ფურიეს მწკრივები

$$x = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots), \quad -\pi < x < \pi$$

$$x = \pi - 2(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots), \quad 0 < x < 2\pi$$

$$1 = \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots), \quad 0 < x < \pi$$

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ომარ ძაგნიძე

ფურიეს მწკრივები

უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

ამ სახელმძღვანელოს ძირითადი დანიშნულებაა, მკითხველს ადვილი და გასაგები ფორმით მიაწოდოს ფურიეს მწკრივთა თეორიის უმთავრესი საკითხები.

ავტორის აზრით, თხრობის ასეთი ფორმა მისაღებია და დამწყებთათვის სასურველიც კი, რათა მან კარგად გაითავისოს ყოველმხრივ გამართული მსჯელობის აუცილებლობა მართებული დასკვნების მისაღებად.

სახელმძღვანელოს ბოლო თავები კარგ საფუძველს შეუქმნის დაინტერესებულ მკითხველს, რომ მან კიდევ უფრო სრულყოს თავისი ცოდნა ფუნქციათა თეორიის ამ მნიშვნელოვან დარგში.

რედაქტორი ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, აკადემიკოსი **ვახტანგ კოკილაშვილი**

რეცენზენტები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი **შაქრო ტეტუნაშვილი**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი **გიორგი ონიანი**

კომპიუტერული უზრუნველყოფა **ლია ანთაძე**

გამოცემულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადაწყვეტილებით.

ISBN 978-9941-13-412-8

შინაარსი

ავტორისგან

ფუნქციათა თეორიის უმნიშვნელოვანესი პრობლემაა, მოცემული ფუნქციის წარმოდგენა შედარებით მარტივ ფუნქციათა სისტემის მეშვეობით. მარტივ ფუნქციათა ძირითადი სისტემებია: დამოუკიდებელი ცვლადის ნატურალურმაჩვენებლიანი სისტემა და დამოუკიდებელი ცვლადის ჯერადარგუმენტიანი ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სისტემა.

წარმოსადგენი ფუნქციის მიმართ წაყენებული მოთხოვნა-პირობა დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელი სისტემის მიმართ განიხილება მისი წარმოდგენა.

ხარისხოვანი მწკრივით f ფუნქციის წარმოდგენის საკითხი რაიმე x_0 წერტილის მიდამოში იწყება ფუნქციისთვის ტეილორის მწკრივის კოეფიციენტების პოვნით, რისთვისაც საჭიროა ვიცოდეთ f ფუნქციის ყველა რიგის $f^{(n)}(x_0)$ წარმოებულის მნიშვნელობა x_0 წერტილზე.

მაგრამ, რიცხვითი $f^{(n)}(x_0)$ მიმდევრობის ვერავითარი კარგი თვისებები ვერ უზრუნველყოფს f ფუნქციის წარმოდგენას ტოლობით

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{$*$}$$

მართლაც, ნამდვილ რიცხვთა ყოველი a_n მიმდევრობისათვის არსებობს ფუნქციათა არათვლადი სიმრავლე, რომელთაგან თითოეულის მაკლორენის მწკრივის კოეფიციენტებია a_n რიცხვები ([40]). ეს ფაქტი წარმოადგენს ე. ბორელის შემდეგი თეორემის ([13], გვ. 60-64) სრულყოფას: ნამდვილ რიცხვთა ყოველი a_n მიმდევრობისათვის არსებობს ისეთი μ ფუნქცია, რომლის მაკლორენის მწკრივია $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ანუ, რაც იგივეა, $\mu^{(n)}(0) = a_n$.

ამ თეორემის არაბორელისმიერ დამტკიცებაში ([40]) გამოყენებულია $a_n = n!$ მიმდევრობის შესაბამისი ν ფუნქციის კონსტრუ-

ირების მეთოდი, რომლის მაკლორენის მწკრივი $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ კრებადია მხოლოდ $x=0$ წერტილზე ([10], გვ. 90-93). ამასთან დაკავშირებით საინტერესოა $\lambda(x)=e^{-1/x^2}$, როცა $x\neq 0$ და $\lambda(0)=0$ ფუნქციის შემთხვევა, რომლის მაკლორენის მწკრივის ყოველი შესაკრები ნულია $\lambda^{(0)}(0)=0$ ტოლობის გამო და ამიტომ ეს მწკრივი კრებადია ნულისკენ ყველა $x\in(-\infty,+\infty)$ წერტილზე მიუხედავად იმისა, რომ λ ფუნქცია ნულია მხოლოდ $x=0$ წერტილზე ([3], გვ. 102-103).

აქედან აშკარაა, რომ წარმოსადგენი ფუნქციის წარმოებულები გარკვეულ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს არა მხოლოდ x_0 წერტილზე, არამედ x_0 წერტილის მიდამოშიც!

ასეთია ა. პრინსჰეიმის აუცილებელი და საკმარისი პირობა ([13], გვ. 50)[1]: მიმდევრობის $\frac{\delta^n}{n!}\sup\limits_{x\in(a,b)}|f^{(n)}(x)|$ $(n=0,1,\dots)$ შემოსაზღვრულობა არის აუცილებელი და საკმარისი იმისთვის, რომ $(*)$ ტოლობა შესრულდეს ყველა იმ $x\in(a,b)$ წერტილზე, რომელიც აკმაყოფილებს $|x-x_0|<\delta$ პირობას.

მწირი დიფერენციალური თვისებების მქონე ჯამებადი ფუნქციის წარმოსადგენად გამოიყენება ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი. ასეთი მწკრივის კოეფიციენტები ყოველი ჯამებადი ფუნქციისთვის კრებადია ნულისკენ, ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტებისგან განსხვავებით!

ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობის დასადგენად შესაბამისი ფუნქციისკენ ცნობილია უ. დინის, კ. ჟორდანის, ვალე პუსენის, ა. ლებეგის და სხვა ნიშნები.

ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობის საკითხში პრინციპული მნიშვნელობის თეორემა ეკუთვნის ა. კოლმოგოროვს, რომელმაც 1926 წელს დაადგინა ისეთი ჯამებადი ფუნქციის არსებობა, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია ყოველ წერტილზე $x\in(-\infty,+\infty)$.

უფრო ადრე კი, 1911 წელს ლ. ფეიერმა დაადგინა უწყვეტი ისეთი ფუნქციის არსებობა, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია რომელიღაც წერტილზე.

ამასთან ერთად, ფურიეს მწკრივების წერტილოვანი კრებადობის საკითხში კარგად მუშაობს დინის, ჟორდანის, ვალე პუსენის და ლებეგის ნიშნები. აქვე უნდა აღინიშნოს ლებეგის მნიშვნელოვანი თეორემა იმის შესახებ, რომ ყოველი ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის წევრობრივი ინტეგრებით $[0,2\pi]$-ზე მიიღება

[1]საკმარისობა დამტკიცებულია [33]-ში, გვ. 287.

$\int_0^{2\pi} f(x)dx$ ინტეგრალისკენ კრებადი მწკრივი, თუნდაც $S[f]$ განშლადი იყოს ყველგან, რასაც ადგილი აქვს კოლმოგოროვის მწკრივისთვის. ამ საკითხებზე საუბარია წიგნის მე-4 თავში.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს პრობლემა: შესაძლებელია თუ არა ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი გამოყენებულ იქნას $f(x)$ მნიშვნელობების მისაღებად?

ამ პრობლემის გადაწყვეტას ემსახურება ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის წევრების "შეშფოთება" პარამეტრიანი ისეთი მამრავლით—**მაშფოთებელი მამრავლით**—რომლის ზღვარია 1.

თუ შეშფოთებით მიღებული მწკრივი კრებადია და მის ჯამს კი გააჩნია ზღვარი პარამეტრის მიმართ, მაშინ თავიდან აღებულ მწკრივს ეწოდება შეჯამებადი იმ მეთოდით, რომელიც შეესაბამება პარამეტრიან მამრავლს (იხ. თავი **V**, §5).

ამ მიმართულებით ცნობილია ბ. რიმანის, ე. ჩეზაროს, ნ. აბელი–ს. პუასონის, ა. ლებეგის და სხვა მეთოდები, რომელნიც თითქმის ყველგან აჯამებენ ყველა ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივს f-ის მნიშვნელობებისკენ, მათ შორის კოლმოგოროვის ყველგან განშლად მწკრივსაც კი. ეს მეთოდები, გარდა ლებეგის მეთოდისა, რეგულარულია. ეს ნიშნავს, რომ ყოველ კრებად მწკრივს ის აჯამებს თავისივე ბუნებრივი ჯამისკენ.

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ მწკრივის შეშფოთებას მისი a_k წევრის გამრავლებით მაშფოთებელ $\omega_k(\cdot)$ ფუნქციაზე, შეიძლება ეწოდოს ამ მწკრივისთვის:

1) $(C,1)$ მეთოდის მამრავლი, თუ

$$\omega_k(n) = \begin{cases} 1-\frac{k}{n+1}, & \text{როცა} \quad 0 \le k \le n, \\ 0, & \text{როცა} \quad k > n; \end{cases}$$

2) (A) მეთოდის მამრავლი, თუ $\omega_k(r) = r^k$, როცა $0 < r < 1$;

3) (R^2) მეთოდის მამრავლი, თუ $\omega_k(h) = \left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2$, სადაც მიღებულია შეთანხმება $\omega_0(h) = 1$.

ცალკე უნდა აღინიშნოს ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა რიმანის თეორია (1854 წ.). რიმანი იყო პირველი, ვინც დასვა და გადაწყვიტა ტრიგონომეტრიული მწკრივით ფუნქციის წარმოდგენის პრობლემა. ამ პრობლემის გადაწყვეტის მიზნით მან მოახდინა ტრიგონომეტრიული $T(x)$ მწკრივის, რომლის კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ, ორჯერ ფორმალური ინტეგრება და ამ გზით მიიღო უწყვეტი ფუნქცია, ე.წ. **რიმანის ასოცირებული F ფუნქცია**. შემოიღო რა ფუნქციის გლუვობის ძალზედ მნიშვნელოვანი ცნება, რაც წარმოებადობაზე სუსტია, დაამტკიცა F ფუნქციის **ყველგან** გლუვობა (გლუვობის

წერტილზე ფურიეს მწკრივი კრებადია—იხ. თავი 4, §10). რიმან-მა აგრეთვე შემოიღო მეორე სიმეტრიული წარმოებული (რომელსაც შემდგომში ეწოდა შვარცის მეორე წარმოებული), სიმბოლურად $F^{('')}$ და T მწკრივს უწოდა R^2-შეჯამებადი x წერტილზე $S(x)$-სკენ, თუ არსებობს $F^{('')}(x)$ და იგი ტოლია $S(x)$-ის. რიმანის ამ თეორიამ არსებითი როლი შეასრულა ტრიგონომეტრიული მწკრივით ფუნქციის წარმოდგენის **ერთადერთობის** საკითხში, რომლის თეორია ეკუთვნის გ. კანტორს (1872 წ.). ამ საკითებზე საუბარია მე-5 თავში.

ყოველივე ზემოთქმულის შესახებ და მათთან დაკავშირებულ საკითხებზეა საუბარი წინამდებარე სახელმძღვანელოში.

თავი 1

ძირითადი ცნებანი

1 ფუნქციის ლუწობა და კენტობა

ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლეზე ანუ, რაც იგივეა, რიცხვით $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე განსაზღვრულ ნამდვილი მნიშვნელობების მქონე $y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ ყოველი x-ისთვის $\mathbb{R}$-დან სრულდება ტოლობა $f(-x) = f(x)$. ამრიგად, f ფუნქციის ლუწობის გასარკვევად საჭიროა შევადგინოთ სხვაობა $f(-x) - f(x)$ და თუ ეს სხვაობა აღმოჩნდება ნულის ტოლი ყოველი x-ისთვის $\mathbb{R}$-დან, მაშინ არის f ფუნქცია ლუწი.

რადგანაც $(x, f(x))$ და $(-x, f(x))$ წერტილები ურთიერთსიმეტრიულებია ორდინატთა Oy ღერძის მიმართ, ამიტომ ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ. მაგალითად, $y = |x|$ და $y = x^2$ ლუწი ფუნქციებია.

$y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ ყოველ $x \in \mathbb{R}$ წერტილზე სრულდება ტოლობა $f(-x) = -f(x)$. მაშასადამე, f ფუნქციის კენტობის დასადგენად საჭიროა განვიხილოთ ჯამი $f(-x)+f(x)$ და თუ ეს ჯამი იქნება ნულის ტოლი ყველა x წერტილზე $\mathbb{R}$-დან, მაშინაა f ფუნქცია კენტი.

ვინაიდან $(x, f(x))$ და $(-x, -f(x))$ წარმოადგენენ კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულ წერტილებს, ამიტომ კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $(0, 0)$ წერტილის მიმართ. მაგალითად, $y = x$, $y = -x$, $y = \sin x$, $y = x^3$ კენტი ფუნქციებია.

შევნიშნოთ, რომ კენტი φ ფუნქციისთვის ადგილი აქვს ტოლობას $\varphi(0) = 0$. მართლაც, $\varphi(0) = \varphi(-0) = -\varphi(0)$ და აქედან $2\varphi(0) = 0$ ანუ $\varphi(0) = 0$.

თუ $y = f(x)$ ფუნქცია კენტია, მაშინ ფუნქცია $\psi(x) = |f(x)|$

ლუწია. მართლაც, $\psi(-x) = |f(-x)| = |-f(x)| = |f(x)| = \psi(x)$. მაგალითად, კენტი $y = \sin x$ ფუნქციის აბსოლიტური მნიშვნელობა $y = |\sin x|$ ლუწი ფუნქციაა: $|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$.

არსებობენ ფუნქციები, რომელნიც არც ლუწია და არც კენტი. ასეთებია, მაგალითად ფუნქციები $y = 2^x$, $y = \ln x$, $y = x^2 + x$.

მტკიცება 1.1. ყოველი f ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $\mathbb{R}$-ზე, წარმოდგენადია ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამად. მართლაც, $f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ და $f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ წარმოადგენენ ლუწ და კენტ ფუნქციებს შესაბამისად. ამასთან, $f_1(x) + f_2(x) = f(x)$. მაგალითად, $\varphi(x) = 2^x$ ფუნქციისთვის $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}[2^x + 2^{-x}]$, $\varphi_2(x) = \frac{1}{2}[2^x - 2^{-x}]$ და $2^x = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$.

მაგალითი 1.2. თუ f ფუნქცია ლუწია და დადებითი, მაშინ $F(x) = \ln f(x)$ ფუნქცია ლუწია, რადგან $F(-x) = \ln f(-x) = \ln f(x) = F(x)$.

მაგალითი 1.3. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს დადებითი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომ ფუნქცია $\phi(x) = \ln \varphi(x)$ იყოს კენტი? ამის გასარკვევად, როგორც უკვე ვთქვით, აუცილებელი და საკმარისია $\phi(x) + \phi(-x) = 0$ ტოლობის შესრულება ანუ დამოკიდებულებანი $0 = \ln \varphi(x) + \ln \varphi(-x) = \ln[\varphi(x) \cdot \varphi(-x)]$, საიდანაც ვღებულობთ აუცილებელ და საკმარის პირობას

$$\varphi(x) \cdot \varphi(-x) = 1, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{1}$$

პირობა (1)-ს აკმაყოფილებს, მაგალითად, ფუნქცია $\varphi(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$, რომელიც დადებითია $\mathbb{R}$-ზე, ვინაიდან $\varphi(x) > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$ და $\varphi(x) \cdot \varphi(-x) = (\sqrt{1 + x^2} + x) \times (\sqrt{1 + (-x)^2} - x) = (\sqrt{1 + x^2} + x)(\sqrt{1 + x^2} - x) = (\sqrt{1 + x^2})^2 - x^2 = 1 + x^2 - x^2 = 1$.

მტკიცება 1.4. ორი ფუნქციის ნამრავლი ლუწია, თუ ორივე ფუნქცია ლუწია ან ორივე კენტია. მართლაც, $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ ნამრავლისთვის გვაქვს $f(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = \varphi(x)\psi(x) = f(x)$, როცა φ და ψ ლუწია და $f(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = [-\varphi(x)] \cdot [-\psi(x)] = \varphi(x) \cdot \psi(x) = f(x)$, როცა φ და ψ კენტია.

მტკიცება 1.5. ლუწი და კენტი ფუნქციების ნამრავლი კენტია. მართლაც, ლუწი φ-ისთვის და კენტი ψ-ისთვის გვაქვს:

$$f(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = \varphi(x)[-\psi(x)] = -\varphi(x)\psi(x) = -f(x).$$

მტკიცება 1.6. $[-l,l]$ სეგმენტზე ჯამებადი და ლუწი φ ფუნქციისთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int\limits_{-l}^{l} \varphi(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} \varphi(x)dx. \tag{2}$$

მართლაც,

$$\int\limits_{-l}^{l} \varphi(x)dx = \int\limits_{-l}^{0} \varphi(x)dx + \int\limits_{0}^{l} \varphi(x)dx.$$

x ცვლადის $(-t)$ ცვლადით შეცვლით გვექნება

$$\int\limits_{-l}^{0} \varphi(x)dx = \int\limits_{l}^{0} \varphi(-t)(-dt) = -\int\limits_{l}^{0} \varphi(-t)dt = -\int\limits_{l}^{0} \varphi(t)dt = \int\limits_{0}^{l} \varphi(t)dt.$$

ამიტომ

$$\int\limits_{-l}^{l} \varphi(x)dx = \int\limits_{0}^{l} \varphi(x)dx + \int\limits_{0}^{l} \varphi(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} \varphi(x)dx.$$

მტკიცება 1.7. $[-l,l]$ სეგმენტზე ჯამებადი და კენტი ψ ფუნქციისთვის მართებულია ტოლობა

$$\int\limits_{-l}^{l} \psi(x)dx = 0. \tag{3}$$

მართლაც, x ცვლადის იმავე გარდაქმნით

$$\int\limits_{-l}^{0} \psi(x)dx = \int\limits_{l}^{0} \psi(-t)(-dt) = -\int\limits_{l}^{0} [-\psi(t)]dt = \int\limits_{l}^{0} \psi(t)dt = -\int\limits_{0}^{l} \psi(t)dt.$$

ამიტომ

$$\int\limits_{-l}^{l} \psi(x)dx = -\int\limits_{0}^{l} \psi(x)dx + \int\limits_{0}^{l} \psi(x)dx = 0.$$

მტკიცება 1.8. თუ $[-l,l]$ სეგმენტზე კვადრატით ჯამებადი φ და ψ ფუნქციები ორივე ლუწია ან ორივე კენტია, მაშინ $\int_{-l}^{l}\varphi(x)\psi(x)dx$ სასრულია და 1.4 და 1.6 მტკიცებებიდან გამომდინარეობს ტოლობა[1]:

$$\int_{-l}^{l}\varphi(x)\psi(x)dx = 2\int_{0}^{l}\varphi(x)\psi(x)dx. \tag{4}$$

მტკიცება 1.9. თუ $[-l,l]$ სეგმენტზე კვადრატით ჯამებადი φ და ψ ფუნქციებიდან ერთ-ერთი ლუწია, ხოლო დარჩენილი კი კენტი, მაშინ 1.5 და 1.7 მტკიცებებიდან მიიღება ტოლობა

$$\int_{-l}^{l}\varphi(x)\psi(x)dx = 0. \tag{5}$$

2 ფუნქცის პერიოდულობა

რიცხვით $(-\infty,+\infty)$ ღერძზე განსაზღვრულ ნამდვილ $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **პერიოდული**, თუ არსებობს ნულისგან განსხვავებული ისეთი T რიცხვი, რომ ყოველი x-ისთვის სრულდება ტოლობა

$$f(x+T)=f(x), \quad -\infty<x<+\infty. \tag{1}$$

ასეთ შემთხვევაში, T რიცხვს ეწოდება f ფუნქციის პერიოდი.

შევნიშნოთ, რომ T რიცხვთან ერთად $(-T)$ რიცხვიც f ფუნქციის პერიოდია ანუ $f(x-T)=f(x)$. მართლაც, $f(x)=f(x-T+T)=f[(x-T)+T]=f(x-T)$. ამიტომ T და $-T$ რიცხვებთან ერთად f ფუნქციის პერიოდებია უსასრულო სიმრავლე რიცხვებისა $\pm nT$, სადაც $n=1,2,\dots$ ამ რიცხვებიდან უმცირეს დადებითს იღებენ f ფუნქციის პერიოდად. უფრო ზუსტად, (1) ტოლობის შემსრულებელი ყველა დადებითი T რიცხვებიდან უმცირესს, თუკი ასეთი არსებობს, ეწოდება f ფუნქცის **ძირითადი პერიოდი** ანუ, მოკლედ, **პერიოდი**.

მაშასადამე, f ფუნქციის პერიოდულობის გასარკვევად საჭიროა განვიხილოთ სხვაობა $f(x+T)-f(x)$ და თუ ეს სხვაობა აღმოჩნდება

[1] φ და ψ ფუნქციების კვადრატით ჯამებადობა $[-l,l]$ სეგმენტზე ნიშნავს $\int_{-l}^{l}|\varphi(x)|^2dx$ და $\int_{-l}^{l}|\psi(x)|^2dx$ ინტეგრალების სასრულობას, საიდანაც $|a||b|\le\frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2)$ უტოლობის გამოყენებით მიიღება $\int_{-l}^{l}|\varphi(x)|\cdot|\psi(x)|dx$ ინტეგრალის და, მაშასადამე, $\int_{-l}^{l}\varphi(x)\psi(x)dx$ ინტეგრალის სასრულობა.

ნულის ტოლი ყველა x-ისთვის და ერთი ან რამდენიმე T რიცხვისთვის, მაშინ ასეთ T რიცხვთა შორის **დადებითი უმცირესი** აიღება f ფუნქციის პერიოდად. ამ თვალსაზრისით ფუნქციას $f(x) = 3$ **არ აქვს პერიოდი**, თუმცა (1) ტოლობა მისთვის შესრულებულია ყველა T რიცხვისთვის $(-\infty, +\infty)$-დან, რომელთა შორის არ არსებობს **უმცირესი დადებითი**.

თუ ფუნქცია განსაზღვრული არ არის მთელს $(-\infty, +\infty)$-ზე, მაშინ ასეთი ფუნქცია არ შეიძლება იყოს პერიოდული. მაგალითად, $f(x) = \sin\sqrt{x}$ არ არის განსაზღვრული $x < 0$ მნიშვნელობებისთვის.

ფუნქცია $f(x) = x^2$ კი არის განსაზღვრული მთელს რიცხვით ღერძზე, მაგრამ არ არის პერიოდული. მართლაც, თუ რაიმე $T > 0$ რიცხვი იქნებოდა მისი პერიოდი, მაშინ ყველა x-ისთვის უნდა შესრულებულიყო ტოლობა $x^2 = (x+T)^2 = x^2 + 2xT + T^2$, საიდანაც ვღებულობთ $T^2 + 2xT = 0$ ანუ $T(T+2x) = 0$. აქედან გამომდინარეობს, რადგან T არაა ნულის ტოლი, რომ $T = -2x$. ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან პერიოდი არ შეიძლება დამოკიდებული იყოს x-ზე!

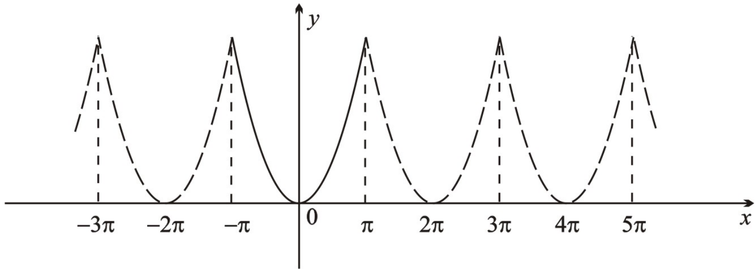
შენიშვნა 2.1. $(-\infty, +\infty)$-ზე განსაზღვრულ $f(x) = x^2$ ფუნქციასთან დაკავშირებით უნდა ითქვას შემდეგი, რაც მრავალი ფუნქციის მიმართ გამოგვადგება მომავალში. განვიხილოთ $f(x) = x^2$ ფუნქციის **შეზღუდვა** $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ანუ **ფუნქცია** $f(x) = x^2$ **მოცემულად მივიღოთ მხოლოდ** $[-\pi, \pi]$**-ზე** და $(-\infty, +\infty)$-ზე განვიხილოთ ახალი f^* ფუნქცია, რომელიც $x \in [-\pi, \pi]$ წერტილებზე ტოლია x^2-ის, ხოლო ამ სეგმენტის გარეთ მდებარე $x + 2\pi k$ $(k = \pm1, \pm2, \dots)$ წერტილებზეც იყოს x^2. ასე მიღებულ f^* ფუნქციას ეწოდება f ფუნქციის 2π პერიოდული გაგრძელება $[-\pi, \pi]$-დან რიცხვით $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე და f^* აკმაყოფილებს პირობას

$$f^*(x + 2\pi) = f^*(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

f^* ფუნქციის გრაფიკია ნახ. 1.

