამტკიცებისათვის. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ გვექნება: $\nu_f \leq \nu$ და $\nu_f \neq \nu$. შედეგად, ლემა 15.3.3-ის გამოყენებით, ვიპოვით $g \in \Pi$ ფუნქციას, ისეთს, რომ

$$\int_X g d\mu > \int_X f d\mu = \alpha.$$

რაც ეწინააღმდეგება α სუპრემუმის განსაზღვრას.

ახლა გადავიდეთ ზოგადი შემთხვევის განხილვაზე, ე.ი. ვიპოვოთ f ფუნქცია ნებისმიერი σ-შემოსაზღვრული μ ზომის შემთხვევაში.

წარმოვადგინოთ სივრცე წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი და სასრული ზომის X_n $(n \in \mathbb{N})$ ქვესიმრავლეების გაერთიანების სახით. თუ ნებისმიერი ფიქსირებული n-სთვის განვიხილავთ μ და ν ზომების შეზღუდვებს X_n-ის ზომად ქვესიმრავლეთა კლასზე, მაშინ თეორემის უკვე დამტკიცებული ნაწილის გამოყენებით ვიპოვით არაუარყოფით $f_n \in L(X, \mu)$ ფუნქციას, რომლის საყრდენი მოთავსებულია X_n-ში (ე.ი. $\{f_n \neq 0\} \subset X_n$) და

$$\nu(E) = \int_E f_n d\mu,$$

როცა $E \subset X_n$ და $E \in \mathrm{S}$.

განვიხილოთ $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ფუნქცია. მაშინ

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(X_n) = \nu(X) < \infty.$$

ამრიგად, $f \in L(X, \mu)$. ამასთან გვექნება, რომ ნებისმიერი $E \in \mathrm{S}$ სიმრავლისათვის,

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E\cap X_n} f_n d\mu =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E\cap X_n} f d\mu = \int_E f d\mu.$$

ამით ნაჩვენებია, რომ $\nu = \nu_f$.

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 15.3.1. თუ ν მუხტი წარმოდგება $f \in L(X,\mu)$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით (ე.ი. $\nu = \nu_f$), მაშინ ასეთი f ფუნქცია ერთადერთია ეკვივალენტობის სიზუსტით. სახელდობრ, თუ $g \in L(X,\mu)$ და $\nu = \nu_g$, მაშინ g არის f-ის ეკვივალენტური μ ზომის მიხედვით.

აღვნიშნოთ $E = \{f - g > 0\}$ და $F = \{g - f > 0\}$. გვაქვს, რომ $\int_E (f - g) d\mu = \int_E f d\mu - \int_E g d\mu = 0$. შედეგად, თეორემა 8.4.5-ის გათვალისწინებით, დავასკვნით, რომ $(f - g)(x) = 0$ თითქმის ყველგან E სიმრავლეზე. ანალოგიური მსჯელობით დავადგენთ $(g - f)(x) = 0$ ტოლობის შესრულებას თითქმის ყველგან F სიმრავლეზე. ამით, ცხადია, ნაჩვენები იქნება f და g ფუნქციების ეკვივალენტობა.

შენიშვნა 15.3.2. რადონ-ნიკოდიმის თეორემაში μ ზომის σ-შემოსაზღვრულობის მოთხოვნა არსებითია. მოვიყვანოთ ამის დამადასტურებელი მაგალითი. განვიხილოთ (X, S, μ) სივრცე, სადაც $X = [0,1]$, S არის $[0,1]$-ის ლებეგის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი, ხოლო μ კი წარმოადგენს S-ზე განსაზღვრულ დამთვლელ ზომას. ν მუხტის როლში ავიღოთ ლებეგის ზომა $[0,1]$ მონაკვეთზე. ადვილი დასანახია, რომ ν შემოსაზღვრული ზომაა და ν აბსოლუტურად უწყვეტია μ-ს მიმართ. დავამტკიცოთ, რომ არ არსებობს $f \in L(X,\mu)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $\nu = \nu_f$. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ ყოველი ერთელემენტიანი $\{x\}$ სიმრავლისთვის გვექნება: $0 = \nu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d\mu = f(x)$. შედეგად, f იგივურად ნულოვანი ფუნქციაა, რის გამოც ν_f იგივურად ნულის ტოლი ზომა გამოვა. აქედან გამომდინარე, ν_f ვერ დაემთხვევა არანულოვან ν ზომას. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით, μ და ν ზომებისათვის რადონ-ნიკოდიმის თეორემის დასკვნა არ სრულდება.

§ 4. რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა და ν არის S-ზე განსაზღვრული მუხტი. თუ ν წარმოდგება $f \in L(X,\mu)$ ფუნქციის ლებეგის განუსაზღვრელი ინტეგრალის სახით, ე.ი.

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathrm{S}),$$

მაშინ f ფუნქციას უწოდებენ ν მუხტის **რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულს** (ან, სხვაგვარად, **სიმკვრივეს**) μ ზომის მიმართ. ასეთ შემთხვევაში, f ფუნქციისათვის იყენებენ $\frac{d\nu}{d\mu}$ აღნიშვნას. როგორც უკვე დავამტკიცეთ, ნებისმიერი შემოსაზღვრული და აბსოლუტურად უწყვეტი ν მუხტისათვის არსებობს მისი რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული.

შევნიშნოთ, რომ რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული ცალსახად განისაზღვრება μ ზომის მიხედვით ეკვივალენტობის სიზუსტით (იხ. შენიშვნა 15.3.1). ადვილი შესამოწმებელია აგრეთვე, რომ ზომის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული თითქმის ყველგან არაუარყოფითი ფუნქციაა.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, თუ როგორ დაიყვანება ν ზომის მიხედვით ინტეგრება μ ზომის მიხედვით ინტეგრებაზე, იმ შემთხვევაში, როცა არსებობს $\frac{d\nu}{d\mu}$ წარმოებული.

თეორემა 15.4.1. ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ν არის S-ზე განსაზღვრული ზომა და ცნობილია, რომ არსებობს ν-ს რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული μ-ს მიმართ, რომელიც f-ის ტოლია. მაშინ ნებისმიერი $g \in L(X, \nu)$ ფუნქციისათვის,

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu.$$

დამტკიცება. Ω-თი აღვნიშნოთ ყველა იმ არაუარყოფითი $g \in L(X, \nu)$ ფუნქციის კლასი, რომლისთვისაც სრულდება თეორემის დასკვნა. ადვილი შესამოწმებელია, რომ:

1) Ω კლასი შეიცავს ნებისმიერი $E \in \mathrm{S}, \nu(E) < \infty$, სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას;

2) Ω ჩაკეტილია შეკრებისა და არაუარყოფით სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

აღნიშნული ორი თვისებიდან გამომდინარე, Ω კლასი შეიცავს ნებისმიერ მარტივ არაუარყოფით g ფუნქციას, რომელიც ჯამებადია ν ზომის მიხედვით.

ვაჩვენოთ, რომ Ω კლასი შეიცავს ნებისმიერ არაუარყოფით $g \in L(X, \nu)$ ფუნქციას, საიდანაც უშუალოდ დავასკვნით თეორემის სამართლიანობას.

განვიხილოთ ნებისმიერი არაუარყოფითი $g \in L(X, \nu)$ ფუნქცია. თეორემა 7.5.1-ის ძალით (იხ. აგრეთვე, შენიშვნა 7.5.1) მოიძებნება მარტივ არაუარყოფით $g_n \in L(X, \nu)$ ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელიც ყოველ წერტილში კრებადია g ფუნქციისაკენ. მაშინ $(g_n f)$ იქნება ზომად არაუარყოფით ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც ყოველ წერტილში კრებადია gf ფუნქციისაკენ და აკმაყოფილებს პირობას:

$$\int_X g_n d\nu = \int_X g_n f d\mu \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ ლევის თეორემას (g_n) და $(g_n f)$ მიმდევრობებისათვის, დავასკვნით, რომ სრულდება ტოლობა:

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu.$$

შედეგად, g ეკუთვნის Ω კლასს. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულს აქვს ჩვეულებრივი წარმოებულის მსგავსი ზოგიერთი თვისება. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 15.4.2. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, ხოლო μ, ν და λ არიან S-ზე განსაზღვრული ზომები. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- **თუ არსებობენ $\frac{d\nu}{d\mu}$ და $\frac{d\lambda}{d\mu}$, მაშინ არსებობს $\frac{d(\nu+\lambda)}{d\mu}$ და $\frac{d(\nu+\lambda)}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\mu} + \frac{d\lambda}{d\mu}$;**
- **თუ არსებობენ $\frac{d\nu}{d\lambda}$ და $\frac{d\lambda}{d\mu}$, მაშინ არსებობს $\frac{d\nu}{d\mu}$ და $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu}$;**
- **თუ არსებობენ $\frac{d\nu}{d\mu}$ და $\frac{d\mu}{d\nu}$, მაშინ $\frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^{-1}$.**

დამტკიცება. პირველი წინადადება წარმოადგენს ინტეგრალის ადიციურობის თვისების შედეგს.

დავადგინოთ მეორე წინადადება. აღვნიშნოთ $g = \frac{d\nu}{d\lambda}$ და $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$. მაშინ ნებისმიერი $E \in \mathrm{S}$ სიმრავლისათვის გვექნება,

$$\nu(E) = \int_E g d\lambda = \int_X g\chi_E d\lambda.$$

შემდეგ, თეორემა 15.4.1-ის ძალით დავწერთ,

$$\nu(E) = \int_X g\chi_E f d\mu = \int_E g f d\mu.$$

აქედან გამომდინარე დავასკვნით, რომ gf ფუნქცია წარმოადგენს $\frac{d\nu}{d\mu}$ წარმოებულს.

მესამე წინადადების დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ მეორე წინადადება (ν, μ, ν) სამეულისათვის. შედეგად,

$$1 = \frac{d\nu}{d\nu} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\nu}.$$

საიდანაც ვღებულობთ საჭირო ტოლობას. □

ამოცანები

1. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა და ν მუხტია S-ზე. იპოვეთ $\frac{d\nu^+}{d|\nu|}$ და $\frac{d\nu^-}{d|\nu|}$.

§ 5. ლებეგის დაშლა

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S-ზე განსაზღვრული მუხტი. ν-ს ვუწოდოთ $A \in \mathrm{S}$ **სიმრავლეზე აბსოლუტურად უწყვეტი μ-ს მიმართ**, თუ $(E \subset A, E \in \mathrm{S}, \mu(E) = 0) \Rightarrow \nu(E) = 0$.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მუხტი შეიძლება არ იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი ზომის მიმართ. შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, რომ ზომისა და მუხტის σ-შემოსაზღვრულობის შემთხვევაში, მუხტის აბსოლუტურად უწყვეტობის დარღვევის გამომწვევი განსაკუთრებულობა ყოველთვის თავს იყრის ნული ზომის რაღაც სიმრავლეზე (სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ყოველი მუხტი აბსოლუტურად უწყვეტია სრული ზომის გარკვეულ სიმრავლეზე).

თეორემა 15.5.1. ვთქვათ, (X, S, μ) σ-შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S-ზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული მუხტი. მაშინ მოიძებნება სრულზომიანი A სიმრავლე (ე.ი. $A \in \mathrm{S}$ და $\mu(X \setminus A) = 0$), რომელზეც ν მუხტი აბსოლუტურად უწყვეტია μ ზომის მიმართ.

დამტკიცება. შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევის განხილვით, როცა μ და ν შემოსაზღვრულ ზომებს წარმოადგენენ. ზოგადი შემთხვევა სტანდარტული მსჯელობით დაიყვანება აღნიშნულზე, თუ გამოვიყენებთ მუხტის ჟორდანის დაშლას და სივრცეს დავყოფთ თვლადი რაოდენობის ნაწილებად, რომელთაგან თითოეულზე შემოსაზღვრული იქნებიან μ და ν ფუნქციები.

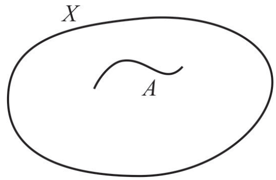
ყოველი $n \in \mathbb{N}$-სთვის განვიხილოთ $\nu - n\mu$ მუხტი და მისი ჰანის დაშლა - (A_n, B_n), სადაც A_n უარყოფითი სიმრავლეა, ხოლო B_n კი - დადებითი. A-თი აღვნიშნოთ A_n სიმრავლეების გაერთიანება, ხოლო B-თი - B_n სიმრავლეების თანაკვეთა. ცხადია, A და B ურთიერთდამატებითი ზომადი სიმრავლეებია. შევნიშნოთ, რომ $\nu(B) \geq n\mu(B)$ შეფასება სამართლიანი ნებისმიერი n-სთვის, რის გამოც $\mu(B) = 0$.

ვთქვათ, $E \in \mathrm{S}$, $E \subset A$ და $\mu(E) = 0$. მაშინ $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap A_n)$ და ყოველი n-სთვის, $\nu(E \cap A_n) \leq n\mu(E \cap A_n) \leq n\mu(E) = 0$. შედეგად, $\nu(E)$=0. ამით დავადგინეთ, რომ A სიმრავლეზე ν აბსოლუტურად უწყვეტია μ-ს მიმართ. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი. ამბობენ, რომ ν **თავმოყრილია** $A \subset X$ **სიმრავლეზე**, თუ $(E \subset X \setminus A, E \in \mathrm{S}) \Rightarrow \nu(E) = 0$.

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი. ν მუხტს უწოდებენ **სინგულარულს μ ზომის მიმართ** (აღნიშვნა: $\nu \perp \mu$), თუ ν თავმოყრილია μ ზომის მიხედვით ნულზომიან რაიმე A სიმრავლეზე (ნახ. 15.2).

ადვილი დასანახია, რომ სინგულარული მუხტი არ შეიძლება იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი, გარდა იმ შემთხვევისა, როცა ის იგივურად ნულის ტოლია. სინგულარულობას შეიძლება შევხედოთ, როგორც აბსოლუტურად უწყვეტობის საწინააღმდეგო ცნებას, რაც გამოიხატება იმაში, რომ თუ $\nu \perp \mu$, მაშინ ν მუხტი არანულოვან მნიშვნელობას შეიძლება ღებულობდეს მხოლოდ იმ სიმრავლეებზე, რომელთა μ ზომა ნულის ტოლია.



ნახ. 15.2.

ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი.

თეორემა 15.5.2. ვთქვათ, (X, S, μ) σ-შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა, ხოლო ν არის S-ზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული მუხტი. მაშინ ν ერთადერთი გზით შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\nu = \nu_a + \nu_s,$$

სადაც ν_a და ν_s არიან S-ზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული მუხტები, რომელთაგან პირველი არის აბსოლუტურად უწყვეტი, მეორე კი სინგულარული μ ზომის მიმართ.

დამტკიცება. თეორემა 15.5.1-ის ძალით, არსებობს μ-ს მიხედვით სრულზომიანი A სიმრავლე, რომელზეც ν აბსოლუტურად უწყვეტია μ-ს მიმართ. განვიხილოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული ν_a და ν_s მუხტები:

$$\nu_a(E) = \nu(E \cap A) \quad (E \in \mathrm{S}),$$

$$\nu_s(E) = \nu(E \cap (X \setminus A)) \quad (E \in \mathrm{S}).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ: 1) $\nu = \nu_a + \nu_s$; 2) ν_a და ν_s არიან σ-შემოსაზღვრული; და 3) ν_a აბსოლუტურად უწყვეტია μ-ს მიმართ. გარდა ამისა, ν_s თავმოყრილია μ-ს მიხედვით ნული ზომის მქონე $X \setminus A$ სიმრავლეზე, რის გამოც, ν_s სინგულარულია μ-ს მიმართ. ამით სასურველი წარმოდგენის არსებობა ნაჩვენებია.

რაც შეეხება წარმოდგენის ერთადერთობას. ცნობილი სქემის გამოყენებით შეიძლება შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევის განხილვით, როცა μ და ν შემოსაზღვრულები არიან. დავუშვათ, რომ $\widehat{\nu}_a$ და $\widehat{\nu}_s$ მუხტები აგრეთვე აკმაყოფილებენ ν-ს წარმოდგენისათვის მოთხოვნილ პირობებს. მაშინ μ-ს მიხედვით ნული ზომის მქონე ნებისმიერ E სიმრავლეზე ორივე ν_a და $\widehat{\nu}_a$ მუხტი ნულის ტოლია (მათი აბსოლუტურად უწყვეტობის გამო). ეს კი, $\nu_a + \nu_s = \widehat{\nu}_a + \widehat{\nu}_s$ ტოლობის გათვალისწინებით, იწვევს იმას, რომ ν_s და $\widehat{\nu}_s$ მუხტები ტოლ მნიშვნელობებს ღებულობენ ნებისმიერ ნული ზომის მქონე სიმრავლეზე. თავის მხრივ, ეს უკანასკნელი პირობა, ν_s და $\widehat{\nu}_s$ მუხტების სინგულარულობის საფუძველზე, ადვილი დასანახია, რომ იწვევს ν_s და $\widehat{\nu}_s$ მუხტების ტოლობას. შედეგად,

ტოლი იქნებიან ν_a და $\widehat{\nu}_a$ მუხტებიც. ამით წარმოდგენის ერთადერთობა და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. □

მუხტის დაშლას აბსოლუტურად უწყვეტ და სინგულარულ კომპონენტებად **ლებეგის დაშლას** უწოდებენ.

შენიშვნა 15.5.1. თეორემა 15.5.2-ის დამტკიცებიდან ნათლად ჩანს, რომ:

- თუ ν მუხტი შემოსაზღვრულია, მაშინ მისი ν_a და ν_s კომპონენტებიც აგრეთვე შემოსაზღვრული არიან;
- თუ ν მუხტი წარმოადგენს ზომას, მაშინ მისი ν_a და ν_s კომპონენტებიც აგრეთვე ზომებს წარმოადგენენ.

ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, ხოლო ν არის S კლასზე განსაზღვრული მუხტი. $A \in \mathrm{S}$ სიმრავლისათვის ν მუხტის **A-კომპონენტი** ვუწოდოთ შემდეგნაირად განსაზღვრულ ν_A მუხტს:

$$\nu_A(E) = \nu(E \cap A) \quad (E \in \mathrm{S}).$$

შენიშვნა 15.5.2. თეორემა 15.5.2-ის დამტკიცების პროცესში დადგენილი იქნა შემდეგი დებულება: X სივრცე შეიძლება დავყოთ სრულზომიან და ნულზომიან ნაწილებად, რომელთაგან პირველზე მუხტის კომპონენტი აბსოლუტურად უწყვეტია, ხოლო მეორეზე კი - სინგულარული.

ამოცანები

1. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, μ და ν ზომებია S-ზე და $\nu \perp \mu$. იპოვეთ $\frac{d\nu}{d(\mu+\nu)}$.
2. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა და ν მუხტია S-ზე. აჩვენეთ, რომ $\nu^- \perp \nu^+$.
3. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, μ, ν და λ შემოსაზღვრული ზომებია S-ზე და $\nu \perp \mu$, $\lambda \perp \mu$. აჩვენეთ, რომ $\nu + \lambda \perp \mu$.
4. ვთქვათ, θ კანტორის ფუნქციაა, ν არის θ-თი წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის ზომის შეზღუდვა $[0, 1]$ მონაკვეთის ბორელის სიმრავლეთა კლასზე, ხოლო μ არის ლებეგის ზომის შეზღუდვა $[0, 1]$ მონაკვეთის ბორელის სიმრავლეთა კლასზე. აჩვენეთ, რომ $\nu \perp \mu$.

§ 6. ლებეგის დაშლა უწყვეტი ზომის მქონე სივრცეებისთვის

თეორემა 15.6.1. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, რომელშიც ყოველი ერთელემენტიანი სიმრავლე ზომადია და ვთქვათ, ν არის S-ზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული მუხტი. მაშინ

$$P = \{x \in X : \nu(\{x\}) \neq 0\}$$

სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.

დამტკიცება. სტანდარტული სქემის გამოყენებით შეიძლება შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევის განხილვით, როცა ν არის შემოსაზღვრული ზომა. აღვნიშნოთ

$$P_n = \{x \in X : \nu(\{x\}) \geq 1/n\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

მაშინ ცხადია, რომ P_n-ის ელემენტთა რაოდენობა არ აღემატება $n\nu(X)$ რიცხვს. შედეგად, $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ტოლობის გათვალისწინებით, ვასკვნით P სიმრავლის არაუმეტეს თვლადობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

მუხტს ეწოდება **უწყვეტი**, თუ ნებისმიერი ერთელემენტიანი სიმრავლე შედის მისი განსაზღვრის არეში და მასზე მუხტის მნიშვნელობა ნულის ტოლია.

მუხტს ეწოდება **დისკრეტული**, თუ ის თავმოყრილია რაიმე არაუმეტეს თვლად სიმრავლეზე.

ვთქვათ, ν დისკრეტული მუხტია, რომელიც თავმოყრილია არაუმეტეს თვლად A სიმრავლეზე. თუ A სიმრავლის ელემენტებს გადავნომრავთ: $A = \{a_k : k \in N \subset \mathbb{N}\}$ და აღვნიშნავთ $p_k = \nu(\{a_k\})$, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$\nu(E) = \sum_{k:\ a_k \in E \cap A} p_k \quad (E \in \mathrm{S}).$$

თეორემა 15.6.1-დან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 15.6.2. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, რომელშიც ყოველი ერთელემენტიანი სიმრავლე ზომადია და ვთქვათ, ν არის S-ზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული მუხტი. დავუშვათ,

$$P = \{x \in X : \nu(\{x\}) \neq 0\}.$$

მაშინ ν მუხტის P-კომპონენტი დისკრეტულია, ხოლო $X \setminus P$-კომპონენტი კი უწყვეტი.