მაგალითი 2.2. $f(x) = \sin x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი ანუ, რაც იგივეა, პერიოდი არის 2π. მართლაც, $f(x+T) - f(x) = \sin(x+T) - \sin x = 2\cos(x + \frac{1}{2}T)\sin\frac{1}{2}T$. ამიტომ ტოლობა $f(x+T) - f(x) = 0$ ყველა x-ისთვის შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\sin\frac{1}{2}T = 0$ ანუ, როცა $\frac{1}{2}T = k\pi$. აქედან $T = 2k\pi$, სადაც $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ $2\pi k$ რიცხვებს შორის უმცირესი დადებითი რიცხვია 2π, ე.ი. $y = \sin x$ ფუნქციის პერიოდია 2π.

ასევე მტკიცდება $y = \cos x$ ფუნქციის 2π პერიოდულობა.



ნახ. 1

აქედან გამომდინარე, $y = \sin kx$ და $y = \cos kx$ ფუნქციების პერიოდია $\frac{2\pi}{|k|}$, სადაც $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

მაგალითი 2.3. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ ფუნქციის პერიოდია $\frac{2\pi}{2} = \pi$, რაც $|\sin x| = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$ ფუნქციის პერიოდიცაა.

ცხადია, თუ $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციებს აქვთ ერთიდაიგივე T პერიოდი, მაშინ იგივე T პერიოდი აქვთ ამ ფუნქციების ჯამს, სხვაობას და ნამრავლს. კერძოდ, თუ f ფუნქცია 2π პერიოდულია, მაშინ 2π პერიოდულია f^n ფუნქციაც, $n = 2, 3, \ldots$.

თუ პერიოდულ φ_1 და φ_2 ფუნქციებს აქვთ განსხვავებული T_1 და T_2 პერიოდები და თუ ეს პერიოდები აკმაყოფილებენ ტოლობას $mT_1 = nT_2$ რომელიმე ნატურალური m და n რიცხვებისთვის, მაშინ φ_1 და φ_2 ფუნქციების საერთო პერიოდია რიცხვი $T = mT_1 = nT_2$. მართლაც, $\varphi_1(x+T) = \varphi_1(x+mT_1) = \varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x+T) = \varphi_2(x+nT_2) = \varphi_2(x)$.

მტკიცება 2.4. ყველგან წარმოებადი და T პერიოდული f ფუნქციის f' წარმოებული T პერიოდულია. მართლაც, ტოლობიდან $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x+h)-f(x)]$ გამომდინარეობს ტოლობა $f'(x+T) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x+T+h)-f(x+T)] = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x+h)-f(x)] = f'(x)$.

მტკიცება 2.5. ყველგან წარმოებადი ლუწი ფუნქციის წარმოებული კენტი ფუნქციაა და ყველგან წარმოებადი კენტი ფუნქციის წარმოებული კი ლუწი.

მართლაც, ლუწი φ ფუნქციისთვის $\varphi'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[\varphi(x+h) - \varphi(x)] = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[\varphi(-x-h) - \varphi(-x)] = -\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{-h}[\varphi(-x-h)-\varphi(-x)] = -\varphi'(-x)$. ამრიგად, $\varphi'(x) + \varphi'(-x) = 0$, რაც ნიშნავს φ' ფუნქციის კენტობას.

ასევე დამტკიცდება მეორე ფაქტიც.

მტკიცება 2.6. 2π პერიოდული და $[0,2\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი f ფუნქციის შესაბამისი აბსოლუტურად უწყვეტი

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \tag{3}$$

ფუნქციის 2π პერიოდულობისთვის აუცილებელი და საკმარისია ტოლობა

$$F(2\pi) = 0 \quad \text{ანუ} \quad \int_0^{2\pi} f(x)dx = 0. \tag{4}$$

აუცილებლობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ F ფუნქციის 2π პერიოდულობის შემთხვევაში უნდა შესრულდეს ტოლობა $F(2\pi) = F(0)$. მაგრამ ტოლობა (3)-დან აშკარაა, რომ $F(0) = 0$. ამიტომ უნდა შესრულდეს $F(2\pi) = 0$ ტოლობა, რაც ეკვივალენტურია ტოლობის $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

საკმარისობის დასადგენად ვისარგებლოთ დამოკიდებულებებით $F(x+2\pi) - F(x) = \int_0^{x+2\pi} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt = \int_x^{x+2\pi} f(t)dt$. მაგრამ f ფუნქციის 2π პერიოდულობის გამო $\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt = F(2\pi)$. მივიღეთ $F(x+2\pi) - F(x) = F(2\pi)$. თუკი ადგილი ექნება ტოლობას $F(2\pi) = 0$, მაშინ შესრულდება ტოლობა $F(x+2\pi) - F(x) = 0$, რაც ნიშნავს F ფუნქციის ანუ $\int_0^x f(t)dt$ ინტეგრალის 2π პერიოდულობას.

3 ტრიგონომეტრიული სისტემის ორთოგონულობა

ფუნქციათა სისტემას

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \tag{1}$$

ეწოდება **ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული სისტემა**, ხოლო ფუნქციათა ორმხრივ უსასრულო სისტემას

$$\dots, e^{-inx}, e^{-i(n-1)x}, \dots, e^{-ix}, 1, e^{ix}, \dots, e^{i(n-1)x}, e^{inx}, \dots \tag{2}$$

კი ეწოდება **კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული სისტემა.**[2]

[2]ზოგჯერ (2) სისტემას ეწოდება ექსპონენტური ფორმის ტრიგონომეტრიული სისტემა.

(1) და (2) სისტემების ყოველი წევრი-ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილ $(-\infty,+\infty)$ ღერძზე და მათი საერთო პერიოდია 2π (თუმცა $\cos nx$, $\sin nx$ და e^{inx} ფუნქციების პერიოდი $\frac{2\pi}{n}<2\pi$, როცა $n>1$) ანუ, რაც იგივეა, ამ სისტემების ყოველი ფუნქცია $x+2\pi k$ ($k=\pm1,\pm2,\dots$) წერტილებში ღებულობს იმავე მნიშვნელობას, რასაც x წერტილში.

1. ახლა დავადგინოთ სამომავლოდ საჭირო ზოგიერთი ტოლობა. ყოველი მთელი $n\neq0$ რიცხვისთვის გვაქვს ტოლობები:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx=\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx=\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0; \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx=$$
$$=\frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2}[\pi-(-\pi)]=\pi, \tag{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=\pi. \tag{5}$$

ახლა კი გამოვიყენოთ ფორმულები:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

და ვისარგებლოთ (3) ტოლობებიდან პირველით. მაშინ ყოველი მთელი m და n რიცხვებისთვის, როცა $m\neq n$ მივიღებთ ტოლობებს:

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx dx=\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x]dx=0,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx dx=\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x-\cos(n+m)x]dx=0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

და ბოლოს, თუ ვისარგებლებთ (3) ტოლობებიდან მეორეთი და ფორმულით

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

მაშინ ყოველი მთელი n და m რიცხვებისთვის მივიღებთ

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x+\sin(n-m)x]dx=0. \tag{7}$$

(3), (6) და (7) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ (1) სისტემის ორი **ურთიერთგანსხვავებული** ფუნქციის ნამრავლიდან ინტეგრალი $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ნულის ტოლია. ამ თვისებას გამოთქვამენ ასე:

მტკიცება 3.1. ფუნქციათა (1) სისტემა **ორთოგონულია** $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე[3].

2. შემდგომში ხშირად ვისარგებლებთ შემდეგი ფაქტით.

მტკიცება 3.2. თუ 2π პერიოდული φ ფუნქცია ჯამებადია 2π სიგრძის რაიმე სეგმენტზე, ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ φ **ფუნქცია ჯამებადია პერიოდზე**, მაშინ ყოველი ნამდვილი a რიცხვისთვის გვაქვს

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)dx = \int_a^{2\pi+a} \varphi(x)dx \tag{8}$$

ანუ $\phi(a) = \int_a^{2\pi+a} \varphi(x)dx$ ფუნქციას ყოველ $a \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე აქვს ერთიდაიგივე მნიშვნელობა $\phi(0) = \int_0^{2\pi} \varphi(x)dx$.

მართლაც, გვაქვს ტოლობა $\int_a^{2\pi+a} \varphi(x)dx = \int_a^{2\pi} \varphi(x)dx + \int_{2\pi}^{2\pi+a} \varphi(x)dx$. მაგრამ, φ ფუნქცის 2π პერიოდულობის გამო გვაქვს $\int_{2\pi}^{2\pi+a} \varphi(x)dx = \int_0^a \varphi(x)dx$. ამიტომ $\int_a^{2\pi} \varphi(x)dx + \int_{2\pi}^{2\pi+a} \varphi(x)dx = \int_a^{2\pi} \varphi(x)dx + \int_0^a \varphi(x)dx = \int_a^{2\pi} \varphi(x)dx$. მივიღეთ (8) ტოლობა.

3. მტკიცება 3.1-ით გამოთქმულია ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული (1) სისტემის ორთოგონულობის თვისება $[-\pi, \pi]$ მონაკვეთზე.

ახლა განვიხილოთ ანალოგიური თვისება კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული (2) სისტემისთვის. ამ მიზნით, ავიღოთ ნებისმიერი ორი e^{imx} და e^{inx} ფუნქცია (2) სისტემიდან, სადაც m და n **ურთიერთგანსხვავებული** ორი მთელი რიცხვია. განვიხილოთ ინტეგრალი $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ამ ფუნქციების ნამრავლიდან

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+n)x} dx. \tag{9}$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

[3] მაგრამ ორთოგონული არ არის $[0, \pi]$-ზე: $\int_0^{\pi} \sin x \cos 2x dx = -\frac{2}{3} \neq 0$.

1) თუ $m+n=0$ ანუ, თუ $n=-m$, მაშინ (9)-ის მარჯვენა მხარე მიიღებს სახეს $\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$. ამგვარად, ყოველი მთელი m რიცხვისთვის გვაქვს ტოლობა

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-mx} dx = 2\pi. \tag{10}$$

2) თუ $m+n \neq 0$ ანუ, თუ $m \neq -n$, მაშინ (9)-ის მარჯვენა ინტეგრალისთვის გვაქვს

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+n)x} dx = \frac{1}{i(m+n)} e^{i(m+n)x} |_{-\pi}^{\pi} = \frac{-i}{m+n} [e^{i(m+n)\pi} - e^{-i(m+n)\pi}] =$$

$$= \frac{i}{m+n} [e^{-i(m+n)\pi} - e^{i(m+n)\pi}].$$

მაგრამ $\frac{i}{2}(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) = \sin\varphi$. ამრიგად,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-i(-n)x} dx = 0, \quad \text{როცა} \quad m \neq -n$$

ანუ

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-ipx} dx = 0, \quad \text{როცა} \quad m \neq p. \tag{11}$$

ახლა (10) და (11) ტოლობები შეიძლება ასე გავაერთიანოთ

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{როცა} \quad n = m \\ 0, & \text{როცა} \quad n \neq m. \end{cases} \tag{12}$$

(12) დამოკიდებულება შეიძლება ასე გამოითქვას: (2) სისტემის რაიმე ფუნქციას თუ გავამრავლებთ ამავე სისტემაში **სიმეტრიულ** ადგილზე განთავსებულ ფუნქციაზე და მოვახდენთ ამ ნამრავლის ინტეგრებას $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, მაშინ მივიღებთ 2π-ს. სხვა შემთხვევაში ინტეგრალი ნულის ტოლია. ამგვარად, გვაქვს

მტკიცება 3.3. ფუნქციათა (2) სისტემა **ორთოგონულია** $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

ახლა (8) ტოლობის გათვალისწინებით, 3.1 და 3.3 მტკიცებებიდან გამომდინარეობს

მტკიცება 3.4. ფუნქციათა (1) სისტემა და სისტემა (2) ორთოგონულია 2π სიგრძის ნებისმიერ სეგმენტზე, კერძოდ $[0, 2\pi]$-ზე.

4 ტრიგონომეტრიული მწკრივის ფორმები

წინა პარაგრაფში განხილულ (1) და (2) ტრიგონომეტრიულ სისტემებს შეესაბამებათ **ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივი**[4]

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

და **კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივი**

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \tag{2}$$

რომელსაც ზოგჯერ ეწოდება **ექსპონენტური ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივი.**

ვინაიდან (1) და (2) მწკრივების თითოეული შესაკრები 2π პერიოდული ფუნქციაა, ამიტომ ამ მწკრივებთან კავშირში განხილული ყოველი f ფუნქცია იგულისხმება $(-\infty, \infty)$-ზე განსაზღვრულად და 2π პერიოდულად ანუ ყოველ $x \in (-\infty, \infty)$ წერტილზე შესრულებულია $f(x + 2\pi) = f(x)$ ტოლობა.

თუკი 2π სიგრძის რაიმე მონაკვეთზე f ფუნქციის განსაზღვრის წესი ისეთია, რომ ამ მონაკვეთის ბოლოებზე f ღებულობს ურთიერთგანსხვავებულ მნიშვნელობებს, მაშინ f-ის მნიშვნელობა ერთ-ერთ ბოლოზე უნდა შეიცვალოს f-ის მნიშვნელობით მეორე ბოლოზე და ამის შემდეგ მოხდეს ასე შესწორებული ფუნქციის 2π პერიოდით გაგრძელება $(-\infty, +\infty)$-ზე.

1. ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული (1) მწკრივის კრებადობა რაიმე x_0 წერტილზე $s(x_0)$ ჯამისკენ ნიშნავს ტოლობას

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x_0) = s(x_0), \tag{3}$$

[4] a_k და b_k კოეფიციენტები არ არის დამოკიდებული x ცვლადზე და არც სხვა ცვლადზე ან პარამეტრზე, თუმცა მათემატიკაში გვხვდება ასეთიც (ოსტროგრადსკისთან და პუანკარესთან).

სადაც

$$s_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) \tag{4}$$

წარმოადგენს (1) მწკრივის n-რი კერძო ჯამის

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{5}$$

მნიშვნელობას x_0 წერტილზე.

ბუნებრივია გავარკვიოთ თუ რა სახეს მიიღებს (3) ტოლობა, თუ მას ჩავწერთ კომპლექსური ფორმით ანუ, რაც იგივეა, მას გადავწერთ **ორმხრივი (2) მწკრივის** წევრების საშუალებით. ამ მიზნით, (5) ტოლობაში $\cos kx$ და $\sin kx$ ფუნქციები გამოვსახოთ კომპლექსური ანუ ექსპონენტური ფორმით ეილერის

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{-it} + e^{it}), \quad \sin t = \frac{i}{2}(e^{-it} - e^{it}) \tag{6}$$

ფორმულების გამოყენებით. ეს დავიწყოთ $A_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$ შესაკრების გამოსახვით, როცა $k \geq 1$. გვაქვს

$$A_k(x) = \frac{a_k}{2}(e^{-ikx} + e^{ikx}) + i\frac{b_k}{2}(e^{-ikx} - e^{ikx}),$$

საიდანაც წევრთა დაჯგუფებით მივიღებთ

$$A_k(x) = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + ib_k)e^{-ikx}. \tag{7}$$

აღნიშვნების

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k \geq 1 \tag{8}$$

შემოღებით, ტოლობა (7) მიიღებს სახეს

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}, \quad k \geq 1. \tag{9}$$

ამიტომ (5) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$s_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} c_{-k} e^{-ikx}.$$

მაგრამ

$$\sum_{k=1}^{n} c_{-k}e^{-ikx} = \sum_{k=-1}^{-n} c_k e^{ikx} \quad \text{და} \quad c_k e^{ikx}|_{k=0} = c_0.$$

ამიტომ

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx}, \quad s_0(x) = c_0, \quad n \geq 1. \tag{10}$$

ამრიგად, (1) მწკრივის n-ური კერძო ჯამი ტოლია ორმხრივი (2) მწკრივის n-ri **სიმეტრიული** კერძო ჯამის. ეს ნიშნავს, რომ (1) მწკრივის კრებადობა ეკვივალენტურია ორმხრივი (2) მწკრივის **სიმეტრიული კრებადობის** და მათი ჯამები ტოლია ანუ ტოლობა

$$s(x_0) = \lim_{n\to\infty} \Big[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0)\Big] \tag{11}$$

ეკვივალენტურია ტოლობის

$$s(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx_0}. \tag{12}$$

(12) ტოლობის შემთხვევაში ამბობენ, რომ ორმხრივი (2) მწკრივი კრებადია **მთავარი მნიშვნელობით** $s(x_0)$ რიცხვისკენ და ამ ფაქტს ზოგჯერ წერენ ასე

$$s(x_0) = (PV) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx_0}. \tag{13}$$

ამრიგად, (1) მწკრივის კრებადობა $s(x)$-სკენ იწვევს (2) მწკრივის მთავარი მნიშვნელობით კრებადობას იმავე $s(x)$-სკენ და პირიქით.

გარდა ამისა, (8) ტოლობებიდან ვღებულობთ (1) მწკრივის a_k და b_k კოეფიციენტების შემდეგ გამოსახვას (2) მწკრივის c_k და c_{-k} კოეფიციენტებით

$$a_0 = 2c_0, \quad b_0 = 0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \geq 1. \tag{14}$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ (1) მწკრივის a_k და b_k კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ (2) მწკრივის c_k და c_{-k} კოეფიციენტები

ურთიერთშეუღლებული კომპლექსური რიცხვებია ანუ $c_{-k} = \overline{c}_k$ (სიმბოლო $\overline{z}$ აღნიშნავს კომპლექსური z რიცხვისადმი შეუღლებულს: თუ $z = a + ib$, მაშინ $\overline{z} = a - ib$).

2. თუ ორმხრივ (2) მწკრივში ყველა $c_{-k} = 0$, როცა $k \geq 1$, მაშინ იგი მიიღებს სახეს

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{ikx} \tag{15}$$

და (15)-ს ეწოდება **ხარისხოვანი ტიპის ტრიგონომეტრიული მწკრივი,** რადგანაც იგი არის ხარისხოვანი $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ მწკრივის ფორმალური ჩაწერა ერთეულოვან წრეწირზე $|z| = 1$, რომელზეც ეს უკანასკნელი განშლადია საზოგადოდ.

შევნიშნოთ, რომ (15) მწკრივი შეიძლება ჩაიწეროს ნამდვილი კოეფიციენტებითაც. ამისთვის ვისარგებლოთ (8)-ის ბოლო ტოლობით, რომელშიც უნდა ავიღოთ $c_{-k} = 0$, $k \geq 1$. ამიტომ გვაქვს $a_k + ib_k = 0$, საიდანაც ვღებულობთ $b_k = ia_k$, $k = 1, 2, \ldots$ ამის გათვალისწინებით (15) მიიღებს სახეს

$$c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}[a_k - i(ia_k)]e^{ikx} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_k + a_k)e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx}.$$

ამრიგად, ხარისხოვანი ტიპის ტრიგონომეტრიულ (15) მწკრივს ნამდვილი კოეფიციენტებით აქვს სახე

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx}. \tag{16}$$

ხარისხოვანი ტიპის ტრიგონომეტრიულ მწკრივს საზოგადოდ უკეთესი თვისება გააჩნია, ვიდრე არახარისხოვან ტრიგონომეტრიულ მწკრივს. არის შემთხვევა, როცა დგინდება რაღაც უარყოფითი თვისების მქონე ტრიგონომეტრიული მწკრივის არსებობა. ამიტომ სასურველია გაირკვეს, არსებობს თუ არა ამ უარყოფითი თვისების მქონე ხარისხოვანი ტიპის ტრიგონომეტრიული მწკრივი?

3. ჩვენ ზემოთ საუბარი გვქონდა ორმხრივი (2) მწკრივის სიმეტრიულ კრებადობაზე, რაც ნიშნავს მისი სიმეტრიული კერძო ჯამებისთვის ზღვრის არსებობას.

გარდა სიმეტრიული კრებადობისა, ორმხრივი მწკრივისთვის შეიძლება განხილულ იქნას მისი **კრებადობის** საკითხიც. ამასთან, მიზანშეწონილია ეს საკითხი განვიხილოთ ზოგადი სახის ორმხრივი მწკრივისთვის და არა მარტო ორმხრივი ტრიგონომეტრიული (2) მწკრივისთვის.

განვიხილოთ რიცხვითი ან ფუნქციური ორმხრივი მიმდევრობა

$$\ldots, a_{-n}, a_{-n+1}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots, \tag{17}$$

რომლისგანაც ფორმალურად შევადგინოთ "**ორმხრივი მწკრივი**"

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k. \tag{18}$$

შემოვიღოთ $s_{00} = a_0$ აღნიშვნა და ყოველი $m > 0$ და $n > 0$ ნატურალური რიცხვებისთვის შევადგინოთ ჯამი

$$s_{mn} = \sum_{k=-m}^{n} a_k. \tag{19}$$

მივიღეთ ორმაგი (s_{mn}) მიმდევრობა, რომლის გაშლილი სახეა

$$\begin{array}{ccccc} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & \ldots \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & \ldots \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \tag{20}$$

განსაზღვრა 4.1 (კოში). ორმაგ (s_{mn}) მიმდევრობას ეწოდება კრებადი სასრული s რიცხვისკენ, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ნატურალური ისეთი N რიცხვი, რომ ყოველი $m > N$ და $n > N$ რიცხვებისთვის სრულდება უტოლობა

$$|s_{mn} - s| < \varepsilon \tag{21}$$

და ამ ფაქტს ასე წერენ

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} s_{mn} = s. \tag{22}$$

ტოლობა (19)-ის თანახმად, უტოლობა (21) და ტოლობა (22)

შესაბამისად მიიღებენ სახეს

$$\left|s - \sum_{k=-m}^{n} a_k\right| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad m > N, \quad n > N, \tag{23}$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{k=-m}^{n} a_k = s. \tag{24}$$

ორმხრივი მწკრივის კრებადობა დაკავშირებულია გარკვეული სახის ორი "ცალმხრივი" მწკრივის კრებადობასთან შემდეგნაირად:

თეორემა 4.2. ორმხრივი (18) მწკრივის კრებადობისთვის აუცილებელი და საკმარისია, კრებადი იყოს შემდეგი ორი ″ცალმხრივი მწკრივი″

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}. \tag{25}$$

ხოლო, თუკი ეს მწკრივები კრებადია და თუ

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s_1, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} = s_2, \tag{26}$$

მაშინ (18) მწკრივის s ჯამისთვის მართებულია ტოლობა $s = s_1 + s_2$ ანუ ადგილი აქვს (24) ტოლობას.

დამტკიცება. ვთქვათ, ადგილი აქვს (26) ტოლობებს. მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი ნატურალური M რიცხვი, რომ უტოლობანი

$$\left|s_1 - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|s_2 - \sum_{k=1}^{m} a_{-k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

შესრულებულია ყოველი $m > M$ და $n > M$ რიცხვებისთვის. აქედან გვაქვს

$$\left|(s_1 + s_2) - \sum_{k=-m}^{n} a_k\right| = \left|\left(s_1 - \sum_{k=0}^{n} a_k\right) + \left(s_2 - \sum_{k=0}^{m} a_{-k}\right)\right| < \varepsilon,$$

რაც ნიშნავს (18) მწკრივის კრებადობას რიცხვისკენ $s_1 + s_2$.

შებრუნებით, ვთქვათ (18) მწკრივი კრებადია s რიცხვისკენ ანუ შესრულებულია (23) უტოლობა და ვაჩვენოთ (25) მწკრივების კრებადობა. ამ მიზნით ვაჩვენოთ კოშის ცნობილი კრიტერიუმის შესრულება ამ მწკრივებისთვის, მაგალითად $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ მწკრივისთვის. ავიღოთ $p > N+1$ და $q \geq 1$ რიცხვები. მაშინ (23) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\left|\sum_{k=p}^{p+q} a_k\right| = \left|\left(s - \sum_{k=-m}^{p-1} a_k\right) - \left(s - \sum_{k=-m}^{p+q} a_k\right)\right| < 2\varepsilon,$$

რაც ნიშნავს $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ მწკრივის კრებადობას. ასევე დამტკიცდება $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}$ მწკრივის კრებადობა. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 4.3. ორმხრივი (18) მწკრივის **კრებადობისთვის** აუცილებელია შესრულდეს ორი პირობა: $a_n \to 0$ და $a_{-n} \to 0$, როცა $n \to +\infty$.