თეორემა 15.6.3. ვთქვათ, (X, S) ზომადი სივრცეა, რომელშიც ყოველი ერთელემენტიანი სიმრავლე ზომადია და ვთქვათ, ν არის S-ზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული მუხტი. მაშინ ν ერთადერთი გზით წარმოდგება შემდეგი სახით:

$$\nu = \nu_c + \nu_d,$$

სადაც ν_c არის უწყვეტი მუხტი, ხოლო ν_d კი - დისკრეტული.

დამტკიცება. ვთქვათ, $P = \{x \in X : \nu(\{x\}) \neq 0\}$. მაშინ, თეორემა 15.6.2-ის ძალით, $\nu_c = \nu_{X \setminus P}$ და $\nu_d = \nu_P$ მუხტები აკმაყოფილებენ წარმოდგენისთვის საჭირო პირობებს. ასე რომ, დასამტკიცებელი გვრჩება წარმოდგენის ერთადერთობა. შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევით, როცა ν შემოსაზღვრულია (ზოგადი შემთხვევა მარტივად დაიყვანება აღნიშნულზე). დავუშვათ, $\widehat{\nu}_c$ და $\widehat{\nu}_d$ მუხტები ასევე იძლევიან სასურველ წარმოდგენას. მაშინ ν_c და $\widehat{\nu}_c$

მუხტები მათი უწყვეტობის გამო ნულის ტოლ მნიშვნელობას მიიღებენ ყოველ ერთელემენტიან სიმრავლეზე. შედეგად, $\nu_c + \nu_d = \widehat{\nu}_c + \widehat{\nu}_d$ ტოლობის ძალით, ν_d და $\widehat{\nu}_d$ მუხტები ტოლ მნიშვნელობებს მიიღებენ ყოველ ერთელემენტიან სიმრავლეზე. აქედან კი, ν_d და $\widehat{\nu}_d$ მუხტების დისკრეტულობის გათვალისწინებით, დავასკვნით მათ იგივურად ტოლობას, რის გამოც იგივურად ტოლი იქნებიან ν_c და $\widehat{\nu}_c$ მუხტებიც. ამით წარმოდგენის ერთადერთობა დადგენილია. თეორემა დამტკიცებულია. □

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, რომლის ზომა უწყვეტია და ვთქვათ, ν არის S-ზე განსაზღვრული მუხტი. ადვილი შესამოწმებელია, რომ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- თუ ν აბსოლუტურად უწყვეტია μ-ს მიმართ, მაშინ ν უწყვეტია;
- თუ ν დისკრეტულია, მაშინ ν სინგულარულია μ-ს მიმართ.

ქვემოთ მოცემული თეორემები გვიჩვენებენ, რომ უწყვეტი ზომის მქონე სივრცეებისათვის ლებეგის დაშლა ექვემდებარება საინტერესო დაზუსტებას.

თეორემა 15.6.4. ვთქვათ, (X, S, μ) σ-შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა, რომლის ზომა უწყვეტია, და ვთქვათ, ν არის S-ზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული მუხტი. მაშინ სივრცე შეიძლება დავყოთ სამ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ზომად ქვესიმრავლედ, რომელთაგან პირველზე ν მუხტის კომპონენტი აბსოლუტურად უწყვეტია μ-ს მიმართ, მეორეზე - სინგულარული μ-ს მიმართ და უწყვეტი, ხოლო მესამეზე კი - დისკრეტული.

დამტკიცება. 15.5.2 შენიშვნის ძალით მოიძებნება სრული ზომის მქონე A სიმრავლე, ისეთი, რომ ν_A აბსოლუტურად უწყვეტია, ხოლო $\nu_{X\setminus A}$ კი - სინგულარული. შემდეგ განვიხილოთ სიმრავლე

$$P = \{x \in X : \nu(\{x\}) \neq 0\}.$$

გვექნება, რომ $P \subset X \setminus A$. თეორემა 15.6.2-ის ძალით $\nu_{X\setminus A}$ მუხტის P-კომპონენტი დისკრეტულია, ხოლო $(X \setminus P)$-კომპონენტი კი - სინგულარული და უწყვეტი. ადვილი დასანახია, რომ:

1) $\nu_{X\setminus A}$ მუხტის P-კომპონენტი უდრის ν_P-ს;

2) $\nu_{X\setminus A}$-ს $(X \setminus P)$-კომპონენტი უდრის $\nu_{X\setminus(A\cup P)}$-ს.

ამრიგად, A, $X\setminus(A\cup P)$ და P სიმრავლეები გვაძლევენ სივრცის საძიებელ დაშლას. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 15.6.5. ვთქვათ, (X, S, μ) σ-შემოსაზღვრული ზომიანი სივრცეა, რომლის ზომა უწყვეტია, და ვთქვათ, ν არის S-ზე განსაზღვრული

σ-შემოსაზღვრული მუხტი. მაშინ ν ერთადერთი გზით შეიძლება წარმო-ვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\nu = \nu_a + \nu_{sc} + \nu_d,$$

სადაც ν_a, ν_{sc} და ν_d არიან S-ზე განსაზღვრული σ-შემოსაზღვრული მუხტები, რომელთაგან პირველი არის აბსოლუტურად უწყვეტი μ-ს მიმართ, მეორე - სინგულარული μ-ს მიმართ და უწყვეტი, ხოლო მესამე კი - დისკრეტული.

დამტკიცება. ვთქვათ, A_1, A_2 და A_3 არიან სიმრავლეები, რომელთა არსებობა უზრუნველყოფილია თეორემა 15.6.4-ის ძალით. მაშინ ცხადია, რომ $\nu_a = \nu_{A_1}$, $\nu_{sc} = \nu_{A_2}$ და $\nu_d = \nu_{A_3}$ მუხტები მოგვცემენ ν მუხტის სასურველი თვისებების მქონე წარმოდგენას. დასამტკიცებელი გვრჩება წარმოდგენის ერთადერთობა. დავუშვათ $\widehat{\nu}_a$, $\widehat{\nu}_{sc}$ და $\widehat{\nu}_d$ მუხტები ასევე იძლევიან სასურველ წარმოდგენას. აღვნიშნოთ

$$\nu_s = \nu_{sc} + \nu_d, \;\; \widehat{\nu}_s = \widehat{\nu}_{sc} + \widehat{\nu}_d.$$

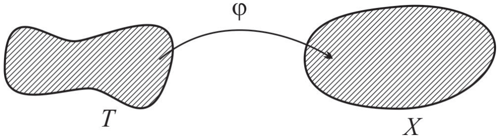
გვაქვს, რომ $\nu = \nu_a + \nu_s$ და $\widehat{\nu} = \widehat{\nu}_a + \widehat{\nu}_s$. ახლა თუ გავითვალისწინებთ ν_s და $\widehat{\nu}_s$ მუხტების სინგულარულობას, თეორემა 15.5.2-ის ძალით დავასკვნით, რომ $\nu_a = \widehat{\nu}_a$ და $\nu_s = \widehat{\nu}_s$. ამის შემდეგ, ν_s მუხტისადმი თეორემა 15.6.3-ის გამოყენებით ვღებულობთ ტოლობებს: $\nu_{sc} = \widehat{\nu}_{sc}$ და $\nu_d = \widehat{\nu}_d$. ამით წარმოდგენის ერთადერთობა და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 15.6.1. თეორემა 15.6.5-ის დამტკიცებიდან ნათლად ჩანს, რომ:

- თუ ν მუხტი შემოსაზღვრულია, მაშინ მისი ν_a, ν_{sc} და ν_d კომპონენტებიც აგრეთვე შემოსაზღვრული არიან;
- თუ ν მუხტი წარმოადგენს ზომას, მაშინ მისი ν_a, ν_{sc} და ν_d კომპონენტებიც აგრეთვე ზომებს წარმოადგენენ.

§ 7. ცვლადის შეცვლა ლებეგის ინტეგრალში

ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო φ არის რაიმე T სიმრავლიდან X სივრცეში მოქმედი ბიექცია (ნახ. 15.3).



ნახ. 15.3.

φ ბიექციის მეშვეობით შესაძლებელია ზომის სტრუქტურით აღვჭურვოთ T სიმრავლე. კერძოდ, $\varphi^{-1}(\mathrm{S})$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ $\{\varphi^{-1}(A) : A \in \mathrm{S}\}$ კლასი, ხოლო $\mu \circ \varphi$ ჩანაწერით - $\varphi^{-1}(\mathrm{S})$ კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია:

$$(\mu \circ \varphi)(\varphi^{-1}(A)) = \mu(A) \quad (A \in \mathrm{S}).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\varphi^{-1}(\mathrm{S})$ კლასი არის σ-ალგებრა, ხოლო $\mu \circ \varphi$ ფუნქცია არის ზომა.

თეორემა 15.7.1. ვთქვათ, (X, S, μ) ზომიანი სივრცეა, ხოლო φ არის რაიმე T სიმრავლიდან X სივრცეში მოქმედი ბიექცია. მაშინ ნებისმიერი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციისათვის გვაქვს, რომ $f \circ \varphi \in L(T, \mu \circ \varphi)$ და

$$\int_X f d\mu = \int_T (f \circ \varphi) d(\mu \circ \varphi).$$

დამტკიცება. Ω-თი აღვნიშნოთ ყველა იმ არაუარყოფითი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციის კლასი, რომლისთვისაც სრულდება თეორემის დასკვნა. ადვილი შესამოწმებელია, რომ:

1) Ω კლასი შეიცავს ნებისმიერი $A \in \mathrm{S}, \mu(A) < \infty$, სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას;

2) Ω ჩაკეტილია შეკრებისა და არაუარყოფით სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ.

აღნიშნული ორი თვისებიდან გამომდინარე, Ω კლასი შეიცავს ნებისმიერ მარტივ არაუარყოფით f ფუნქციას, რომელიც ჯამებადია.

ვაჩვენოთ, რომ Ω კლასი შეიცავს ნებისმიერ არაუარყოფით $f \in L(X, \mu)$ ფუნქციას, საიდანაც უშუალოდ დავასკვნით თეორემის სამართლიანობას.

განვიხილოთ ნებისმიერი არაუარყოფითი $f \in L(X, \mu)$ ფუნქცია. თეორემა 7.5.1-ის ძალით (იხ. აგრეთვე, შენიშვნა 7.5.1) მოიძებნება მარტივ არაუარყოფით $f_n \in L(X, \mu)$ ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელიც ყოველ წერტილში კრებადია f ფუნქციისაკენ. მაშინ $(f_n \circ \varphi)$ იქნება მარტივ არაუარყოფით ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც ყოველ წერტილში კრებადია $f \circ \varphi$ ფუნქციისაკენ და დააკმაყოფილებს პირობას:

$$\int_X f_n d\mu = \int_T (f_n \circ \varphi) d(\mu \circ \varphi) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

შევნიშნავთ, რომ f_n ფუნქციები მარტივია (X, S, μ) სივრცესთან მიმართებაში, ხოლო $f_n \circ \varphi$ ფუნქციები კი - $(T, \varphi^{-1}(\mathrm{S}), \mu \circ \varphi)$ სივრცესთან მიმართებაში. ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ზომად ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვარი ზომადია და გამოვიყენებთ ლევის თეორემას (f_n) და $(f_n \circ \varphi)$ მიმდევრობებისათვის, დავასკვნით, რომ $f \circ \varphi$ ფუნქცია $(\mu \circ \varphi)$-ზომადია და სრულდება

ტოლობა:

$$\int_X fd\mu = \int_T (f\circ\varphi)d(\mu\circ\varphi).$$

შედეგად, f ეკუთვნის Ω კლასს. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი დებულება გამომდინარეობს 15.7.1 და 15.4.1 თეორემებიდან.

შენიშვნა 15.7.1. დამტკიცების ანალიზი ცხადყოფს, რომ თეორემა 15.7.1-ის ანალოგიური დებულება სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა f ფუნქციისაგან ნაცვლად ჯამებადობის პირობისა, მოითხოვება არაუარყოფითობა და ზომადობა. კერძოდ, ამ სიტუაციაში $f\circ\varphi$ იქნება ზომადი ($\mu\circ\varphi$ ზომის მიმართ) და შესრულდება $\int_X fd\mu = \int_T (f\circ\varphi)d(\mu\circ\varphi)$ ტოლობა. აქვე შევნიშნავთ, რომ იგივე შეიძლება ითქვას ამ და მომდევნო პარაგრაფის სხვა თეორემებზეც ცვლადის შეცვლის შესახებ.

თეორემა 15.7.2. ვთქვათ, (X,S,μ) და (T,H,ν) ზომიანი სივრცეებია, ხოლო φ არის T-დან X-ში მოქმედი ბიექცია. თუ $\mathrm{H}=\varphi^{-1}(\mathrm{S})$ და ცნობილია, რომ არსებობს $\mu\circ\varphi$ ზომის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული ν ზომის მიმართ, მაშინ ნებისმიერი $f\in L(X,\mu)$ ფუნქციისათვის გვაქვს, რომ $(f\circ\varphi)\frac{d(\mu\circ\varphi)}{d\nu}\in L(T,\nu)$ და

$$\int_X fd\mu = \int_T (f\circ\varphi)\frac{d(\mu\circ\varphi)}{d\nu}d\nu.$$

თეორემა 15.7.3. ვთქვათ, X და T არაცარიელი ღია სიმრავლეებია $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, ხოლო $\varphi: T\to X$ ასახვა არის დიფეომორფიზმი. მაშინ ნებისმიერი $f\in L(X,\mathrm{m})$ ფუნქციისათვის გვაქვს, რომ $(f\circ\varphi)J_\varphi\in L(T,\mathrm{m})$ და

$$\int_X f(x)d\mathrm{m}(x) = \int_T f[\varphi(t)]\,|J_\varphi(t)|\,d\mathrm{m}(t).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ზომიანი სივრცეები, რომლებიც მიიღება ლებეგის ზომის შეზღუდვით X და T სიმრავლეებზე, ე.ი. საუბარია (X,S,μ) და (T,H,ν) სივრცეებზე, სადაც $\mathrm{S}=\mathcal{L}\cap X, \mu=\mathrm{m}_X, \mathrm{H}=\mathcal{L}\cap T$ და $\nu=\mathrm{m}_T$.

φ და φ^{-1} ფუნქციებისათვის თეორემა 10.6.5-ის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ $\mu\circ\varphi$ ზომის განსაზღვრის არე ემთხვევა ν ზომის განსაზღვრის არეს (ე.ი. $\varphi^{-1}(\mathrm{S})=\mathrm{H}$). ამის შემდეგ, კვლავ თეორემა 10.6.5-ის გამოყენებით (ამჟამად, მხოლოდ φ ფუნქციისათვის), დავასკვნით, რომ არსებობს $\mu\circ\varphi$ ზომის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული ν ზომის მიმართ, რომელიც $|J_\varphi|$ ფუნქციის ტოლია. აქედან, თეორემა 15.7.2-ის საფუძველზე ვღებულობთ საჭირო დასკვნას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

§ 8. ცვლადის შეცვლა ლებეგის ინტეგრალში (ერთგანზომილებიანი შემთხვევა)

ამ პარაგრაფში დადგენილი დებულებები გვიჩვენებენ, რომ ერთგანზომილებიან მონაკვეთზე ლებეგის ზომის მიხედვით ჯამებადი ფუნქციებისათვის დასაშვებია ცვლადის შეცვლათა უფრო ზოგადი კლასი, ვიდრე ამას უზრუნველყოფს თეორემა 15.7.3. კერძოდ, ცვლადის გარდაქმნად დიფეომორფიზმების მსგავსად, შეიძლება წარმატებით გამოყენებული იქნან აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები.

თეორემა 15.8.1. ვთქვათ, X და T რაიმე გადაუგვარებელი სეგმენტებია, ხოლო $\varphi : T \to X$ არის მკაცრად ზრდადი და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია, რომლის შებრუნებული φ^{-1} ფუნქცია ასევე აბსოლუტურად უწყვეტია. მაშინ ნებისმიერი $f \in L(X)$ ფუნქციისათვის გვაქვს, რომ $(f \circ \varphi)\varphi' \in L(T)$ და

$$\int_X f(x)d\mathrm{m}(x) = \int_T f[\varphi(t)]\varphi'(t)d\mathrm{m}(t).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ზომიანი სივრცეები, რომლებიც მიიღება ლებეგის ზომის შეზღუდვით X და T მონაკვეთებზე, ე.ი. საუბარია (X, S, μ) და (T, H, ν) სივრცეებზე, სადაც $\mathrm{S} = \mathcal{L} \cap X, \mu = \mathrm{m}_X, \mathrm{H} = \mathcal{L} \cap T$ და $\nu = \mathrm{m}_T$.

φ და φ^{-1} ფუნქციებისათვის თეორემა 13.3.5-ის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ $\mu \circ \varphi$ ზომის განსაზღვრის არე ემთხვევა ν ზომის განსაზღვრის არეს (ე.ი. $\varphi^{-1}(\mathrm{S}) = \mathrm{H}$). ამის შემდეგ, კვლავ თეორემა 13.3.5-ის გამოყენებით (ამჟამად, მხოლოდ φ ფუნქციისათვის) დავასკვნით, რომ არსებობს $\mu \circ \varphi$ ზომის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული ν ზომის მიმართ, რომელიც φ' ფუნქციის ტოლია. აქედან, თეორემა 15.7.2-ის საფუძველზე ვღებულობთ საჭირო დასკვნას. თეორემა დამტკიცებულია. □

სამართლიანია თეორემა 15.8.1-ის შემდეგი განზოგადება.

თეორემა 15.8.2. ვთქვათ, X და T რაიმე გადაუგვარებელი სეგმენტებია, ხოლო $\varphi : T \to X$ არის მკაცრად ზრდადი და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია. მაშინ ნებისმიერი $f \in L(X)$ ფუნქციისათვის გვაქვს, რომ $(f \circ \varphi)\varphi' \in L(T)$ და

$$\int_X f(x)d\mathrm{m}(x) = \int_T f[\varphi(t)]\varphi'(t)d\mathrm{m}(t).$$

შენიშვნა 15.8.1. განვიხილოთ (X, S, μ) და (T, H, ν) სივრცეები, რომლებიც მიიღება ლებეგის ზომის შეზღუდვით, შესაბამისად, X და T მონაკვეთებზე. თეორემა 15.8.2-ის დამტკიცებისას თავს იჩენს დამატებითი სირთულე. განსხვავებით წინა თეორემის შემთხვევისაგან, უკვე საზოგადოდ შეუძლებელია

დავადგინოთ, რომ $\mu \circ \varphi$ ზომის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული φ' ფუნქციის ტოლია. კერძოდ, φ ფუნქციის თვისებები უკვე აღარ არის საკმარისი იმის საჩვენებლად, რომ $\mu \circ \varphi$ ზომის განსაზღვრის არე ემთხვევა ν ზომის განსაზღვრის არეს (ე.ი. $\varphi^{-1}(\mathrm{S}) = \mathrm{H}$). აქ უშუალოდ მიიღება მხოლოდ $\varphi^{-1}(\mathrm{S}) \supset \mathrm{H}$ ჩართვა. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, აღნიშნული სირთულის გადალახვა ხერხდება X და T სივრცეების გარკვეული „დავიწროვებით“.

ლემა 15.8.1. ვთქვათ, X და T რაიმე გადაუგვარებელი სეგმენტებია, ხოლო $\varphi : T \to X$ არის მკაცრად ზრდადი და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია. მაშინ ლებეგის აზრით ზომადი ნებისმიერი A სიმრავლისათვის $f^{-1}(A)$ წინასახე წარმოდგება შემდეგნაირად: $f^{-1}(A) = E_1 \cup E_2$, სადაც E_1 არის ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლე, ხოლო E_2 შედის $\{\varphi' = 0\}$ სიმრავლეში.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ მოიძებნებიან ბორელის კლასის A_* და A^* სიმრავლეები შემდეგი თვისებებით: $A_* \subset A \subset A^*$ და $|A_*| = |A| = |A^*|$. მართლაც, თეორემა 6.2.2-ის ძალით, ყოველი n-სთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ჩაკეტილი F_n და ღია G_n სიმრავლეები, რომელთათვისაც $F_n \subset A \subset G_n$ და $|A| - 1/n < |F_n| \le |A| \le |G_n| < |A| + 1/n$. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $A_* = \bigcup_n F_n$ და $A^* = \bigcap_n G_n$ სიმრავლეები აკმაყოფილებენ საჭირო მოთხოვნებს.

აღვნიშნოთ $E_* = f^{-1}(A_*)$, $E = f^{-1}(A)$ და $E^* = f^{-1}(A^*)$. ცხადია, $E_* \subset E \subset E^*$. φ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის საფუძველზე დავასკვნით E_* და E^* სიმრავლეების ლებეგის აზრით ზომადობას, საიდანაც, თეორემა 13.3.5-ის გამოყენებით, მივიღებთ, რომ $|A_*| = \int_{E_*} \varphi'$ და $|A^*| = \int_{E^*} \varphi'$. შედეგად, $\int_{E_*} \varphi' d\mathrm{m} = \int_{E^*} \varphi' d\mathrm{m}$. აქედან, φ' ფუნქციის არაუარყოფითობის გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ $\varphi'(t) = 0$ თითქმის ყველგან $E^* \setminus E_*$ სიმრავლეზე (ე.ი. $(E^* \setminus E_*) \setminus \{\varphi' = 0\}$ არის ნული ზომის სიმრავლე). შედეგად, $E \setminus E_* \subset E^* \setminus E_*$ ჩართვის გამო, $(E \setminus E_*) \setminus \{\varphi' = 0\}$ სიმრავლე იქნება ნული ზომის.

აღვნიშნოთ $E_1 = E_* \cup ((E \setminus E_*) \setminus \{\varphi' = 0\})$ და $E_2 = (E \setminus E_*) \cap \{\varphi' = 0\}$. ცხადია, ასეთნაირად განსაზღვრული E_1 და E_2 სიმრავლეები აკმაყოფილებენ საჭირო მოთხოვნებს. ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 15.8.2-ის დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ თეორემა 13.3.5-ის ძალით, $T(\{\varphi' = 0\})$ სიმრავლე ზომადია და

$$T(\{\varphi' = 0\}) = \int_{\{\varphi' = 0\}} \varphi' = 0.$$

აღვნიშნოთ

$$X_1 = X \setminus T(\{\varphi' = 0\}), \quad T_1 = T \setminus \{\varphi' = 0\}.$$

განვიხილოთ $(X_1, \mathrm{S}_1, \mu_1)$ და $(T_1, \mathrm{H}_1, \nu_1)$ სივრცეები, რომლებიც მიიღება ლებეგის ზომის შეზღუდვით, შესაბამისად, X_1 და T_1 სიმრავლეებზე.

შევნიშნოთ, რომ φ ფუნქციის მოქმედებისას T_1 და X_1 სიმრავლეები არიან ურთიერთცალსახა თანადობაში, ამასთან, ლემა 15.8.1-ის ძალით, X_1-ის ნებისმიერი ზომადი A ქვესიმრავლის $\varphi^{-1}(A)$ წინასახე არის ასევე ზომადი. ამის გათვალისწინებით, თუ φ_1 და φ_1' ჩანაწერებით აღვნიშნავთ შესაბამისად φ და φ' ფუნქციების შეზღუდვებს T_1 სიმრავლეზე, მაშინ თეორემა 13.3.5-ის გამოყენებით დავასკვნით, რომ $\mu_1 \circ \varphi_1$ ზომის განსაზღვრის არე ემთხვევა ν_1 ზომის განსაზღვრის არეს (ე.ი. $\varphi_1^{-1}(\mathrm{S}_1) = \mathrm{H}_1$) და არსებობს $\mu_1 \circ \varphi_1$ ზომის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული ν_1 ზომის მიმართ, რომელიც φ_1' ფუნქციის ტოლია. აქედან, თეორემა 15.7.2-ის საფუძველზე ვღებულობთ, რომ ნებისმიერი $g \in L(X_1)$ ფუნქციისათვის,

$$\int_{X_1} g(x) d\mathrm{m}(x) = \int_{T_1} g[\varphi_1(t)]\varphi_1'(t) d\mathrm{m}(t). \tag{1}$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $f \in L(X)$ ფუნქცია. თუ g-ს როლში ავიღებთ f ფუნქციის შეზღუდვას X_1 სიმრავლეზე, მაშინ (1) ტოლობის საფუძველზე გვექნება, რომ

$$\int_{X_1} f(x) d\mathrm{m}(x) = \int_{T_1} f[\varphi(t)]\varphi'(t) d\mathrm{m}(t). \tag{2}$$

ცხადია,

$$\int_{T} f[\varphi(t)]\varphi'(t) d\mathrm{m}(t) = \int_{T_1} f[\varphi(t)]\varphi'(t) d\mathrm{m}(t), \tag{3}$$

ხოლო $T(\{\varphi' = 0\})$ სიმრავლის ნულზომიანობის გამო,

$$\int_{X} f(x) d\mathrm{m}(x) = \int_{X_1} f(x) d\mathrm{m}(x). \tag{4}$$

$(2) - (4)$ ტოლობების ძალით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თ ა ვ ი 16

რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი

ამ თავში შეისწავლება რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი, რომელიც შემოღებული იყო თ. სტილტიესის მიერ 1894 წ. რიმან-სტილტიესის ინტეგრალს მნიშვნელოვანი გამოყენებები აქვს მათემატიკურ ანალიზში, მექანიკაში, მათემატიკურ ფიზიკაში, ფუნქციონალურ ანალიზსა და ალბათობის თეორიაში.

§ 1. რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის განსაზღვრა და ელემენტარული თვისებები

ვთქვათ, f და φ არიან $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული სასრული ფუნქციები. $[a, b]$-ს მონიშნული (P, ξ) დანაწილებისათვის აღვნიშნოთ

$$\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})].$$

$\sigma_{f,\varphi}(P, \xi)$ ჯამს უწოდებენ f **ფუნქციის რიმან-სტილტიესის ინტეგრალურ ჯამს** φ **ფუნქციის მიმართ.**

ამბობენ, რომ I **რიცხვი არის** $\sigma_{f,\varphi}(P, \xi)$ **ჯამების ზღვარი, როცა დანაწილების** $\lambda(P)$ **პარამეტრი მიისწრაფვის ნულისაკენ** (ჩანაწერი: $I = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma_{f,\varphi}(P, \xi)$), თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P, ξ) დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაკლებია δ-ზე, სრულდება შეფასება:

$$|\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) - I| < \varepsilon.$$

$\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma_{f,\varphi}(P, \xi)$ ზღვრის არსებობის შემთხვევაში ამბობენ, რომ f **ფუნქცია რიმან-სტილტიესის აზრით ინტეგრებადია** $[a, b]$ **სეგმენტზე** φ **ფუნქციის მიმართ**, ან კიდევ, არსებობს f **ფუნქციის რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი** $[a, b]$ **სეგმენტზე** φ **ფუნქციის მიმართ.**

f ფუნქციის რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე φ ფუნქციის მიმართ (მისი არსებობის შემთხვევაში) აღინიშნება $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ან $\int_{[a,b]} f(x) d\varphi(x)$

ჩანაწერით და ინტეგრალის მნიშვნელობად მიიჩნევა $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)$ ზღვარი.

ცხადია, $\varphi(x)=x \ \ (x\in[a,b])$ შემთხვევაში რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი წარმოადგენს რიმანის ინტეგრალს.

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ $[a,b]\subset\mathbb{R}$ ფიქსირებული სეგმენტია, ხოლო f და φ - $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული სასრული ფუნქციები.

თეორემა 16.1.1. **$\int_{[a,b]} f d\varphi$ რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $\varepsilon>0$-სთვის მოიძებნება $\delta>0$, ისეთი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P,ξ) და (P',ξ') დანაწილებებისათვის, რომელთა პარამეტრები ნაკლებია δ-ზე, სრულდება შეფასება:**

$$|\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)-\sigma_{f,\varphi}(P',\xi')|<\varepsilon. \tag{1}$$

დამტკიცება. აუცილებლობასთან დაკავშირებული თეორემის ნაწილი ცხადია. დავადგინოთ პირობის საკმარისობის გამომხატველი დებულება. მონიშნული დანაწილებების $((P_n,\xi_n))$ მიმდევრობა შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ: $\lim_{n\to\infty}\lambda(P_n)=0$. მაშინ, (1) პირობის ძალით, $\sigma_{f,\varphi}(P_n,\xi_n)$ ჯამების მიმდევრობა იქნება ფუნდამენტური და შედეგად, კრებადი რაიმე I რიცხვისაკენ. ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)=I. \tag{2}$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$. ვიპოვოთ $\delta>0$, რომლისთვისაც შესრულებულია (1) პირობა. ასევე ვიპოვოთ ნატურალური n, ისეთი, რომ სრულდებოდეს პირობები: $\lambda(P_n)<\delta$ და $|\sigma_{f,\varphi}(P_n,\xi_n)-I|<\varepsilon$. მაშინ δ-ზე მცირე პარამეტრის მქონე ნებისმიერი მონიშნული (P,ξ) დანაწილებისათვის გვექნება,

$$|\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)-I|\le|\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)-\sigma_{f,\varphi}(P_n,\xi_n)|+|\sigma_{f,\varphi}(P_n,\xi_n)-I|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

ამით (2) ტოლობა და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 16.1.2. **სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:**

- **თუ არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$, მაშინ ნებისმიერი c რიცხვისათვის არსებობენ $\int_{[a,b]}(cf)d\varphi$ და $\int_{[a,b]} f d(c\varphi)$, ამასთან,**

$$\int_{[a,b]}(cf)d\varphi=\int_{[a,b]} f d(c\varphi)=c\int_{[a,b]} f d\varphi;$$

- **თუ არსებობენ $\int_{[a,b]} f_1 d\varphi$ და $\int_{[a,b]} f_2 d\varphi$, მაშინ არსებობს ინტეგრალი $\int_{[a,b]}(f_1+f_2)d\varphi$ და**

$$\int_{[a,b]}(f_1+f_2)d\varphi=\int_{[a,b]} f_1 d\varphi+\int_{[a,b]} f_2 d\varphi;$$

- **თუ არსებობენ $\int_{[a,b]} fd\varphi_1$ და $\int_{[a,b]} fd\varphi_2$, მაშინ არსებობს ინტეგრალი $\int_{[a,b]} fd(\varphi_1+\varphi_2)$ და**

$$\int_{[a,b]} fd(\varphi_1+\varphi_2) = \int_{[a,b]} fd\varphi_1 + \int_{[a,b]} fd\varphi_2.$$

თეორემა 16.1.2-ის წინადადებები უშუალოდ მოწმდება რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის განსაზღვრის საფუძველზე.

შენიშვნა 16.1.1. რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი შეიძლება განვსაზღვროთ ნებისმიერ მონაკვეთზეც. მაგალითად, $\int_{(a,\infty)} fd\varphi$ ინტეგრალი განისაზღვრება როგორც $\lim\limits_{a'\to a,\ b'\to\infty} \int_{[a',b']} fd\varphi$ ზღვარი, ამ უკანასკნელის არსებობის შემთხვევაში.

შენიშვნა 16.1.2. რიმან-სტილტიესის ინტეგრალი შესაძლებელია შემოღებული იქნას მრავალგანზომილებიან შემთხვევაშიც. ვთქვათ, I არის გადაუგვარებელი სეგმენტი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, ხოლო f და φ მასზე მოცემული ფუნქციებია. $\int_I fd\varphi$ ინტეგრალი განისაზღვრება, როგორც შემდეგი ჯამების ზღვარი:

$$\sigma_{f,\varphi}(P,\xi) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta(\varphi, I_k),$$

სადაც (P,ξ) არის I-ს მონიშნული დანაწილება, $I_1,\ldots,I_m$ არიან P დანაწილების შემადგენელი ქვესეგმენტები, ხოლო $\Delta(\varphi, I_k)$ კი აღნიშნავს φ ფუნქციის შერეულ სხვაობას I_k ქვესეგმენტზე.

ჩვენ შემოვიფარგლებით ერთგანზომილებიანი რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის შემთხვევის განხილვით.

ამოცანები

1. ვთქვათ, φ დირიხლეს ფუნქციაა $[a,b]$ მონაკვეთზე. აჩვენეთ, რომ $\int_{[a,b]} fd\varphi$ ინტეგრალი არსებობს მხოლოდ იგივურად ნულის ტოლი f ფუნქციის შემთხვევაში.
2. ააგეთ შემოუსაზღვრელი ფუნქციები f და φ, რომელთათვისაც არსებობს $\int_{[a,b]} fd\varphi$ ინტეგრალი.
3. დაამტკიცეთ, რომ $\int_{[a,b]} fd\varphi$ ინტეგრალის არსებობიდან გამომდინარეობს $\int_{[a,b]} |f|d\varphi$ ინტეგრალის არსებობა.

§ 2. ნაწილობითი ინტეგრება

თეორემა 16.2.1. თუ არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$, მაშინ არსებობს $\int_{[a,b]} \varphi df$ და სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} \varphi df = (f\varphi)|_a^b - \int_{[a,b]} f d\varphi.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული დანაწილება (P, ξ), სადაც $P = (x_0, \dots, x_n)$ და $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. გვექნება, რომ

$$\sigma_{\varphi,f}(P,\xi) = \varphi(\xi_1)[f(x_1) - f(x_0)] + \varphi(\xi_2)[f(x_2) - f(x_1)] + \cdots$$
$$+\varphi(\xi_{n-1})[f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})] + \varphi(\xi_n)[f(x_n) - f(x_{n-1})] =$$
$$= -f(x_0)\varphi(\xi_1) - f(x_1)[\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)] - \cdots$$
$$-f(x_{n-1})[\varphi(\xi_n) - \varphi(\xi_{n-1})] + f(x_n)\varphi(\xi_n).$$

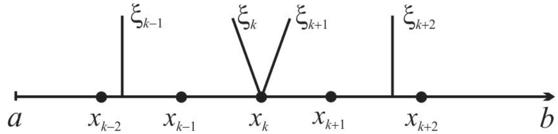
თუ მიღებულ გამოსახულებას დავუმატებთ და გამოვაკლებთ

$$f(x_0)\varphi(x_0) - f(x_n)\varphi(x_n) = f(a)\varphi(a) - f(b)\varphi(b)$$

გამოსახულებას, მაშინ მივიღებთ,

$$\sigma_{\varphi,f}(P,\xi) = [f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)]-$$
$$-\Big\{ f(x_0)[\varphi(\xi_1) - \varphi(x_0)] + f(x_1)[\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)] + \cdots +$$
$$+f(x_{n-1})[\varphi(\xi_n) - \varphi(\xi_{n-1})] + f(x_n)[\varphi(x_n) - \varphi(\xi_n)]\Big\} = (f\varphi)|_a^b - \sigma. \quad (1)$$

შევნიშნოთ, რომ $x_0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < x_n$ უტოლობების შესრულების შემთხვევაში, σ ჯამი უშუალოდ წარმოგვიდგება, როგორც $\sigma_{f,\varphi}(Q,\eta)$ სახის რიმან-სტილტიესის ჯამი. კერძოდ, $\sigma = \sigma_{f,\varphi}(Q, \eta)$, სადაც $Q = (x_0, \xi_1, \dots, \xi_n, x_n)$ და $\eta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. საზოგადოდ, $x_0, \xi_1, \dots, \xi_n, x_n$ სასრულ მიმდევრობაში ზოგიერთი მეზობელი წევრი შეიძლება ერთმანეთს ემთხვეოდეს. ამასთან, ცხადია, რომ სამი ერთმანეთის მომდევნო წევრის დამთხვევა ვერ მოხდება (ნახ. 16.1).



ნახ. 16.1.

თუ მხედველობაში მივიღებთ ამ ორ ფაქტს და σ ჯამში არ გავითვალისწინებთ $\xi_1 = x_0$, $\xi_k = \xi_{k-1}$ და $\xi_n = x_n$ ტიპის დამთხვევების გამო განულებულ წევრებს, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერ შემთხვევაში

σ წარმოდგება, როგორც $\sigma_{f,\varphi}(Q,\eta)$ სახის რიმან-სტილტიესის ჯამი, სადაც $\lambda(Q) \le 2\lambda(P)$. აქედან, (1) ტოლობის გათვალისწინებით, ადვილად ვასკვნით თეორემის სამართლიანობას. $\square$

შენიშვნა 16.2.1. თეორემა 16.2.1-დან გამომდინარე, $\int_{[a,b]} fd\varphi$ და $\int_{[a,b]} \varphi df$ ინტეგრალები ერთდროულად არსებობენ ან ერთდროულად არ არსებობენ.

ამოცანები

1. ვთქვათ, θ არის კანტორის ფუნქცია. აჩვენეთ, რომ არსებობს $\int_{[0,1]} xd\theta(x)$ ინტეგრალი და იპოვეთ მისი მნიშვნელობა.
2. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს $\int_{[0,1]} \theta(1-x)d\theta(x)$ ინტეგრალი და იპოვეთ მისი მნიშვნელობა.

§ 3. რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის ადიციურობა

ვთქვათ, $[c,d]$ არის $[a,b]$-ს გადაუგვარებელი ქვესეგმენტი, ხოლო (P,ξ) - მისი მონიშნული დანაწილება. ასეთ პირობებში გამოყენებული იქნება აღნიშვნები:

$$\int_{[c,d]} fd\varphi = \int_{[c,d]} f|_{[c,d]}\, d\varphi|_{[c,d]},$$

$$\sigma_{f,\varphi}(P,\xi) = \sigma_{f|_{[c,d]},\varphi|_{[c,d]}}(P,\xi).$$

$[a,b]$ სეგმენტის მონიშნულ (P,ξ) დანაწილებას ვუწოდოთ $[c,d] \subset [a,b]$ ქვესეგმენტის (Q,η) **მონიშნული დანაწილების შევსება**, თუ P და ξ მიმდევრობების ის წევრები, რომლებიც შედიან $[c,d]$ ქვესეგმენტში, შესაბამისად, ემთხვევიან Q და η მიმდევრობების წევრებს. იგივე პირობებში ვიტყვით, რომ (Q,η) არის (P,ξ) **მონიშნული დანაწილების შეზღუდვა** $[c,d]$ ქვესეგმენტზე.

თეორემა 16.3.1. თუ არსებობს $\int_{[a,b]} fd\varphi$ ინტეგრალი, მაშინ ნებისმიერი $[c,d] \subset [a,b]$ ქვესეგმენტისათვის არსებობს $\int_{[c,d]} fd\varphi$ ინტეგრალი.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$. შეგვიძლია 16.1.1 თეორემის საფუძველზე ვიპოვოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P,ξ) და (P',ξ') დანაწილებებისათვის, რომელთა პარამეტრები ნაკლებია δ-ზე, სრულდებოდეს შეფასება:

$$|\sigma_{f,\varphi}(P,\xi) - \sigma_{f,\varphi}(P',\xi')| < \varepsilon. \tag{1}$$

ვთქვათ, $[c,d] \subset [a,b]$. $[c,d]$ ქვესეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (Q,η) და (Q',η') დანაწილებებისათვის, რომელთა $\lambda(Q)$ და $\lambda(Q')$ პარამეტრები ნაკლებია δ-ზე, ვაჩვენოთ, რომ

$$|\sigma_{f,\varphi}(Q,\eta) - \sigma_{f,\varphi}(Q',\eta')| < \varepsilon. \tag{2}$$

შედეგად, 16.1.1 თეორემის ძალით, $\int_{[c,d]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობა დამტკიცებული იქნება.

შევავსოთ (Q,η) და (Q',η') მონიშნული დანაწილებები $[a,b]$ სეგმენტის მონიშნულ (P,ξ) და (P',ξ') დანაწილებებამდე, ისე, რომ სრულდებოდეს შემდეგი სამი პირობა:

a) P და P' მიმდევრობებს $[c,d]$ მონაკვეთის გარეთ მდებარე წევრები ერთი და იგივე აქვთ;

b) ξ და ξ' მიმდევრობებს $[c,d]$ მონაკვეთის გარეთ მდებარე წევრები ერთი და იგივე აქვთ;

c) $\lambda(P)$ და $\lambda(P')$ პარამეტრები δ-ზე მცირეა.

მაშინ, a) და b) პირობების ძალით, გვექნება,

$$\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)-\sigma_{f,\varphi}(P',\xi')=\sigma_{f,\varphi}(Q,\eta)-\sigma_{f,\varphi}(Q',\eta').$$

საიდანაც c) პირობისა და (1) შეფასების საფუძველზე მივიღებთ (2) შეფასებას. თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 16.3.2. თუ არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი, მაშინ ნებისმიერი $c\in(a,b)$ წერტილისათვის არსებობენ $\int_{[a,c]} f d\varphi$ და $\int_{[c,b]} f d\varphi$ ინტეგრალები, ამასთან, სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi=\int_{[a,c]} f d\varphi+\int_{[c,b]} f d\varphi. \tag{3}$$

დამტკიცება. $\int_{[a,c]} f d\varphi$ და $\int_{[c,b]} f d\varphi$ ინტეგრალების არსებობა უზრუნველყოფილია თეორემა 16.3.1-ის ძალით. ასე რომ, დასამტკიცებელი გვრჩება (3) ტოლობა.

ყოველი ნატურალური m-სთვის განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის რაიმე (P_m,ξ_m) მონიშნული დანაწილება, ისეთი, რომ c შედიოდეს P_m დანაწილების წერტილთა მიმდევრობაში და $\lambda(P_m)$ პარამეტრი იყოს $1/m$-ზე მცირე. (Q_m,η_m)-ით და (T_m,ζ_m)-ით, შესაბამისად, აღვნიშნოთ (P_m,ξ_m) მონიშნული დანაწილების შეზღუდვები $[a,c]$ და $[c,b]$ ქვესეგმენტებზე. მაშინ გვექნება, რომ:

$$\sigma_{f,\varphi}(P_m,\xi_m)=\sigma_{f,\varphi}(Q_m,\eta_m)+\sigma_{f,\varphi}(T_m,\zeta_m), \tag{4}$$

$$\lambda(Q_m)\le\lambda(P_m)<1/m,\quad \lambda(T_m)\le\lambda(P_m)<1/m. \tag{5}$$

თუ გავითვალისწინებთ (5) შეფასებებს და (4) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $m\to\infty$, მაშინ მივიღებთ (3) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 16.3.1. $\int_{[a,c]} f d\varphi$ და $\int_{[c,b]} f d\varphi$ ინტეგრალების არსებობიდან, საზოგადოდ, არ გამომდინარეობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობა. შესაბამის მაგალითს გვაძლევენ $[-1,1]$ სეგმენტზე შემდეგნაირად განსაზღვრული f და φ ფუნქციები:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad x \in [-1,0], \\ 1, & \text{თუ} \quad x \in (0,1]; \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad x \in [-1,0), \\ 1, & \text{თუ} \quad x \in [0,1]. \end{cases}$$

მართლაც, ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\int_{[-1,0]} f d\varphi$ და $\int_{[0,1]} f d\varphi$ ინტეგრალები არსებობენ და ნულის ტოლი არიან. მეორე მხრივ, თუ განვიხილავთ $[-1,1]$-ის ისეთ მონიშნულ (P,ξ) დანაწილებებს, რომელთათვისაც 0 წარმოადგენს დანაწილების რაიმე $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთის შიგა წერტილს, მაშინ $\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)$ ჯამი გამოვა ნულის ტოლი იმ შემთხვევაში, როცა $[x_{k-1}, x_k]$-დან არჩეული ξ_k წერტილი არის ნულის მარცხნივ და გამოვა 1-ის ტოლი, როცა ξ_k არის ნულის მარჯვნივ. აღნიშნულის გამო, არ იარსებებს $\int_{[-1,1]} f d\varphi$ ინტეგრალი.