შენიშვნა 4.4. ორმხრივი (18) მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს ამავე მწკრივის სიმეტრიული კრებადობა და მისი სიმეტრიული ჯამი $(PV)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ ტოლია მისივე ჩვეულებრივი ჯამის $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$, რაც გამომდინარეობს (23) უტოლობიდან, თუ იქ განვიხილავთ კერძო შემთხვევას $m = n$.

შებრუნებული ფაქტი მცდარია, საზოგადოდ. მართლაც,

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{როცა} \quad k > 0 \\ 0, & \text{როცა} \quad k = 0 \\ -1, & \text{როცა} \quad k < 0 \end{cases}$$

წევრებიანი ორმხრივი მწკრივისთვის არ სრულდება **კრებადობის** აუცილებელი პირობა (იხ. შედეგი 4.3), ხოლო მისი სიმეტრიული კერძო ჯამები $s_{nn} = 0$ და, მაშასადამე, ის სიმეტრიულად კრებადია ნულისკენ.

4. ორმხრივი (18) მწკრივის სიმეტრიული კრებადობა ეკვივალენტურია გარკვეული სახის ერთი ცალმხრივი მწკრივის კრებადობის, სახელდობრ, მართებულია.

თეორემა 4.5. ორმხრივი (18) მწკრივის **სიმეტრიული** კრებადობისთვის აუცილებელი და საკმარისია მწკრივის

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k + a_{-k}) \tag{27}$$

კრებადობა. ამასთან, (27) მწკრივის კრებადობის შემთხვევაში მისი ჯამი ტოლია ორმხრივი (18) მწკრივის **სიმეტრიული** ჯამის.

დამტკიცება. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ (27) მწკრივის n-რი კერძო ჯამი

$$a_0 + (a_1 + a_{-1}) + (a_2 + a_{-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_{-(n-1)}) + (a_n + a_{-n})$$

ტოლია (18) მწკრივის სიმეტრიული n-რი კერძო

$$s_{nn} = a_{-n} + a_{-n+1} + \cdots + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

ჯამის. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 4.6. თეორემა 4.5-ის კერძო შემთხვევაა პუნქტ 1-ში დადგენილი ფაქტი იმის შესახებ, რომ ორმხრივი

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \tag{28}$$

მწკრივის სიმეტრიული კრებადობა ეკვივალენტურია მწკრივის

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{29}$$

კრებადობის, ამასთან ამ მწკრივებს აქვთ ტოლი ჯამები.

შენიშვნა 4.7. კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \tag{30}$$

არის კომპლექსური $z = re^{ix}$ ცვლადის მიმართ $0 < r < 1$ რგოლში ანალიზური $f(z)$ ფუნქციის ლორანის მწკრივით წარმოდგენის (1843 წ.)

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k, \quad 0 < |z| < 1, \tag{31}$$

ზღვრული, საზოგადოდ, არამართებული შემთხვევა, როცა (31) ტოლობის მარჯვენა მხარეში ფორმალურად ჩაისმება $r = 1$ და ვღებულობთ (28) გამოსახულებას ანუ კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიულ მწკრივს, რომლის კრებადობა კავშირში არ არის (31) ტოლობის მარცხენა $f(e^{ix})$ მხარესთან, რადგან $f(e^{ix})$ განსაზღვრული არ არის წრეწირზე $|z| = 1$!

როგორც ვნახეთ, (30)-ის სიმეტრიული კერძო ჯამები ემთხვევა (1) მწკრივის კერძო ჯამებს (იხ. (10) ტოლობა) და ამით ამოიწურება კავშირი (1) და (2) ფორმის ტრიგონომეტრიულ მწკრივებს შორის.

მეორე მხრივ, ანალიზურ ფუნქციათა თეორიაში ლორანის (31) მწკრივის კრებადობა $f(z)$ ჯამისკენ გაგებულია როგორც $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ და $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}$ მწკრივების კრებადობა! ჩვენ კი ვნახეთ (იხ. თეორემა 4.2), რომ (31) მწკრივის $f(z)$ ჯამის ასე გაგება ემთხვევა განსაზღვრა 4.1-ში მოცემულ კოშის აზრით[5] (31) მწკრივის კრებადობის ცნებას (იხ. ტოლობა (24)):

$$f(z) = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{k=-m}^{n} c_k z^k. \tag{32}$$

5 შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივი

განვიხილოთ ერთეულოვან ღია წრეში ანალიზური ფუნქცია

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{1}$$

სადაც $f(z) = u(z) + iv(z)$, $z = re^{ix} = r(\cos x + i\sin x)$, $0 \le r < 1$, $0 \le x \le 2\pi$. ტოლობა (1)-ში ჩავწეროთ $c_0 = \frac{1}{2}a_0$ და $c_n = a_n - ib_n$, $n = 1, 2, \ldots$. მაშინ მუავრის ფორმულის

$$[r(\cos x + i\sin x)]^n = r^n(\cos nx + i\sin nx) \tag{2}$$

გამოყენებით, ტოლობა (1) მიიღებს სახეს

$$u(re^{ix}) + iv(re^ix) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)r^n(\cos nx + i\sin nx). \tag{3}$$

მაგრამ

$$\begin{aligned}(a_n - ib_n)r^n(\cos nx + i\sin nx) =& (a_n\cos nx + b_n\sin nx)r^n + \\ &+ i(a_n\sin nx - b_n\cos nx)r^n.\end{aligned}$$

[5] ორმაგი მიმდევრობის კოშის აზრით კრებადობის ის ცნება, რაც მოცემულია 4.1 განსაზღვრით, შემოიღო კოშიმ 1821 წლის შრომაში “Analyse algébrique”. შტოლცმა კი ჩამოაყალიბა ორმაგი (s_{mn}) მიმდევრობის კოშის აზრით კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა (1884 წ)

$$|s_{m+p,n+q} - s_{mn}| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad m > N, \quad n > N \quad \text{და} \quad p, q = 0, 1, 2, \ldots,$$

რომლის დამტკიცება მოგვცა 1897 წელს პრინსჰეიმმა ([29], გვ. 42).

ამიტომ ტოლობა (3) ასე ჩაიწერება

$$u(re^{ix})+iv(re^{ix})=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)r^n. \tag{4}$$

ორი კომპლექსური სიდიდის ტოლობა კი ნიშნავს მათი ნამდვილი ნაწილების ურთიერთტოლობას და აგრეთვე წარმოსახვითი ნაწილების ტოლობას.

მაშასადამე,

$$u(re^{ix})=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n \tag{5}$$

და

$$v(re^{ix})=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)r^n \tag{6}$$

წარმოადგენენ ანალიზური f ფუნქციის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს. კომპლექსური ანალიზიდან კი ვიცით, ერთეულოვან ღია წრეში ანალიზური f ფუნქციის ნამდვილი $u(re^{ix})$ ნაწილი და წარმოსახვითი $v(re^{ix})$ ნაწილი წარმოადგენენ იმავე წრეში ჰარმონიულ ფუნქციებს ანუ u და v აკმაყოფილებენ ლაპლასის განტოლებას

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=0. \tag{7}$$

ამასთან, $v(re^{ix})$ ფუნქციას ეწოდება **ჰარმონიულად** შეუღლებული $u(re^{ix})$ ფუნქციისადმი. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ერთეულოვან ღია წრეში ჰარმონიულ ნამდვილ $u(re^{ix})$ ფუნქციას მოეძებნება იმავე წრეში ჰარმონიული ნამდვილი ისეთი $v(re^{ix})$ ფუნქცია, რომ $u(re^{ix})+iv(re^{ix})$ იქნება ერთეულოვან ღია წრეში ანალიზური ფუნქცია. ასეთი v ფუნქცია მრავალია და ისინი ერთიმეორისგან განსხვავდებიან მუდმივი შესაკრებით. იმ მიზნით, რომ ყოველ u-ს შეესაბამებოდეს ამ თვისების ერთადერთი v, მიღებულია შეთანხმება $v(0)=0$. ამის გამოა, რომ (6) მწკრივის თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია.

როცა $r=1$, მაშინ (5) და (6) ტოლობების მარცხენა მხარეები საზოგადოდ განსაზღვრული არაა, ხოლო მათი მარჯვენა მხარეებიდან მიიღება ტრიგონომეტრიული მწკრივები, ფორმალურად,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{8}$$

და

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx - b_n \cos nx), \tag{9}$$

რომელთაც შეიძლება ჰქონდეთ კრებადობის წერტილები. $\frac{1}{2}a_0$-ს ეწოდება (8) მწკრივის თავისუფალი წევრი (constant term).

(1) ტოლობის მარჯვენა მხარე მნიშვნელობისათვის $r = 1$ იძლევა ხარისხოვანი ტიპის ტრიგონომეტრიულ მწკრივს (იხ. (15) ტოლობა §4-დან)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{10}$$

რომელსაც შეიძლება ჰქონდეს კრებადობის წერტილები, თუმცა მის მარცხენა $f(z)$ მხარეს შეიძლება აზრი არ ჰქონდეს $r = 1$ მნიშვნელობისთვის. აქ ლაპარაკია იმაზე, რომ (10), (8) და (9) მწკრივები შეიძლება აზრის მატარებელნი იყვნენ, ხოლო მათი მარცხენა მხარეები $f(e^{ix})$, $u(e^{ix})$ და $v(e^{ix})$ წარმოადგენენ აზრს მოკლებულ სიმბოლოებს.

აქ ნათქვამთან დაკავშირებით უნდა აღინიშნოს ლუზინის ერთ-ერთი საინტერესო შედეგი ([16], გვ. 274 და 455): არსებობს ერთეულოვან ღია $|z| < 1$ წრეში ანალიზური ფუნქცია

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = a_n - ib_n \to 0,$$

ისეთი, რომ (10), (8) და (9) მწკრივები განშლადია ყოველ წერტილზე $x \in [0, 2\pi]$.

(9) მწკრივს (ნულოვანი თავისუფალი წევრით) ეწოდება (8) მწკრივისადმი შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივი. ეს ტერმინი მომდინარეობს იქიდან, რომ $v(re^{ix})$ არის $u(re^{ix})$-ისადმი ჰარმონიულად შეუღლებული ფუნქცია.

ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის მძლავრი აპარატი საშუალებას იძლევა გამოვლენილ იქნას მჭიდრო კავშირი $u(re^{ix})$ და $v(re^{ix})$ ფუნქციებს შორის ერთეულოვან ღია წრეში. მაგრამ, აშკარად გამოხატული კავშირი (8) და (9) ტრიგონომეტრიულ მწკრივებს შორის არ არსებობს. ამიტომ ძალიან რთულია მათ შორის იმ ფარული კავშირების გამოვლენა, რაც მათ გადმოყვა (5) და (6) ტოლობებიდან.

საკმაოდ ვრცელი სამეცნიერო ინფორმაცია არსებობს შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივების შესახებ. ამ გამოკვლევებს ხშირი და მრავალმხრივი გამოყენება აქვთ თეორიული მათემატიკის მონათესავე დარგებშიც.

ბუნებრივია, დასახელდეს (3) ტოლობიდან ნამდვილი ჰარმონიული $v(re^{ix})$ ფუნქციისადმი შეუღლებული ჰარმონიული ფუნქციაც. ამ მიზნით საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $u+iv$ ფუნქციასთან ერთად ანალიზურია ფუნქციაც $-i(u+iv)=v-iu$. აქედან ჩანს, რომ $v(z)$ ფუნქციისადმი ჰარმონიულად შეუღლებულია ფუნქცია $[-u(z)]$. ამასთან უნდა გვქონდეს $[-u(0)]=0$ ანუ $u(0)=0$. ეს ნიშნავს, რომ (9) მწკრივის შეუღლებულია $-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ მწკრივი.

მაშასადამე, ნამდვილი ფორმის რაიმე ტრიგონომეტრიული მწკრივისადმი შეუღლებულის შეუღლებული არის $(-)$ ნიშნით აღებული საწყისი მწკრივი თავისუფალი წევრის გარეშე.

აქვე აღვნიშნოთ, რომ კომპლექსური ფორმით მოცემული ტრიგონომეტრიული

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \tag{11}$$

მწკრივისადმი, სადაც c_0-ს ეწოდება (11) მწკრივის თავისუფალი წევრი, შეუღლებულია ისევ კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$-i\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\operatorname{sign}k)c_k n e^{ikx}, \tag{12}$$

სადაც სიმბოლო sign განსაზღვრულია ტოლობით

$$\operatorname{sign}0=0,\quad \operatorname{sign}k=\frac{k}{|k|}\quad (k\neq 0). \tag{13}$$

(12) მწკრივისადმი შეუღლებული მწკრივის განსაზღვრის მიზნით, (12) გადავწეროთ ასე

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-i\operatorname{sign}k)c_k e^{ikx}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{ikx},$$

რომლისადმი შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივი იქნება

$$-i\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\operatorname{sign}k)d_k e^{ikx}=-i\sum(\operatorname{sign}k)(-i\operatorname{sign}k)c_k e^{ikx}.$$

ეს კი არის მწკრივი $-\sum_{|k|\geq 1} c_k e^{ikx}$ ნულოვანი თავისუფალი წევრით.

ამრიგად, (11) მწკრივის ორჯერ შეუღლება იძლევა $(-)$ ნიშნით აღებულ (11) მწკრივს თავისუფალი წევრის გარეშე.

მაშასადამე, ნამდვილი და კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივის ორჯერ შეუღლება იძლევა თავიდან აღებულ მწკრივს $(-)$ ნიშნით ნულოვანი თავისუფალი წევრით.

ტრიგონომეტრიულ (8) მწკრივსა და მისსადმი შეუღლებულ (9) მწკრივს შორის კავშირი, მათი კრებადობის თვალსაზრისით, მოცემულია პლესნერის შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემით: თუ ტრიგონომეტრიული (8) მწკრივი კრებადია ზომად რაიმე $E \subset [0, 2\pi]$ სიმრავლეზე, მაშინ მის მიმართ შეუღლებული (9) მწკრივი კრებადია თითქმის ყველგან E-ზე ([7], გვ. 605; [26]).

თავი 2

ფურიეს მწკრივთა ზოგადი საკითხები

1 ფურიეს ფორმულები

ვთქვათ, ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1}$$

თანაბრად კრებადია $(-\infty,+\infty)$ ღერძზე, რომლის ჯამი აღვნიშნოთ $f(x)$-ით. ამიტომ f ფუნქცია უწყვეტია $[-\pi,\pi]$-ზე, 2π პერიოდულია და

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\quad -\infty<x<+\infty. \tag{2}$$

რადგან (2) მწკრივი თანაბრად კრებადია $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე, ამიტომ მართლზომიერია მისი წევრობრივი ინტეგრება, რაც ტოლობების (იხ. (3) ტოლობანი თავი 1-ის §3-დან)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx=0=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx,\quad k=1,2,3,\dots \tag{3}$$

გათვალისწინებით მოგვცემს

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+0=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi=\pi a_0.$$

ამრიგად,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{4}$$

ახლა (2) მწკრივის გამრავლებით $\cos nx$ ფუნქციაზე, სადაც $n \geq 1$ რაიმე ფიქსირებული რიცხვია, მივიღებთ ტოლობას

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx). \tag{5}$$

დავამტკიცოთ, რომ (5) მწკრივიც თანაბრად კრებადია $[-\pi,\pi]$-ზე. ამ მიზნით განვიხილოთ (1) მწკრივის m-რი კერძო ჯამი

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{6}$$

$f(x)$-სკენ (2) მწკრივის თანაბრად კრებადობის გამო $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე, ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს ეთანადება ნატურალური ისეთი N რიცხვი, რომ ყოველი x-ისთვის $[-\pi,\pi]$-დან სრულდება უტოლობა

$$|f(x) - s_m(x)| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad m \geq N. \tag{7}$$

ცხადია, რომ ნამრავლი $s_m(x)\cos nx$ წარმოადგენს (5) მწკრივის m-ურ კერძო ჯამს და

$$|f(x)\cos nx - s_m(x)\cos nx| = |f(x) - s_m(x)||\cos nx| \leq \varepsilon$$

ყველა x-ისთვის $[-\pi,\pi]$-დან და ყოველი $m \geq N$ რიცხვისთვის. ეს კი ნიშნავს (5) მწკრივის თანაბრად კრებადობას $[-\pi,\pi]$-ზე. ამიტომ მართებულია ტოლობა

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos nx dx + b_k \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx \cos nx dx\right). \tag{8}$$

თავი 1-ის §3-ში დამტკიცებული ტოლობებიდან ვღებულობთ, რომ $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \cos nx dx = 0$ ყოველი k-სთვის და

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = 0$, როცა $k \neq n$. ამიტომ (8) ტოლობის მარჯვენა მხარეში დაგვრჩება ერთადერთი შესაკრები $a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \cdot \pi$. მაშასადამე, (8) ტოლობას მიეცა სახე $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \cdot \pi$. აქედან კი

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ ტოლობას

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

რადგან ტოლობა (4) მიიღება (9) ტოლობისაგან, თუ ამ უკანასკნელში ავიღებთ $n = 0$ მნიშვნელობას, ამიტომ (4) და (9) ფორმულები შეიძლება გაერთიანდეს ასე

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

მაშასადამე, დამტკიცდა შემდეგი

თეორემა 1.1. თუ ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{12}$$

თანაბრად კრებადია $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე $f(x)$ ფუნქციისკენ, მაშინ (12) მწკრივის კოეფიციენტებისთვის ადგილი აქვს ტოლობებს

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{14}$$

ანუ, რაც იგივეა, (12) მწკრივი არის f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი.

ანალოგიურად დამტკიცდება, თავი 1-ის §3-დან (12) ტოლობების გამოყენებით, შემდეგი

თეორემა 1.2. თუ კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \tag{15}$$

სიმეტრიულად თანაბრად კრებადია $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე $\varphi(x)$ ფუნქციისკენ, მაშინ (15) მწკრივის კოეფიციენტებისთვის მართებულია ტოლობები

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{16}$$

ანუ, (15) მწკრივი არის φ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი.

შენიშვნა 1.3. (13) და (14) ფორმულების მისაღებად აუცილებელი არაა (1) მწკრივის თანაბრად კრებადობა $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე. თუ თვალს გავადევნებთ ამ ფორმულების დადგენისთვის ჩატარებულ მსჯელობებს, დავადგენთ, რომ (13) და (14) ფორმულების მისაღებად საკმარისია შემდეგი პირობები:

1) f ფუნქცია ჯამებადია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე;

2) f ფუნქცია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე წარმოდგენილია ტოლობით

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad -\pi \leq x \leq \pi; \tag{17}$$

3) მართებულია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე წევრობრივი ინტეგრება (17) მწკრივის და ყველა იმ მწკრივის, რომელნიც მიიღებიან (17) მწკრივის გამრავლებით $\cos nx$ და $\sin nx$ ფუნქციებზე, $n = 1, 2, \ldots$.

ამიტომ იმ ტრიგონომეტრიული მწკრივის ძიებისას, რომლის ჯამი იქნება $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე **ჯამებადი** f ფუნქცია, პირველ რიგში, უნდა განვიხილოთ ის ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომლის კოეფიციენტები განსაზღვრულია (13) და (14) ტოლობებით და მხოლოდ ამის შემდეგ გავარკვიოთ არის თუ არა ასეთი ტრიგონომეტრიული მწკრივის ჯამი f?

აქვე აღვნიშნოთ, რომ (13) და (14) ფორმულებში ინტეგრება ხდება 2π **პერიოდული** ფუნქციების. ამიტომ ამ ფორმულებში $[-\pi, \pi]$ მონაკვეთი შეიძლება შეიცვალოს 2π სიგრძის ნებისმიერი მონაკვეთით ანუ, რაც იგივეა, (13) და (14) ფორმულების გვერდით ადგილი

აქვს ტოლობებს

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,2,\dots),\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,\dots),\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

ყოველი $a \in (-\infty, +\infty)$ რიცხვისთვის.

ყველაფერი, რაც აქ ითქვა, მართებულია (15) მწკრივის და (16) კოეფიციენტის მიმართაც, ცხადია.

მაშასადამე, განსაკუთრებული ყურადღების ღირსია (1) და (15) სახის ის მწკრივები, რომელთა კოეფიციენტები, შესაბამისად, გამოთვლილია (13), (14) და (16) ფორმულებით.

შემდგომი ჩვენი ყურადღება კონცენტრირებული იქნება, ძირითადად, ასეთი კოეფიციენტების მქონე მწკრივებზე.

2 ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის ცნება

ვთქვათ, ნამდვილი ან კომპლექსური მნიშვნელობების მქონე f ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილ $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე და არის 2π პერიოდული, რაც ნიშნავს $f(x+2\pi) = f(x)$ ტოლობის შესრულებას ყოველი $x \in (-\infty, +\infty)$ მნიშვნელობისთვის. ასეთ შემთხვევაში, ადგილი აქვს ტოლობასაც $f(x+2n\pi) = f(x)$ ყოველი მთელი $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ მნიშვნელობისთვის.

ამის გამო, 2π პერიოდული ფუნქციები ძირითადად მოიცემა 2π სიგრძის რაიმე ინტერვალზე და შემდგომ ხდება მისი 2π პერიოდით გაგრძელება აღებული ინტერვალის გარეთ. უმრავლეს შემთხვევაში, ძირითადი ინტერვალია $(-\pi, \pi)$ ან $(0, 2\pi)$.

ახლა შემოვიღოთ ფურიეს ანალიზისთვის უმნიშვნელოვანესი ცნება—ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის ცნება.

განსაზღვრა 2.1 (ფურიე, 1805 წ.). $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი[1] და 2π პერიოდული f ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი ნამდვილი ფორმის ეწოდება ტრიგონომეტრიულ მწკრივს

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + bn \sin nx), \tag{1}$$

ხოლო a_0, a_n და b_n $(n = 1, 2, \dots)$ რიცხვებს კი ეწოდებათ f ფუნქციის ფურიეს ნამდვილი ფორმის კოეფიციენტები და ისინი მოიცემიან

[1] კომპლექსური ფუნქციის ჯამებადობა რაიმე ინტერვალზე ნიშნავს მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების ჯამებადობას იმავე ინტერვალზე.

შემდეგი ტოლობებით

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \tag{2}$$

იმის მისანიშნებლად, რომ (1) მწკრივი არის f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი, წერენ

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3}$$

ან ასე

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + bn \sin nx). \tag{4}$$

ცხადია, რომ f ფუნქციის ფურიეს a_n და b_n კოეფიციენტები იქნებიან ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვები იმის მიხედვით, f ფუნქცია ნამდვილია თუ კომპლექსური.

განსაზღვრა 2.2. $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი და 2π პერიოდული f ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი კომპლექსური ანუ ექსპონენტური ფორმის ეწოდება ″ორმხრივ უსასრულო″ მწკრივს

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \tag{5}$$

სადაც ფურიეს კომპლექსური ფორმის c_n კოეფიციენტები მოიცემა ტოლობებით

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{6}$$

და წერენ

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \tag{7}$$

ან

$$S[f] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}. \tag{8}$$

მაშასადამე, (3) და (7) დამოკიდებულებებში სიმბოლო $\sim$ მიანიშნებს **მხოლოდ** იმას, რომ ამ დამოკიდებულებების მარჯვენა მხარე ანუ, რაც იგივეა (4) და (8) მწკრივები, სიმბოლურად $S[f]$, შედგენილია **ფორმალურად** f ფუნქციის ფურიეს a_n, b_n და c_n კოეფიციენტებისგან შესაბამისად.

რადგან (2) და (6) კოეფიციენტები ჩაწერილია ლებეგის აზრით ინტეგრებადი f ფუნქციისთვის ანუ, რაც იგივეა **ჯამებადი** f ფუნქციისთვის, ამიტომ (4) და (8) მწკრივებს ეწოდებათ **ფურიე-ლებეგის მწკრივი**, ანუ, მოკლედ **ფურიეს მწკრივი** ნამდვილი და კომპლექსური ფორმისა f ფუნქციისთვის.

ამრიგად, f ფუნქციის $S[f]$ მწკრივის a_n, b_n და c_n კოეფიციენტები გამოთვლილია ძირითად პერიოდზე ჯამებადი f ფუნქციისთვის.

გარდა ამისა, $S[f]$ მწკრივისადმი შეუღლებული (9) და (12) მწკრივები (თავი 1-ის §5-დან) აღინიშნება სიმბოლოთი $\widetilde{S}[f]$. იქვე აღნიშნულია ფაქტი იმის შესახებ, რომ ორჯერ შეუღლება იძლევა $(-)$ ნიშნით აღებულ საწყის $S[f]$ მწკრივს **ნულოვანი თავისუფალი წევრით**.