როგორც შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, გარკვეული დამატებითი პირობების შესრულებისას, $\int_{[a,c]} f d\varphi$ და $\int_{[c,b]} f d\varphi$ ინტეგრალების არსებობიდან გამომდინარეობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობა.

თეორემა 16.3.3. თუ არსებობენ $\int_{[a,c]} f d\varphi$ და $\int_{[c,b]} f d\varphi$ ინტეგრალები და დამატებით ცნობილია, რომ f შემოსაზღვრულია c-ს რაიმე მიდამოში, ხოლო φ უწყვეტია c-ში, მაშინ არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი.

დამტკიცება. თეორემის პირობის ძალით, მოიძებნება $\eta > 0$ და $M > 0$ რიცხვები ისეთები, რომ

$$|f(x)| \leq M, \ \text{როცა} \ x \in (c-\eta, c+\eta).$$

ავღნიშნოთ $I = \int_{[a,c]} f d\varphi + \int_{[c,b]} f d\varphi$. $\int_{[a,c]} f d\varphi$ და $\int_{[c,b]} f d\varphi$ ინტეგრალების არსებობისა და φ ფუნქციის c-ში უწყვეტობის გათვალისწინებით, ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $\delta \in (0,\eta)$ რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

1) $|\sigma_{f,\varphi}(P,\xi) - I| < \varepsilon$, ყოველთვის, როცა $[a,b]$ სეგმენტის მონიშნულ (P,ξ) დანაწილებას აქვს თვისებები: $\lambda(P) < \delta$ და c წერტილი შედის P-ს შემადგენელ წერტილთა შორის;

2) $|\varphi(x) - \varphi(c)| < \varepsilon$, თუ $|x-c| < \delta$.

ვთქვათ, (P,ξ) არის $[a,b]$ სეგმენტის მონიშნული დანაწილება შემდეგი თვისებებით: $\lambda(P)<\delta$ და c წერტილი არ შედის P-ს შემადგენელ წერტილთა შორის. განვიხილოთ P დანაწილებით წარმოქმნილ სეგმენტთა შორის ის $[x_{k-1},x_k]$ სეგმენტი, რომელიც შეიცავს c წერტილს. ცხადია, $x_{k-1}<c<x_k$. $[x_{k-1},c]$ და $[c,x_k]$ სეგმენტებიდან ნებისმიერად ავირჩიოთ, შესაბამისად, t და τ წერტილები. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის მონიშნული (P',ξ') დანაწილება, განსაზღვრული შემდეგნაირად: P' მიმდევრობა მიიღება P მიმდევრობის წევრთა შორის c წერტილის ჩამატებით, ხოლო ξ' მიმდევრობა მიიღება ξ მიმდევრობის წევრებიდან ξ_k წევრის ამოკლებით და მის ნაცვლად t და τ წერტილების ჩამატებით. მაშინ გვექნება, რომ

$$\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)-\sigma_{f,\varphi}(P',\xi')=f(\xi_k)[\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})]-$$

$$-f(t)[\varphi(c)-\varphi(x_{k-1})]-f(\tau)[\varphi(x_k)-\varphi(c)]=$$

$$=[f(\xi_k)-f(t)][\varphi(c)-\varphi(x_{k-1})]+[f(\xi_k)-f(\tau)][\varphi(x_k)-\varphi(c)].$$

აქედან გამომდინარე, δ რიცხვის შერჩევის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ,

$$|\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)-I|\le|\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)-\sigma_{f,\varphi}(P',\xi')|+|\sigma_{f,\varphi}(P',\xi')-I|\le(4M+1)\varepsilon.$$

ამრიგად, $\lambda(P)<\delta$ პირობის დამაკმაყოფილებელი, ნებიმიერი მონიშნული (P,ξ) დანაწილებისათვის სრულდება შეფასება:

$$|\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)-I|\le(4M+1)\varepsilon.$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი არსებობს და I რიცხვის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია. □

16.3.3 თეორემიდან 16.2.1 თეორემის საფუძველზე მიიღება შემდეგი დებულება.

თეორემა 16.3.4. თუ არსებობენ $\int_{[a,c]} f d\varphi$ და $\int_{[c,b]} f d\varphi$ ინტეგრალები და დამატებით ცნობილია, რომ f უწყვეტია c-ში, ხოლო φ შემოსაზღვრულია c-ს რაიმე მიდამოში, მაშინ არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი.

ამოცანები

1. ვთქვათ, f და φ ფუნქციებს აქვთ საერთო წყვეტის წერტილი და φ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა. აჩვენეთ, რომ ასეთ შემთხვევაში არ არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი.

§ 4. რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის არსებობა, როცა f უწყვეტია, ხოლო φ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა

რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის საინტერესო გამოყენებები, უმთავრესად, დაკავშირებულია იმ შემთხვევასთან, როცა φ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა, ანაც ზრდადია. შემდეგი თეორემა საბაზისო მნიშვნელობისაა ამ მიმართულებით.

თეორემა 16.4.1. ვთქვათ, φ ფუნქცია შემოსაზღვრული ვარიაციისაა. მაშინ $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი არსებობს ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის.

თეორემა 16.4.1-ის დამტკიცებისათვის დაგვჭირდება ინტეგრებადობის კრიტერიუმი დარბუს ტიპის ჯამების ტერმინებში.

ვთქვათ, f არის შემოსაზღვრული, ხოლო φ კი - ზრდადი ფუნქცია. $[a,b]$ სეგმენტის $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ დანაწილებისათვის აღვნიშნოთ:

$$\overline{\sigma}_{f,\varphi}(P)=\sum_{k=1}^{n} M_k[\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})],$$

$$\underline{\sigma}_{f,\varphi}(P)=\sum_{k=1}^{n} m_k[\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})],$$

სადაც M_k და m_k, შესაბამისად, არიან f ფუნქციის სუპრემუმი და ინფიმუმი $[x_{k-1},x_k]$ სეგმენტზე. $\overline{\sigma}_{f,\varphi}(P)$ და $\underline{\sigma}_{f,\varphi}(P)$ ჯამებს, შესაბამისად, უწოდებენ **დარბუ-სტილტიესის ზედა და ქვედა ჯამებს**. ცხადია, ნებისმიერი (P,ξ) მონიშნული დანაწილებისათვის გვექნება, რომ

$$\underline{\sigma}_{f,\varphi}(P)\le \sigma_{f,\varphi}(P,\xi)\le \overline{\sigma}_{f,\varphi}(P).$$

ამასთან, $\overline{\sigma}_{f,\varphi}(P)$ და $\underline{\sigma}_{f,\varphi}(P)$ ჯამები, შესაბამისად, წარმოადგენენ ξ-ს მიხედვით აღებულ სუპრემუმსა და ინფიმუმს $\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)$ ჯამებისა. აქვე შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ორი P_1 და P_2 დანაწილებისათვის,

$$\underline{\sigma}_{f,\varphi}(P_1)\le \overline{\sigma}_{f,\varphi}(P_2).$$

ამ უტოლობის დასადგენად უნდა გადავიდეთ ახალ P დანაწილებაზე, რომელიც შეიცავს როგორც P_1, ასევე P_2, დანაწილების წერტილებს.

თეორემა 16.4.2. ვთქვათ, φ ზრდადი ფუნქციაა. შემოსაზღვრული f ფუნქციისათვის $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $\varepsilon>0$-სთვის მოიძებნება $\delta>0$, ისეთი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი P დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაკლებია δ-ზე, სრულდება შეფასება:

$$\overline{\sigma}_{f,\varphi}(P)-\underline{\sigma}_{f,\varphi}(P)<\varepsilon.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\int_{[a,b]} f d\varphi$ არსებობს და I რიცხვის ტოლია. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ვიპოვოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P, ξ) დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაკლებია δ-ზე, სრულდებოდეს შეფასებები:

$$I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma_{f,\varphi}(P, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1}$$

თუ განვიხილავთ $\sigma_{f,\varphi}(P, \xi)$ ჯამების სუპრემუმს და ინფიმუმს ξ-ს მიმართ, მაშინ (1)-დან მივიღებთ, რომ ყოველი P დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი δ-ზე მცირეა, სრულდება შეფასება:

$$I - \frac{\varepsilon}{4} \leq \underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) \leq \overline{\sigma}_{f,\varphi}(P) \leq I + \frac{\varepsilon}{4}.$$

საიდანაც ვასკვნით აუცილებლობასთან დაკავშირებული თეორემის ნაწილის სამართლიანობას.

ახლა გადავიდეთ თეორემის მეორე ნაწილის დამტკიცებაზე. დავუშვათ, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი P დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაკლებია δ-ზე, სამართლიანია შეფასება:

$$\overline{\sigma}_{f,\varphi}(P) - \underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) < \varepsilon. \tag{2}$$

(2)-ის საფუძველზე ადვილი დასანახია, რომ

$$\sup \underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) = \inf \overline{\sigma}_{f,\varphi}(P).$$

სადაც სუპრემუმი და ინფიმუმი აიღება ყველა შესაძლო P დანაწილების მიხედვით.

აღვნიშნოთ $I = \sup \underline{\sigma}_{f,\varphi}(P)$. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის δ რიცხვი ავიღოთ იგივე, რაც (2) შეფასებაშია. მაშინ (2)-ის და

$$\underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) \leq \sigma_{f,\varphi}(P, \xi) \leq \overline{\sigma}_{f,\varphi}(P), \quad \underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) \leq I \leq \overline{\sigma}_{f,\varphi}(P)$$

შეფასებების ძალით, $[a, b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P, ξ) დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაკლებია δ-ზე, ადგილი ექნება უტოლობას: $|\sigma_{f,\varphi}(P, \xi) - I| < \varepsilon$. ამით დადგენილია, რომ $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი არსებობს და I-ს ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 16.4.1-ის დამტკიცება. შემოსაზღვრული ვარიაციის ყოველი ფუნქცია წარმოდგება ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით. ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ φ ზრდადი ფუნქციაა.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. უწყვეტობის გამო, f ფუნქცია თანაბრად უწყვეტიცაა $[a, b]$ სეგმენტზე. შედეგად, მოიძებნება $\delta > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ

$$(x, y \in [a, b],\ |x - y| < \delta) \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

აქედან გამომდინარე, თუ განვიხილავთ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერ $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ დანაწილებას, რომლის პარამეტრი δ-ზე მცირეა, მაშინ ყოველი k-სათვის შესრულდება $M_k - m_k \le \varepsilon$ შეფასება, სადაც M_k და m_k, შესაბამისად, არიან f ფუნქციის სუპრემუმი და ინფიმუმი $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე. საიდანაც, თავის მხრივ ვწერთ,

$$\overline{\sigma}_{f,\varphi}(P) - \underline{\sigma}_{f,\varphi}(P) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})) = \varepsilon(\varphi(b) - \varphi(a)).$$

მიღებული შეფასებიდან, თეორემა 16.4.1-ის ძალით, ვასკვნით $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ფიქსირებული φ ფუნქციისათვის $R_\varphi([a,b])$-თი აღვნიშნოთ ყველა იმ f ფუნქციის კლასი, რომელიც φ-ს მიმართ რიმან-სტილტიესის აზრით ინტეგრებადია.

$\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობის შესახებ საკითხი შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბოთ: **მოცემული φ ფუნქციისათვის დავახასიათოთ $R_\varphi([a,b])$ კლასი.**

თეორემა 16.4.1-ის თანახმად, თუ φ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა, მაშინ $C([a,b]) \subset R_\varphi([a,b])$. სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც, რომელიც მოგვყავს დაუმტკიცებლად: **თუ $C([a,b]) \subset R_\varphi([a,b])$, მაშინ φ შემოსაზღვრული ვარიაციისაა.**

ამ თავის მერვე პარაგრაფში ჩვენ კიდევ ერთხელ დავუბრუნდებით საკითხს $R_\varphi([a,b])$ კლასის დახასიათების შესახებ.

შენიშვნა 16.4.1. თეორემა 16.4.1-დან, თეორემა 16.2.1-ის გათვალისწინებით მიიღება $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობა იმ შემთხვევაში, როცა f შემოსაზღვრული ვარიაციისაა, ხოლო φ უწყვეტია.

შენიშვნა 16.4.2. ფ. რისს ეკუთვნის რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის ძალზე მნიშვნელოვანი გამოყენება ფუნქციონალურ ანალიზში. კერძოდ, მან დაამტკიცა შემდეგი თეორემა უწყვეტ ფუნქციათა $C([a,b])$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი და უწყვეტი ფუნქციონალების დახასიათების შესახებ (იხ. მაგ., [26], თავი VI, §6): **$C([a,b])$ სივრცეზე განსაზღვრული A ფუნქციონალისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:**

- **A არის წრფივი და უწყვეტი;**

- A წარმოდგება შემოსაზღვრული ვარიაციის რაიმე φ ფუნქციის მიმართ რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის მეშვეობით, ე.ი.

$$A(f) = \int_{[a,b]} f d\varphi \qquad (f \in C([a,b])).$$

ამოცანები

1. ააგეთ უწყვეტი ფუნქციები f და φ, ისეთები, რომ არ არსებობდეს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი. **მითითება**: გამოიყენეთ 12.7.1 შენიშვნაში მოცემული კონსტრუქცია.
2. ვთქვათ, φ არაა შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია. ააგეთ უწყვეტი f ფუნქცია, რომლისთვისაც არ არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი.
3. ვთქვათ, φ_1 და φ_2 ზრდადი ფუნქციებია და არსებობს ინტეგრალი $\int_{[a,b]} f d(\varphi_1 + \varphi_2)$. დაამტკიცეთ, რომ არსებობენ $\int_{[a,b]} f d\varphi_1$ და $\int_{[a,b]} f d\varphi_2$ ინტეგრალები.
4. ვთქვათ, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ და $\alpha + \beta > 1$. f და φ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ლიფშიცის პირობებს, შესაბამისად, α და β მაჩვენებლებით, ე.ი.

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}, \ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x-y|^{\beta} \quad (x, y \in [a,b]),$$

   სადაც C რაიმე მუდმივია. აჩვენეთ, რომ ასეთ შემთხვევაში არსებობს $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი. აჩვენეთ, რომ ანალოგიური დასკვნა, საზოგადოდ, არაა სამართლიანი $\alpha + \beta > 1$ პირობის ნაცვლად $\alpha + \beta = 1$ პირობის შესრულების შემთხვევაში.

§ 5. ზღვარზე გადასვლა რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ

თეორემა 16.5.1. ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისა და შემოსაზღვრული ვარიაციის φ ფუნქციისათვის სამართლიანია შეფასება:

$$\left| \int_{[a,b]} f d\varphi \right| \leq \max_{[a,b]} |f| \cdot V_{\varphi}([a,b]). \tag{1}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული დანაწილება (P, ξ), სადაც $P = (x_0, \ldots, x_n)$ და $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. გვექნება, რომ

$$|\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})] \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)| \, |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \leq$$

$$\leq \max_{[a,b]} |f| \cdot \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \leq \max_{[a,b]} |f| \cdot V_{\varphi}([a,b]).$$

საიდანაც მიიღება (1) შეფასება. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 16.5.2. ვთქვათ, φ შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა. თუ უწყვეტ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია უწყვეტი f ფუნქციისაკენ, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f_n d\varphi = \int_{[a,b]} f d\varphi. \tag{2}$$

დამტკიცება. თეორემა 16.5.1-ის გათვალისწინებით, ყოველი n-სთვის გვექნება, რომ

$$\left|\int_{[a,b]} f_n d\varphi - \int_{[a,b]} f d\varphi\right| = \left|\int_{[a,b]} (f_n - f) d\varphi\right| \leq \max_{[a,b]} |f_n - f| \cdot V_\varphi([a,b]).$$

საიდანაც, (f_n) მიმდევრობის თანაბრად კრებადობის საფუძველზე, მივიღებთ (2) ზღვარით ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

აქვე დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ.

თეორემა 16.5.3. ვთქვათ, f ფუნქცია უწყვეტია, ხოლო φ ფუნქცია კი ზრდადია. მაშინ მოიძებნება $\xi \in [a,b]$ წერტილი, ისეთი, რომ

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = f(\xi)[\varphi(b) - \varphi(a)].$$

დამტკიცება. φ ფუნქციის ზრდადობის გათვალისწინებით, ადვილი შესამოწმებელია, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P,ξ) დანაწილებისათვის სრულდება შეფასებები:

$$\min_{[a,b]} f \cdot [\varphi(b) - \varphi(a)] \leq \sigma_{f,\varphi}(P,\xi) \leq \max_{[a,b]} f \cdot [\varphi(b) - \varphi(a)].$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\min_{[a,b]} f \cdot [\varphi(b) - \varphi(a)] \leq \int_{[a,b]} f d\varphi \leq \max_{[a,b]} f \cdot [\varphi(b) - \varphi(a)].$$

ამის შემდეგ, საძიებელი ξ წერტილის არსებობას დავასკვნით უწყვეტი ფუნქციის შუალედური მნიშვნელობის შესახებ თეორემის საფუძველზე. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა ეკუთვნის ე. ჰელის.

თეორემა 16.5.4. ვთქვათ, შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციათა (φ_n) მიმდევრობა ყოველ $x \in [a,b]$ წერტილში კრებადია შემოსაზღვრული ვარიაციის φ ფუნქციისაკენ. ამასთან, ცნობილია, რომ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} V_{\varphi_n}([a,b]) < \infty.$$

მაშინ, ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f d\varphi_n = \int_{[a,b]} f d\varphi.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $C = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_{\varphi_n}([a,b])$. შევნიშნოთ, რომ შესრულებული იქნება $V_\varphi([a,b]) \le C$ შეფასება. მართლაც, $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი $P=(x_0,x_1,\ldots,x_m)$ დანაწილებისათვის გვექნება,

$$\sum_{k=1}^{m}|\varphi_n(x_k)-\varphi_n(x_{k-1})| \le V_{\varphi_n}([a,b]) \le C.$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $n\to\infty$, მივიღებთ,

$$\sum_{k=1}^{m}|\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})| \le C.$$

საიდანაც, P დანაწილების ნებისმიერობის გათვალისწინებით, დავასკვნით $V_\varphi([a,b]) \le C$ უტოლობის სამართლიანობას.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. f ფუნქციის უწყვეტობის საფუძველზე, $[a,b]$ სეგმენტის $P=(x_0,x_1,\ldots,x_m)$ დანაწილება შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ ყოველ $[x_{k-1},x_k]$ მონაკვეთზე f ფუნქციის რხევა აკმაყოფილებდეს შეფასებას:

$$\omega_f([x_{k-1},x_k]) < \frac{\varepsilon}{3C}. \tag{3}$$

თითოეული $[x_{k-1},x_k]$ მონაკვეთიდან ავირჩიოთ $\xi_k = x_k$ წერტილი. ასეთნაირად განსაზღვრული (P,ξ) მონიშნული დანაწილებისათვის შევაფასოთ შემდეგი სხვაობები:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi - \sigma_{f,\varphi}(P,\xi),\ \ \int_{[a,b]} f d\varphi_n - \sigma_{f,\varphi_n}(P,\xi).$$

$\int_{[x_{k-1},x_k]} d\varphi = \varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})$ ტოლობების, თეორემა 16.5.1-ის და (3) შეფასებების გათვალისწინებით, გვექნება, რომ

$$\left|\int_{[a,b]} f d\varphi - \sum_{k=1}^{m} f(x_k)[\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})]\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{[x_{k-1},x_k]} f d\varphi - \sum_{k=1}^{m} f(x_k)\int_{[x_{k-1},x_k]} d\varphi\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{[x_{k-1},x_k]} [f-f(x_k)] d\varphi\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m}\omega_f([x_{k-1},x_k])V_\varphi([x_{k-1},x_k]) < \frac{\varepsilon}{3C}V_\varphi([a,b]) \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

ნებისმიერი n-სთვის ანალოგიურად ვაჩვენებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\left|\int_{[a,b]} f d\varphi_n - \sum_{k=1}^{m} f(x_k)[\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x_{k-1})]\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5)$$

(φ_n) მიმდევრობის φ ფუნქციისაკენ წერტილოვნად კრებადობის ძალით მოიძებნება N, ისეთი, რომ ყოველი $n \geq N$-სთვის,

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f(x_k)[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})] - \sum_{k=1}^{m} f(x_k)[\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x_{k-1})]\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6)$$

საბოლოოდ, $(4-6)$ შეფასებებიდან ვღებულობთ, რომ ყოველი $n \geq N$-სთვის,

$$\left|\int_{[a,b]} f d\varphi - \int_{[a,b]} f d\varphi_n\right| < \varepsilon.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

§ 6. რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის გამოთვლა ზოგიერთ კონკრეტულ შემთხვევაში

თეორემა 16.6.1. თუ φ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია, მაშინ ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \int_{[a,b]} f \varphi',$$

სადაც მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ლებეგის ზომის მიხედვით აღებულ ლებეგის ინტეგრალს.

დამტკიცება. უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma_{f,\varphi}(P,\xi) = \int_{[a,b]} f\varphi'. \quad (1)$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. f ფუნქციის უწყვეტობის გამო მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის δ-ზე ნაკლები სიგრძის ნებისმიერი $[c,d]$ ქვესეგმენტისათვის,

$$\omega_f([c,d]) < \varepsilon. \quad (2)$$

ვთქვათ, (P,ξ) არის $[a,b]$-ს ნებისმიერი მონიშნული დანაწილება, რომლის პარამეტრი δ-ზე მცირეა. P დანაწილების შემადგენელი წერტილები იყვნენ

$x_0, x_1 \ldots, x_n$. მაშინ, φ ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობის ძალით, ყოველი $[x_{k-1}, x_k]$ ქვესეგმენტისათვის შესრულდება ტოლობა:

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) = \int_{[x_{k-1},x_k]} \varphi'.$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარე,

$$\sigma_{f,\varphi}(P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \int_{[x_{k-1},x_k]} \varphi'.$$

შედეგად, (2)-ის გათვალისწინებით დავწერთ, რომ

$$\left| \int_{[a,b]} f\varphi' - \sigma_{f,\varphi}(P,\xi) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{[x_{k-1},x_k]} f\varphi' - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \int_{[x_{k-1},x_k]} \varphi' \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{[x_{k-1},x_k]} (f - f(\xi_k))\varphi' \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{[x_{k-1},x_k]} |f - f(\xi_k)||\varphi'| <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \int_{[x_{k-1},x_k]} |\varphi'| = \varepsilon \int_{[a,b]} |\varphi'|.$$

მიღებული შეფასებიდან, ε-ის ნებისმიერობის გათვალისწინებით, ვასკვნით (1) ტოლობის სამართლიანობას. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემოსაზღვრული ვარიაციის φ ფუნქციისათვის $h_\varphi(t)$ ჩანაწერით აღვნიშნოთ მისი ნახტომი $t \in [a,b]$ წერტილში, ე.ი.

$$h_\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(a+0) - \varphi(a), & \text{თუ} \quad t = a, \\ \varphi(t+0) - \varphi(t-0), & \text{თუ} \quad a < t < b, \\ \varphi(b) - \varphi(b-0), & \text{თუ} \quad t = b. \end{cases}$$

თეორემა 16.6.2. ვთქვათ, φ არის ნახტომთა ფუნქცია, რომელიც წყვეტას განიცდის t_n წერტილებში. მაშინ ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \sum_{n} f(t_n) h_\varphi(t_n).$$

დამტკიცება. ნაბიჯი I: ვთქვათ, φ ფუნქციას აქვს ერთადერთი წყვეტის წერტილი, ე.ი. φ-ს აქვს სახე: $\varphi = J_{t,l,r}$. განვიხილოთ ნებისმიერი (P,ξ) მონიშნული დანაწილება, ისეთი, რომ t არ შედიოდეს დანაწილების წერტილთა შორის. მაშინ გვექნება,

$$\sigma_{f,\varphi}(P,\xi) = f(\xi_k)[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})],$$

სადაც $[x_{k-1}, x_k]$ არის დანაწილების ის სეგმენტი, რომელიც შეიცავს t წერტილს. თუ განვიხილავთ $\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)$ ჯამების ზღვარს აღნიშნული ტიპის (P,ξ) მონიშნული დანაწილებების მიხედვით, როცა $\lambda(P) \to 0$, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \begin{cases} f(t)[\varphi(a+0) - \varphi(a)], & \text{თუ} \quad t = a, \\ f(t)[\varphi(t+0) - \varphi(t-0)], & \text{თუ} \quad a < t < b, \\ f(t)[\varphi(b) - \varphi(b-0)], & \text{თუ} \quad t = b. \end{cases}$$

რაც ტოლფასია ტოლობის:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = f(t) h_\varphi(t).$$

ამით, განსახილავ შემთხვევაში, თეორემა დამტკიცებულია.

ნაბიჯი II: ვთქვათ, φ ფუნქციას აქვს სასრული რაოდენობის წყვეტის წერტილები: $t_1, \dots, t_N$. მაშინ φ-ს ექნება სახე: $\varphi = \sum_{n=1}^{N} J_{t_n, l_n, r_n}$. შევნიშნოთ, რომ ყოველი t_n წერტილისათვის,

$$h_\varphi(t_n) = h_{J_{t_n, l_n, r_n}}(t_n) = l_n + r_n.$$

საიდანაც, ზემოთ განხილული შემთხვევის ძალით, დავწერთ,

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \sum_{n=1}^{N} \int_{[a,b]} f \, dJ_{t_n, l_n, r_n} = \sum_{n=1}^{N} f(t_n) h_\varphi(t_n).$$

ამით, განსახილავ შემთხვევაში, თეორემა დამტკიცებულია.

ნაბიჯი III: ვთქვათ, φ ფუნქციას აქვს თვლადი რაოდენობის წყვეტის წერტილები: t_n $(n \in \mathbb{N})$. მაშინ φ-ს ექნება სახე: $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} J_{t_n, l_n, r_n}$. აღვნიშნოთ

$$\varphi_N = \sum_{n=1}^{N} J_{t_n, l_n, r_n}.$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი $N \in \mathbb{N}$ და $n \in \overline{1, N}$ ინდექსებისათვის,

$$h_{\varphi_N}(t_n) = h_{J_{t_n, l_n, r_n}}(t_n) = l_n + r_n = h_\varphi(t_n). \tag{3}$$

ნახტომთა ფუნქციის თვისებების გათვალისწინებით, (φ_N) მიმდევრობა ყოველ წერტილში კრებადია φ ფუნქციისაკენ, ამასთან:

$$V_\varphi([a,b]) = \sum_{n=1}^{\infty} (|l_n| + |r_n|) < \infty,$$

$$V_{\varphi_N}([a,b]) = \sum_{n=1}^{N} (|l_n| + |r_n|) \le \sum_{n=1}^{\infty} (|l_n| + |r_n|) \qquad (N \in \mathbb{N}).$$

საიდანაც, 16.5.4 თეორემის, ზემოთ განხილული შემთხვევისა და (3) ტოლობის საფუძველზე, დავწერთ,

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \lim_{N\to\infty} \int_{[a,b]} f d\varphi_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(t_n) h_{\varphi_N}(t_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) h_{\varphi}(t_n).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 16.6.1. სამართლიანია თეორემა 16.6.2-ზე ზოგადი შემდეგი დებულება: ვთქვათ, φ არის ნახტომთა ფუნქცია, რომელიც წყვეტას განიცდის t_n წერტილებში. მაშინ ნებისმიერი შემოსაზღვრული f ფუნქციისათვის, რომელიც უწყვეტია t_n წერტილებში, სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \sum_{n} f(t_n) h_{\varphi}(t_n).$$

თეორემა 16.6.3. ვთქვათ, $P = (t_0, \ldots, t_n)$ არის $[a,b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება და ყოველი $k \in \overline{1,n}$-სათვის φ ფუნქცია (t_{k-1}, t_k) ინტერვალის წერტილებში ემთხვევა $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტ და შემოსაზღვრული ვარიაციის მქონე რაიმე φ_k ფუნქციას. მაშინ ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \sum_{k=1}^{n} \int_{[t_{k-1}, t_k]} f d\varphi_k + \sum_{k=0}^{n} f(t_k) h_{\varphi}(t_k).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $P = (a, b)$. ადვილი დასანახია, რომ ზოგადი შემთხვევა დაიყვანება აღნიშნულზე ინტეგრალის ადიციურობის თვისების გამოყენებით.

ცხადია, φ_1 ფუნქცია a და b წერტილებში, შესაბამისად, მიიღებს $\varphi(a+0)$ და $\varphi(b-0)$ მნიშვნელობებს. შედეგად, $\varphi - \varphi_1$ ფუნქციას ექნება სახე:

$$(\varphi - \varphi_1)(x) = \begin{cases} \varphi(a+0) - \varphi(a), & \text{თუ} \quad x = a, \\ 0, & \text{თუ} \quad a < x < b, \\ \varphi(b) - \varphi(b-0), & \text{თუ} \quad x = b. \end{cases}$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის,

$$\int_{[a,b]} f d(\varphi - \varphi_1) = f(a)[\varphi(a+0) - \varphi(a)] + f(b)[\varphi(b) - \varphi(b-0)].$$

საიდანაც, $\int_{[a,b]} f d\varphi = \int_{[a,b]} f d\varphi_1 + \int_{[a,b]} f d(\varphi - \varphi_1)$ ტოლობის გათვალისწინებით, მივიღებთ საჭირო ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია. □

შემდეგი დებულება გამომდინარეობს თეორემა 16.6.3-დან.

თეორემა 16.6.4. ვთქვათ, φ ფუნქცია მუდმივია ყოველ $(a, x_1), (x_1, x_2)$, $\ldots$, (x_n, b) ინტერვალზე. მაშინ ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის სრულდება ტოლობა:

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = f(a)[\varphi(a+0) - \varphi(a)] +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} f(x_k)[\varphi(x_k+0) - \varphi(x_k-0)] + f(b)[\varphi(b) - \varphi(b-0)].$$

შენიშვნა 16.6.2. ზემოთ დადგენილი თეორემების ძალით, უწყვეტი f ფუნქციის რიმან-სტილტიესის $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალის გამოთვლა იმ შემთხვევებში, როცა φ არის აბსოლუტურად უწყვეტი, ანაც ნახტომთა ფუნქცია, შესაბამისად, დაიყვანება ლებეგის აზრით ინტეგრებისა და მწკრივის შეკრების ოპერაციებზე.

შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერი φ ფუნქციის მიმართ რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის გამოთვლა, საზოგადოდ, არ დაიყვანება აღნიშნულ ოპერაციებზე. ასეთ სირთულეს იწვევს φ ფუნქციის სინგულარული კომპონენტი. სახელდობრ, როგორც ცნობილია, შემოსაზღვრული ვარიაციის φ ფუნქცია იშლება აბსოლუტურად უწყვეტი - A_φ, ნახტომთა - J_φ და სინგულარული - S_φ ფუნქციების ჯამის სახით. შედეგად, ნებისმიერი უწყვეტი f ფუნქციისათვის გვექნება, რომ

$$\int_{[a,b]} f d\varphi = \int_{[a,b]} f dA_\varphi + \int_{[a,b]} f dJ_\varphi + \int_{[a,b]} f dS_\varphi.$$

არანულოვანი S_φ სინგულარული კომპონენტის შემთხვევაში, მესამე ინტეგრალი, განსხვავებით პირველი და მეორე ინტეგრალებისაგან, არ დაიყვანება არც ლებეგის ზომის მიხედვით ინტეგრების და არც მწკრივის შეკრების ოპერაციებზე.

ამოცანები

1. იპოვეთ $\int_{[1,3]} x^2 d\varphi(x)$ ინტეგრალი, სადაც $\varphi(x) = 4$, როცა $x = 1$ და $\varphi(x) = x^3$, როცა $1 < x \leq 3$.
2. იპოვეთ $\int_{[-\pi,\pi]} (x+2) d(e^x(\text{sign}(\sin x))$ ინტეგრალი.
3. იპოვეთ $\int_{[0,\pi]} (x-1) d(\cos x \text{ sign } x)$ ინტეგრალი.

§ 7. რიმან-სტილტიესისა და ლებეგ-სტილტიესის ინტეგრალების შედარება

იმ შემთხვევაში, როცა φ არის ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია, $\int_{[a,b]} f d\varphi$ რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის გარდა, შესაძლებელია, განვიხილოთ $\int_{[a,b]} f d\mathrm{m}_\varphi$ **ლებეგ-სტილტიესის ინტეგრალიც**, ე.ი. ლებეგის ინტეგრალი ლებეგ-სტილტიესის m_φ ზომის მიხედვით.

ისევე როგორც რიმანისა და ლებეგის ინტეგრალების შემთხვევაში, ისმის საკითხი რიმან-სტილტიესისა და ლებეგ-სტილტიესის ინტეგრალების შედარების შესახებ. ამ საკითხის გადაწყვეტას გვაძლევს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 16.7.1. ვთქვათ, φ არის ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. თუ $f \in R_\varphi([a,b])$, მაშინ $f \in L([a,b],\mathrm{m}_\varphi)$ და

$$\int_{[a,b]} f d\mathrm{m}_\varphi = \int_{[a,b]} f d\varphi.$$

ვთქვათ, φ რაიმე ფუნქციაა. f ფუნქციას ვუწოდოთ **φ-შემოსაზღვრული**, თუ მოიძებნება $\delta = \delta_f > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ f შემოსაზღვრულია ნებისმიერ $[c,d] \subset [a,b]$ სეგმენტზე, რომლის სიგრძე ნაკლებია δ-ზე და რომელზეც φ ფუნქცია არაა მუდმივი.

ადვილი დასანახია, რომ მკაცრად ზრდადი φ ფუნქციის შემთხვევაში, ყოველი φ-შემოსაზღვრული ფუნქცია იქნება შემოსაზღვრულიც.

როგორც ცნობილია, რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია აუცილებლად შემოსაზღვრულია. იგივეს ვერ ვიტყვით რიმან-სტილტიესის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციების შესახებ. ამის დასადგენად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ მუდმივი φ ფუნქციის შემთხვევაში, $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალი არსებობს და ნულის ტოლია ნებისმიერი f ფუნქციისათვის. მიუხედავად აღნიშნულისა, სამართლიანია შემდეგი დებულება რიმან-სტილტიესის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციების გარკვეული თვალსაზრისით შემოსაზღვრული ყოფაქცევის შესახებ.

ლემა 16.7.1. ვთქვათ, φ ზრდადი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი $f \in R_\varphi([a,b])$ ფუნქცია არის φ-შემოსაზღვრული.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $I = \int_{[a,b]} f d\varphi$. განვიხილოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი მონიშნული (P,ξ) დანაწილებისათვის, რომლის პარამეტრი ნაკლებია δ-ზე, სრულდებოდეს შეფასებები:

$$I - 1 < \sigma_{f,\varphi}(P,\xi) < I + 1. \tag{1}$$

ვთქვათ, $[c,d] \subset [a,b]$, $d - c < \delta$ და $\varphi(d) - \varphi(c) > 0$. ვაჩვენოთ f-ის შემოსაზღვრულობა $[c,d]$ სეგმენტზე. რითაც ცხადია, ლემა დამტკიცებული იქნება. $P = (x_0,\dots,x_n)$ იყოს $[a,b]$ სეგმენტის რაიმე დანაწილება δ-ზე ნაკლები პარამეტრით, რომლის რომელიღაც ორი მომდევნო წევრი c და d

წერტილებს ემთხვევა. დავუშვათ, ეს წვეროებია x_{k-1} და x_k. შემდეგ დავუშვათ დასამტკიცებელი წინადადების საწინააღმდეგო: f არაა შემოსაზღვრული $[c,d]=[x_{k-1},x_k]$ სეგმენტზე. თუ ξ_m $(m\neq k)$ წერტილებს დავაფიქსირებთ, ხოლო ξ_k წერტილს მივცემთ თავისუფლებას $[x_{k-1},x_k]$ მონაკვეთზე, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ ξ_k-ს შერჩევის მეშვეობით $\sigma_{f,\varphi}(P,\xi)$ ჯამი შეიძლება გავხადოთ მოდულით რაგინდ დიდი. ეს კი ეწინააღმდეგება (1) შეფასებებს. მიღებული წინააღმდეგობის ძალით, ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 16.7.1-დან მარტივად გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

ლემა 16.7.2. ვთქვათ, φ ზრდადი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი $f\in R_\varphi([a,b])$ ფუნქციისათვის მოიძებნება $[a,b]$ სეგმენტის $P=(x_0,\dots,x_n)$ დანაწილება, ისეთი, რომ ყოველ $[x_{k-1},x_k]$ სეგმენტზე სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან: 1) φ მუდმივია $[x_{k-1},x_k]$-ზე; 2) φ არაა მუდმივი $[x_{k-1},x_k]$-ზე და f შემოსაზღვრულია $[x_{k-1},x_k]$-ზე.

ლემა 16.7.3. ვთქვათ, φ ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქციაა. თუ φ მუდმივია $[c,d]\subset[a,b]$ ქვესეგმენტზე, მაშინ ნებისმიერი f ფუნქციისათვის სრულდება პირობები: $f|_{[c,d]}\in R_{\varphi|_{[c,d]}}([c,d])$, $f|_{(c,d]}\in L((c,d],\mathrm{m}_\varphi)$ **და**

$$\int_{[c,d]} f|_{[c,d]}\,d\varphi|_{[c,d]}=\int_{(c,d]} f|_{(c,d]}\,d\mathrm{m}_\varphi=0.$$

დამტკიცება. $[c,d]$ სეგმენტზე φ ფუნქციის მუდმივობის გამო,

$$\mathrm{m}_\varphi((c,d])=\varphi(d)-\varphi(c)=0.$$

საიდანაც, m_φ ზომის სისრულის საფუძველზე, ვასკვნით, რომ ნებისმიერი $A\subset(c,d]$ სიმრავლე m_φ-ზომადია და $\mathrm{m}_\varphi(A)=0$. აქედან კი უშუალოდ გამომდინარეობს $(c,d]$-ზე განსაზღვრული ნებისმიერი f ფუნქციის ინტეგრებადობა m_φ ზომის მიმართ და $\int_{(c,d]} fd\mathrm{m}_\varphi=0$ ტოლობა.

$[c,d]$-ზე განსაზღვრული ნებისმიერი f ფუნქციისათვის $\int_{[c,d]} fd\varphi$ ინტეგრალის არსებობა და ნულთან ტოლობა უშუალოდ მოწმდება რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის განსაზღვრის საფუძველზე. ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 16.7.4. ვთქვათ, φ არის ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია, $f\in R_\varphi([a,b])$, ხოლო $P=(x_0,\dots,x_n)$ არის $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილება. თუ ყოველი $(x_{k-1},x_k]$ მონაკვეთისათვის გვაქვს, რომ

$$f|_{(x_{k-1},x_k]}\in L((x_{k-1},x_k],\mathrm{m}_\varphi)$$

და

$$\int_{(x_{k-1},x_k]} f|_{(x_{k-1},x_k]}\,d\mathrm{m}_\varphi=\int_{[x_{k-1},x_k]} fd\varphi,$$

მაშინ $f \in L([a,b], \mathrm{m}_\varphi)$ **და**

$$\int_{[a,b]} f d\mathrm{m}_\varphi = \int_{[a,b]} f d\varphi.$$

ლემა 16.7.4-ის დამტკიცება ეფუძნება ლებეგისა და რიმან-სტილტიესის ინტეგრალების სტანდარტულ თვისებებს. დამატებით საჭიროა გავითვალისწინოთ $\mathrm{m}_\varphi(\{a\}) = 0$ ტოლობა. შევნიშნოთ, რომ ასეთი თვისება დამახასიათებელია $[a,b]$ მონაკვეთზე მოცემული ნებისმიერი ლებეგ-სტილტიესის ზომისათვის.

თეორემა 16.7.1-ის დამტკიცება. ნებისმიერი $[c,d] \subset [a,b]$ ქვესეგმენტისათვის, რომელზეც f ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ვაჩვენოთ, რომ შესრულებულია პირობები:

$$f|_{(c,d]} \in L((c,d], \mathrm{m}_\varphi) \quad \text{და} \quad \int_{(c,d]} f|_{(c,d]} d\mathrm{m}_\varphi = \int_{[c,d]} f d\varphi.$$

შედეგად, 16.7.2-16.7.4 ლემების გათვალისწინებით, თეორემა დამტკიცებული იქნება.

ქვემოთ მოცემული მსჯელობა იყენებს 9.1.1 თეორემის დამტკიცების სქემას.

$[c,d]$ სეგმენტის დანაწილებების $P_k = (x_{k,0}, \dots, x_{k,2^k})$ $(k \in \mathbb{N})$ მიმდევრობა შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ:

1) $\lambda(P_k) \to 0 \quad (k \to \infty)$;

2) k-ური ეტაპის ყოველი დანაწილების სეგმენტი წარმოადგენს $(k+1)$-ე ეტაპის დანაწილების ორი სეგმენტის გაერთიანებას.

განვიხილოთ P_k დანაწილების შესაბამისი დარბუ-სტილტიესის ჯამები:

$$\Omega_k = \sum_{j=1}^{2^k} M_{k,j}[\varphi(x_{k,j}) - \varphi(x_{k,j-1})], \quad \omega_k = \sum_{j=1}^{2^k} m_{k,j}[\varphi(x_{k,j}) - \varphi(x_{k,j-1})],$$

სადაც $M_{k,j}$ არის f-ის სუპრემუმი $[x_{k,j-1}, x_{k,j}]$ სეგმენტზე, ხოლო $m_{k,j}$ - f-ის ინფიმუმი იგივე სეგმენტზე. რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის თვისებების ძალით,

$$\int_{[c,d]} f d\varphi = \lim_{k\to\infty} \Omega_k = \lim_{k\to\infty} \omega_k.$$

u_k და l_k ფუნქციები $(c,d]$ მონაკვეთზე განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$u_k(x) = M_{k,j}, \quad l_k(x) = m_{k,j} \quad (x \in (x_{k,j-1}, x_{k,j}],\ j = 1, \dots, 2^k).$$

ადვილი დასანახია, რომ $u_k \in L((c,d], \mathrm{m}_\varphi)$, $l_k \in L((c,d], \mathrm{m}_\varphi)$ და

$$\int_{(c,d]} u_k d\mathrm{m}_\varphi = \Omega_k, \quad \int_{(c,d]} l_k d\mathrm{m}_\varphi = \omega_k.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ k-ური ეტაპის ყოველი დანაწილების სეგმენტი წარმოადგენს $(k+1)$-ე ეტაპის დანაწილების ორი სეგმენტის გაერთიანებას, ადვილად დავრწმუნდებით (l_k) მიმდევრობის კლებადობასა და (u_k) მიმდევრობის ზრდადობაში. აქვე შევნიშნოთ, რომ

$$\inf_{[c,d]} f \le l_k \le f|_{(c,d]} \le u_k \le \sup_{[c,d]} f \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

განვიხილოთ u და l ფუნქციები, რომლებიც შესაბამისად წარმოადგენენ (u_k) და (l_k) მიმდევრობების წერტილოვან ზღვარს, ე.ი. $u(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x)$ და $l(x) = \lim_{k\to\infty} l_k(x)$ $(x \in (c,d])$. u და l ფუნქციები არიან ზომადი m_φ ზომის მიმართ და აკმაყოფილებენ შეფასებებს:

$$\inf_{[c,d]} f \le l \le f|_{(c,d]} \le u \le \sup_{[c,d]} f.$$

მაჟორანტული კრებადობის შესახებ ლებეგის თეორემის ძალით დავწერთ,

$$\int_{[c,d]} f d\varphi = \lim_{k\to\infty} \Omega_k = \lim_{k\to\infty} \int_{(c,d]} u_k d\mathrm{m}_\varphi = \int_{(c,d]} u d\mathrm{m}_\varphi,$$

$$\int_{[c,d]} f d\varphi = \lim_{k\to\infty} \omega_k = \lim_{k\to\infty} \int_{(c,d]} l_k d\mathrm{m}_\varphi = \int_{(c,d]} l d\mathrm{m}_\varphi.$$

შედეგად,

$$\int_{(c,d]} (u-l) d\mathrm{m}_\varphi = 0,$$

საიდანაც, ვასკვნით $l(x) = u(x)$ ტოლობის თითქმის ყველგან შესრულებას m_φ ზომის მიხედვით. აქედან, თავის მხრივ, m_φ ზომის სისრულის საფუძველზე გვაქვს, რომ $f|_{(c,d]}$ არის ზომადი m_φ ზომის მიხედვით და $f|_{(c,d]}$ ეკვივალენტურია u და l ფუნქციების. ეს უკანასკნელი პირობა კი საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ ტოლობა:

$$\int_{(c,d]} f|_{(c,d]} d\mathrm{m}_\varphi = \int_{[c,d]} f d\varphi.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

შემდეგი დებულება არის თეორემა 16.7.1-ის და თეორემა 16.4.1-ის შედეგი.