შენიშვნა 2.3. მოცემული f ფუნქციისთვის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის სახეს ანუ $S[f]$ მწკრივის **კოეფიციენტებს** f-თან ერთად განსაზღვრავს ის **ინტერვალიც**, რომელზეც უნდა გაიშალოს f ფუნქცია ფურიეს $S[f]$ მწკრივად. სათანადო მაგალითები მოცემული იქნება თავი 4-დან §18-ში.

3 ლუწ და კენტ ფუნქციათა ფურიეს მწკრივები

1. ვთქვათ, $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი f ფუნქცია ლუწია ანუ f-ის 2π პერიოდით გაგრძელებული ფუნქციაა ლუწი $(-\infty,+\infty)$-ზე. f და $\cos nx$ $(n=0,1,\dots)$ ფუნქციების ლუწობის გამო ნამრავლი $f(x)\cos nx$ ლუწია, ხოლო $f(x)\sin nx$ კი კენტია $\sin nx$, $n=1,2,\dots$ ფუნქციის კენტობის გამო (იხ. თავი 1, §1, 1.4 და 1.5 მტკიცებანი).

ახლა f ფუნქციის ფურიეს

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad \text{და} \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \tag{1}$$

კოეფიციენტების (იხ. თავი 2, §2-ის ტოლობანი (2)) მიმართ $f\cos nx$-ის ლუწობის და $f(x)\sin nx$ კენტობის (იხ. თავი 1, §1, მტკიცებანი

1.6 და 1.7) გამოყენებით მივიღებთ

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{2}$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)\ . \tag{3}$$

ამრიგად, ლუწი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი შედგება მხოლოდ კოსინუსებისგან, ე.ი.

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{4}$$

სადაც ფურიეს a_n კოეფიციენტები მოიცემა (2) ტოლობებით.

2. ახლა ვთქვათ, f არის $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი კენტი ფუნქცია ანუ კენტია მისი 2π პერიოდული გაგრძელება. $\cos nx$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ ფუნქციის ლუწობის და f-ის კენტობის გამო ნამრავლი $f(x) \cos nx$ კენტი ფუნქციაა, ხოლო $f(x) \sin nx$ ლუწია $\sin nx$-ის კენტობის გამო (იხ. თავი 1, §1, 1.4. და 1.5. მტკიცებანი). ახლა $f(x) \cos nx$-ის კენტობის გამო და $f(x) \sin nx$-ის ლუწობის გათვალისწინებით, (1) ტოლობები მიიღებენ (იხ. თავი 1, §1, 1.7 და 1.6 მტკიცებულებანი) სახეს

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{5}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{6}$$

მაშასადამე, კენტი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი შეიცავს მხოლოდ სინუსებს, ე.ი.

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{7}$$

სადაც ფურიეს b_n კოეფიციენტები მოცემულია (6) ტოლობებით

შენიშვნა 3.1. (7) დამოკიდებულებიდან აშკარაა, რომ კენტი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია ნულისკენ $x = k\pi$ წერტილებში, მიუხედავად იმისა, ნულია თუ არა მნიშვნელობანი $f(k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

3. არის შემთხვევები, როცა საჭიროა $[0, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი f ფუნქციის გაშლა ფურიეს ისეთ მწკრივად, რომელიც შედგება

მხოლოდ **კოსინუსებისგან** ან მხოლოდ **სინუსებისგან** ანუ, მოკლედ, საჭიროა f-ის გაშლა ფურიე-კოსინუს მწკრივად ან ფურიე-სინუს მწკრივად. ორივე ეს შემთხვევა განვიხილოთ ცალ-ცალკე.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, **ფურიე-კოსინუს** მწკრივი შეესაბამება ლუწ ფუნქციას. ამიტომ მოვახდინოთ f-ის **ლუწობით** გაგრძელება $[-\pi, 0]$ სეგმენტზე ტოლობით $f(-x) = f(x)$, როცა $0 \leq x \leq \pi$. ამ გზით მიღებული "გაგრძელებული" ფუნქცია ლუწია $[-\pi, \pi]$-ზე და ზემოთ ჩატარებული მსჯელობით მივიღებთ $b_n = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ და

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{8}$$

როგორც ვხედავთ, (8) ტოლობაში მონაწილეობს f-ის მნიშვნელობანი მხოლოდ $[0, \pi]$-ზე. მაშასადამე, ფაქტობრივად, შეგვიძლია არ მოვახდინოთ f-ის ლუწობით გაგრძელება $[-\pi, 0]$-ზე.

თუკი ჩვენ გვინდა $[0, \pi]$-ზე ჯამებადი იგივე f ფუნქცია გავშალოთ **ფურიე-სინუს** მწკრივად, მაშინ f ფუნქცია უნდა გავაგრძელოთ $[-\pi, 0]$-ზე კენტობით, ე.ი. $f(-x) = -f(x)$, როცა $0 \leq x \leq \pi$.

კენტობიდან გამომდინარე, გაგრძელებულ ფუნქციას უნდა **მივანიჭოთ თვისება** $f(0) = 0$. გაგრძელებული კენტი ფუნქციის მიმართ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობით მივიღებთ $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ და

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{9}$$

(9) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ f ფუნქციის კენტობით გაგრძელება $[0, \pi]$ სეგმენტიდან $[-\pi, 0]$-ზე სავალდებულო არაა.

4 ფურიეს მწკრივი $2l$ პერიოდის ფუნქციისთვის

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით $(-\infty, +\infty)$ ღერძზე განსაზღვრულ 2π პერიოდულ ფუნქციებს, რომელნიც ჯამებადნი არიან პერიოდზე ანუ ამ ფუნქციებს პერიოდზე ჯამებადობასთან ერთად აქვთ თვისება $f(x + 2\pi) = f(x)$ ყოველ $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე.

ახლა განვიხილოთ $2l$ სიგრძის მონაკვეთზე ჯამებადი და $2l$ პერიოდული ფუნქციები ანუ $f(x)$ ფუნქციას $2l$ სიგრძის მონაკვეთზე ჯამებადობასთან ერთად ყოველ $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე აქვს თვისება $f(x + 2l) = f(x)$, სადაც $l > 0$ რაიმე მუდმივია f ფუნქციისთვის. შემოვიღოთ ახალი t ცვლადი ტოლობით $t = \frac{\pi}{l} x$. როცა $-l \leq x \leq l$, მაშინ $-\pi \leq t \leq \pi$.

$[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი $\varphi(t) = f(\frac{l}{\pi}t)$ ფუნქცია 2π პერიოდულიცაა. მართლაც, $\varphi(t+2\pi) = f[\frac{l}{\pi}(t+2\pi)] = f(\frac{l}{\pi}t + \frac{l}{\pi}2\pi) = f(\frac{l}{\pi}t + 2l) = f(\frac{l}{\pi}t) = \varphi(t)$.

ახლა განვიხილოთ φ ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს $S[\varphi]$ მწკრივი

$$\varphi \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

სადაც

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin ntdt.$$

მაგრამ

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\Big(\frac{l}{\pi}t\Big) \cos ntdt \quad \text{და} \quad \frac{l}{\pi}t = x.$$

ამიტომ

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \frac{\pi}{l} \cos n\frac{\pi}{l}xdx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos n\frac{\pi}{l}xdx$$

და $\varphi(t) = f(x)$. მაშასადამე, გვაქვს

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\frac{\pi}{l}x + b_n \sin n\frac{\pi}{l}x), \tag{1}$$

სადაც

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos n\frac{\pi}{l}xdx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin n\frac{\pi}{l}xdx. \tag{2}$$

შენიშვნა 4.1. თუ f ფუნქცია არ არის პერიოდული, მაგრამ ჯამებადია რაიმე $[a,b]$ სეგმენტზე, სადაც $-\pi < a < b < \pi$, მაშინ როგორ შევადგინოთ f-ისთვის ფურიეს მწკრივი?

ამ მიზნით შეგვიძლია განვიხილოთ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი რაიმე φ ფუნქცია, რომელსაც მოეთხოვება ერთადერთი პირობა $\varphi(x) = f(x)$, როცა $a \le x \le b$ ანუ f არის φ-ს შეზღუდვა $[a,b]$-ზე.

ამის შემდეგ კი მოვახდენთ φ ფუნქციის 2π პერიოდით გაგრძელებას $(-\infty,+\infty)$-ზე.

ამგვარად, ჩვენ ვღებულობთ $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე ჯამებად უამრავ ფუნქციას, რომლებიც $[a,b]$-ზე ემთხვევიან f-ს. თითოეულ ასეთ φ ფუნქციას შეესაბამება ფურიეს $S[\varphi]$ მწკრივი.

შემდგომში დამტკიცებული იქნება ლოკალიზების რიმანის უმნიშვნელოვანესი პრინციპი (იხ. თავი 4, §6), რომლის თანახმად ყველა ეს $S[\varphi]$ მწკრივი ერთი და იგივე თვისებისაა (a,b)-ში აღებულ ყოველ წერტილზე მისი კრებადობის თვალსაზრისით: $x\in(a,b)$ წერტილზე ან ყველა კრებადია ან ყველა განშლადია.

5 ძირითადი პრობლემები ფურიეს მწკრივებზე

პერიოდზე ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის მიმართ ისმის მრავალი პრობლემა და მათ შორისაა:

1) წერტილოვნად კრებადია თუ არა $S[f]$ მწკრივი;

2) თუ $S[f]$ მწკრივი წერტილოვნად კრებადია, მაშინ ამ მწკრივის ჯამი რა კავშირშია f ფუნქციასთან;

3) თუ f ფუნქცია ეკუთვნის რომელიმე L^p კლასს, მაშინ რა შეიძლება ითქვას $S[f]$ მწკრივის კრებადობის შესახებ L^p-ნორმით;

4) $S[f]$ მწკრივის არაკრებადობის შემთხვევაში მითითებულ იქნას "განზოგადებული ჯამის" მოძებნის წესები, ე.წ. შეჯამებადობის მეთოდები. თანაც სასურველია "განზოგადებული ჯამი" დაემთხვეს $S[f]$ მწკრივის ჯამს, როცა $S[f]$ კრებადია. შეჯამებადობის ასეთ მეთოდს ეწოდება **რეგულარული**;

5) თუ მოცემულია რიცხვთა მიმდევრობა და ცნობილია, რომ ეს მიმდევრობა წარმოადგენს ჯამებადი რაღაც ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს, მაშინ შეიძლება თუ არა ამ ფუნქციის პოვნა?

გარდა აქ ჩამოთვლილისა, ვრცლად განიხილება შემდეგი პრობლემაც: რაიმე წესით მოცემული 2π პერიოდული F ფუნქციისთვის, რომელიც შეიძლება იყოს არაჯამებადი ან უსასრულოდ დიდი მნიშვნელობების მქონეც კი დადებითი ზომის სიმრავლეზე, შეიძლება თუ არა მოიძებნოს ისეთი ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომლის "ჯამი რაღაც აზრით" იქნება $F(x)$?

უკანასკნელი პრობლემა ცნობილია, როგორც მოცემული ფუნქციის ტრიგონომეტრიული მწკრივით წარმოდგენის პრობლემა.

ყველა ამ პრობლემაზე სადღეისოდ არსებობს ვრცელი ლიტერატურა, მიმოხილვითი შრომების სახითაც კი (იხ. თავი 5, §27).

6 ფურიეს მწკრივი ორთონორმული სისტემისთვის

როგორც ვნახეთ (იხ. §1, თეორემა 1.1), $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე თანაბრად კრებადი ტრიგონომეტრიული მწკრივის

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

ჯამი რომ იყოს $f(x)$ ფუნქცია, აუცილებელია, რომ a_n და b_n რიცხვები წარმოადგენდნენ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს, ანუ უნდა გვქონდეს ტოლობები:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \tag{2}$$

ტრიგონომეტრიული (1) მწკრივი არის კერძო შემთხვევა ე.წ. ორთოგონული მწკრივისა, რომლის ცნებასაც ახლა შემოვიღებთ.

ფუნქციათა $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემას, სადაც ყოველი $\varphi_n \in L^2(a, b)$, ეწოდება **ორთოგონული** $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0, \text{ როცა } m \neq n;\ m = 1, 2, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots. \\ \int_a^b \varphi_n^2(x) \neq 0, \text{ როცა } n = 1, 2, \ldots, \end{array}\right\} \tag{3}$$

ორთოგონულ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემას ეწოდება **ორთონორმული** $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

როგორც ვიცით, ტრიგონომეტრიული სისტემა

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots \tag{5}$$

ორთოგონულია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე (იხ. თავი 1, §3) და მისი ნორმი-

რებისთვის უნდა გამოვიყენოთ ტოლობები:

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \ \|\cos kx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ktdt = \pi,$$

$$\|\sin kx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 ktdt = \pi$$

(იხ. თავი 1, §3). ამიტომ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ორთონორმულია სისტემა

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \ . \tag{6}$$

სწორედ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ორთონორმული ტრიგონომეტრიული (6) სისტემის მიმართ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივს აქვს (1) სახე, სადაც ამ მწკრივის კოეფიციენტები გამოითვლება (2) ფორმულებით.

საზოგადოდ, რაიმე F ფუნქციის ფურიეს მწკრივი $[a, b]$ სეგმენტზე, (3) და (4) თვისებების მქონე $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ ეწოდება მწკრივს $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(x)$ და წერენ $F \sim \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(x)$, სადაც ფურიეს d_n კოეფიციენტები F ფუნქციისთვის მოიცემა ტოლობებით:

$$d_n = \int_a^b F(x)\varphi_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \dots \ . \tag{7}$$

აქ იგულისხმება, რომ ყველა (7) ინტეგრალი არსებობს და სასრულია.

თუკი $[a, b]$ სეგმენტზე **ორთოგონული** $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა არ არის ნორმირებული, ე.ი. ტოლობა $\int_a^b \psi_n^2(x)dx = 1$ დარღვეულია n-ის ერთი მაინც მნიშვნელობისთვის, მაშინ სისტემა

$$\left\{ \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|^2} \right\}_{n=1}^{\infty},$$

სადაც $\|\psi_n\| = \left(\int_a^b \psi_n^2(t)dt \right)^{1/2}$, არის **ნორმირებული** $[a, b]$-ზე და მის მიმართ **ფურიეს მწკრივს რაიმე** Ψ ფუნქციისთვის აქვს სახე

$$\Psi \sim \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \psi_n(x), \tag{8}$$

სადაც Ψ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ მოიცემა ტოლობებით:

$$\mu_n = \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \int_a^b \Psi(x)\psi_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{9}$$

თუ გვაქვს ნამდვილი x ცვლადის კომპლექსური $\varphi_n(x)$ ფუნქციების $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა, მაშინ ამ სისტემას ეწოდება **ორთოგონული** $[a, b]$ სეგმენტზე, როცა $\int_a^b \varphi_m(x)\overline{\varphi}_n(x)dx = 0 \ (m \neq n)$ და $\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx \neq 0 \ (n = 1, 2, \dots)$, სადაც $\overline{\varphi}_n(x)$ არის $\varphi_n(x)$-სადმი კომპლექსურად შეუღლებული.

ასეთ შემთხვევაში f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს აქვთ სახე $c_n = \int_a^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)dx$, როცა $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა ნორმირებულია და $c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_a^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)dx$ არანორმირებული $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემისთვის; აქ $\|\varphi_n\| = \left(\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx\right)^{1/2}$.

2π სიგრძის ნებისმიერ სეგმენტზე, მაგალითად $[-\pi, \pi]$-ზე ორთოგონულია კომპლექსური ფუნქციების სისტემა $\{e^{inx}\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, რადგანაც $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{i(n-m)}(1-1) = 0$, როცა $n \neq m$. ხოლო როცა $m = n$, მაშინ

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-inx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{inx}|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \text{ ე.ი. } \|e^{inx}\| = \sqrt{2\pi}.$$

ამიტომ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ნორმირებულია სისტემა $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, რომლის მიმართ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივს აქვს "ორმხრივ უსასრულო" მწკრივის სახე

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \tag{10}$$

სადაც f ფუნქციის ფურიეს c_n კოეფიციენტები მოცემულია ტოლობებით

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx. \tag{11}$$

შევნიშნოთ, რომ (10) მწკრივის კრებადობა გაიგება, როგორც მისი **სიმეტრიული** კერძო $s_{nn} = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx}$ ჯამების მიმდევრობის

კრებადობა, რაც იწოდება (10) მწკრივის **მთავარი მნიშვნელობით** კრებადობად (იხ. თავი 1, §4). მწკრივ (10)-ს კი ეწოდება f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კომპლექსური ანუ ექსპონენტური ფორმა.

7 ფუნქციათა ორთოგონული სისტემის სისრულე

განსაზღვრა 7.1. $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულ ფუნქციათა $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემას ეწოდება **სრული** $p \geq 1$ ხარისხში $[a,b]$-ზე ჯამებად ფუნქციათა $L^p[a,b]$ სივრცეში ($[a,b]$-ზე უწყვეტ ფუნქციათა $C[a,b]$ სივრცეში), თუ $f \in L^p[a,b]$ (შესაბამისად, $f \in C[a,b]$) ფუნქციის ორთოგონულობა $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის ყველა ფუნქციასთან იწვევს f-ის ნულობას თითქმის ყველგან $[a,b]$-ზე (შესაბამისად, ყველგან $[a,b]$-ზე). სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ყველა ტოლობის

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

შესრულება იწვევს $f(x) = 0$ ტოლობას თითქმის ყველა $x \in [a,b]$ წერტილზე (შესაბამისად, ყველა $x \in [a,b]$ წერტილზე).

(1) ტოლობის ინტეგრალების არსებობისათვის **ყველა** $f \in L[a,b]$ ფუნქციისთვის, აუცილებელია და საკმარისი $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის **ერთობლივი** შემოსაზღვრულობა $[a,b]$-ზე ანუ არსებობა ისეთი დადებითი $M < +\infty$ რიცხვისა, რომ უტოლობა $|\varphi_n(x)| \leq M$ სრულდებოდეს ყველა n-ისთვის და ყოველი x-ისთვის: $x \in [a,b]$, $n = 1, 2, \dots$.

ნებისმიერი $f \in L^p[a,b]$, $p > 1$, ფუნქციისთვის რომ იარსებოს (1) ინტეგრალებმა, აუცილებელი და საკმარისია ყოველი $\varphi_n(x)$ ფუნქცია ეკუთვნოდეს $L^q[a,b]$, $q > 1$, სივრცეს, სადაც $p > 1$ და $q > 1$ რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

ყოველი $f \in C[a,b]$ ფუნქციისთვის (1) ინტეგრალების არსებობისთვის აუცილებელია და საკმარისი თითოეული $\varphi_n(x)$ ეკუთვნოდეს $L[a,b]$-ს.

თუკი $\varphi_n(x)$ ფუნქციები კომპლექსურია, ე.ი. კომპლექსური მნიშვნელობების მქონეა, მაშინ (1) პირობა იცვლება პირობით

$$\int_a^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{2}$$

სადაც $\overline{\varphi}_n(x)$ აღნიშნავს $\varphi_n(x)$ ფუნქციისადმი კომპლექსურად შეუღლებულს.

ფუნქციათა სრული სისტემის თვისება მოცემულია შემდეგი თეორემით.

თეორემა 7.2. თუ $f \in L^p[a,b]$ და $g \in L^p[a,b]$, $p \geq 1$, ფუნქციებისთვის უტოლობა $f(x) \neq g(x)$ სრულდება დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე $[a,b]$-დან, მაშინ $L^p[a,b]$ სივრცეში სრული **ნებისმიერი** $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ ფურიეს კოეფიციენტები f ფუნქციისა არ დაემთხვევა g ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს ანუ, რაც იგივეა, ტოლობა:

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi_n(x)dx \tag{3}$$

არ შესრულდება ყველა n-ისთვის ანუ კიდევ, f-ისა და g-ს ფურიეს მწკრივები $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ არ იქნება ერთიდაიგივე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ f და g ფუნქციებს აქვთ ერთიდაიგივე გამწკრივება $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ, რაც ნიშნავს (3) ტოლობის შესრულებას ყველა $n = 1, 2, \dots$ მნიშვნელობისთვის ანუ ყველა n-ისთვის სრულდება ტოლობა:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\varphi_n(x)dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)\,. \tag{4}$$

უკანასკნელი ტოლობა ნიშნავს, რომ ფუნქცია $f(x) - g(x)$ ორთოგონულია ყოველი ფუნქციისადმი $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემიდან. ამან კი $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის სისრულის გამო $L^p[a,b]$ სივრცეში, უნდა გამოიწვიოს ტოლობა $f(x) - g(x) = 0$ თითქმის ყველა x-ისთვის $[a,b]$-დან. ეს კი ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას იმის შესახებ, რომ ტოლობა $f(x) - g(x) = 0$ დარღვეულია დადებითი ზომის რაღაც სიმრავლეზე $[a,b]$-დან. თეორემა დამტკიცებულია.

წინადადება 7.3. ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე ორთოგონული $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა სრულია $L[a,b]$ სივრცეში. მაშინ $f \in L[a,b]$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტის ნულობისთვის $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ, აუცილებელი და საკმარისია f-ის ნულობა თითქმის ყველგან $[a,b]$-ზე.

აუცილებლობა. თუ f ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია, მაშინ $f(x) = 0$ თითქმის ყველა $x \in [a,b]$ წერტილზე. მართლაც,

თუ $f(x) \neq 0$ დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე $[a,b]$-დან, მაშინ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც იქნება ნულისგან განსხვავებული, თეორემა 7.2-ის ძალით, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

საკმარისობა. თუ $f(x) = 0$ თითქმის ყველა $x \in [a,b]$ წერტილზე, მაშინ f-ის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი $\{\varphi_n(x)\}$-ის მიმართ ნულია (იხ. ტოლობა (9) §6-დან).

8 ტრიგონომეტრიული სისტემის სისრულე

2π პერიოდული და $[-\pi,\pi]$-ზე ჯამებადი ფუნქციების სიმრავლე, როგორც წესი, აღინიშნება $L[-\pi,\pi]$ სიმბოლოთი, ხოლო 2π პერიოდული და $(-\infty,+\infty)$ ღერძზე უწყვეტი ანუ, მოკლედ, წრეწირზე უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე კი აღინიშნება $C[-\pi,\pi]$ სიმბოლოთი.

ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 8.1 (ლებეგი). ტრიგონომეტრიული სისტემა

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \tag{1}$$

სრულია $C[-\pi,\pi]$ და $L[-\pi,\pi]$ სივრცეებში.

დამტკიცება $C[-\pi,\pi]$-ისთვის. ვუშვებთ $f \in C[-\pi,\pi]$ ფუნქციის ყველა a_n და b_n კოეფიციენტის ნულობას, ე.ი. გვაქვს (იხ. §2, ტოლობანი (2))

$$\begin{gathered}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0 \ \ (n = 0,1,2,\dots), \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 \ (n = 1,2,\dots)\end{gathered} \tag{2}$$

ტოლობები, საიდანაც ყოველი ტრიგონომეტრიული $T(x)$ პოლინომისთვის გამომდინარეობს ტოლობა[2]

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x)dx = 0. \tag{3}$$

[2]ტრიგონომეტრიული $T(x)$ პოლინომი ეწოდება გამოსახულებას $T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$.

უნდა დავამტკიცოთ, რომ $f(x) = 0$ ყველა წერტილზე. დავუშვათ ამის საწინააღმდეგო ანუ ვუშვებთ ისეთი x_0 წერტილის არსებობას, რომ $|f(x_0)| > 0$. f ფუნქციის უწყვეტობის გამო, კერძოდ, x_0 წერტილზე, არსებობს $\varepsilon > 0$ და $\delta > 0$ ისეთი რიცხვები, რომ $|f(x)| > \varepsilon$, როცა $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \equiv I(\delta)$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(x) > \varepsilon$, როცა $x \in I(\delta)$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში მსჯელობას ჩავატარებთ $(-f)(x)$ ფუნქციისთვის).

განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული პოლინომი.

$$t(x) = 1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta. \tag{4}$$

თუ $x \in \overline{I}(\delta)$, მაშინ $|x - x_0| \le \delta$ და

$$t(x) \ge 1 + \cos\delta - \cos\delta = 1. \tag{5}$$

თუ $x \in [-\pi, \pi] \backslash \overline{I}(\delta)$, მაშინ[3]

$$|t(x)| \le 1. \tag{6}$$

როცა $x \in (x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$, მაშინ $\cos(x - x_0) > \cos\delta/2$ და

$$t(x) > 1 + \cos\delta/2 - \cos\delta = 1 + 2\sin 3\delta/4 \sin\delta/4 \equiv 1 + q. \tag{7}$$

რადგან (3)-ს ადგილი აქვს ნებისმიერი ტრიგონომეტრიული $T(x)$ პოლინომისთვის, ამიტომ მას ადგილი ექნება, როცა $T(x) = [t(x)]^n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[t(x)]^n dx = 0. \tag{8}$$

მაგრამ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[t(x)]^n dx = \int_{I(\delta)} + \int_{[-\pi,\pi]\backslash I(\delta)} \tag{9}$$

და

$$\int_{I(\delta)} > \int_{I(\delta/2)} > \varepsilon(1+q)^n\delta.$$

[3]უტოლობა (6) ნიშნავს, რომ $[x_0 - \pi; x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, x_0 + \pi]$-ზე უნდა გვქონდეს $-1 \le 1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta \le 1 \Rightarrow -2 \le \cos(x - x_0) - \cos\delta \le 0 \Rightarrow -2 + \cos\delta \le \cos(x - x_0) \le \cos\delta \Rightarrow \cos\delta \le \cos(x - x_0) + 2 \le 2 + \cos\delta$, რაც შესრულებულია უკიდურეს $x = x_0 \pm \pi$ წერტილებზეც კი.

ბერნულის უტოლობის

$$(1+a)^n > 1+na, \quad \text{როცა} \quad n>1,\ a>-1,\ a\neq 0, \tag{10}$$

ძალით ვღებულობთ

$$\int\limits_{I(\delta)} > \varepsilon\delta(1+nq) \to +\infty, \qquad n\to\infty. \tag{11}$$

მეორე მხრივ, f-ის $[-\pi,\pi]$-ზე შემოსაზღვრულობის და (6) უტოლობის გამო

$$\Bigg|\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus I(\delta)}\Bigg| < M, \quad |f|<M. \tag{12}$$

(11) და (12) დამოკიდებულებანი მიგვანიშნებენ იმაზე, რომ (9) ტოლობის მარჯვენა მხარე ისწრაფვის $+\infty$-სკენ, როცა $n\to\infty$. ამიტომ ამავე ტოლობის მარცხენა მხარე ვერ იქნება ნულის ტოლი, ე.ი. არ არსებობს ისეთი x_0 წერტილი, რომლისთვისაც $f(x_0)\neq 0$ ანუ $f\equiv 0$.

დამტკიცება $L[-\pi,\pi]$-ისთვის. ვუშვებთ $\varphi\in L[-\pi,\pi]$ ფუნქციის ყველა a_n და b_n კოეფიციენტის ნულობას, ე.ი. გვაქვს ტოლობები

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx dx = 0 \quad (n=0,1,2,\dots),\\ &\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx = 0 \quad (n=1,2,\dots). \end{aligned} \tag{13}$$

$[-\pi,\pi]$-ზე განვიხილოთ

$$\phi(x) = \int\limits_{-\pi}^{x}\varphi(t)dt \tag{14}$$

ფუნქცია. გვაქვს $\phi(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt = \pi a_0$ და $\phi(-\pi)=0$, მაგრამ $a_0=0$, ამიტომ $\phi(-\pi)=\phi(\pi)=0$. გარდა ამისა,

$$\phi(x+2\pi)-\phi(x) = \int\limits_{-\pi}^{x+2\pi}\varphi(t)dt - \int\limits_{-\pi}^{x}\varphi(t)dt = \int\limits_{x}^{x+2\pi}\varphi(t)dt.$$

მაგრამ (იხ. თავი 1, §3, მტკიცება 3.2)

$$\int_x^{x+2\pi} \varphi(t)dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = a_0 = 0.$$

მაშასადამე, $\phi(x+2\pi) - \phi(x) = 0$. ამგვარად, ϕ ფუნქცია 2π პერიოდულია და უწყვეტი $(-\infty, +\infty)$-ზე ანუ ϕ უწყვეტია წრეწირზე. ამიტომ $\phi \in C[-\pi, \pi]$.

ახლა ვიპოვოთ ϕ ფუნქციის ფურიეს A_n და B_n კოეფიციენტები $(n = 1, 2, \dots)$. ამ მიზნით მოვახდინოთ ნაწილობითი ინტეგრება და გავითვალისწინოთ ტოლობები $\phi(-\pi) = 0$ და $\phi(\pi) = 0$. მივიღებთ

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \cos nx dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \cdot b_n = -\frac{1}{n\pi} \cdot 0 = 0,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \sin nx dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \cdot a_n = -\frac{1}{n\pi} \cdot 0 = 0.$$

მაშასადამე, ϕ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია, გარდა შესაძლებელია A_0-ის. ამიტომ $\phi(x) - A_0$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტია ნული. ამასთან, $\phi(x) - A_0 \in C[-\pi, \pi]$. ამიტომ $\phi(x) - A_0 \equiv 0$. ამის გაწარმოებით ვღებულობთ $\phi'(x) - A_0' = 0$ ანუ $\phi'(x) = 0$ თითქმის ყველგან, მაგრამ თითქმის ყველა წერტილზე $[-\pi, \pi]$-დან გვაქვს $\phi'(x) = \varphi(x)$. მივიღეთ, რომ $\varphi(x) = 0$ თითქმის ყველგან $[-\pi, \pi]$-ზე. ამით თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია.

შედეგი 8.2. ტრიგონომეტრიული სისტემა (1) სრულია $L^p[-\pi, \pi]$ სივრცეში, სადაც $p > 1$.

მართლაც, რადგან $\psi \in L^p[-\pi, \pi]$ ფუნქციის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია და ψ ეკუთვნის $L[-\pi, \pi]$ სივრცესაც, ამიტომ ψ ფუნქციისთვის შესრულებულია (13) ტოლობები და უკვე დამტკიცებულის ძალით, თითქმის ყველგან $\psi(x) = 0$.

შედეგი 8.3. თუ f_1 და f_2 ფუნქციებს აქვთ ფურიეს ერთიდაიგივე მწკრივი, მაშინ $f_1(x) \sim f_2(x)$.

მართლაც, რადგან f_1 და f_2 ფუნქციებს ფურიეს ერთიდაიგივე კოეფიციენტები აქვთ, ამიტომ $f_1 - f_2$ სხვაობის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია. ეს კი, უკვე დამტკიცებულის ძალით, იწვევს $f_1(x) - f_2(x)$ ფუნქციის ნულობას თითქმის ყველგან $[-\pi, \pi]$-ზე ანუ $f_1 \sim f_2$ $[-\pi, \pi]$-ზე.

თავი 3

ფურიეს მწკრივთა კრებადობის ზოგადი საკითხები

1 ფურიეს თანაბრად კრებადი მწკრივის ჯამი

1. ტრიგონომეტრიული სისტემის სისრულე უწყვეტ ფუნქციათა $C[-\pi,\pi]$ სივრცეში იწვევს შემდეგ მნიშვნელოვან თეორემას.

თეორემა 1.1. თუ წრეწირზე უწყვეტი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივი თანაბრად კრებადია წრეწირზე, მაშინ $S[f]$ მწკრივი თანაბრად კრებადია წრეწირზე სწორედ f-სკენ.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

რომლის ჯამი აღვნიშნოთ $g(x)$-ით. რადგან (1) მწკრივის წევრები უწყვეტია და თვით მწკრივი კი თანაბრად კრებადი, ამიტომ $g(x)$ ფუნქცია უწყვეტია წრეწირზე. რადგანაც $g(x)$ წარმოადგენს თანაბრად კრებადი (1) ტრიგონომეტრიული მწკრივის ჯამს, ამიტომ ამ მწკრივის a_n და b_n კოეფიციენტები მოიცემა g ფუნქციისთვის დაწერილი ფურიეს ფორმულებით (იხ. თავი 2, §1, თეორემა 1.1).

მეორე მხრივ, a_n და b_n რიცხვები წარმოადგენენ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს. მაშასადამე, უწყვეტ g და f ფუნქციებს აქვთ ფურიეს ერთიდაიგივე მწკრივი. ამიტომ $g-f$ სხვაობის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია.

რადგან $(g - f) \in C[-\pi, \pi]$ და ტრიგონომეტრიული სისტემა კი სრულია $C[-\pi, \pi]$ სივრცეში (იხ. თავი 2, §8), ამიტომ $g-f$ სხვაობა ნულია ყველა წერტილზე ანუ $g(x) = f(x)$ ყველა x წერტილზე.

მაშასადამე, (1) დამოკიდებულებაში გვაქვს ტოლობა

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{2}$$

ყოველ x წერტილზე, თანაც თანაბრად $[-\pi, \pi]$-ზე.

შევნიშნოთ, რომ ამ თეორემასთან კავშირშია ფეიერის მნიშვნელოვანი თეორემიდან გამომდინარე შემდეგი (იხ. თავი 5, წინადადება 7.2)

წინადადება 1.2. თუ პერიოდზე ჯამებად და 2π პერიოდულ f ფუნქციას აქვს უწყვეტობის რაიმე x_0 წერტილი და $S[f]$ კრებადია ამ წერტილზე, მაშინ $S[f]$-ის კრებადობა x_0 წერტილზე იქნება $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ ანუ, ადგილი ექნება ტოლობას

$$S[f](x_0) = f(x_0). \tag{3}$$

2. თავი 2-დან §1-ის თეორემა 1.1-ის თანახმად, თუ ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{4}$$

თანაბრად კრებადია წრეწირზე f ფუნქციისკენ, მაშინ (4) მწკრივი წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს.

ახლა შესაძლებელია ამ ფაქტის შემდეგნაირი გაძლიერება.

თეორემა 1.3. თუ ტრიგონომეტრიული (4) მწკრივის კერძო ჯამების ერთი მაინც ქვემიმდევრობა თანაბრად კრებადია წრეწირზე რაიმე φ ფუნქციისკენ, მაშინ (4) მწკრივი არის ამ φ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $s_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \dots)$ ქვემიმდევრობაა თანაბრად კრებადი წრეწირზე უწყვეტი $\varphi(x)$ ფუნქციისკენ. მაშინ $|s_{n_k}(x) - \varphi(x)| \to 0$ თანაბრად წრეწირზე, როცა $k \to \infty$. ამიტომ $\int_{-\pi}^{\pi} |s_{n_k}(x) - \varphi(x)| dx \to 0$, როცა $k \to \infty$.

ამრიგად, ყოველი m-ისთვის გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$\int_{-\pi}^{\pi} [s_{n_k}(x) - \varphi(x)] \cos mx dx \to 0, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty, \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [s_{n_k}(x) - \varphi(x)] \sin mx dx \to 0, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty, \tag{6}$$

საიდანაც ყოველი m-ისთვის ვღებულობთ

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_{n_k}(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos mx dx, \tag{7}$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_{n_k}(x) \sin mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin mx dx. \tag{8}$$

ტრიგონომეტრიული სისტემის ორთოგონულობის გამო (იხ. თავი 1, §3), უტოლობა $n_k > m$ იწვევს ტოლობას

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_{n_k}(x) \cos mx dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi a_m$$

და, მაშასადამე,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_{n_k}(x) \cos mx dx = \pi a_m. \tag{9}$$

(7) და (9) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos mx dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{10}$$

ანალოგიურად მიიღება ტოლობაც

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin mx dx, \quad m = 1, 2, \dots . \tag{11}$$

ეს ნიშნავს, რომ (4) მწკრივი არის φ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი. თეორემა დამტკიცებულია.

2 ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების L^2-მინიმალურობა. ბესელის იგივეობა და უტოლობა

ვთქვათ, $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ არის რაიმე **ორთონორმული** სისტემა $L^2[a,b]$ სივრცეში. ისმის ამოცანა: მოცემულია $f \in L^2[a,b]$ ფუნქცია და n ცალი $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ ფუნქცია $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემიდან. განვიხილოთ ყველა შესაძლო ჯამი $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$ და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\rho_f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \|f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\|_{L^2}.$$

გვაინტერესებს, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ მუდმივების რომელი მნიშვნელობებისთვის ექნება მინიმალური მნიშვნელობა $\rho_f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$-ს?

1. ამ კითხვასთან დაკავშირებით დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 2.1. $\rho_f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$-ის მინიმალური მნიშვნელობაა $\rho_f(c_1, \dots, c_n)$, სადაც $c_1, c_2, \dots, c_n$ წარმოადგენენ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ.

დამტკიცება. ზოგადობისთვის დავუშვათ, რომ $\{\varphi_k(x)\}$ სისტემა შედგება კომპლექსური ფუნქციებისგან და ვისარგებლოთ z კომპლექსური სიდიდის თვისებით $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, სადაც $\overline{z}$ არის z-სადმი შეუღლებული.

გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\|_{L^2}^2 = \int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)|^2 dx =$$

$$= \int_a^b \Big[f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\Big] \cdot \Big[\overline{f}(x) - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k \overline{\varphi}_k(x)\Big] dx =$$

$$= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_a^b \overline{f}(x) \varphi_k(x) dx - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k \int_a^b f(x) \overline{\varphi}_k(x) dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha}_j \int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi}_j(x) dx.$$

რადგან სისტემა $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ორთონორმულია, ამიტომ გვაქვს ტო-

ლობები

$$\int_a^b \varphi_k(x)\overline{\varphi}_j(x)dx = 0, \quad \text{როცა} \quad k \neq j, \tag{1}$$

$$\int_a^b |\varphi_k(x)|^2 dx = 1, \quad \text{როცა} \quad k = 1, 2, \dots \,. \tag{2}$$

ამრიგად,

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2}^2 =$$

$$= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{c}_k - \sum_{k=1}^n \overline{\alpha}_k c_k + \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2.$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს დავამატებთ და დავაკლებთ $\sum_{k=1}^n |c_k|^2$-ს, მივიღებთ

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^n |c_k - \alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \tag{3}$$

აქედან აშკარაა, რომ (3) ტოლობის მარჯვენა მხარე იქნება მინიმალური მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\alpha_k = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

2. **ბესელის იგივეობა**. თუ (3) ტოლობაში α_k რიცხვებს ჩავანაცვლებთ f ფუნქციის ფურიეს c_k კოეფიციენტებით, მაშინ მივიღებთ ტოლობას

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \tag{4}$$

(4)-ს ეწოდება ბესელის იგივეობა.

შედეგი 2.2. მინიმალური L^2 გადახრა $\rho_f(c_1, \dots, c_n)$ მოიცემა ტოლობით

$$\rho_f(c_1, \dots, c_n) = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2, \tag{5}$$

ე.ი. n-ის ზრდისას L^2 გადახრა მცირდება!

3. ბესელის უტოლობა (1828 წ.). რადგან (4) უტოლობის მარცხენა მხარე არაუარყოფითია, ამიტომ მისი მარჯვენა მხარეც არაუარყოფითია ანუ

$$\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2. \tag{6}$$

მივიღეთ ნებისმიერი n-ისთვის მართებული უტოლობა, რომლის მარჯვენა მხარე არაა დამოკიდებული n-ზე.

ცხადია, რომ $s_n = \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$ მიმდევრობა ზრდადია, როგორც არაუარყოფითი $|c_k|^2$ რიცხვების ჯამი: $s_{n+1} \geq s_n$, $n = 1, 2, \ldots$. გარდა ამისა, $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ზემოდან სასრული რიცხვით $\|f\|_{L^2}^2$. ამიტომ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობას აქვს სასრული ზღვარი $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$.

ამრიგად, თუ (6) უტოლობაში n-ს მივასწრაფებთ ∞-სკენ და გავითვალისწინებთ, რომ მისი მარჯვენა მხარე არ იცვლება n-ის ცვლილებისას, მივიღებთ უტოლობას

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2, \quad \|f\|_{L^2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{7}$$

ამ უტოლობას ეწოდება ბესელის უტოლობა, რომელიც მართებულია $[a,b]$ სეგმენტზე **ორთონორმული** ყოველი $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემისთვის და ნებისმიერი ფუნქციისთვის $f \in L^2[a,b]$.

შედეგი 2.3. მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$ კრებადია და გვაქვს ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0. \tag{8}$$

3 ორთონორმულ სისტემაში $S[f]$-ის L^2 კრებადობა რაღაც $F \in L^2$ ფუნქციისკენ

ვთქვათ, გვაქვს $[a,b]$ სეგმენტზე **ორთონორმული** $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემა და f იყოს კვადრატით ჯამებადი ფუნქცია $[a,b]$-ზე, ე.ი. სასრულია ინტეგრალი $\int_a^b |f(x)|^2 dx$, სიმბოლურად $f \in L^2[a,b]$. განვიხილოთ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ

$$f \sim c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots, \tag{1}$$

სადაც f ფუნქციის ფურიეს c_n კოეფიციენტები მოიცემა ტოლობებით (იხ. 2, §6, ტოლობა (7))

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{2}$$

(1) მწკრივის n-რი კერძო ჯამი აღვნიშნოთ $s_n(f;x)$-ით:

$$s_n(f;x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x). \tag{3}$$

ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ მოცემულ $f \in L^2[a,b]$ ფუნქციას შეესაბამება რაღაც ფუნქცია $F \in L^2[a,b]$, რომლისკენაც L^2 ნორმით კრებადია (1) მწკრივი ანუ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |F(x) - s_n(f;x)|^2 dx = 0. \tag{4}$$

მოკლედ რომ ვთქვათ, ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

თეორემა 3.1. $f \in L^2[a,b]$ ფუნქციის ფურიეს (1) მწკრივი L^2 კრებადია რაღაც $F \in L^2[a,b]$ ფუნქციისკენ.

დამტკიცება. ცნობილია ([1], გვ. 526), რომ ფუნქციათა $f_n \in L^2[a,b]$ მიმდევრობის $L^2[a,b]$ სივრცეში კრებადობისთვის რაღაც $F \in L^2[a,b]$ ფუნქციისკენ აუცილებელია და საკმარისი ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს ეთანადებოდეს ისეთი ნატურალური $N(\varepsilon)$, რომ სრულდებოდეს უტოლობა

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_{L^2} < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n \ge N \quad \text{და} \quad m \ge N. \tag{5}$$

ახლა ვაჩვენოთ (5) უტოლობის შესრულება, როცა $f_n(x)$ ფუნქციების როლში აღებულია (1) მწკრივის კერძო $s_n(f;x)$ ჯამები.

ცხადია, რომ ყოველი n-ისთვის და $p \ge 1$-ისთვის გვაქვს:

$$\|s_{n+p}(f;x) - s_n(f;x)\|_{L^2}^2 = \Big\| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\varphi_k(x) \Big\|_{L^2}^2 = \int_a^b \Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\varphi_k(x) \Big|^2 dx.$$

მაგრამ

$$\int_a^b \Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\varphi_k(x) \Big|^2 dx = \int_a^b \Big[\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\varphi_k(x) \Big] \cdot \Big[\sum_{k=n+1}^{n+p} \overline{c}_k\overline{\varphi}_k(x) \Big] dx.$$

თუ აქ, ინტეგრალქვეშ შევასრულებთ მითითებულ გადამრავლე-ბას და გამოვიყენებთ ორთონორმული $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემის შესა-ბამის თვისებებს (იხ. §2, (1) და (2) ტოლობები), მივიღებთ:

$$\|s_{n+p}(f;x) - s_n(f;x)\|_{L^2}^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2. \tag{6}$$

მაგრამ შედეგი 2.3-ის თანახმად, მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ კრებადია. ამიტომ $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ნატურალური $N(\varepsilon)$ ისეთი, რომ

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2 < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n \geq N \quad \text{და} \quad p \geq 1. \tag{7}$$

მაშასადამე,

$$\|s_{n+p}(f;x) - s_n(f;x)\|_{L^2} < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n \geq N, \quad p \geq 1. \tag{8}$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 3.2. ის ფაქტი, რომ თეორემა 3.1-ში მოძებნილი F ფუნქ-ციის როლში არ არის მოცემული f ფუნქცია, გამოწვეულია იმით, რომ $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ არის მხოლოდ ორთონორმული. ქვემოთ ჩვენ ვნა-ხავთ, რომ (4) ტოლობაში F-ის როლში არის f, როცა $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემა არის ორთონორმული და სრული (ჩაკეტილი).

4 რისი-ფიშერის თეორემა

ბესელის უტოლობა (იხ. §2, უტოლობა (6)) მიგვანიშნებს იმაზე, რომ $f \in L^2[a,b]$ ფუნქციის ფურიეს c_n კოეფიციენტებს $[a,b]$-ზე ორ-თონორმული $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ აქვთ თვისება: მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ კრებადია (იხ. შედეგი 2.3).

შებრუნებულ კითხვაზე პასუხს იძლევა ფ. რისისა და ფიშერის მიერ 1907 წელს, ერთიმეორისგან დამოუკიდებლად დამტკიცებული

თეორემა 4.1 (რისი, ფიშერი). თუ ფუნქციათა სისტემა $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ორთონორმულია $[a,b]$-ზე და რიცხვთა რაღაც (c_n) მიმდევრობისთ-ვის მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ კრებადია, მაშინ არსებობს ისეთი $f \in L^2[a,b]$ ფუნქცია, რომლის ფურიეს კოეფიციენტებია c_n რიცხვები $\{\varphi_k(x)\}_1^{\infty}$ სისტემის მიმართ და ადგილი აქვს **პარსევალის ტოლობას** (1806 წ.):

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2. \tag{1}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$, რომლისთვისაც გვაქვს ტოლობა (იხ. §3, ტოლობა (6)):

$$\int_a^b |T_{n+p}(x) - T_n(x)|^2 dx = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ მწკრივის კრებადობის გამო, ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს ეთანადება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ

$$\int_a^b |T_p(x) - T_q(x)|^2 dx < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad p > N, \quad q > N.$$

ამიტომ ცნობილი თეორემის გამო ([1], გვ. 526), $L^2[a,b]$-ში არსებობს ისეთი f ფუნქცია, რომ ადგილი აქვს ტოლობას (T_n მიმდევრობა L^2 კრებადია f-სკენ):

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x) - T_n(x)|^2 dx = 0. \tag{2}$$

ავიღოთ ნებისმიერი $k \geq 1$ და ვთქვათ $n > k$. რადგან $\{\varphi_k(x)\}_1^{\infty}$ სისტემა ორთონორმულია და $n > k$, ამიტომ $\int_a^b T_n(x)\varphi_k(x)dx = c_k$. მაშასადამე,

$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx + \int_a^b [T_n(x) - f(x)]\varphi_k(x)dx. \tag{3}$$

ცნობილი უტოლობის გამო ([1], გვ. 521), რომელიც 1859 წელს დაადგინა ბუნიაკოვსკიმ და 1875 წელს კი ა. შვარცმა,

$$\left| \int_a^b [T_n(x) - f(x)]\varphi_k(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |T_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot 1 \tag{4}$$

(2)-(4) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots\ . \tag{5}$$

ამრიგად, c_k რიცხვები წარმოადგენენ $f \in L^2[a,b]$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ.

და ბოლოს, (2) გამოვიყენოთ ბესელის იგივეობის (იხ. §2, ტოლობა (4)) მიმართ და მივიღებთ (1) ტოლობას, რომელსაც ეწოდება პარსევალის ტოლობა.

5 ჩაკეტილი სისტემა და მის მიმართ $S[f]$-ის L^2 კრებადობა f-ისკენ

როგორც ვიცით (იხ. თავი 2, §7), $L^2[a,b]$ სივრცის φ_n ელემენტებისგან შედგენილ ფუნქციათა **ორთონორმულ** $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემას ეწოდება **სრული** $L^2[a,b]$ სივრცეში, თუ $f \in L^2[a,b]$ ფუნქციის ორთოგონულობა $\{\varphi_k(x)\}_1^{\infty}$ სისტემის ყველა ფუნქციასთან იწვევს $f(x) = 0$ ტოლობას თითქმის ყველა $x \in [a,b]$ წერტილზე ანუ f ეკვივალენტურია ნულის, სიმბოლურად $f \sim 0$.

მოკლედ რომ ვთქვათ, ყველა ტოლობის $\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = 0$ $(n = 1,2,\dots)$ შესრულება იწვევს დამოკიდებულებას $f \sim 0$.

1. ახლა ჩვენ განვიხილავთ სრული სისტემის სხვაგვარ დახასიათებას, ე.წ. სისტემის ჩაკეტილობით.