თეორემა 16.7.2. ვთქვათ, φ არის ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. თუ $f \in C([a,b])$, მაშინ $f \in L([a,b], \mathrm{m}_\varphi)$ და

$$\int_{[a,b]} f d\mathrm{m}_\varphi = \int_{[a,b]} f d\varphi.$$

შესაძლებელია თეორემა 16.7.2-ის დამტკიცება უშუალოდ, თეორემა 16.7.1-ის გამოყენების გარეშე. ქვემოთ მოცემულია ასეთი დამტკიცება.

დამტკიცება. ვთქვათ, (P_k) არის $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილებათა მიმდევრობა, ისეთი, რომ $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda(P_k)=0$.

განვიხილოთ რაიმე $k\in\mathbb{N}$. $x_0,x_1,\ldots,x_n$ იყოს P_k დანაწილების შემადგენელი წერტილები. f_k-თი აღვნიშნოთ ფუნქცია, რომელიც

$$f(x_1),f(x_2)\ldots,f(x_n)$$

მნიშვნელობებს ღებულობს შესაბამისად

$$[x_0,x_1],\ (x_1,x_2],\ \ldots\ ,(x_{n-1},x_n]$$

მონაკვეთებზე. ადვილი დასანახია, რომ $f_k\in L([a,b],\mathrm{m}_\varphi)$ და

$$\int_{[a,b]} f_k d\mathrm{m}_\varphi = f(x_1)\mathrm{m}_\varphi([x_0,x_1])+$$

$$+f(x_2)\mathrm{m}_\varphi((x_1,x_2])+\cdots+f(x_n)\mathrm{m}_\varphi((x_{n-1},x_n]).$$

საიდანაც, $\mathrm{m}_\varphi(\{a\})=0$ ტოლობის გათვალისწინებით, დავწერთ,

$$\int_{[a,b]} f_k d\mathrm{m}_\varphi = \sum_{i=1}^n f(x_i)\mathrm{m}_\varphi((x_{i-1},x_i]) =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})] = \sigma_{f,\varphi}(P_k,\xi_k), \tag{2}$$

სადაც ξ_k-ს როლში აღებულია $(x_1,\ldots,x_n)$ n-ეული.

უწყვეტობის გამო, f ბორელის აზრით ზომადი ფუნქციაა. შედეგად, f ზომადია m_φ ზომის მიხედვითაც. ამის შემდეგ, f-ის შემოსაზღვრულობის ძალით, ვასკვნით, რომ $f\in L([a,b],\mathrm{m}_\varphi)$. ახლა, თუ გავითვალისწინებთ (f_k) მიმდევრობის თანაბრად კრებადობას f ფუნქციისაკენ, (2)-ის საფუძველზე მივიღებთ,

$$\int_{[a,b]} f d\mathrm{m}_\varphi = \lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]} f_k d\mathrm{m}_\varphi = \lim_{k\to\infty}\sigma_{f,\varphi}(P_k,\xi_k) = \int_{[a,b]} f d\varphi.$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

ამოცანები

1. ვთქვათ, $\alpha>0$ და $\beta\in\mathbb{R}$. f და φ არიან $[0,1]$-ზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქციები: $\varphi(x)=x^\alpha$ $(x\in[0,1])$, $f(0)=0$ და $f(x)=x^\beta$ $(x\in(0,1])$. დაამტკიცეთ, რომ $f\in R_\varphi([0,1])$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\beta\geq 0$.
2. ვთქვათ, φ რაიმე ფუნქციაა. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $f\in R_\varphi([a,b])$ ფუნქცია არის φ-შემოსაზღვრული.

§ 8. რიმან-სტილტიესის აზრით ინტეგრებადობის კრიტერიუმი

თეორემა 16.8.1. ვთქვათ, φ ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქციაა. f ფუნქცია რიმან-სტილტიესის აზრით ინტეგრებადია φ ფუნქციის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთდროულად შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

- **f არის φ-შემოსაზღვრული;**
- **f თითქმის ყველგან უწყვეტია m_φ ზომის მიხედვით.**

ლემა 16.8.1. ვთქვათ, φ ზრდადი და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქციაა. შემოსაზღვრული f ფუნქცია რიმან-სტილტიესის აზრით ინტეგრებადია φ ფუნქციის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f თითქმის ყველგან უწყვეტია m_φ ზომის მიხედვით.

დამტკიცება. ქვემოთ ვისარგებლებთ თეორემა 16.7.1-ის დამტკიცებაში გამოყენებული აღნიშვნებით და დასკვნებით. P_k ($k \in \mathbb{N}$) იყოს $[a, b]$ სეგმენტის დანაწილება, რომელიც შედგენილია $x_{k,0}, \ldots, x_{k,2^k}$ წერტილებისაგან, ხოლო Π იყოს P_k ($k \in \mathbb{N}$) დანაწილებების შემადგენელი ყველა წერტილის სიმრავლე, ე.ი.

$$\Pi = \{x_{k,j} : k \in \mathbb{N},\ j = 0, \ldots, 2^k\}.$$

φ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია. ამის გათვალისწინებით, P_k დანაწილებები შეიძლება შევარჩიოთ ისე, რომ $x_{k,j}$ წერტილებში φ იყოს უწყვეტი.

φ-ს უწყვეტობის ყოველი x წერტილისათვის გვაქვს, რომ $\mathrm{m}_\varphi(\{x\}) = 0$. რის გამოც, შესრულდება $\mathrm{m}_\varphi(\Pi) = 0$ ტოლობა.

სამართლიანია შემდეგი დებულება: f ფუნქცია უწყვეტია $x \in [a, b] \setminus \Pi$ წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $l(x) = u(x)$. ეს დებულება მტკიცდება ზუსტად ისევე, როგორც თეორემა 9.2.1.

ვთქვათ, $f \in R_\varphi([a, b])$. თეორემა 16.7.1-ის დამტკიცებაში დადგენილია, რომ $u(x) = l(x)$ თითქმის ყველგან $(a, b]$-ზე m_φ ზომის მიხედვით. აქედან გამომდინარე, ზემოთ მოცემული დებულების საფუძველზე ვასკვნით f ფუნქციის უწყვეტობას $[a, b] \setminus \Pi$ სიმრავლის თითქმის ყოველ წერტილში m_φ ზომის მიხედვით. შედეგად, $\mathrm{m}_\varphi(\Pi) = 0$ პირობის გათვალისწინებით, f ფუნქცია უწყვეტი იქნება $[a, b]$ სეგმენტის თითქმის ყოველ წერტილში m_φ ზომის მიხედვით. ამით აუცილებლობის ნაწილი დადგენილია.

დავუშვათ, f უწყვეტია თითქმის ყველგან m_φ ზომის მიხედვით. ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{k\to\infty} \Omega_k = \lim\limits_{k\to\infty} \omega_k$. შედეგად, გვექნება შესაძლებლობა ვიპოვოთ დანაწილება, რომლის შესაბამის დარბუ-სტილტიესის ზედა და ქვედა ჯამებს შორის განსხვავება წინასწარ დასახელებულ რიცხვზე მცირე იქნება. ეს კი, როგორც ცნობილია, ნიშნავს ფუნქციის რიმან-სტილტიესის აზრით ინტეგრებადობას. აღნიშნული ტოლობის დასადგენად შევნიშნოთ, რომ:

i) u და l ფუნქციები შემოსაზღვრული და m_φ ზომის მიხედვით ზომადია;

ii) ზემოთ მოცემული დებულების ძალით, $u(x) = l(x)$ ტოლობა სრულდება $[a, b] \setminus \Pi$ სიმრავლის თითქმის ყოველ წერტილში m_φ ზომის მიხედვით.

თუ გავითვალისწინებთ $\mathrm{m}_\varphi(\Pi) = 0$ პირობას, დავასკვნით $u(x) = l(x)$ ტოლობის შესრულებას $(a, b]$ მონაკვეთის თითქმის ყოველ წერტილში m_φ ზომის მიხედვით. შედეგად, დავწერთ,

$$\int_{(a,b]} u d\mathrm{m}_\varphi = \int_{(a,b]} l d\mathrm{m}_\varphi.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ მარცხენა ინტეგრალი $\lim\limits_{k\to\infty} \Omega_k$ ზღვრის ტოლია, ხოლო მარჯვენა კი - $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_k$ ზღვრისა, მივიღებთ $\lim\limits_{k\to\infty} \Omega_k = \lim\limits_{k\to\infty} \omega_k$ ტოლობას. ამით ლემა დამტკიცებულია. □

$[c, d] \subset [a, b]$ მონაკვეთის მიდამო ვუწოდოთ ნებისმიერ მონაკვეთს, რომელსაც აქვს სახე: $(c - \varepsilon, d + \varepsilon) \cap [a, b]$.

ლემა 16.8.2. ვთქვათ, φ ზრდადი ფუნქციაა. მაშინ ნებისმიერი φ-შემოსაზღვრული f ფუნქციისათვის მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტის $P = (x_0, \dots, x_n)$ დანაწილება, ისეთი, რომ:

a) ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან: 1) φ მუდმივია $[x_{k-1}, x_k]$-ზე; 2) φ არაა მუდმივი $[x_{k-1}, x_k]$-ზე და f შემოსაზღვრულია $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთის გარკვეულ მიდამოში;

b) φ ფუნქცია უწყვეტია x_k წერტილებში.

დამტკიცება. δ იყოს დადებითი რიცხვი φ-შემოსაზღვრულობის განსაზღვრებიდან, ე.ი.

$$([c, d] \subset [a, b],\ d - c < \delta,\ \varphi(d) - \varphi(c) > 0) \Rightarrow \sup_{[c,d]} |f| < \infty. \tag{1}$$

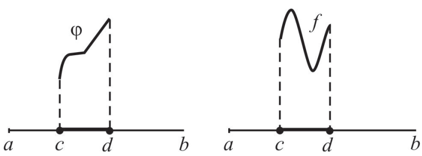
იმის გათვალისწინებით, რომ φ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია, ადვილი დასანახია, რომ მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტის $P = (x_0, \dots, x_n)$ დანაწილება δ-ზე ნაკლები პარამეტრით, რომლის შემადგენელ x_k წერტილებში φ არის უწყვეტი.

განვიხილოთ ნებისმიერი $[x_{k-1}, x_k]$ მონაკვეთი, რომელზეც φ არაა მუდმივი. თუ $[x_{k-1}, x_k]$ მდებარეობს $[a, b]$-ს შიგნით, მაშინ ის შეგვიძლია მცირედით გავზარდოთ $[x_{k-1} - \varepsilon, x_k + \varepsilon]$ მონაკვეთამდე, ისე, რომ სიგრძე კვლავ δ-ზე ნაკლები დარჩეს. მაშინ, ცხადია, φ არ იქნება მუდმივი $[x_{k-1} - \varepsilon, x_k + \varepsilon]$-ზე და შედეგად, (1)-ის ძალით დავასკვნით f-ის შემოსაზღვრულობას $(x_{k-1} - \varepsilon, x_k + \varepsilon)$ ინტერვალზე. თუ $[x_{k-1}, x_k]$ არის კიდურა მონაკვეთი, ე.ი. $[x_{k-1}, x_k] = [a, x_1]$ ან $[x_{k-1}, x_k] = [x_{n-1}, b]$, მაშინ, ანალოგიური მსჯელობის გამოყენებით, დავადგენთ f-ის შემოსაზღვრულობას შესაბამისად $[a, x_1 + \varepsilon)$ ან $(x_{n-1} - \varepsilon, b]$ სახის მონაკვეთზე.

ლემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 16.8.1-ის დამტკიცება. ვთქვათ, $f \in R_\varphi([a,b])$. მაშინ, ლემა 16.7.1-ის ძალით, f იქნება φ-შემოსაზღვრული. გამოვიყენოთ ლემა 16.8.2 და ვიპოვოთ $P = (x_0, \dots, x_n)$ დანაწილება $a)$ და $b)$ თვისებებით.

$[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტს დავარქვათ პირველი ტიპის, თუ მასზე სრულდება $a)$ თვისების პირველი პირობა და დავარქვათ მეორე ტიპის, თუ მასზე სრულდება $a)$ თვისების მეორე პირობა (იხ. ნახ. 16.2).



ნახ. 16.2.

თუ $[x_{k-1}, x_k]$ არის პირველი ტიპის სეგმენტი, მაშინ $\mathrm{m}_\varphi((x_{k-1}, x_k]) = 0$. შედეგად, (x_{k-1}, x_k) ინტერვალში შემავალი f-ის წყვეტის წერტილები ქმნიან ნული ზომის სიმრავლეს m_φ ზომის მიხედვით.

ვთქვათ, $[x_{k-1}, x_k]$ მეორე ტიპის სეგმენტია. მაშინ ლემა 16.8.1-ის გამოყენება $f|_{[x_{k-1},x_k]}$ და $\varphi|_{[x_{k-1},x_k]}$ ფუნქციებისათვის მოგვცემს საშუალებას დავასკვნათ, რომ f უწყვეტია (x_{k-1}, x_k) ინტერვალის თითქმის ყოველ წერტილში m_φ ზომის მიხედვით (ე.ი. (x_{k-1}, x_k) ინტერვალში შემავალი f-ის წყვეტის წერტილები ქმნიან ნული ზომის სიმრავლეს m_φ ზომის მიხედვით).

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mathrm{m}_\varphi(\{x_0, \dots, x_n\}) = 0$, დავასკვნით f-ის ყველა წყვეტის წერტილის სიმრავლის ნულზომიანობას m_φ-ს მიხედვით. ამით აუცილებლობის ნაწილი დამტკიცებულია.

დავუშვათ, f ფუნქცია არის φ-შემოსაზღვრული და თითქმის ყველგან უწყვეტი m_φ ზომის მიხედვით. ისევე, როგორც ზემოთ, გამოვიყენოთ ლემა 16.8.2 და ვიპოვოთ $P = (x_0, \dots, x_n)$ დანაწილება $a)$ და $b)$ თვისებებით. პირველი და მეორე ტიპის სეგმენტები განვსაზღვროთ ზემოთ მოცემულის მსგავსად.

თუ $[x_{k-1}, x_k]$ არის პირველი ტიპის სეგმენტი, მაშინ $\int_{[x_{k-1},x_k]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობა არის ლემა 16.7.3-ის შედეგი.

ვთქვათ, $[x_{k-1}, x_k]$ არის მეორე ტიპის სეგმენტი. მაშინ $f|_{[x_{k-1},x_k]}$ და $\varphi|_{[x_{k-1},x_k]}$ ფუნქციებისათვის, ლემა 16.8.1-ის გამოყენებით, დავასკვნით, რომ არსებობს ინტეგრალი $\int_{[x_{k-1},x_k]} f d\varphi$.

ამრიგად, ყოველ $[x_{k-1}, x_k]$ სეგმენტზე არსებობს $\int_{[x_{k-1},x_k]} f d\varphi$ ინტეგრალი, საიდანაც, თეორემა 16.3.3-ის საფუძველზე, მიიღება $\int_{[a,b]} f d\varphi$ ინტეგრალის არსებობა.

თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შემოსაზღვრული ვარიაციის ნებისმიერ φ ფუნქციას შეიძლება დავუკავშიროთ გარკვეული ლებეგ-სტილტიესის ზომა. ამისათვის უნდა განვიხილოთ φ ფუნქციის ვარიაცია ცვლადი ზედა საზღვრით: $T_\varphi(x) = V_\varphi([a,x])$. T_φ ზრდადი ფუნქციაა, რის გამოც შენიშვნა 6.5.2-ში მითითებული წესით ის წარმოქმნის ლებეგ-სტილტიესის m_{T_φ} ზომას. ეს უკანასკნელი ზომა აღვნიშნოთ m_φ-თი.

სამართლიანია თეორემა 16.8.1-ის შემდეგი განზოგადება, რომელიც მოგვყავს დაუმტკიცებლად.

თეორემა 16.8.2. ვთქვათ, φ შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა. f ფუნქცია რიმან-სტილტიესის აზრით ინტეგრებადია φ ფუნქციის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთდროულად შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

- **f არის φ-შემოსაზღვრული;**
- **f თითქმის ყველგან უწყვეტია m_φ ზომის მიხედვით.**

ამოცანები

1. ვთქვათ, φ შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციაა და T_φ არის მისი ვარიაცია ცვლადი ზედა საზღვრით. აჩვენეთ, რომ $f \in R_\varphi([a,b])$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f \in R_{T_\varphi}([a,b])$.

§ 9. ლებეგის ინტეგრალის წარმოდგენა რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის მეშვეობით

ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ (X, S, μ) რაიმე ფიქსირებული ზომიანი სივრცეა.

შემდეგი თეორემა ლებეგის ინტეგრალს გამოსახავს განაწილების ფუნქციის მიმართ რიმან-სტილტიესის ინტეგრალის მეშვეობით.

თეორემა 16.9.1. ნებისმიერი $f \in L(X,\mu)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_X |f| d\mu = -\int_{(0,\infty)} t\, dF_f(t).$$

თეორემა 16.9.1-ს ჩვენ მივიღებთ შემდეგი უფრო ზოგადი დებულებიდან.

თეორემა 16.9.2. ვთქვათ, $\Phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ არის უწყვეტად წარმოებადი და მკაცრად ზრდადი ფუნქცია, $\Phi(0) = 0$ და $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$

თვისებებით. მაშინ ნებისმიერი $f \in \Phi(L)(X, \mu)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_X \Phi(|f|)d\mu = -\int_{(0,\infty)} \Phi(t)\, dF_f(t).$$

ვთქვათ, Δ არის წრფის რაიმე გადაუგვარებელი მონაკვეთი, ხოლო φ - მასზე განსაზღვრული მონოტონური და მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. $\mathcal{I}_\Delta$-თი აღვნიშნოთ $\{\emptyset\} \cup \{(a,b] : (a,b] \subset \Delta\}$ ნახევარრგოლი. v_φ-თი აღვნიშნოთ $\mathcal{I}_\Delta$ კლასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ფუნქცია: $\mathrm{v}_\varphi(\emptyset) = 0$ და $\mathrm{v}_\varphi((a,b]) = |\varphi(b) - \varphi(a)|$ $((a,b] \subset \Delta)$. თეორემა 4.5.3-ის მსგავსად მტკიცდება, რომ v_φ არის ზომა. v_φ ზომის ლებეგისეულ გაგრძელებას ეწოდება φ **ფუნქციით წარმოქმნილი ლებეგ-სტილტიესის ზომა** და ის აღინიშნება m_φ ჩანაწერით.

$f \in \Phi(L)(X, \mu)$ ფუნქციის F_f განაწილების ფუნქცია არის სასრული ყოველი დადებითი t-სათვის, ამასთან, F_f არის კლებადი და მარჯვნიდან უწყვეტი. აღნიშნულის საფუძველზე შეიძლება განვიხილოთ m_{F_f} ლებეგ-სტილტიესის ზომა $(0,\infty)$ მონაკვეთზე. ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი $[a,b] \subset (0,\infty)$ სეგმენტის ქვესიმრავლეებზე m_{F_f} ზომა ემთხვევა $-F_f|_{[a,b]}$ ფუნქციით წარმოქმნილ ლებეგ-სტილტიესის ზომას.