განსაზღვრა 5.1. $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქციების **ორთონორმულ** $\{\varphi_k(x)\}_1^{\infty}$ სისტემას ეწოდება **ჩაკეტილი** $L^2[a,b]$ სივრცეში, თუ ყოველი $f \in L^2[a,b]$ ფუნქციისთვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ რიცხვები, რომ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2} < \varepsilon. \tag{1}$$

როგორც ვიცით, ასეთი თვისების მქონე $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ სისტემებს შორის (1) უტოლობის მარცხენა მხარეს უმცირეს მნიშვნელობას ანიჭებს f ფუნქციის ფურიეს $c_1,c_2,\dots,c_n,\dots$ კოეფიციენტები ანუ, თუ $\{\varphi_k(x)\}_1^{\infty}$ სისტემა ჩაკეტილია $L^2[a,b]$-ში, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2} < \varepsilon. \tag{2}$$

ამ შემთხვევაში, (1) უტოლობისგან განსხვავებით, $c_1,c_2,\dots,c_n$ ცალსახადაა განსაზღვრული f ფუნქციის მეშვეობით და (2)-ში ε-ზე დამოკიდებულია მხოლოდ n და არა რიცხვების მთელი სისტემა, როგორც ესაა (1)-ში.

ამიტომ (2)-ის ეკვივალენტური ფორმაა ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\right\|_{L^2}=0. \tag{3}$$

ამრიგად, გვაქვს

თეორემა 5.2. $f\in L^2[a,b]$ ფუნქციის ფურიეს

$$f\sim c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots \tag{4}$$

მწკრივი, $L^2[a,b]$-ში **ჩაკეტილი** $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ არის L^2 კრებადი f-ისკენ, თუნდაც (4) მწკრივი განშლადი იყოს ყველგან:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\right\|^2dx=0. \tag{5}$$

2. ტოლობა (5)-დან და ბესელის იგივეობიდან (იხ. §2, ტოლობა (4)) გამომდინარეობს:

თეორემა 5.3. $L^2[a,b]$-ში **ჩაკეტილი** $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ, $f\in L^2[a,b]$ ფუნქციის $c_1,c_2,\ldots,c_n,\ldots$ კოეფიციენტებისთვის ადგილი აქვს **პარსევალის** ტოლობას:

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\int_a^b|f(x)|^2dx. \tag{6}$$

თეორემა 5.4. ჩაკეტილი სისტემა სრულია.

დამტკიცება. ჩაკეტილი სისტემისთვის ადგილი აქვს პარსევალის (6) ტოლობას. თუ ახლა $f\in L^2[a,b]$ ფუნქციის ფურიეს ყველა c_k კოეფიციენტი ნულია, მაშინ $\int_a^b|f(x)|^2dx=0$, საიდანაც $f\sim 0$.

თეორემა 5.5. სრული სისტემა ჩაკეტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემა სრულია $L^2[a,b]$ სივრცეში. ავიღოთ ნებისმიერი $f\in L^2[a,b]$ ფუნქცია და მისი ფურიეს კოეფიციენტები $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ იყოს $c_1,c_2,\ldots$. შედეგი 2.3-ის

ძალით, მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ კრებადია და ამიტომ რისი-ფიშერის თეორემის საფუძველზე არსებობს $g \in L^2[a,b]$ ფუნქცია, რომლის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\varphi_k(x)\}_1^{\infty}$ სისტემის მიმართ იქნება $c_1, c_2, \dots$ და

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b |g(x)|^2 dx. \tag{7}$$

რადგან f-სა და g-ს აქვთ ფურიეს ერთიდაიგივე კოეფიციენტები, ამიტომ $f-g$ სხვაობის ყველა კოეფიციენტი ნულია ანუ $f-g$ ორთოგონულია $\{\varphi_k(x)\}_1^{\infty}$ სისტემის ყველა ფუნქციასთან. აქედან, $\{\varphi_k(x)\}_1^{\infty}$ სისტემის სისრულის გამო, $f - g \sim 0$ ანუ $g \sim f$. მაშასადამე, (7)-ს ძალით, $L^2[a,b]$ სივრცის ყოველი f ფუნქციისთვის ადგილი აქვს **პარსევალის ტოლობას**

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \tag{8}$$

აქედან კი ბესელის იგივეობის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)\|_{L^2} = 0. \tag{9}$$

ამრიგად, $\{\varphi_k(x)\}_1^{\infty}$ სისტემა ჩაკეტილია.

შედეგი 5.6. L^2 კლასის ფუნქციათა სივრცეში ფუნქციათა სისტემის ჩაკეტილობისა და სისრულის ცნებანი ურთიერთეკვივალენტურია.

6 რისი-ფიშერის თეორემა და პარსევალის ტოლობა ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის

1. რისი-ფიშერის თეორემა და პარსევალის ტოლობა ჩვენ დამტკიცებული გვქონდა ორთონორმული სისტემისთვის. ამიტომ ისინი მართებულია სისტემისთვისაც:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots . \tag{1}$$

სახელდობრ, თუ a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \dots)$ რიცხვებს აქვთ თვისება

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < +\infty, \tag{2}$$

მაშინ არსებობს ფუნქცია $F \in L^2[-\pi,\pi]$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx, \quad a_n = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}dx,$$
$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}dx. \tag{3}$$

ცხადია, რომ ფუნქცია $f(x) = \sqrt{\pi}\ \ F(x) \in L^2[-\pi,\pi]$ და (3) ტოლობები f ფუნქციის საშუალებით ასე ჩაიწერებიან:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \tag{4}$$

ამრიგად, თუ (2) მწკრივი კრებადია, მაშინ არსებობს ფუნქცია $f \in L^2[-\pi,\pi]$ ისეთი, რომ (4) ტოლობებით განსაზღვრული a_0, a_n და b_n რიცხვები წარმოადგენენ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს ტრიგონომეტრიული

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \tag{5}$$

სისტემის მიმართ.

ახლა ჩავწეროთ **პარსევალის** ტოლობა f-ისა და a_0, a_n, b_n კოეფიციენტებით. ამ მიზნით ამ კოეფიციენტებს მივცეთ საჭირო ფორმა:

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}dx.$$

აქედან

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx, \quad \sqrt{\pi}a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}dx,$$

$$\sqrt{\pi}b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}dx.$$

ახლა გამოვიყენოთ პარსევალის ტოლობა ორთონორმული სისტემისთვის (იხ. §4, ტოლობა (1)), გვექნება:

$$\pi\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\pi a_n^2 + \pi b_n^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx$$

ანუ

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx. \tag{6}$$

2. $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე ორთონორმული კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}$ $(n = 0, \pm1, \pm2)$ სისტემის მიმართ (იხ. თავი 2, §6) რისი-ფიშერის თეორემის თანახმად, პირობა $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 < +\infty$ იწვევს ისეთი $\phi \in L^2[-\pi,\pi]$ ფუნქციის არსებობას, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}}dx. \tag{7}$$

შემოვიღოთ $L^2[-\pi,\pi]$ სივრცის ფუნქცია $\varphi(x) = \sqrt{2\pi}\phi(x)$, რომლის მეშვეობით (7) მიიღებს სახეს:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)e^{-inx}dx. \tag{8}$$

ეს კი არის $\varphi \in L^2[-\pi,\pi]$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $\{e^{inx}\}$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \dots)$ სისტემის მიმართ (იხ. თავი 2, §2, ტოლობა (6)).

პარსევალის ტოლობას (7) მიმდევრობისთვის და $\phi(x)$ ფუნქციისთვის აქვს სახე (იხ. §4, ტოლობა(1)):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\phi(x)|^2 dx. \tag{9}$$

ამრიგად, $\{e^{inx}\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\dots)$ სისტემის მიმართ $\varphi\in L^2[-\pi,\pi]$ ფუნქციის ფურიეს (8) კოეფიციენტებისთვის **პარსევალის** ტოლობას, რომელიც ავტორის მიერ დადგენილ იქნა 1799 წელს, აქვს სახე:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|^2 dx. \tag{10}$$

7 პარსევალის ტოლობა ორი ფუნქციის ნამრავლისთვის

1. **ზოგადი სისტემისთვის.**

თეორემა 7.1. ვთქვათ, $L^2[a,b]$-ში სრული (ჩაკეტილი) ორთონორმული $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ $f\in L^2[a,b]$ და $g\in L^2[a,b]$ ფუნქციების ფურიეს მწკრივებია

$$f \sim c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots, \tag{1}$$
$$g \sim d_1\varphi_1(x) + d_2\varphi_2(x) + \cdots. \tag{2}$$

მაშინ ნამრავლისთვის $f\cdot g \in L[a,b]$[1] ადგილი აქვს **პარსევალის** ტოლობას:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n. \tag{3}$$

დამტკიცება. ელემენტარული უტოლობის $(a\pm b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ ძალით ვასკვნით, რომ $f+g$ და $f-g$ ფუნქციები $L^2[a,b]$ კლასისაა, ამასთან პირველის კოეფიციენტებია c_n+d_n, ხოლო მეორესი კი c_n-d_n.

[1] ეს გამომდინარეობს უტოლობიდან $|f|\cdot|g| \le \frac{1}{2}[f^2+g^2]$.

ამიტომ მათთვის პარსევალის ტოლობას აქვს სახე:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty}(c_n+d_n)^2,$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty}(c_n-d_n)^2.$$

პირველიდან მეორის გამოკლებით მივიღებთ:

$$4\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} 4c_n d_n$$

ანუ ადგილი აქვს (3) ტოლობას.

2. **ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის.** თუ

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{4}$$

$$g \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos nx + d_n \sin nx), \tag{5}$$

მაშინ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nc_n + b_nd_n). \tag{6}$$

თუკი

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx} \quad \text{და} \quad g \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{inx}, \tag{7}$$

მაშინ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g}(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \overline{b}_n. \tag{8}$$

შევნიშნოთ, რომ (3), (6) და (8) ტოლობებს ზოგჯერ უწოდებენ **პარსევალის განზოგადებულ** ტოლობებს.

8 სრული (ჩაკეტილი) სისტემისთვის ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება

თეორემა 8.1. $L^2[a,b]$ სივრცეში სრული (ჩაკეტილი) სისტემის მიმართ $f \in L^2[a,b]$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის, თუნდაც ეს მწკრივი **განშლადი** იყოს ყველგან,

$$f \sim c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots \tag{1}$$

წევრობრივი ინტეგრებით ნებისმიერ $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ სეგმენტზე მიიღება $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ინტეგრალისკენ **კრებადი** მწკრივი.

თუ წევრობრივი ინტეგრება მიმდინარეობს $[a,x] \subset [a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ინტეგრების შედეგი მწკრივი **თანაბრად** კრებადია $[a,b]$-ზე $\int_a^x f(t)dt$ ინტეგრალისკენ.

უფრო მეტი, ორივე ეს შემთხვევა მართებულია მაშინაც, თუ (1) მწკრივს წინასწარ გავამრავლებით რაიმე $\psi \in L^2[a,b]$ ფუნქციაზე და შედეგს წევრობრივ ვაინტეგრებთ. შედეგი იქნება $\int_\alpha^\beta f(x)\psi(x)dx$ და, შესაბამისად, $\int_a^x f(t)\psi(t)dt$ თანაბრად $[a,b]$-ზე.

დამტკიცება. სიცხადისთვის მსჯელობას ჩავატარებთ ცვლადსაზღვრიანი ინტეგრებისთვის.

$$\left|\int_a^x f(t)\psi(t)dt - \sum_{k=1}^n c_k \int_a^x \varphi_k(t)\psi(t)dt\right| \le$$

$$\le \int_a^b |f(t) - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(t)||\psi(t)|dt \le$$

$$\le \left(\int_a^b |f(t) - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(t)|^2 dt\right)^{1/2} \times$$

$$\times\left(\int_a^b |\psi(t)|^2 dt\right)^{1/2} \to 0, \quad \text{როცა} \quad n \to \infty.$$

ამრიგად, თანაბრად $[a,b]$-ზე ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^x f(t)\psi(t)dt = c_1\int_a^x \psi(t)\varphi_1(t)dt + c_2\int_a^x \psi(t)\varphi_2(t)dt + \cdots . \tag{2}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

9 ერთობლივ შემოსაზღვრული სისტემისთვის ფურიეს კოეფიციენტების კრებადობა ნულისკენ. რიმან-ლებეგის თეორემა

როგორც უკვე ვიცით, ყოველი $f \in L^2[a,b]$ ფუნქციის ფურიეს $c_n(f)$ კოეფიციენტებს $[a,b]$-ზე ორთონორმული ნებისმიერი $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ გააჩნიათ თვისება: მწკრივი $\sum_{n=1}^\infty |c_n(f)|^2$ კრებადია და, მაშასადამე, $c_n(f) \to 0$, როცა $n \to \infty$ (იხ. 3, §2, შედეგი 2.3).

თუკი $f \in L[a,b]$, მაგრამ f არ ეკუთვნის $L^2[a,b]$ სივრცეს, მაშინ f ფუნქციის $c_n(f)$ კოეფიციენტებს შეიძლება თუ არა ჰქონდეთ ნულისკენ სწრაფვის თვისება, როცა $n \to \infty$?

თეორემა 9.1 (მერსერი). თუ $[a,b]$ სეგმენტზე ორთონორმული $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემა ერთობლივ შემოსაზღვრულია, ე.ი. თუ

$$|\varphi_k(x)| < M, \quad \text{როცა} \quad x \in [a,b] \quad \text{და} \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

მაშინ $[a,b]$-ზე ჯამებადი ნებისმიერი f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ კრებადია ნულისკენ.

დამტკიცება. როგორც ცნობილია ([15], გვ. 432), ყოველი $f \in L[a,b]$ ფუნქციისთვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს შემოსაზღვრული ფუნქცია $g \in L^2[a,b]$, რომელსაც აქვს თვისება

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx < \varepsilon/M. \tag{2}$$

განვიხილოთ $[a,b]$-ზე განსაზღვრული ფუნქცია $\psi(x) = f(x) - g(x)$. აქედან $f(x) = g(x) + \psi(x)$ და ტოლობის

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi_k(x)dx + \int_a^b \psi(x)\varphi_k(x)dx$$

წევრები წარმოადგენენ f-ის, g-ს და ψ ფუნქციების ფურიეს კოეფიციენტებს $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ სისტემის მიმართ ანუ

$$c_k(f) = c_k(g) + c_k(\psi), \quad k = 1, 2, \dots \tag{3}$$

რადგან $g \in L^2[a,b]$, ამიტომ, **ბესელის** უტოლობიდან გამომდინარე, (იხ. §2-დან ტოლობა (8)),

$$\lim_{k\to\infty} c_k(g) = 0. \tag{4}$$

ამრიგად, აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ნატურალური რიცხვი $N(\varepsilon)$ ისეთი, რომ

$$|c_k(g)| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad > N. \tag{5}$$

მეორე მხრივ, (1) და (2) უტოლობების გამო $|c_k(\psi)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$, ე.ი.

$$|c_k(\psi)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots \,. \tag{6}$$

(5)-(6) უტოლობების საფუძველზე (3)-დან გამომდინარეობს

$$|c_k(f)| < 2\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad k > N. \tag{7}$$

მაშასადამე,

$$\lim_{k \to \infty} c_k(f) = 0. \tag{8}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

რადგან ტრიგონომეტრიული სისტემა ერთობლივ შემოსაზღვრულია მუდმივით 1, ამიტომ თეორემა 9.1-დან გამომდინარეობს ლებეგის მიერ 1902 წელს ჯამებადი ფუნქციებისთვის და მანამდე რიმანის მიერ R-ინტეგრებადი ფუნქციებისთვის დამტკიცებული მეტად მნიშვნელოვანი

თეორემა 9.2 (რიმანი, ლებეგი). 2π პერიოდული და პერიოდზე ჯამებადი ნებისმიერი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ **კრებადია** ნულისკენ.

რიმან-ლებეგის ამ თეორემიდან ადვილად მიიღება

თეორემა 9.3. ვთქვათ, E ზომადი რაიმე სიმრავლეა $[0, 2\pi]$-ზე და (p_n) ნამდვილ რიცხვთა რაიმე მიმდევრობაა. მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_E \cos^2(nx + p_n)dx = \frac{1}{2}|E|. \tag{9}$$

დამტკიცება. რადგან $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$, ამიტომ ინტეგრელქვეშა ფუნქცია ტოლია:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2nx + 2p_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\cos 2nx \cos 2p_n - \sin 2nx \sin 2p_n].$$

ამიტომ

$$\int_F \cos^2(nx+p_n)dx = \frac{1}{2}|E|+$$

$$+\frac{1}{2}\cos 2p_n \int_E \cos 2nxdx - \frac{1}{2}\sin 2p_n \int_E \sin 2nxdx. \qquad (10)$$

მაგრამ $\frac{1}{\pi}\int_E \cos 2nxdx$ და $\frac{1}{\pi}\int_E \sin 2nxdx$ წარმოადგენენ E სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქციის, რომელიც E-ზე 1-ია და სხვაგან კი ნული, ფურიეს კოეფიციენტებს. ამიტომ თეორემა 9.2-ის ძალით ამ ინტეგრალების ზღვარი ნულია, როცა $n \to \infty$. ამავე დროს $\cos 2p_n$ და $\sin 2p_n$ მამრავლები შემოსაზღვრულია. ამგვარად, ტოლობა (9) გამომდინარეობს (10)-დან.

შედეგი 9.4. თუ რაიმე ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტები არ ისწრაფვიან ნულისკენ, მაშინ ეს მწკრივი არ არის $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი და 2π პერიოდული რაიმე ფუნქციის ფურიეს მწკრივი.

შენიშვნა 9.5. როგორც ვნახეთ, ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ კრებადია ნულისკენ. დადგენილია, რომ ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს, საზოგადოდ, არ შეიძლება ჰქონდეთ სიმცირის რაიმე რიგი. უფრო ზუსტად: ნულისკენ ნებისმიერად ნელა კრებადი ε_n მიმდევრობისთვის არსებობს ფურიეს მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, რომლის კოეფიციენტები $a_k \geq \varepsilon_k$ $(k=1,2,\dots)$. ამ საკითხთან დაკავშირებით იხილე [7], გვ. 222.

10 სასრული ვარიაციით ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები

როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ, პერიოდზე ჯამებადი და 2π პერიოდული ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ არ შეიძლება ჰქონდეთ სიმცირის რაიმე რიგი.

ჩვენ ვისაუბრებთ სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციის კოეფიციენტებზე ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ, რომელთაც აქვთ $\frac{1}{n}$-ის სიმცირის რიგი.

1. მანამდე აღვნიშნოთ 1882 წელს ჟორდანის მიერ შემოღებული სასრული ვარიაციით ფუნქციის ზოგიერთი თვისება.

განსაზღვრა 10.1 (ჟორდანი, 1882 წ.). ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია სასრული f ფუნქცია. დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი ქვესეგმენტებად შემდეგი წერტილებით $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ და შევადგინოთ ჯამი $s = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$. $[a,b]$ სეგმენტის ყოველ დანაწილებას შეესაბამება არაუარყოფითი რიცხვი s და H-ით აღვნიშნოთ ყველა ასეთი s რიცხვის სიმრალე. H სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი აღინიშნება $\overset{b}{\underset{a}{\vee}}(f)$ სიმბოლოთი და მას ეწოდება f ფუნქციის **სრული ვარიაცია** $[a,b]$ სეგმენტზე. თუ $\overset{b}{\underset{a}{\vee}} < +\infty$, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება **ფუნქცია სასრული ვარიაციით** $[a,b]$ სეგმენტზე.

მტკიცდება, რომ $[a,b]$ სეგმენტზე ზრდად და კლებად ფუნქციებს სასრული ვარიაცია აქვთ იმავე სეგმენტზე.

სასრული ვარიაცია აქვთ 1864 წელს **ლიპშიცის** მიერ შემოღებულ ფუნქციებსაც.

განსაზღვრა 10.2 (ლიპშიცი, 1864 წ.). $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ სასრულ f ფუნქციას ეწოდება **ლიპშიცის** კლასის, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი K, რომ ყოველი $x \in [a,b]$ და $y \in [a,b]$ წერტილებისთვის სრულდება უტოლობა ანუ, ლიპშიცის პირობა მაჩვენებლით 1,

$$|f(x) - f(y)| \le K|x - y|. \tag{1}$$

$[a,b]$ სეგმენტზე ლიპშიცის კლასის f ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია და მისი ვარიაცია $[a,b]$ სეგმენტზე არ აღემატება $K(b-a)$ რიცხვს. მართლაც, $[a,b]$ სეგმენტის ზემოთ აღებული დანაწილებისთვის, (1)-დან ვღებულობთ $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le K(x_{k+1} - x_k)$ და ამიტომ $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le K \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = K[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})] = K(x_n - x_0) = K(b-a)$.

ცხადია, რომ $[a,b]$ სეგმენტზე ლიპშიცის კლასის f ფუნქცია უწყვეტია ამავე სეგმენტზე. თუკი, გარდა ამისა, f ფუნქციას $[a,b]$-ს ყველა შიგა წერტილზე აქვს $f'(x)$ წარმოებული, $a < x < b$, და თუ ეს $f'(x)$ შემოსაზღვრულია, მაშინ f არის ლიპშიცის კლასის $[a,b]$-ზე. მართლაც, ლაგრანჟის ფორმულით $f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$, $x < z < y$ და (1) შესრულებულია $K \ge |f'(z)|$ მუდმივისთვის.

$[a,b]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის მქონე f ფუნქცია შემოსაზღვრულიცაა $[a,b]$-ზე. მართლაც, თუ $a \le x \le b$, მაშინ $|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \le \overset{b}{\underset{a}{\vee}}(f)$, კერძოდ $|f(x) - f(a)| \le \overset{b}{\underset{a}{\vee}}(f)$ ანუ $|f(x)| - |f(a)| \le \overset{b}{\underset{a}{\vee}}(f)$. აქედან, $|f(x)| \le |f(a)| + \overset{b}{\underset{a}{\vee}}(f)$.

სასრული ვარიაციით ფუნქციების ძალიან მნიშვნელოვანი თვისება მოცემულია შემდეგი თეორემით.

თეორემა 10.3 (ლებეგი, 1903 წ.). $[a,b]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციით f ფუნქციას, კერძოდ, ლიპშიცის კლასის ფუნქციას[2], თითქმის ყველა $x \in [a,b]$ წერტილზე გააჩნია $f'(x)$ წარმოებული და $f'(x)$ ფუნქცია ჯამებადია $[a,b]$-ზე, კერძოდ, $f'(x)$ სასრულია თითქმის ყველგან.

ეს იყო პირველი შემთხვევა, როცა დასახელდა კლასი ფუნქციებისა, რომელთაც სასრული წარმოებული აქვთ თითქმის ყველგან. ლებეგის ამ თეორემასთან დაკავშირებით მ. რისი წერდა: "ეს არის ანალიზის უმნიშვნელოვანესი და განსაცვიფრებელი შედეგი".

2. ახლა ვისაუბრებთ 2π პერიოდული და $[0,2\pi]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის მქონე f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტების შესახებ ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ. თავიდანვე აღვნიშნოთ, რომ რადგან $[0,2\pi]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციით f ფუნქცია შემოსაზღვრულია $[0,2\pi]$-ზე, ამიტომ $f \in L^2[0,2\pi]$-ს და მისი ფურიეს კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ (იხ. §6, ტოლობა (6)). ამ ფაქტის არსებითი გაძლიერებაა

თეორემა 10.4. თუ 2π პერიოდული და $[0,2\pi]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის მქონე f ფუნქციის ფურიეს მწკრივია

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{2}$$

მაშინ ადგილი აქვს უტოლობებს

$$|a_n| \le \frac{\overset{2\pi}{\underset{0}{\vee}}(f)}{2} \cdot \frac{1}{n}, \quad |b_n| \le \frac{\overset{2\pi}{\underset{0}{\vee}}(f)}{2} \cdot \frac{1}{n}, \tag{3}$$

სადაც $\overset{2\pi}{\underset{0}{\vee}}(f)$ არის f ფუნქციის სრული ვარიაცია $[0,2\pi]$ სეგმენტზე. (3) უტოლობებს მოკლედ ასე წერენ:

$$a_n = O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad b_n = O\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{4}$$

[2] ლიპშიცის კლასის ფუნქციისთვის გარანტირებული არ არის მისი წარმოებულის **ყველგან** არსებობა. მაგალითად, $\psi(x) = |x|$ ფუნქციისთვის არ არსებობს $\psi'(0)$ (0 წერტილზე მისი მარჯვენა წარმოებულია 1, ხოლო მარცხენა წარმოებული კი (-1)), თუმცა $\psi(x)$ ფუნქცია ლიპშიცის კლასისაა, რადგანაც $||x_1| - |x_2|| \le |x_1 - x_2|$.

გარდა ამისა, ლიპშიცის კლასის ფუნქციის წარმოებული, სადაც იგი არსებობს, არ შეიძლება **უსასრულობა** იყოს.

დამტკიცება. x იყოს რაიმე წერტილი $[0,2\pi]$ სეგმენტზე და 2π სიგრძის $[x,x+2\pi]$ სეგმენტი დავყოთ $2n$ რაოდენობის ქვესეგმენტებად $[x,x+\frac{\pi}{n}]$, $[x+\frac{\pi}{n},x+2\frac{\pi}{n}],\dots,[x+(2n-1)\frac{\pi}{n},x+2n\frac{\pi}{n}]$. რადგან f არის სასრული ვარიაციის მქონე $[0,2\pi]$-ზე და 2π პერიოდული, ამიტომ f-ის ვარიაცია არის ერთიდაიგივე 2π სიგრძის ყოველ სეგმენტზე, მათ შორის $[x,x+2\pi]$-ზეც. ამიტომ

$$\sum_{k=1}^{2n}\Big|f\Big(x+k\frac{\pi}{n}\Big)-f\Big(x+(k-1)\frac{\pi}{n}\Big)\Big|\le\bigvee_0^{2\pi}(f). \tag{5}$$

თუ ტოლობაში

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx \tag{6}$$

მოვახდენთ გარდაქმნას $x=t+\frac{\pi}{n}$, მივიღებთ $a_n=-\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{-\pi}{n}+2\pi}f(t+\frac{\pi}{n})\cos ntdt$. უკანასკნელი ინტეგრალისთვის ცნობილი ტოლობის (იხ. თავი 1, §3, ტოლობა (8)) გამოყენებით მივიღებთ:

$$a_n=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f\Big(x+\frac{\pi}{n}\Big)\cos nxdx. \tag{7}$$

(6) და (7) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$2a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big[f(x)-f\Big(x+\frac{\pi}{n}\Big)\Big]\cos nxdx, \tag{8}$$

საიდანაც

$$|a_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|f\Big(x+\frac{\pi}{n}\Big)-f(x)\Big|dx. \tag{9}$$

მეორე მხრივ, $x+(k-1)\frac{\pi}{n}=t$ გარდაქმნით მივიღებთ

$$\int_0^{2\pi}\Big|f(x+k)\frac{\pi}{n}-f\Big(x+(k-1)\frac{\pi}{n}\Big)\Big|dx=$$

$$\int_{-(k-1)\frac{\pi}{n}}^{-(k-1)\frac{\pi}{n}+2\pi}\Big|f\Big(t+\frac{\pi}{n}\Big)-f(t)\Big|dt=\int_0^{2\pi}\Big|f\Big(x+\frac{\pi}{n}\Big)-f(x)\Big|dx. \tag{10}$$

(9) და (10) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|f\Big(x+k\frac{\pi}{n}\Big)-f\Big(x+(k-1)\frac{\pi}{n}\Big)\Big|dx. \tag{11}$$

თუ (11) უტოლობებს შევკრებთ მნიშვნელობებისთვის $k=1,2,\dots,2n$ და გავითვალისწინებთ (5) უტოლობას, მივიღებთ:

$$2n|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\cdot \overset{2\pi}{\underset{0}{\vee}}(f)\int_0^{2\pi}dx = \overset{2\pi}{\underset{0}{\vee}}(f).$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$2n|b_n| \le \overset{2\pi}{\underset{0}{\vee}}(f).$$

ამრიგად, (3) უტოლობანი მართებულია.

შენიშვნა 10.5. როგორც ცნობილია, სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს წყვეტის წერტილები, ისიც მხოლოდ პირველი გვარის. ბუნებრივია კითხვა: ხომ არ შეიძლება (4) დამოკიდებულებანი გაუმჯობესდეს ფორმით $a_n=0(\frac{1}{n})$ და $b_n=0(\frac{1}{n})$, თუ სასრული ვარიაციის f ფუნქცია იქნება 2π პერიოდული და უწყვეტი $(-\infty,+\infty)$-ზე ანუ უწყვეტი წრეწირზე?

პასუხი უარყოფითია (იხ. [7], გვ. 203).

შენიშვნა 10.6. არსებობს სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებზე აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ეს ფუნქცია იყოს უწყვეტი. სახელდობრ, მართებულია ვინერის შემდეგი (იხ. [7], გვ. 205)

თეორემა 10.7 (ვინერი, 1924 წ.). სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციის უწყვეტობისთვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1+2p_2+\dots+np_n}{n}=0, \tag{12}$$

სადაც $p_n^2=a_n^2+b_n^2$.

შედეგი 10.8 ([7], გვ. 208). სასრული ვარიაციის მქონე f ფუნქციის ფურიეს a_n და b_n კოეფიციენტები თუ აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\lim_{n\to\infty} na_n=0,\quad \lim_{n\to\infty} nb_n=0, \tag{13}$$

მაშინ f ფუნქცია უწყვეტია.

შენიშვნა 10.9 ([7], გვ. 203). არსებობს უწყვეტი და სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქცია, რომლის ფურიეს a_n და b_n კოეფიციენტები არ აკმაყოფილებენ (13) პირობას და აკმაყოფილებენ მხოლოდ (4) პირობას 10.4. თეორემიდან.

11 პარამეტრიანი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტების ნულისკენ თანაბრად კრებადობა

§9-ში დამტკიცებული რიმან-ლებეგის თეორემის თანახმად, ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ კრებადია ნულისკენ.

ფურიეს მწკრივის კრებადობის საკითხში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს **პლესნერის** თეორემა იმის შესახებ, რომ პარამეტრზე დამოკიდებული ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის, **თანაბრად** პარამეტრის მიმართ კრებადია ნულისკენ.

ამ თეორემაში არსებითი მომენტია თანაბრად კრებადობა, რადგან პარამეტრის ყოველი ფიქსირებული მნიშვნელობისთვის კოეფიციენტების ნულისკენ კრებადობა გამომდინარეობს რიმან-ლებეგის თეორემიდან!

პლესნერის თეორემის დამტკიცება ემყარება რამდენიმე, თავისთავად საინტერესო ფაქტს.

1. სწორედ ამ ფაქტებით ვიწყებთ.

თეორემა 11.1. ვთქვათ, f ფუნქცია ჯამებადია $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე და 2π პერიოდული. მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $[0, 2\pi]$-ზე უწყვეტი φ ფუნქცია ისეთი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon. \tag{1}$$

დამტკიცება. ლებეგის ინტეგრალის განსაზღვრის თანახმად[3], არ-

[3]რადგან f ფუნქცია ჯამებადია $[0, 2\pi]$-ზე, ამიტომ არსებობს ([15], 338) მარტივ ფუნქციათა (f_n) მიმდევრობა, რომელიც თანაბრად კრებადია $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე f ფუნქციისკენ ანუ მოცემული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $N(\varepsilon)$, რომ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4\pi}$, როცა $0 \leq x \leq 2\pi$ და $n > N$. ამიტომ, როცა $n > N$, მაშინ $\int_0^{2\pi} |f(x) - f_n(x)| dx < 2\pi \cdot \frac{\varepsilon}{4\pi} = \varepsilon/2$. თუ ახლა ψ ფუნქციად ავიღებთ რომელიმე f_n-ს, სადაც $n > N$, მაშინ გვექნება (2) უტოლობა.

ამასთან, ზომად f_n ფუნქციას ეწოდება **მარტივი**, თუ f_n ფუნქციის მიერ $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე მიღებულ მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრულია ან თვლადი ([15], გვ. 336-338).

სებობს $[0, 2\pi]$-ზე შემოსაზღვრული და 2π პერიოდული ფუნქცია ψ ისეთი, რომ

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \psi(x)|dx < \varepsilon/2. \tag{2}$$

$[0, 2\pi]$ სეგმენტზე განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Psi(x) = \int_0^x \psi(t)dt \tag{3}$$

და უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$\psi_n(x) = \frac{\Psi(x + 1/n) - \Psi(x)}{1/n} = \frac{\int_x^{x+1/n} \psi(t)dt}{1/n}. \tag{4}$$

რადგან ψ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს ისეთი მუდმივი M, რომ $|\psi(x)| \le M$, როცა $0 \le x \le 2\pi$. ამის გამო

$$|\psi_n(x)| \le \frac{M \int_x^{x+1/n} dx}{1/n} = M,$$

ე.ი. ფუნქციათა (ψ_n) მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია:

$$|\psi_n(x)| \le M, \quad \text{როცა} \quad 0 \le x \le 2\pi \quad \text{და} \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

გარდა ამისა, ცვლადსაზღვრიანი ინტეგრალის გაწარმოების შესახებ ლებეგის თეორემის თანახმად ([15], გვ. 380), თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$-ისთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x) \tag{6}$$

და (5) უტოლობის ძალით

$$|\psi(x)| \le M. \tag{7}$$

ეგოროვის მიერ 1911 წელს დამტკიცებული თეორემის თანახმად ([15], გვ. 329), (6) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი დადებითი $\delta < \varepsilon/8M$ რიცხვისთვის არსებობს ზომადი სიმრავლე $E \subset [0, 2\pi]$, რომლის ზომა $|E| > 2\pi - \delta$ და E სიმრავლეზე (6) ტოლობა სრულდება თანაბრად. ამიტომ

$$\int_E |\psi_n(x) - \psi(x)|dx < \varepsilon/4, \quad \text{როცა} \quad n > N^*. \tag{8}$$

ამასთან ერთად, (5) და (7) უტოლობების გათვალისწინებით გვაქვს

$$\int\limits_{[0,2\pi]\setminus E} |\psi_n(x) - \psi(x)|dx \le \int\limits_{[0,2\pi]\setminus E} |\psi_n(x)|dx +$$

$$+ \int\limits_{[0,2\pi]\setminus E} |\psi(x)|dx \le M\delta + M\delta = 2M\delta < \varepsilon/4. \qquad (9)$$

მაშასადამე, (8) და (9) უტოლობებიდან ვღებულობთ

$$\int\limits_0^{2\pi} |\psi_n(x) - \psi(x)|dx < \varepsilon/2, \quad \text{როცა} \quad n > N^*. \qquad (10)$$

(2) და (10) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(x) - \psi_n(x)|dx < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n > N^*. \qquad (11)$$

ახლა, თეორემაში ხსენებული უწყვეტი φ ფუნქციის როლში შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი ψ_n ფუნქცია, რომლისთვისაც $n > N^*$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11.2. ვთქვათ, f ფუნქცია ჯამებადია $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე და 2π პერიოდული. მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|dx = 0. \qquad (12)$$

დამტკიცება. თუ f ფუნქცია უწყვეტია $[0, 2\pi]$-ზე, მაშინ f თანაბრად უწყვეტია ამავე სეგმენტზე. ამის გამო, ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს მოეძებნება დადებითი δ ისეთი, რომ $|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$, როცა $|t| < \delta$. ამ მიზეზით $\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|dx < 2\pi \cdot \frac{\varepsilon}{2\pi} = \varepsilon$, როცა $|t| < \delta$, რაც ნიშნავს (12) ტოლობის შესრულებას.

როცა $f \in L[0, 2\pi]$, მაშინ თეორემა 11.1-ის ძალით არსებობს უწყვეტი ფუნქცია φ ისეთი, რომ ადგილი აქვს (1) უტოლობას. ტოლობიდან $f(x+t) - f(x) = [\varphi(x+t) - \varphi(x)] + [f(x+t) - \varphi(x+t)] +$

$[\varphi(x)-f(x)]$ გამომდინარეობს შეფასება

$$\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|dx \le \int_0^{2\pi}|\varphi(x+t)-\varphi(x)|dx+$$

$$+\int_0^{2\pi}|f(x+t)-\varphi(x+t)|dx+\int_0^{2\pi}|\varphi(x)-f(x)|dx \equiv P+Q+R.$$

რადგან φ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ უკვე დამტკიცებულის ძალით

$$\lim_{t\to 0} P = 0 \Leftrightarrow P<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad |t|<\eta. \tag{13}$$

(1) უტოლობის გამო კი

$$R<\varepsilon. \tag{14}$$

Q ინტეგრალში $x+t=y$ გარდაქმნით $Q=\int_t^{t+2\pi}|f(y)-\varphi(y)|dy$. რადგან f და φ (იგივე ψ_n, როცა $n>N^*$) 2π პერიოდული ფუნქციებია[4], ამიტომ $Q=\int_0^{2\pi}|f(y)-\varphi(y)|$. ახლა, (1) უტოლობის გამო

$$Q<\varepsilon. \tag{15}$$

(13)-(15) უტოლობების ძალით

$$\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|dx<3\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad |t|<\eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

2. ახლა დავამტკიცოთ ძირითადი

თეორემა 11.3 (პლესნერი, 1929 წ.). ვთქვათ მოცემულია 2π პერიოდული ფუნქციები f და g, რომელთაგან $[0,2\pi]$-ზე f ჯამებადია და g კი შემოსაზღვრული. მაშინ $x\in(-\infty,+\infty)$ პარამეტრზე დამოკიდებული და $0\le t\le 2\pi$-ზე ჯამებადი ფუნქციის

$$\chi_x(t)=f(x+t)g(t) \tag{16}$$

ფურიეს კოეფიციენტები $c_n(\chi_x)$ კრებადია ნულისკენ **თანაბრად** x-ის მიმართ, ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty} c_n(\chi_x)=0 \quad \text{თანაბრად} \quad x\text{-ის მიმართ}. \tag{17}$$

[4] $\psi_n(2\pi)=\frac{\int_{2\pi}^{2\pi+1/n}\psi(t)dt}{1/n}=\frac{\int_0^{1/n}\psi(t)dt}{1/n}=\psi_n(0)$. აქ გამოყენებულია ψ ფუნქციის 2π პერიოდულობა (იხ. თავი 1, §3, ტოლობა (8)).

დამტკიცება. როგორც ვიცით (იხ. თავი 2, §2, (6) ტოლობა), 2π პერიოდული რაიმე $\varphi \in L[0,2\pi]$ ფუნქციის c_n კოეფიციენტებისთვის გვაქვს ტოლობები $2\pi c_n = \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-inx} dx$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. თუ აქ მოვახდენთ გარდაქმნას $x = t + \pi/n$, მაშინ გვექნება

$$2\pi c_n = \int\limits_{-\pi/n}^{-\pi/n+2\pi} \varphi\Big(t+\frac{\pi}{n}\Big) e^{-in(t+\frac{\pi}{n})} dt = \int\limits_0^{2\pi} \varphi\Big(t+\frac{\pi}{n}\Big) e^{-int} e^{-i\pi} dt =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} \varphi\Big(x+\frac{\pi}{n}\Big) e^{-inx} dx.$$

ამრიგად,

$$2\pi c_n = \int\limits_0^{-2\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx \quad \text{და} \quad 2\pi c_n = -\int\limits_0^{2\pi} \varphi\Big(x+\frac{\pi}{n}\Big) e^{-inx} dx.$$

ამიტომ

$$4\pi c_n = \int\limits_0^{2\pi} \Big[\varphi(x) - \varphi\Big(x+\frac{\pi}{n}\Big)\Big] e^{-inx} dx.$$

აქედან

$$|c_n| \le \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Big|\varphi\Big(x+\frac{\pi}{n}\Big) - \varphi(x)\Big| dx. \tag{18}$$

ახლა, (18) უტოლობის მარჯვენა მხარეში φ ფუნქციის როლში ავიღოთ (16) ტოლობით განსაზღვრული $\chi_x(t)$ ფუნქცია, π/n შევცვალოთ h-ით და გავითვალისწინოთ ტოლობა

$$\chi(t+h) - \chi(t) = f(x+t+h)g(t+h) - f(x+t)g(t) =$$
$$= [f(x+t+h) - f(x+t)]g(t+h) + f(x+t)[g(t+h) - g(t)],$$

მაშინ გვექნება

$$\int\limits_0^{2\pi} |\chi(t+h) - \chi(t)| dt \le \int\limits_0^{2\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)|\,|g(t+h)| dt +$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} |f(x+t)|\,|g(t+h) - g(t)| dt \equiv P + Q.$$

თუ P ინტეგრალში მოვახდენთ გარდაქმნას $x+t=y$, მივიღებთ

$$P = \int_x^{x+2\pi} |f(y+h)-f(y)|\,|g(y-x+h)|dy.$$

f და g ფუნქციების 2π პერიოდულობის გამო (იხ. თავი 1, §3, ტოლობა (8)) გვექნება

$$P = \int_0^{2\pi} |f(y+h)-f(y)|\,|g(y-x+h)|dy.$$

g ფუნქციის შემოსაზღვრულობის გამო $|g|<M$ და ამიტომ

$$P \le M\int_0^{2\pi} |f(y+h)-f(y)|dy.$$

(12) ტოლობის ძალით არსებობს ისეთი $\delta_1>0$, რომ

$$P<\varepsilon/2, \quad \text{როცა} \quad |h|<\delta_1. \tag{19}$$

Q ინტეგრალში კი f წარმოვადგინოთ $f=f_1+f_2$ სახით, სადაც f_1 შემოსაზღვრულია $[0,2\pi]$-ზე რაიმე B რიცხვით და $\int_0^{2\pi}|f_2(x)|dx<\varepsilon/8M$ (იხ. უტოლობა (2)). ამიტომ

$$Q = \int_0^{2\pi} |f_1(x+t)|\,|g(t+h)-g(t)|dt + \int_0^{2\pi} |f_2(x+t)|\,|g(t+h)-g(t)|dt \le$$

$$\le B\int_0^{2\pi} |g(t+h)-g(t)|dt + 2M\cdot\frac{\varepsilon}{8M}.$$

(12) ტოლობის გამო $\int_0^{2\pi}|g(t+h)-g(t)|dt<\frac{\varepsilon}{4B}$, როცა $|h|<\delta_2$. ამგვარად,

$$Q \le B\frac{\varepsilon}{4B}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon/2, \quad \text{როცა} \quad |h|<\delta_2. \tag{20}$$

(19) და (20) შეფასებებიდან ვღებულობთ, რომ

$$P+Q<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad |h|<\delta, \quad \text{სადაც} \quad \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0. \tag{21}$$

(21) უტოლობა კერძო შემთხვევისთვის $h = \frac{\pi}{n}$ მიიღებს სახეს

$$P + Q < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n > N(\varepsilon). \tag{22}$$

(22) უტოლობის გამოყენება (18) უტოლობის მარჯვენა მხარის მიმართ იძლევა (17) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

12 ფორმალური ოპერაციები ფურიეს მწკრივებზე

1. **ფორმალური ინტეგრება და გაწარმოება.** ვთქვათ 2π პერიოდული f ფუნქცია ჯამებადია პერიოდზე და F_c იყოს f-ის განუსაზღვრელი ინტეგრალი.[5] ცხადია, რომ $F_c(x)$ ფუნქციის 2π პერიოდულობისთვის ანუ $F_c(x+2\pi) - F_c(x) = 0$ ტოლობისთვის, აუცილებელი და საკმარისია 2π პერიოდული იყოს ფუნქცია $F(x) \equiv F_0(x) = \int_0^x f(t)dt$. ამიტომ $F(x)$ ფუნქციის 2π პერიოდულობისთვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობა $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$ (იხ. თავი 1, §2, (4) ტოლობა). ეს კი ნიშნავს, რომ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივში თავისუფალი c_0 წევრი ნულია, ე.ი.

$$f \sim \sum_{|k| \geq 1} c_k(f) e^{ikx}, \tag{1}$$

---

[5] $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი f ფუნქციის **განუსაზღვრელი ინტეგრალი** (ლებეგის აზრით) ეწოდება ფუნქციათა სიმრავლეს

$$F_c(x) = c + \int_0^x f(t)dt, \quad F_c(0) = c, \tag{ა}$$

სადაც c აღნიშნავს ნებისმიერ მუდმივს, ე.ი. f-ს აქვს უსასრულო სიმრავლე განუსაზღვრელი ინტეგრალებისა, რომელნიც ერთიმეორისგან მუდმივით განსხვავდებიან.

(ა) ტოლობით განსაზღვრული აბსოლუტურად უწყვეტი F_c ფუნქციების საერთო თვისებაა ის, რომ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე სრულდება ტოლობა

$$F_c'(x) = f(x). \tag{ბ}$$

სახელდობრ, (ბ) ტოლობას ადგილი აქვს f ფუნქციის ლებეგის x წერტილზე. ასე ეწოდება x წერტილს, თუ $f(x) \neq \pm\infty$ და სრულდება ტოლობა

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0.$$

სადაც

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F'(x)e^{-ikx}dx.$$

ნაწილობითი ინტეგრებით და $F(x)$ ფუნქციის 2π პერიოდულობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\Big[F(x)e^{ikx}\big|_0^{2\pi}\Big] - \frac{(-ik)}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)e^{-ikx}dx = ik\cdot c_k(F),$$

ე.ი.

$$c_k(f) = ikc_k(F), \quad |k| \geq 1. \tag{2}$$

ამრიგად, დამოკიდებულება

$$F(x) \sim \sum_{|k|\geq 1} c_k(F)e^{ikx} \tag{3}$$

მიიღებს სახეს

$$F(x) \sim \sum_{|k|\geq 1} \frac{c_k(f)}{ik}e^{ikx}. \tag{4}$$

ტოლობა (2)-ის მარცხენა მხარის მიმართ რიმან-ლებეგის თეორემის გამოყენებით (იხ. თავი 3, §9, თეორემა 9.2) მიიღება

წინადადება 12.1. აბსოლუტურად უწყვეტი F ფუნქციის ფურიეს $c_n(F)$ კოეფიციენტებს აქვთ თვისება

$$\lim_{n\to\infty} |nc_n(F)| = 0 \quad \text{ანუ} \quad c_n(F) = o\Big(\frac{1}{|n|}\Big). \tag{4'}$$

(4)-ე დამოკიდებულება შეიძლება გამოითქვას შემდეგი წინადადების სახით.

წინადადება 12.2. პერიოდზე ჯამებადი და 2π პერიოდული f ფუნქციის ფურიეს (1) მწკრივის **ფორმალური წევრობრივი ინტეგრება** შესაძლებელია $\sim$ სიმბოლოს შენარჩუნებით.

თუკი $F(x)$ ფუნქცია არაა 2π პერიოდული, მაშინ (4) დამოკიდებულებას ექნება სახე, რომლის მარცხენა მხარე 2π პერიოდულია,

$$F(x) - c_0(f)x \sim \sum_{|k|\geq 1} \frac{c_k(f)}{ik}e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(a_k \sin kx - b_k \cos kx). \tag{5}$$

შენიშვნა 12.3. ფურიეს მწკრივის **არაფორმალური წევრობრივი ინტეგრების** მართლზომიერება დამტკიცებულ იქნება ქვემოთ (იხ. თავი 4, §15), სადაც დადგენილ იქნება, რომ (5) დამოკიდებულებაში შესაბამისობის $''\sim''$ ნიშანი იცვლება ტოლობის $''=''$ ნიშნით.

2. რადგან $F'(x) = f(x)$ თითქმის ყველგან, ამიტომ 2π პერიოდული აბსოლუტურად უწყვეტი $F(x)$ ფუნქციის ფურიეს (4) მწკრივიდან (1) მწკრივზე გადასვლა შეიძლება ასე გამოითქვას.

წინადადება 12.4. აბსოლუტურად უწყვეტი 2π პერიოდული ფუნქციის ფურიეს მწკრივის **ფორმალური წევრობრივი გაწარმოებით** მიიღება წარმოებულის შესაბამისი ფურიეს მწკრივი.

ამ წინადადებაში აბსოლუტურად უწყვეტობა არსებითია, რასაც გვიჩვენებს მაგალითი ფურიეს ყველგან კრებადი მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$. სხვა სიტყვებით: ჯამებადი 2π პერიოდული φ ფუნქციის ფურიეს $(\alpha_k, \beta_k, k \geq 1)$ კოეფიციენტების მისაღებად აუცილებელი და საკმარისია, რომ აბსოლუტურად უწყვეტი და 2π პერიოდული $\phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt - \frac{1}{2}\alpha_0 x$ ფუნქციისთვის შევადგინოთ ფურიეს $(A_k, B_k, k \geq 1)$ კოეფიციენტებიანი მწკრივი. ეს მწკრივი კი მიიღება $(\varphi - \frac{1}{2}\alpha_0)$ ფუნქციის ფურიეს $(\alpha_k, \beta_k, \geq 1)$ კოეფიციენტებიანი მწკრივის წევრობრივი ინტეგრებით $[0, x]$ სეგმენტზე, რაც მართლზომიერია ლებეგის თეორემით (იხ. თავი 4, §15). წევრობრივი ინტეგრების შედეგია, მუდმივი შესაკრების სიზუსტით, მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} \Big(-\frac{\beta_k}{k}\cos kx + \frac{\alpha_k}{k}\sin kx\Big)$, რომლის წევრობრივი გაწარმოებით მიიღება სწორედ φ ფუნქციის $(\alpha_k, \beta_k, k \geq 1)$ კოეფიციენტებიანი მწკრივი.