ლემა 16.9.1. ვთქვათ, $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ არის უწყვეტი და მკაცრად ზრდადი ფუნქცია, $\Phi(0) = 0$ და $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$ თვისებებით, ხოლო f არის $\Phi(L)(X, \mu)$ კლასის ფუნქცია. მაშინ $\Phi(|f|)$-ის განაწილების ფუნქცია μ ზომის მიხედვით ტოლია Φ-ს განაწილების ფუნქციისა m_{F_f} ზომის მიხედვით, ე.ი.

$$\mu(\{\Phi(|f|) > t\}) = \mathrm{m}_{F_f}(\{\Phi > t\}) \quad (t \geq 0).$$

დამტკიცება. ყოველი დადებითი b-სათვის გვაქვს, რომ

$$\int_X \Phi(|f|)d\mu \geq \int_{\{|f|>b\}} \Phi(|f|)d\mu \geq \Phi(b)F_f(b).$$

შედეგად, $\lim\limits_{b\to\infty} F_f(b) = 0$. აქედან, თავის მხრივ ვღებულობთ, რომ ყოველი დადებითი a-სათვის,

$$\mathrm{m}_{F_f}((a,\infty)) = \lim_{b\to\infty} \mathrm{m}_{F_f}((a,b]) = \lim_{b\to\infty} [F_f(a) - F_f(b)] = F_f(a). \quad (1)$$

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი t რიცხვი. Φ ფუნქციის თვისებების საფუძველზე ადვილი დასანახია $\{\Phi > t\} = (\Phi^{-1}(t), \infty)$ ტოლობის სამართლიანობა. საიდანაც, (1)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ,

$$\mathrm{m}_{F_f}(\{\Phi > t\}) = F_f(\Phi^{-1}(t)). \quad (2)$$

მეორე მხრივ გვაქვს, რომ

$$\mu(\{\Phi(|f|) > t\}) = \mu(\{|f| > \Phi^{-1}(t)\}) = F_f(\Phi^{-1}(t)). \quad (3)$$

(2) და (3) ტოლობებიდან ვასკვნით ლემის სამართლიანობას. $\square$

თეორემა 16.9.2-ის დამტკიცება. თეორემა 8.10.1-ის ძალით გვექნება, რომ:

$$\int_X \Phi(|f|)d\mu = \int_{(0,\infty)} \mu(\{\Phi(|f|) > t\})d\mathrm{m}(t),$$

$$\int_{(0,\infty)} \Phi(t)d\mathrm{m}_{F_f} = \int_{(0,\infty)} \mathrm{m}_{F_f}(\{\Phi > t\})d\mathrm{m}(t).$$

საიდანაც, ლემა 16.9.1-ის გათვალისწინებით, ვღებულობთ,

$$\int_X \Phi(|f|)d\mu = \int_{(0,\infty)} \Phi(t)d\mathrm{m}_{F_f}.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი თეორემა 16.7.1-ის საფუძველზე შემდეგნაირად შეიძლება გარდავქმნათ:

$$\int_{(0,\infty)} \Phi(t)d\mathrm{m}_{F_f} = \lim_{a\to 0,\ b\to\infty} \int_{[a,b]} \Phi(t)d\mathrm{m}_{F_f} =$$

$$= -\lim_{a\to 0,\ b\to\infty} \int_{[a,b]} \Phi(t)dF_f = -\int_{(0,\infty)} \Phi(t)\ dF_f(t).$$

რითაც თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

დ ა ნ ა რ თ ი 1

რიცხვის წარმოდგენა ორობითი წილადის სახით

I. ორობითი სეგმენტები. $[0,1]$ სეგმენტი დავყოთ ორ ტოლ: მარცხენა - $\Delta(0)$ და მარჯვენა - $\Delta(1)$, ნაწილად. ამ ორი სეგმენტის კლასი აღვნიშნოთ Ω_1 -ით. მეორე ეტაპზე, თავის მხრივ, $\Delta(0)$ დავყოთ ორ ტოლ: მარცხენა - $\Delta(0,0)$ და მარჯვენა - $\Delta(0,1)$ ნაწილად, ხოლო $\Delta(1)$ - ანალოგიურ $\Delta(1,0)$ და $\Delta(1,1)$ ნაწილებად. მიღებული ოთხი სეგმენტის კლასი აღვნიშნოთ Ω_2-ით. თუ ამ აგებას უსასრულოდ გავაგრძელებთ, მივიღებთ სეგმენტთა კლასების

$$\Omega_n = \{\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) : \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n = 0,1\}$$

მიმდევრობას, რომელიც ხასიათდება იმით, რომ Ω_{n+1} მიიღება Ω_n კლასის ყოველი $\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ სეგმენტის დაყოფით ორ ტოლ: მარცხენა - $\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,0)$ და მარჯვენა - $\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,1)$, ნაწილად.

$\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ კლასის სეგმენტებს - **ორობით სეგმენტებს**, ხოლო Ω_n $(n\in\mathbb{N})$ კლასის სეგმენტებს - **n-ური რიგის ორობით სეგმენტებს** უწოდებენ.

$\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ ორობითი სეგმენტის მარცხენა ბოლო აღვნიშნოთ $a(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$-ით.

დებულება 1. ნებისმიერი ორობითი $\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ სეგმენტისათვის სრულდება ტოლობა $a(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{2^k}$.

ეს დებულება მარტივად მტკიცდება მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით n-ის მიმართ.

II. ორობითი წილადები. (ε_n) მიმდევრობას, რომლის წევრები ღებულობენ ნულის ან ერთის ტოლ მნიშვნელობებს, **ორობითი მიმდევრობა** ეწოდება.

შემდგომში ყველა ორობითი მიმდევრობის სიმრავლეს აღვნიშნავთ B-თი.

B_0-ით (B_1-ით) აღვნიშნოთ ყველა იმ ორობითი მიმდევრობის სიმრავლე, რომლის ყველა წევრი, დაწყებული გარკვეული ნომრიდან, ნულის ტოლია (ერთის ტოლია).

შევნიშნოთ, რომ $B \setminus B_1$ ($B \setminus B_0$) შედგება ყველა იმ ორობითი მიმდევრობისაგან, რომლის ნულის ტოლ (ერთის ტოლ) წევრთა რაოდენობა უსასრულოა; ხოლო $B \setminus (B_0 \cup B_1)$ არის ყველა იმ ორობითი მიმდევრობის სიმრავლე, რომლის როგორც ნულის, ასევე ერთის ტოლი წევრების რაოდენობა უსასრულოა.

მწკრივს $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n / 2^n$, სადაც (ε_n) ორობითი მიმდევრობაა, **ორობითი წილადი** ეწოდება.

ვთქვათ, $E \subset B$. $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n / 2^n$ ორობით წილადს, რომლისთვისაც $(\varepsilon_n) \in E$ ვუწოდოთ **E-ტიპის.**

ვიტყვით, რომ $x \in [0, 1]$ **რიცხვი წარმოდგენილია** $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n / 2^n$ **ორობითი წილადის სახით**, თუ $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n / 2^n$.

III. ორობითი სეგმენტების ჩალაგებული მიმდევრობები. (I_n) მიმდევრობას ვუწოდოთ **ორობითი სეგმენტების ჩალაგებული მიმდევრობა**, თუ $I_n \in \Omega_n$ და $I_n \supset I_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

ორობითი სეგმენტების ჩალაგებულ (I_n) მიმდევრობას ვუწოდოთ $x \in [0, 1]$ **წერტილისაკენ მოჭიმვადი**, თუ $x \in I_n$ ყოველი n-სთვის. ცხადია, ასეთ შემთხვევაში გვაქვს, რომ $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

დებულება 2. ვთქვათ, (I_n) ორობითი სეგმენტების მიმდევრობაა. შემდეგი ორი წინადადება ერთმანეთის ტოლფასია:

1) (I_n) ორობითი სეგმენტების ჩალაგებული მიმდევრობაა;

2) მოიძებნება ორობითი მიმდევრობა (ε_n) ისეთი, რომ

$$I_n = \Delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

დამტკიცება. ვთქვათ, (I_n) ორობითი სეგმენტების ჩალაგებული მიმდევრობაა. Ω_n ოჯახების განსაზღვრის გათვალისწინებით, ადვილი დასანახია, რომ I_{n+1} არის I_n-ის მარცხენა ან მარჯვენა ნახევარი. შედეგად, თუ $I_n = \Delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, მაშინ $I_{n+1} = \Delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 0)$ ან $I_{n+1} = \Delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 1)$. აქედან ცხადია, მიიღება $1) \Rightarrow 2)$ იმპლიკაცია. შებრუნებული, $2) \Rightarrow 1)$ იმპლიკაცია, უშუალოდ გამომდინარეობს Ω_n ოჯახების განმარტებიდან. □

დებულება 3. ვთქვათ, $x \in [0, 1]$ და (ε_n) ორობითი მიმდევრობაა. შემდეგი ორი წინადადება ერთმანეთის ტოლფასია:

$$1) \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n};$$

$$2) \quad \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n).$$

დამტკიცება. ყოველი ორობითი (ε_n) მიმდევრობისთვის და ნატურალური n-სთვის გვექნება, რომ

$$\text{ა)}\quad \Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{2^k},\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{2^k}+\frac{1}{2^n}\right];$$

$$\text{ბ)}\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{2^k}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{2^k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{2^k}+\frac{1}{2^n}.$$

ა) გამომდინარეობს დებულება 1-დან, ხოლო ბ) არის (ε_n)-ის ორობითობის შედეგი.

აღნიშნული ორი თანაფარდობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ეკვივალენტობა. □

$m/2^n$ სახის რიცხვს, სადაც $n\in\mathbb{N}$ და $m\in\mathbb{Z}$ **ორობითად-რაციონალური** ეწოდება. თუ რიცხვს არა აქვს აღნიშნული სახე, მაშინ მას **ორობითად-ირაციონალურს** უწოდებენ.

ყველა ორობითად-რაციონალური რიცხვის სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathbb{Q}_2$-ით.

დებულება 4. ვთქვათ, $x\in(0,1)$ ორობითად-რაციონალურია და $x=p/2^q$, სადაც p კენტია. მაშინ არსებობს ზუსტად ორი x-საკენ მოჭიმვადი ორობითი სეგმენტების ჩალაგებული მიმდევრობა - $(\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n))$ და $(\Delta(\eta_1,\ldots,\eta_n))$. ამასთან, ამ მიმდევრობებს აქვთ თვისებები:

1) $\varepsilon_n=\eta_n$, **როცა** $n<q$;

2) $\varepsilon_n=1$ **და** $\eta_n=0$, **როცა** $n\ge q$;

3) x **არის** $\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ **სეგმენტის მარჯვენა ბოლო, როცა** $n\ge q$**;**

4) x **არის** $\Delta(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ **სეგმენტის მარცხენა ბოლო, როცა** $n\ge q$**.**

დებულება 5. ვთქვათ, $x\in[0,1]$ ორობითად-ირაციონალური რიცხვია. მაშინ არსებობს ერთადერთი x-საკენ მოჭიმვადი ორობითი სეგმენტების ჩალაგებული $(\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n))$ მიმდევრობა. ამასთან, ამ მიმდევრობას აქვს $(\varepsilon_n)\in B\setminus(B_0\cup B_1)$ თვისება.

4 და 5 დებულებების დამტკიცებისათვის საკმარისია შევნიშნოთ სამი რამ:

ა) ყოველი n-სთვის $t\in[0,1]$ წერტილი შედის n-ური რიგის ერთ ან ორ ორობით სეგმენტში. პირველ შემთხვევაში, t სეგმენტის შიგა წერტილია, ხოლო მეორე შემთხვევაში, t წარმოადგენს n-ური რიგის ორი მოსაზღვრე სეგმენტის საერთო ბოლოს;

ბ) თუ $t\in[0,1]$ არის $\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\Omega_n$ სეგმენტის მარჯვენა ბოლო და $\Delta(\eta_1,\ldots,\eta_n)\in\Omega_n$ სეგმენტის მარცხენა ბოლო, მაშინ t წერტილი არის, აგრეთვე, $\Delta(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,1)\in\Omega_{n+1}$ სეგმენტის მარჯვენა ბოლო და $\Delta(\eta_1,\ldots,\eta_n,1)\in\Omega_{n+1}$ სეგმენტის მარცხენა ბოლო;

გ) $[0,1]$ სეგმენტის ორობითად-რაციონალური რიცხვების სიმრავლე ემთხვევა ორობითი სეგმენტების ბოლოების სიმრავლეს.

2-5 დებულებების ძალით რიცხვის წარმოდგენები ორობითი წილადის სახით აღიწერება ამ წერტილისაკენ მოჭიმვადი ორობითი სეგმენტების მიმდევრობების მეშვეობით.

4. რიცხვის წარმოდგენა ორობითი წილადის სახით. ქვემოთ მოცემული თეორემები გამომდინარეობენ 2-5 დებულებებიდან.

თეორემა 1. ყოველ ორობითად-რაციონალურ $x \in (0,1)$ რიცხვს აქვს ზუსტად ორი წარმოდგენა ორობითი წილადის სახით. ამასთან, მათ შორის ერთი არის B_0-ტიპის, ხოლო მეორე - B_1-ტიპის.

თეორემა 2. ყოველ ორობითად-ირაციონალურ $x \in (0,1)$ რიცხვს აქვს ერთადერთი წარმოდგენა ორობითი წილადის სახით. ამასთან, ეს წარმოდგენა არის $B \setminus (B_0 \cup B_1)$-ტიპის.

შენიშვნა 1. ცხადია, რომ 0 და 1 რიცხვებს აქვთ ერთადერთი წარმოდგენა ორობითი წილადის სახით. სახელდობრ, ეს წარმოდგენებია: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{2^n}$ და $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, შესაბამისად.

V. შესაბამისობა ორობით მიმდევრობებსა და რიცხვებს შორის.

თეორემა 3. შემდეგი ასახვები წარმოადგენენ ბიექციას:

$$B_0 \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in [0,1) \cap \mathbb{Q}_2;$$

$$B_1 \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in (0,1] \cap \mathbb{Q}_2;$$

$$B \setminus (B_0 \cup B_1) \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}_2;$$

$$B \setminus B_1 \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in [0,1);$$

$$B \setminus B_0 \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in (0,1].$$

თეორემა 3-ის დამტკიცებისათვის დაგვჭირდება შემდეგი წინადადება.

დებულება 6. ვთქვათ, $(\varepsilon_n), (\eta_n) \in B \setminus B_1$ ან $(\varepsilon_n), (\eta_n) \in B \setminus B_0$, და $(\varepsilon_n) \neq (\eta_n)$. მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \neq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{2^n}.$$

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ $(\varepsilon_n), (\eta_n) \in B \setminus B_1$ შემთხვევა. აღვნიშნოთ

$$N = \min\{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n \neq \eta_n\}.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\varepsilon_N = 1$ და $\eta_N = 0$. მაშინ თუ გავითვალისწინებთ პირობებს: $\varepsilon_n = \eta_n$ როცა $n < N$ და $(\eta_n) \in B \setminus B_1$, გვექნება,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \geq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \frac{1}{2^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} > \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\eta_n}{2^n} + \frac{0}{2^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\eta_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{2^n}.$$

მეორე შემთხვევაში მსჯელობა ანალოგიურია იმ განსხვავებით, რომ შეფასების დროს უნდა ვისარგებლოთ $(\varepsilon_n) \in B \setminus B_0$ პირობით. $\square$

თეორემა 3-ის დამტკიცება. განსახილავი ასახვები აღვნიშნოთ f_i-ით ($i \in \overline{1,5}$), მათი თანმიმდევრობის შესაბამისად.

f_1, f_2 და f_3 ასახვების სიურექციულობა გამომდინარეობს 1 და 2 თეორემებიდან, ხოლო ინექციურობა - დებულება 6-დან.

f_4 და f_5 ასახვების ბიექციურობა წარმოადგენს f_1, f_2 და f_3 ასახვების ბიექციურობის შედეგს. $\square$

VI. რიცხვის (m_n)-წარმოდგენა. ნებისმიერი $m \geq 2$ ნატურალური რიცხვისათვის შეიძლება განვიხილოთ ორობითი წილადების მსგავსი „m-ობითი" წილადები და მათი მეშვეობით რიცხვის წარმოდგენის საკითხი. ქვემოთ დაუმტკიცებლად იქნება მოცემული კიდევ უფრო ზოგადი ხასიათის შედეგები ამ მიმართულებით.

ვთქვათ, (m_n) ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვების რაიმე მიმდევრობაა. მწკრივს

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{M_n},$$

სადაც $1 \leq \varepsilon_n \leq m_n - 1$ და $M_n = m_1 m_2 ... m_n$, ვუწოდოთ (m_n) **ტიპის წილადი**.

(m_n) ტიპის $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n / M_n$ წილადს, ვუწოდოთ $x \in [0, 1]$ რიცხვის (m_n) **ტიპის წარმოდგენა**, თუ $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n / M_n$.

მთელ რიცხვთა (ε_n) მიმდევრობას ვუწოდოთ (m_n) **ტიპის მიმდევრობა**, თუ $1 \leq \varepsilon_n \leq m_n - 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

ყველა (m_n) ტიპის მიმდევრობის სიმრავლე აღვნიშნოთ $B(m_n)$-ით.

$E \subset B(m_n)$ სიმრავლეში შემავალ მიმდევრობებს ვუწოდოთ **E-ტიპის**.

$B_0(m_n)$-ით აღვნიშნოთ ყველა იმ (m_n) ტიპის მიმდევრობის სიმრავლე, რომლის ყველა წევრი, დაწყებული გარკვეული ნომრიდან, 0-ის ტოლია, ხოლო $B_1(m_n)$-ით აღვნიშნოთ ყველა იმ (m_n) ტიპის მიმდევრობის სიმრავლე, რომლის ყველა წევრი, დაწყებული გარკვეული ნომრიდან, (m_n-1)-ის ტოლია.

თუ x რიცხვს აქვს p/M_n სახე, სადაც $n \in \mathbb{N}$ და $p \in \mathbb{Z}$, მაშინ მას ვუწოდოთ (m_n)-**რაციონალური**, ხოლო, წინააღმდეგ შემთხვევაში - (m_n)-**ირაციონალური**.

ყველა (m_n)-რაციონალური რიცხვის სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathbb{Q}_{(m_n)}$-ით.

1-3 თეორემების მსგავსად მტკიცდება შემდეგი დებულებები.

თეორემა 4. ყოველ (m_n)-რაციონალურ $x \in (0,1)$ რიცხვს აქვს ზუსტად ორი წარმოდგენა (m_n) ტიპის წილადის სახით. ამასთან, მათ შორის ერთი არის $B_0(m_n)$-ტიპის, ხოლო მეორე - $B_1(m_n)$-ტიპის.

თეორემა 5. ყოველ (m_n)-ირაციონალურ $x \in (0,1)$ რიცხვს აქვს ერთადერთი წარმოდგენა (m_n) ტიპის წილადის სახით. ამასთან, ეს წარმოდგენა არის $B \setminus (B_0(m_n) \cup B_1(m_n))$-ტიპის.

თეორემა 6. შემდეგი ასახვები წარმოადგენენ ბიექციას:

$$B_0(m_n) \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{M_n} \in [0,1) \cap \mathbb{Q}_{(m_n)};$$

$$B_1(m_n) \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{M_n} \in (0,1] \cap \mathbb{Q}_{(m_n)};$$

$$B \setminus (B_0(m_n) \cup B_1(m_n)) \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{M_n} \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}_{(m_n)};$$

$$B \setminus B_1(m_n) \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{M_n} \in [0,1);$$

$$B \setminus B_0(m_n) \ni (\varepsilon_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{M_n} \in (0,1].$$

დ ა ნ ა რ თ ი 2

ზოგიერთი ცნობა მეტრიკული და ნორმირებული სივრცეების შესახებ

I. ვთქვათ, X რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა. $d : X \times X \to [0, \infty)$ ფუნქციას ეწოდება **მანძილი (მეტრიკა)** X სიმრავლეში, თუ d აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

- $d(x, y) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$ (სიმეტრიულობის პირობა);
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (სამკუთხედის უტოლობა).

მეტრიკული სივრცე ეწოდება (X, d) წყვილს, სადაც X რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო d მანძილია X-ში.

ქვემოთ ვიგულისხმოთ, რომ (X, d) რაიმე ფიქსირებული მეტრიკული სივრცეა.

ვთქვათ, $x_0 \in X$ და $\varepsilon > 0$. **ღია ბირთვი** და **ჩაკეტილი ბირთვი** ცენტრით x_0 წერტილში და რადიუსით ε, შესაბამისად, ეწოდებათ სიმრავლეებს:

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x : d(x, x_0) < \varepsilon\}, \quad B[x_0, \varepsilon] = \{x : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}.$$

$B(x_0, \varepsilon)$ ბირთვს x_0 წერტილის ε-**მიდამოს** უწოდებენ.

$x \in X$ წერტილს ეწოდება $M \subset X$ სიმრავლის **შეხების წერტილი**, თუ x-ის ნებისმიერი ε-მიდამო შეიცავს M სიმრავლის ერთ წერტილს მაინც.

$x \in X$ წერტილს ეწოდება $M \subset X$ სიმრავლის **იზოლირებული წერტილი**, თუ $x \in M$ და მოიძებნება x-ის ε-მიდამო, ისეთი, რომ $B(x, \varepsilon) \cap M = \{x\}$.

$x \in X$ წერტილს ეწოდება $M \subset X$ სიმრავლის **ზღვარითი წერტილი**, თუ x-ის ნებისმიერი ε-მიდამო შეიცავს M სიმრავლის წერტილთა უსასრულო რაოდენობას.

სიმრავლის შეხების წერტილი ან წარმოადგენს მის იზოლირებულ წერტილს, ანაც არის მისი ზღვარითი წერტილი.

$x \in X$ წერტილს ეწოდება $M \subset X$ სიმრავლის **შიგა წერტილი**, თუ მოიძებნება x-ის ε-მიდამო, რომელიც ჩართულია M სიმრავლეში.

$M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება **ჩაკეტილი**, თუ M შეიცავს ყველა თავის შეხების წერტილს.

$M \subset X$ სიმრავლეს გავაერთიანებთ ყველა მისი შეხების წერტილის სიმრავლესთან, მაშინ მიიღება ჩაკეტილი სიმრავლე, რომელსაც M სიმრავლის **ჩაკეტვა** ეწოდება.

$M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება **ღია**, თუ M-ის ყოველი წერტილი არის M-ის შიგა წერტილი.

$M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება **შემოსაზღვრული**, თუ მოიძებნება მისი შემცველი რაიმე $B(x_0, \varepsilon)$ ბირთვი.

$M \subset X$ **სიმრავლის დიამეტრი** განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\operatorname{diam} M = \sup\{d(x,y) : x, y \in M\}$.

X-ის წერტილთა (x_n) მიმდევრობას ეწოდება **კრებადი** $x \in X$ **წერტილისაკენ**, თუ $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. ელემენტს, რომლისკენაც კრებადია (x_n) მიმდევრობა, (x_n)-ის **ზღვარს** უწოდებენ (ჩანაწერი: $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ ან $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$).

მანძილს აქვს უწყვეტობის თვისება: თუ $x_n \to x$ და $y_n \to y$, მაშინ $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$. ეს ფაქტი მტკიცდება შემდეგი შეფასების მეშვეობით: $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$.

სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- x წერტილი წარმოადგენს M სიმრავლის შეხების წერტილს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოიძებნება M სიმრავლის წერტილთა (x_n) მიმდევრობა, რომელიც კრებადია x წერტილისაკენ;
- x წერტილი წარმოადგენს M სიმრავლის ზღვარით წერტილს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოიძებნება M სიმრავლის წყვილ-წყვილად განსხვავებულ წერტილთა (x_n) მიმდევრობა, რომელიც კრებადია x წერტილისაკენ;
- M სიმრავლე ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი დამატებითი $X \setminus M$ სიმრავლე ღიაა;
- ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახის გაერთიანება ღია სიმრავლეა;
- ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი სასრული ოჯახის თანაკვეთა ღია სიმრავლეა;
- ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახის თანაკვეთა ჩაკეტილი სიმრავლეა;
- ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი სასრული ოჯახის გაერთიანება ჩაკეტილი სიმრავლეა;
- სიმრავლე შემოსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი დიამეტრი სასრულია.

სიმრავლეთა Ω კლასს ((G_α) ოჯახს) ეწოდება M სიმრავლის **ღია და-ფარვა**, თუ თითოეული $G \in \Omega$ (თითოეული G_α) სიმრავლე ღიაა და მათი გაერთიანება შეიცავს M-ს.

$M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება **კომპაქტური**, თუ მისი ნებისმიერი ღია დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა (ე.ი. სასრული ქვეკლასი (ქვე-ოჯახი), რომელიც დაფარავს M სიმრავლეს.)

ადვილი დასანახია, რომ კომპაქტურ სიმრავლეთა სასრული გაერთიანება კვლავ კომპაქტური სიმრავლეა.

მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ცნობილია, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის M ქვესიმრავლისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

- M კომპაქტურია;
- M ჩაკეტილი და შემოსაზღვრულია;
- M-ის წერტილთა ნებისმიერი მიმდევრობისაგან გამოიყოფა M-ის რაიმე წერტილისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა.

მეტრიკული სივრცის A და B ქვესიმრავლეებს შორის მანძილი განისაზ-ღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

ლემა 1. ვთქვათ, $F_1, \ldots, F_N$ არიან $\mathbb{R}^n$ სივრცის კომპაქტური და წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვესიმრავლეები. მაშინ ყოველი F_k სიმრავ-ლე სხვა დანარჩენი F_j სიმრავლეების გაერთიანებისაგან დაშორებულია დადებითი მანძილით.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო: რომელიღაც F_k სიმრავლე სხვა დანარჩენი F_j სიმრავლეების გაერთიანებისაგან დაშორებულია ნულის ტოლი მანძილით. მაშინ მოიძებნებიან $x_m \in F_k$ და $y_m \in \bigcup_{j\neq k} F_j$ მიმდევრობები, ისეთები, რომ $d(x_m, y_m) \to 0 \ \ (m \to \infty)$. შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ F_k და $\bigcup_{j\neq k} F_j$ სიმრავლეების კომპაქტურობას, გამოვყოფთ (x_{m_p}) და (y_{m_p}) ქვემიმდევრობებს, რომლებიც, შესაბამისად, კრებადია რაიმე $x \in F_k$ და $y \in \bigcup_{j\neq k} F_j$ წერტილებისაკენ. გვექნება, რომ $d(x,y) = \lim_{p\to\infty} d(x_{m_p}, y_{m_p}) = 0$. აქედან გამომდინარე, $x = y$. შედეგად, F_k და $\bigcup_{j\neq k} F_j$ სიმრავლეებს აღმოაჩნდათ არაცარიელი თანაკვეთა, რაც ეწინააღმდეგება ლემის პირო-ბას. $\square$

II. ვთქვათ, (X,d) და (Y,ϱ) რაიმე მეტრიკული სივრცეებია და მოცე-მულია $f : X \to Y$ ასახვა. f-ს ეწოდება **უწყვეტი** $x_0 \in X$ **წერტილში**, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$d(x,x_0) < \delta \ \ \Rightarrow \ \ \varrho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი იმპლიკაცია შემდეგი ჩართვის ტოლფასია:

$$f((B(x_0,\delta)) \subset V(f(x_0),\varepsilon).$$

აქ $B(x,r)$ და $V(y,r)$ შესაბამისად აღნიშნავენ ღია ბირთვებს (X,d) და (Y,ρ) სივრცეებში.

(X,d) სივრციდან (Y,ϱ) სივრცეში მოქმედ f ასახვას ეწოდება **უწყვეტი**, თუ ის უწყვეტია ყოველ $x_0 \in X$ წერტილში.

თეორემა 1. ვთქვათ, (X,d) და (Y,ϱ) მეტრიკული სივრცეებია. მაშინ ნებისმიერი $f : X \to Y$ ასახვისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

1) f უწყვეტია;

2) (Y,ϱ) სივრცეში ღია ყოველი $G \subset Y$ სიმრავლისათვის მისი $f^{-1}(G)$ წინასახე ღია სიმრავლეა (X,d) სივრცეში.

დამტკიცება. $1) \Rightarrow 2)$ **იმპლიკაცია**: ვთქვათ, $G \subset Y$ ღია სიმრავლეა. განვიხილოთ ნებისმიერი $x_0 \in f^{-1}(G)$ წერტილი. $f(x_0) \in G$ წერტილისათვის ვიპოვოთ $V(f(x_0),\varepsilon)$ მიდამო, რომელიც ჩართულია G-ში. შემდეგ, f-ის უწყვეტობის საფუძველზე, ვიპოვოთ $\delta > 0$, ისეთი, რომ

$$d(x,x_0) < \delta \;\;\Rightarrow\;\; \varrho(f(x),f(x_0)) < \varepsilon.$$

შედეგად, $V(f(x_0),\varepsilon) \subset G$ ჩართვის ძალით, ყოველი $x \in B(x_0,\delta)$ წერტილისათვის, $f(x) \in G$. აქედან გამომდინარე, $B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(G)$. ამრიგად, $f^{-1}(G)$-ს ნებისმიერი x_0 წერტილი არის მისი შიგა წერტილი. ამით $1) \Rightarrow 2)$ იმპლიკაცია დამტკიცებულია.

$2) \Rightarrow 1)$ **იმპლიკაცია**: განვიხილოთ ნებისმიერი $x_0 \in X$ წერტილი. 2) წინადადების თანახმად, ნებისმიერი მოცემული $\varepsilon > 0$-სთვის $V(f(x_0),\varepsilon)$ ღია ბირთვის $f^{-1}(V(f(x_0),\varepsilon))$ წინასახე ღია სიმრავლეა, რის გამოც იარსებებს $B(x_0,\delta)$ მიდამო, რომელიც ჩართულია $f^{-1}(V(f(x_0),\varepsilon))$ სიმრავლეში. შედეგად, სამართლიანია ჩართვა:

$$f((B(x_0,\delta)) \subset V(f(x_0),\varepsilon).$$

ეს კი ნიშნავს f-ის უწყვეტობას x_0 წერტილში. ამით $1) \Rightarrow 2)$ იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. □

ვთქვათ, (X,d) და (E,ϱ) მეტრიკული სივრცეებია. (E,ϱ)-ს ეწოდება (X,d)-ს **ქვესივრცე**, თუ $E \subset X$ და ϱ წარმოადგენს d მეტრიკის შეზღუდვას $E \times E$-ზე.

თეორემა 2. ვთქვათ, (E,ϱ) არის (X,d) მეტრიკული სივრცის ქვესივრცე. მაშინ ნებისმიერი $M \subset E$ სიმრავლისათვის შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:

1) M ღიაა (E, ϱ) სივრცეში;

2) M წარმოდგება $G \cap E$ სახით, სადაც G არის (X, d) სივრცეში ღია რაიმე სიმრავლე.

დამტკიცება. $1) \Rightarrow 2)$ **იმპლიკაცია**: ბირთვები (X, d) სივრცეში აღვნიშნოთ $B(x, r)$-ით, ხოლო (E, ϱ) სივრცეში - $V(x, r)$-ით. ცხადია, რომ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისათვის და $r > 0$ რიცხვისთვის,

$$V(x, r) = B(x, r) \cap E. \tag{1}$$

ვთქვათ, M ღია სიმრავლეა (E, ϱ) სივრცეში. ყოველი $x \in M$-სთვის ვიპოვოთ $\varepsilon_x > 0$, რომლისთვისაც $V(x, \varepsilon_x) \subset M$. მაშინ გვექნება, რომ $M = \bigcup_{x \in M} V(x, \varepsilon_x)$. G-ს როლში ავიღოთ $\bigcup_{x \in M} B(x, \varepsilon_x)$ გაერთიანება. მაშინ G იქნება ღია სიმრავლე (X, d) სივრცეში, ამასთან, (1)-ის გათვალისწინებით გვექნება, რომ $G \cap E = M$. ამით $1) \Rightarrow 2)$ იმპლიკაცია დამტკიცებულია.

$2) \Rightarrow 1)$ **იმპლიკაცია**: ვთქვათ, $M = G \cap E$, სადაც G არის (X, d) სივრცეში ღია რაიმე სიმრავლე. განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in M$ წერტილი. მაშინ, $M \subset G$ ჩართვის გამო, მოიძებნება $\varepsilon_x > 0$, რომლისთვისაც $B(x, \varepsilon_x) \subset G$. საიდანაც, (1) ტოლობის გათვალისწინებით, გვექნება, რომ

$$V(x, \varepsilon_x) = B(x, \varepsilon_x) \cap E \subset G \cap E = M.$$

ამრიგად, x არის M-ის შიგა წერტილი (E, ϱ) სივრცეში. ამით $2) \Rightarrow 1)$ იმპლიკაცია და მასთან ერთად თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

III. $M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება **მკვრივი $E \subset X$ სიმრავლეში**, თუ E-ს ყოველი წერტილი წარმოადგენს M სიმრავლის შეხების წერტილს.

$M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება **ყველგან მკვრივი**, თუ M მკვრივია მთელ სივრცეში (ე.ი. X-ში).

$M \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება **არსად მკვრივი**, თუ ნებისმიერი $B(x, \varepsilon)$ ბირთვისათვის მოიძებნება $B(y, \delta)$ ბირთვი, ისეთი, რომ $B(y, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$ და $B(y, \delta) \cap M = \emptyset$.

(x_n) მიმდევრობას ეწოდება **ფუნდამენტური**, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის მოიძებნება $N \in \mathbb{N}$, ისეთი, რომ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ყოველთვის როცა $n, m \geq N$.

(X, d) სივრცეს ეწოდება **სრული**, თუ მის წერტილთა ყოველ ფუნდამენტურ მიმდევრობას აქვს ზღვარი.

ლემა 2. თუ ფუნდამენტური (x_n) მიმდევრობის რაიმე ქვემიმდევრობა კრებადია, მაშინ კრებადია (x_n) მიმდევრობაც.

დამტკიცება. დავუშვათ, $\lim\limits_{k \to \infty} x_{j_k} = x$. განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და მისთვის ვიპოვოთ p_1 და p_2 ინდექსები, ისეთები, რომ $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$, როცა $n, m \geq p_1$ და $d(x_{j_k}, x) < \varepsilon/2$, როცა $k \geq p_2$.

p ავიღოთ $\max(p_1, p_2)$-ის ტოლი. განვიხილოთ ნებისმიერი $n \geq p$ ინდექსი. გვექნება, რომ: $n \geq p_1$, $j_p \geq j_{p_1} \geq p_1$ და $p \geq p_2$. რის საფუძველზეც დავწერთ,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{j_p}) + d(x_{j_p}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ამით ლემა დამტკიცებულია. □

(X, d) სივრცეს ეწოდება **სეპარაბელური**, თუ მასში მოიძებნება არაუმეტეს თვლადი ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლე.

ლემა 3. თუ მეტრიკული სივრცე სეპარაბელურია, მაშინ მისი ნებისმიერი ქვესივრცე სეპარაბელურია.

დამტკიცება. ვთქვათ, M არის არაუმეტეს თვლადი ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლე განსახილავ (X, d) მეტრიკულ სივრცეში. დავუშვათ, $E \subset X$ რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა. ავაგოთ არაუმეტეს თვლადი $H \subset E$ ქვესიმრავლე, რომელიც მკვრივია E-ში. ამით ლემა დამტკიცებული იქნება.

ვთქვათ, $n \in \mathbb{N}$. განვიხილოთ $B(x, 1/n)$ $(x \in M)$ ბირთვები. M-ის ყველგან მკვრივობის გამო, ეს ბირთვები დაფარავენ მთელ სივრცეს, და შედეგად, E სიმრავლეს. $B(x, 1/n) \cap E \neq \emptyset$ პირობის დამაკმაყოფილებელი ყოველი $x \in M$ წერტილისათვის ავარჩიოთ რაიმე y_x ელემენტი $B(x, 1/n) \cap E$ სიმრავლიდან. H_n-ით აღვნიშნოთ ყველა ასეთი y_x წერტილისაგან შედგენილი სიმრავლე. ადვილი შესამოწმებელია, რომ H_n არის E-ს არაუმეტეს თვლადი ქვესიმრავლე და E-ს ნებისმიერი წერტილისათვის მოიძებნება მისგან $2/n$-ზე ნაკლები მანძილით დაშორებული წერტილი H_n სიმრავლიდან.

H_n $(n \in \mathbb{N})$ სიმრავლეების თვისებებიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ საძიებელი H-ის როლში შეიძლება ავიღოთ $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ გაერთიანება. ლემა დამტკიცებულია. □

IV. **წრფივი** (ან კიდევ, **ვექტორული**) **სივრცე** ეწოდება სამეულს $(L, +, \cdot)$, სადაც L რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა, $+$ არის შეკრების ოპერაცია L-ში, ხოლო $\cdot$ კი არის L-ის ელემენტების რიცხვზე (სკალარზე) გამრავლების ოპერაცია, რომელთაც აქვთ თვისებები:

1.1) $x + y = y + x$ (კომუტაციურობა);

1.2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ასოციაციურობა);

1.3) არსებობს $0 \in L$ ელემენტი, ისეთი, რომ $x + 0 = x$ ყოველი $x \in L$-სთვის (ნულოვანი ელემენტის არსებობა);

1.4) ყოველი $x \in L$ ელემენტისათვის არსებობს $y \in L$ ელემენტი, ისეთი, რომ $x + y = 0$ (მოპირდაპირე ელემენტის არსებობა);

2.1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

2.2) $1 \cdot x = x$;

2.3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

2.4) $\alpha(x+y)=\alpha x+\beta y$.

წრფივ სივრცეს უწოდებენ **ნამდვილს** ან **კომპლექსურს** იმის მიხედვით, გამრავლების ოპერაცია განიხილება ნამდვილი თუ კომპლექსური სკალარების მიმართ.

სიმოკლისათვის წრფივ სივრცეს L-ით აღნიშნავენ.

$M \subset L$ ქვესიმრავლეს ეწოდება L-ის **ქვესივრცე**, თუ M ჩაკეტილია შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ, ე.ი. ნებისმიერი $x, y \in M$ ელემენტებისათვის და ნებისმიერი α სკალარისათვის: $x+y \in M$ და $\alpha x \in M$.

ვთქვათ, L წრფივი სივრცეა, ხოლო M არის მისი რაიმე ქვესივრცე. შემოვიღოთ შემდეგი სახის ეკვივალენტობის მიმართება L სივრცეში: $x, y \in L$ ელემენტებს ვუწოდოთ ეკვივალენტური, თუ $x-y \in M$. წარმოქმნილი ეკვივალენტობის კლასების (რომელთაც M ქვესივრცის მიხედვით მოსაზღვრე კლასები ეწოდებათ) სიმრავლე აღვნიშნოთ L/M ჩანაწერით. L/M-ში შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: ξ_1 და ξ_2 მოსაზღვრე კლასებისათვის ავირჩიოთ $x_1 \in \xi_1$ და $x_2 \in \xi_2$ ელემენტები და $\xi_1+\xi_2$ განვსაზღვროთ, როგორც x_1+x_2 ელემენტის შემცველი მოსაზღვრე კლასი; α სკალარისა და ξ მოსაზღვრე კლასისათვის ავირჩიოთ $x \in \xi$ ელემენტი და $\alpha\xi$ განვსაზღვროთ, როგორც αx ელემენტის შემცველი მოსაზღვრე კლასი. L/M სიმრავლეს, აღჭურვილს ასეთი შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციებით, უწოდებენ L-ის **ფაქტორ-სივრცეს** M **ქვესივრცის მიმართ**.

წრფივ სივრცეზე განსაზღვრულ ფუნქციას **ფუნქციონალს** უწოდებენ.

ორ წრფივ სივრცეს შორის მოქმედ ასახვას **ოპერატორს** უწოდებენ.

A ოპერატორს ეწოდება **წრფივი**, თუ ის ადიციური და ერთგვაროვანია, ე.ი. აკმაყოფილებს ტოლობებს: $A(x+y)=A(x)+A(y)$ და $A(\alpha x)=\alpha A(x)$.

ვთქვათ, E რაიმე წრფივი სივრცეა ნამდვილ ან კომპლექსურ სკალართა ველის მიმართ. $\|\cdot\|: E \to [0,\infty)$ ფუნქციონალს ეწოდება **ნორმა** E სივრცეში, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

- $\|x\|=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x=0$;
- $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$;
- $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$.

ნორმირებული სივრცე ეწოდება $(E, \|\cdot\|)$ წყვილს, სადაც E რაიმე წრფივი სივრცეა, ხოლო $\|\cdot\|$ ნორმაა E-ში.

ყოველი ნორმა ბუნებრივად ბადებს მანძილს განსახილავ E სივრცეში. კერძოდ, $d(x,y)=\|x-y\|$ ტოლობით განსაზღვრული d ფუნქცია არის მანძილი E-ში. შედეგად, ნორმირებულ სივრცეს შეიძლება შევხედოთ, როგორც

მეტრიკულ სივრცეს და მასზე გადავიტანოთ მეტრიკულ სივრცეებთან დაკავშირებული ყველა ცნება (სისრულე, სეპარაბელურობა და ა.შ.).

სრულ ნორმირებულ სივრცეებს **ბანახის სივრცეებს** უწოდებენ.

ბანახის სივრცეთა ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი მაგალითია $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტი ფუნქციის $C([a,b])$ სივრცე. ამ სივრცეში ალგებრული ოპერაციების როლში აიღება ფუნქციათა შეკრებისა და ფუნქციის სკალარზე გამრავლების ბუნებრივი ოპერაციები, ხოლო ნორმა განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

ლიტერატურა

[1] ჭელიძე ვლ., ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია, თბილისი, 1964.
[2] ხარაზიშვილი ა., სიმრავლეთა თეორიის საწყისები, თბილისი, 2008.
[3] Bruckner A.M., Differentiation of Integrals, American Mathematical Monthly, Vol. 78, No. 9, 1971.
[4] Bruckner J.B., Bruckner A.M. and Thomson B.S., Real Analysis (2nd Edition), ClassicalRealAnalysis.com, 2008.
[5] Engelking R., General Topology, Berlin, Heldermann-Verlag, 1989.
[6] Folland G.B., Real Analysis: modern techniques and their applications, Wiley, New York, 1999.
[7] de Guzmán M., Differentiation of Integrals in R^n, Springer, 1975.
[8] de Guzmán M., Real Analysis Methods in Fourier Analysis, North-Holland, 1981.
[9] Halmos P.R., Measure Theory, Springer, 1950.
[10] Kharazishvili A., Nonmeasurable Sets and Functions, Amsterdam, Elsevier, 2004.
[11] Oxtoby J., Measure and Category, Springer, 1971.
[12] Pfeffer W., The Riemann Approach to Integration, Cambridge, Cambridge University Press, 1993.
[13] Royden H.L. and Fitzpatrick P., Real Analysis, Prentice Hall, 2010.
[14] Rudin W., Real and Comlex Analysis, McGraw-Hill, New-York, 1966.
[15] Solovay R.M., A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Annals of Mathematics, Vol. 92, 1–56, 1970.
[16] Stein E.M. and Shakarchi R., Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces, Princeton University Press, 2005.
[17] Stein E.M., Harmonic Analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princeton University Press, 1993.
[18] Wheeden R.L. and Zygmund A., Measure and integral: an introduction to real analysis, Marcel Dekker, New York, 1977.
[19] Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г., Функциональный анализ, Киев: Высшая школа, 1990.
[20] Брудно А.Л., Теория функций действительного переменного: избранные главы, Москва, Наука, 1971.

[21] Булдырев В.С., Павлов Б.С., Линейная алгебра и функции многих переменных, Ленинград, 1985.
[22] Вулих Б.З., Краткий курс теории функций вещественной переменной, Мос-ква, Наука, 1973.
[23] Гливенко В.И., Интеграл Стилтьеса, Москва, Наука, 1936.
[24] Дороговцев А.Я., Элементы общей теории меры и интеграла, Киев: Высшая школа, 1989.
[25] Дьяченко М.И., Ульянов П.Л., Мера и интеграл, Москва, Факториал, 2002.
[26] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, Москва, «Наука», 1981.
[27] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, Москва, 1934.
[28] Медведев Ф., Развитие понятия интеграла, Москва, Наука, 1974.
[29] Натансон И.П., Теория функций вещественной переменной, Москва, Наука, 1974.
[30] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, Москва, Мир, 1979.
[31] Сакс С., Теория интеграла, Москва, Иностранная литература, 1949.
[32] Теляковский С.А., Сборник задач по теории функций действительной пере-менной, Москва, Наука, 1980.
[33] Титчмарш Е., Теория функций, Москва, Наука, 1980.
[34] Толстов Г.П., Мера и интеграл, Москва, Наука, 1976.
[35] Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П., Действительный анализ в задачах, Москва, Физматлит, 2005.
[36] Шилов Г.Е., Математический анализ. Специальный курс, Москва, 1960.
[37] Шилов Г. Е., Гуревич Б.Л., Интеграл, мера и производная, Москва, Наука, 1967.

საგნობრივი საძიებელი

გამომცემლობის რედაქტორი მაია ეჯიბია
გამოცემის მენეჯერი მარიკა ერქომაიშვილი
გარეკანის დიზაინერი ნინო ებრალიძე

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14
14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel.: +995 (32) 2250484, 6284; 6278
www.press.tsu.edu.ge