3. ვთქვათ 2π პერიოდულ და $(-\infty, +\infty)$-ზე უწყვეტ f ფუნქციას აქვს აბსოლუტურად უწყვეტი წარმოებული $f'(x)$. მაშინ მეორე რიგის წარმოებული $f''(x)$ ჯამებადია და მისი ფურიეს $c_n(f'')$ კოეფიციენტები, რიმან-ლებეგის თეორემის ძალით, კრებადია ნულისკენ:

$$\lim_{n\to\infty} c_n(f'') = 0. \tag{6}$$

მეორე მხრივ, აბსოლუტურად უწყვეტი f' ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები, ტოლობა (2)-ის გამო[6], მოიცემა ტოლობით $c_n(f') = \frac{1}{in}c_n(f'')$. ასევე, $c_n(f) = \frac{1}{in}c_n(f') = \frac{1}{(in)^2}c_n(f'')$. აქედან, (6) ტოლობის ძალით, ვღებულობთ

$$c_n(f) = o\Big(\frac{1}{|n|^2}\Big). \tag{7}$$

[6](2) ტოლობის მარცხნივ მდგომი f არის მარჯვნივ მდგომი F-ის წარმოებული.

თუ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ნამდვილი ფორმითაა მოცემული და $f \sim (a_n, b_n)$, მაშინ (7) შეიცვლება დამოკიდებულებებით

$$a_n = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \quad b_n = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \tag{8}$$

4. **ფურიეს მწკრივების შეკრება-გამოკლება.** თუ f და g ფუნქციებს შეესაბამებათ ფურიეს შემდეგი მწკრივები

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} \tag{9}$$

$$g \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(g) e^{inx}, \tag{10}$$

მაშინ

$$f \pm g \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n \pm d_n) e^{inx}. \tag{11}$$

მართლაც,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(x) \pm g(x)] e^{-inx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \pm \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} dx = c_n \pm d_n.$$

თუ ფურიეს მწკრივი ჩაწერილია ნამდვილი ფორმით და $f \sim (a_n, b_n)$ და $g \sim (c_n, d_n)$, მაშინ $f \pm g \sim (a_n \pm c_n, b_n \pm d_n)$.

5. **ფურიეს მწკრივის გამრავლება მუდმივზე.** ნებისმიერი p მუდმივისთვის, (9) დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$pf \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (pc_n(f)) e^{inx}. \tag{12}$$

6. **ფურიეს მწკრივი $f(x+\alpha)$-სთვის.** თუ α ნებისმიერი მუდმივია, მაშინ (9) დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს

$$f(x+\alpha) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in(x+\alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (e^{in\alpha}) c_n(f) e^{inx}. \tag{13}$$

მართლაც,

$$c_n(f(x+\alpha)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+\alpha)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(y)e^{in(y-\alpha)}dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(y)e^{-in(y-\alpha)}dy = e^{in\alpha}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iny}dy = e^{in\alpha}c_n(f).$$

მაშასადამე, $f(x+\alpha)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი მიიღება $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივისგან, თუ აქ x-ს შევცვლით $(x+\alpha)$-თი, რაც გამოიწვევს $c_n(f)$ კოეფიციენტის გამრავლებას $e^{in\alpha}$-ზე.

7. **ფურიეს მწკრივი $f(x)e^{imx}$ ფუნქციისთვის, სადაც m მთელია.** რადგან

$$c_n(f(x)e^{imx}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{imx}e^{-inx}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-i(n-m)x}dx = c_{n-m}(f),$$

ამიტომ

$$f(x)e^{imx} \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n-m}(f)e^{inx}, \tag{14}$$

რომლის მიღება შეიძლება ფორმალურადაც

$$f(x)e^{imx} \sim \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\right)e^{imx} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i(n+m)x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{k-m}e^{ikx}. \tag{15}$$

8. **$|f|$-ის მწკრივი.** რადგან f და $|f|$ ერთდროულად არიან ან არ არიან ჯამებადი ფუნქციები, ამიტომ ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივთან შეიძლება დავაკავშიროთ ასევე ჯამებადი $|f|$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი. მართლაც, ვთქვათ

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \tag{16}$$

სადაც (იხ. თავი 2, §2)

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-n}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \tag{17}$$

რადგან არსებობს[7] ([1], გვ. 454) წარმოდგენა $f = f_1 - f_2$, სადაც $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$ და $|f| = f_1 + f_2$, ამიტომ (17) ტოლობიდან ვღებულობთ, (11) ტოლობის ძალით, $c_n(f) = c_n(f_1) - c_n(f_2)$ და ასევე $c_n(|f|) = c_n(f_1) + c_n(f_2)$. ამიტომ

$$|f| \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n(f_1) + c_n(f_2)] e^{inx}. \tag{18}$$

[7] $f_1(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| + f(x)] \geq 0$, $f_2(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| - f(x)] \geq 0$ ჯამებადი ფუნქციებია f-ისა და $|f|$-ის ჯამებადობის გამო. აქედან, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ და $\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f_1(x)dx - \int_0^{2\pi} f_2(x)dx$.

თავი 4

კრებადობის საკითხები

1 ფურიეს მწკრივის აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადობის მარტივი შემთხვევა

თეორემა 1.1. ვთქვათ, 2π პერიოდულ და $(-\infty,+\infty)$-ზე უწყვეტ f ფუნქციას გააჩნია პერიოდზე ჯამებადი[1] მეორე რიგის წარმოებული $f''(x)$, $x \in (-\infty,+\infty)$. მაშინ f ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

აბსოლუტურად კრებადია ყველა $x \in (-\infty,+\infty)$ წერტილზე. გარდა ამისა, (1) მწკრივი ნებისმიერ $[a,b] \subset (-\infty,+\infty)$ სეგმენტზე **თანაბრად** კრებადია $f(x)$ ფუნქციისკენ:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{თანაბრად} \quad [a,b] - \text{ზე}. \tag{2}$$

დამტკიცება. თეორემის პირობებში გვაქვს ტოლობანი (იხ. თავი 3, §12)

$$a_n = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \quad \text{და} \quad b_n = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \tag{3}$$

ანუ $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$ და $\lim_{n\to\infty} n^2 b_n = 0$. აქედან გამომდინარეობს $(n^2 a_n)$ და $(n^2 b_n)$ მიმდევრობების შემოსაზღვრულობა ანუ არსებობა

[1] 2π პერიოდული და $(-\infty,+\infty)$-ზე მეორე რიგის $f''(x)$ წარმოებულის მქონე f ფუნქციისთვის, $f''(x)$ არის 2π პერიოდული ფუნქცია (იხ. თავი 1, §2, მტკიცება 2.4).

ისეთი M მუდმივისა, რომ ადგილი აქვს უტოლობებს

$$|a_n| < \frac{M}{n^2} \quad \text{და} \quad |b_n| < \frac{M}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{4}$$

რადგან მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ კრებადია, ამიტომ მწკრივებიც $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ და $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ კრებადია ანუ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty. \tag{5}$$

ამასთან,

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le \frac{|a_0|}{2} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \big[|a_n| |\cos nx| + |b_n| |\sin nx|\big] \le$$
$$\le \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty$$

ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$-ისთვის.

ამრიგად, (1) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე.

(1) მწკრივის თანაბრად კრებადობა ნებისმიერ სეგმენტზე $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$, გამომდინარეობს ნებისმიერი $x \in [a, b]$-ისთვის მართებული შეფასებებიდან

$$\left| \sum_{n=p}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right| \le \sum_{n=p}^{\infty} (|a_n| |\cos nx| + |b_n| |\sin nx|) \le$$
$$\le \sum_{n=p}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \le 2M \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

მართლაც, რადგან მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ კრებადია, ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $N(\varepsilon)$, რომ

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

ამიტომ,

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right|<\varepsilon \tag{6}$$

ერთბაშად ყველა x-ისთვის $[a,b]$-დან. ეს კი ნიშნავს (1) მწკრივის თანაბრად კრებადობას სეგმენტზე $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$.

მეორე მხრივ, (1) მწკრივის თანაბრად კრებადობა ყოველ სეგმენტზე $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$ იწვევს (1) მწკრივის $[a,b]$-ზე თანაბრად კრებადობას $f(x)$-ისკენ (იხ. თავი 3, §1). თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1.2. თუ 2π პერიოდული F ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია ყოველ სეგმენტზე $[A,B]\subset(-\infty,+\infty)$ და მისი თითქმის ყველგან არსებული წარმოებული $F'(x)\equiv f(x)$ წარმოადგენს კვადრატით ჯამებად ფუნქციას $[-\pi,\pi]$-ზე, მაშინ F ფუნქციის ფურიეს

$$F\sim\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx) \tag{7}$$

მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ყველა $x\in(-\infty,+\infty)$ წერტილზე და თანაბრად კრებადია $F(x)$-ისკენ ნებისმიერ სეგმენტზე $(-\infty,+\infty)$-დან.

დამტკიცება. რადგან $f\in L^2[-\pi,\pi]$, ამიტომ მისი ფურიეს a_n და b_n კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ **პარსევალის** ტოლობას (იხ. თავი 3, §6, ტოლობა (6))

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2), \tag{8}$$

ე.ი. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)<+\infty$.

მეორე მხრივ, ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}F(x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F'(x)\sin nxdx=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_{-n}^{\pi}f(x)\sin nxdx=-\frac{b_n}{n}\quad(n=1,2,\dots).$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$B_n=\frac{a_n}{n}\quad(n=1,2,\dots).$$

გარდა ამისა, $A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$ სასრულია, რადგან F ფუნქცია შემოსაზღვრულია $[-\pi,\pi]$-ზე. ამრიგად,

$$\frac{|A_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|A_n| + |B_n|) = \frac{|A_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{|b_n|}{n} + \frac{|a_n|}{n}\Big).$$

ეს მწკრივი კი კრებადია, რადგანაც

$$\frac{|b_n|}{n} \le \frac{1}{2}\Big(b_n^2 + \frac{1}{n^2}\Big) \quad \text{და} \quad \frac{|a_n|}{n} \le \frac{1}{2}\Big(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\Big),$$

ხოლო (8) და $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ მწკრივები კრებადია.

მაშასადამე,

$$\frac{|A_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|A_n| + |B_n|) < +\infty. \tag{9}$$

ამის შემდეგ მსჯელობა გაგრძელდება ისევე, როგორც 1.1 თეორემის მტკიცებისას, დაწყებული (5) უტოლობიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

2 დანჟუა-ლუზინის და კანტორ-ლებეგის თეორემები

ზოგადი ტრიგონომეტრიული მწკრივების შესახებ, აქ დამტკიცებული იქნება ორი მნიშვნელოვანი თეორემა.

1. პირველი თეორემა ატარებს დანჟუას და ლუზინის სახელებს, რომელიც მათ დაამტკიცეს 1912 წელს ერთიმეორისგან დამოუკიდებლად. მისი ფორმულირებისას გამოვიყენებთ ტოლობას (იხ. თავი 1, §4)

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}, \quad n \ge 1. \tag{1}$$

თეორემა 2.1 (დანჟუა, ლუზინი [7]; გვ. 173). დადებითი ზომის სიმრავლეზე ტრიგონომეტრიული მწკრივის

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2}$$

აბსოლუტურად კრებადობისთვის ანუ, რაც იგივეა მწკრივის

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \equiv |c_0| + \sum_{n=1}^{\infty}|c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}| \tag{3}$$

კრებადობისთვის ყველა x წერტილზე დადებითი ზომის რაიმე $E \subset [0, 2\pi]$ სიმრავლიდან, $|E| > 0$, აუცილებელი და საკმარისია პირობა

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < +\infty \tag{4}$$

ანუ, რაც იგივეა, პირობა[2]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty. \tag{6}$$

საკმარისობა. თუ შესრულებულია (4) პირობა ან (5), მაშინ

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < +\infty,$$

ე.ი. (2) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე, კერძოდ, დადებითი ზომის E სიმრავლეზეც.

აუცილებლობა. აღვნიშნოთ $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $(n \geq 1)$ და შემოვიღოთ $\alpha_0 = 0$ და $\frac{a_0}{2} = \rho_0$. გარდა ამისა, არსებობს ისეთი α_n მუდმივები, რომ $a_n = \rho_n \cos \alpha_n$ და $b_n = \rho_n \sin \alpha_n$. ამიტომ (2) მწკრივი მიიღებს სახეს

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \cos(nx - \alpha_n). \tag{7}$$

(2) მწკრივის ანუ, რაც იგივეა, (7) მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობა E სიმრავლეზე ნიშნავს, რომ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n |\cos(nx - \alpha_n)| < +\infty \quad \text{ყველა} \quad x \in E - \text{ისთვის}. \tag{8}$$

ეგოროვის თეორემის თანახმად ([1], გვ. 368) არსებობს დადებითი ზომის ჩაკეტილი სიმრავლე $F \subset E$, $|F| > 0$, რომელზეც (8) მწკრივი თანაბრად კრებადია და მისი ჯამი აღვნიშნოთ $s(x)$-ით.

[2] ტოლობებიდან (იხ. თავი I, §4) $c_0 = \frac{1}{2}a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$, $n \geq 1$, გამომდინარეობს $a_n = c_n + c_{-n}$ და $b_n = i(c_n - c_{-n})$. აქედან $|a_n| \leq |c_n| + |c_{-n}|$ და $|b_n| \leq |c_n| + |c_{-n}|$. ამასთან ერთად,

$$|c_n| \leq \frac{1}{2}(|a_n| + |b_n|), \quad |c_{-n}| \leq \frac{1}{2}(|a_n| + |b_n|),$$

$$|c_n| + |c_{-n}| \leq |a_n| + |b_n|. \tag{5}$$

რადგან F სიმრავლეზე თანაბრად კრებადი (8) მწკრივის წევრები $\rho_n|\cos(nx-\alpha_n)|$ უწყვეტი ფუნქციებია, ამიტომ $s(x)$ ფუნქცია უწყვეტია F სიმრავლეზე ([1], გვ. 289).

F სიმრავლეზე (8) მწკრივის თანაბრად კრებადობის გამო, ტოლობის

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n|\cos(nx-\alpha_n)| \tag{9}$$

წევრობრივი ინტეგრება F-ზე მართლზომიერია, ე.ი.

$$\int\limits_F s(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n\int\limits_F|\cos(nx-\alpha_n)|dx. \tag{10}$$

მაგრამ (იხ. თავი 3, §9, თეორემა 9.3)

$$\int\limits_F|\cos(nx-\alpha_n)|dx\geq\int\limits_F\cos^2(nx-\alpha_n)dx\to\frac{1}{2}|F|,\quad \text{როცა}\quad n\to\infty.$$

ამიტომ არსებობს ისეთი N, რომ

$$\int\limits_F|\cos(nx-\alpha_n)|dx>\frac{1}{4}|F|,\quad \text{როცა}\quad n\geq N. \tag{11}$$

ცხადია, რომ

$$\int\limits_F s(x)dx\geq\sum_{n=N}^{\infty}\rho_n\int\limits_F|\cos(nx-\alpha_n)|dx>\frac{1}{4}|F|\sum_{n=N}^{\infty}\rho_n$$

ანუ

$$\sum_{n=N}^{\infty}\rho_n<\frac{4}{|F|}\int\limits_F s(x)dx,$$

ე.ი. მწკრივი $\sum_{n=N}^{\infty}\rho_n$ კრებადია. ამიტომ $\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n<+\infty$. მაგრამ $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n<+\infty$ და $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n<+\infty$.

მაშასადამე, ადგილი აქვს (4) უტოლობას, საიდანაც გამომდინარეობს უტოლობა (6)-იც (იხ. უტოლობა (5)). თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 2.2. თუ (a_n) და (b_n) მიმდევრობები (შესაბამისად (c_n) მიმდევრობა) არ აკმაყოფილებენ (4) უტოლობას (შესაბამისად, (6) უტოლობას), მაშინ (3) მწკრივი განშლადია თითქმის ყველგან $[0,2\pi]$ სეგმენტზე.

აქ, უნდა აღინიშნოს

თეორემა 2.3 (ლუზინი, 1912 წ.). თუ (3) მწკრივი კრებადია II კატეგორიის სიმრავლეზე, თუნდაც ის იყოს ნული ზომის, მაშინ ადგილი აქვს (4) და (6) უტოლობებს და, მაშასადამე, (3) მწკრივი კრებადია ყველგან $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე.

შენიშვნა 2.4. ფატუმ 1906 წელს დაამტკიცა, რომ თუ (3) მწკრივი კრებადია რაიმე $(\alpha, \beta) \subset [0, 2\pi]$ ინტერვალის ყოველ x წერტილზე, თუნდაც $\beta - \alpha$ სხვაობა იყოს რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვი, მაშინ ადგილი აქვს (4) და (6) უტოლობებს, ე.ი. (3) მწკრივი კრებადია ყველგან $[0, 2\pi]$-ზე.

შენიშვნა 2.5. როგორც ვხედავთ, თეორემა 1.1. ჩამოყალიბებულია ტრიგონომეტრიული მწკრივის ორივე ფორმისთვის ერთბაშად და ეს რეალიზებულია იმის საფუძველზე, რომ ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობა ეკვივალენტურია კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივის სიმეტრიული ანუ, რაც იგივეა, **მთავარი მნიშვნელობით** კრებადობის (იხ. თავი 1, §4, ტოლობები (11)-(13)).

გარდა ამისა, განიხილება კომპლექსური ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივის **კრებადობა** კოშის აზრითაც (იხ. თავი 1, §4, 4.1 განსაზღვრა), რაც ნიშნავს ორმაგი ზღვრის არსებობას[3]

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{ikx} \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}. \tag{12}$$

როგორც ვიცით, (12) ტოლობის შემთხვევაში საქმე გვაქვს ლორანის მწკრივთან და (იხ. იქვე, შენიშვნა 4.7)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{inx}.$$

ამიტომ მწკრივის

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \tag{13}$$

[3](12) ტოლობის მარჯვენა მხარეში არ წერია (PV), როგორც ესაა (13) ტოლობაში იქვე.

რომელიმე x_0 წერტილზე აბსოლუტურად კრებადობა ანუ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n e^{inx_0}| < +\infty$ იწვევს უტოლობას $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$, რადგანაც $|e^{inx}| = 1$ ყოველი x-ისთვის და ყოველი n-ისთვის.

მაშასადამე, (13) მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობა თუნდაც ერთ რომელიმე წერტილზე იწვევს იგივე (13) მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობას ნებისმიერი $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე!

უკანასკნელ ფაქტს ადგილი არ აქვს, საზოგადოდ, ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივისთვის. მართლაც,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n!x) \tag{14}$$

მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ნულისკენ ყველა x წერტილზე, რომელიც ჯერადია π-ს რაციონალური კოეფიციენტით. ამავე დროს, $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$. ამრიგად, არსებითი განსხვავებაა $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ და $(PV)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ მწკრივებს შორის.

2. აქ განვიხილავთ ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტების ნულისკენ სწრაფვის თვისებას, როცა ეს მწკრივი კრებადია (არააბსოლუტურად) დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე. თუ რამდენად მნიშვნელოვანია დადებითი ზომის სიმრავლეზე კრებადობა, კარგად ჩანს (14) მწკრივის მაგალითზე.

ამ მიმართულებით გადმოცემულ იქნება თეორემა, რომელიც 1870 წელს დაამტკიცა **გ. კანტორმა** ინტერვალის შემთხვევაში, ხოლო **ლებეგმა** 1906 წელს დადებითი ზომის სიმრავლისთვის.

თეორემა 2.6 (კანტორი, ლებეგი). თუ ტრიგონომეტრიული

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}) \tag{15}$$

მწკრივისთვის ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0 \tag{16}$$

ანუ, რაც იგივეა, ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}) = 0 \tag{16}$$

შესრულებულია ყოველ x წერტილზე დადებითი ზომის რაიმე $E \subset [0, 2\pi]$ სიმრავლიდან, კერძოდ, თუ (15) მწკრივი კრებადია E სიმრავლეზე, მაშინ

$$\lim_{|n|\to\infty} c_n = 0 \tag{17}$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{და} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{17}$$

დამტკიცება. თუ ვისარგებლებთ დანჟუა-ლუზინის თეორემის დამტკიცებისას გამოყენებული აღნიშვნებით, მაშინ ამ თეორემის მოცემულობა ნიშნავს ტოლობის $\lim_{n\to\infty} \rho_n \cos(nx - \alpha_n) = 0$ ანუ, რაც იგივეა, ტოლობის

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n |\cos(nx - \alpha_n)| = 0 \tag{18}$$

შესრულებას ყოველ წერტილზე $x \in E$.

ეგოროვის თეორემით, არსებობს ჩაკეტილი სიმრავლე $F \subset E$, $|F| > 0$, რომელზეც $\rho_n |\cos(nx - \alpha_n)| \to 0$ თანაბრად, როცა $n \to \infty$. ამიტომ $\rho_n \int_F |\cos(nx - \alpha_n)| dx \to 0$, როცა $n \to \infty$.

მაგრამ (11) უტოლობის ძალით

$$\int\limits_F |\cos(nx - \alpha_n)| dx > \frac{1}{4}|F|, \quad \text{როცა} \quad n \geq N. \tag{19}$$

ამიტომ აუცილებლად $\rho_n \to 0$, როცა $n \to \infty$. მეორე მხრივ, $|a_n| \leq \rho_n$, $|b_n| \leq \rho_n$ და $|c_{\pm n}| \leq \frac{1}{2}(|a_n| + |b_n|)$. მაშასადამე, ადგილი აქვს (17) ტოლობებს. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 2.7. თუ $(c_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ მიმდევრობა არ იკრიბება ნულისკენ, როცა $|n| \to +\infty$ ანუ, რაც იგივეა, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ და $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობებიდან ერთი მაინც არ იკრიბება ნულისკენ, როცა $n \to \infty$, მაშინ (15) მწკრივი განშლადია თითქმის ყველგან $[0, 2\pi]$-ზე.

შენიშვნა 2.8 (ფატუს კითხვა და ლუზინის პასუხი). ბუნებრივია კითხვა, რომელიც 1906 წლის შრომაში დასვა **ფატუმ**: შეიძლება თუ არა კანტორ-ლებეგის 1.6 თეორემის შებრუნება?

ამ კითხვაზე ლუზინმა 1912 წელს გასცა უარყოფითი პასუხი: არსებობს $[0, 2\pi]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე **განშლადი** ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომლის კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ ([16], გვ. 195, 455).

საინტერესოა აგრეთვე იანგის შემდეგი

თეორემა 2.9 (იანგი, [46]; [16], გვ. 189). თუ (15) მწკრივი კრებადია მეორე კატეგორიის რაიმე $E \subset [0, 2\pi]$ სიმრავლეზე, თუნდაც E იყოს ნული ზომის, მაშინ ადგილი აქვს (17) ტოლობებს.

შენიშვნა 2.10. ცნობილია, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{2n} x \tag{20}$$

კრებადია $[0, 2\pi]$-ზე ყველგან მკვრივ სიმრავლეზე, თუმცა მისი კოეფიციენტები არ ისწრაფვიან ნულისკენ ([16], გვ. 453-454).

შენიშვნა 2.11. დანჟუა-ლუზინის 2.1 თეორემასთან დაკავშირებით საინტერესოა პრივალოვის შემდეგი **თეორემა**. ფუნქციათა ერთობლივ შემოსაზღვრული ორთოგონული $\{\omega_n(x)\}$ სისტემის მიმართ $\sum c_n\omega_n(x)$ მწკრივის თითქმის ყველგან აბსოლუტურად კრებადობა იწვევს $\sum |c_n|$ მწკრივის კრებადობას. თუკი $\{\omega_n(x)\}$ სისტემა არ იქნება ერთობლივ შემოსაზღვრული, მაშინ შეიძლება ადგილი არ ჰქონდეს c_n კოეფიციენტების ნულისკენ კრებადობის თვისებასაც კი ([24]; [19], გვ. 396; [6], გვ. 332).

3 დირიჰლეს გული და შეუღლებული გული

ტრიგონომეტრიული მწკრივების კრებადობის საკითხებში მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ დირიჰლეს გული-ლუწი ფუნქცია

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx \tag{1}$$

და დირიჰლეს შეუღლებული გული-კენტი ფუნქცია

$$\widetilde{D}_n(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx. \tag{2}$$

ამ ტოლობებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს (იხ. თავი 1, §3, ტოლობები (3)), რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = \pi, \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{D}_n(x)dx = 0. \tag{4}$$

დამოკიდებულებიდან

$$2\sin\frac{x}{2}D_n(x)=\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx=\sin\frac{x}{2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\Big[\sin\Big(k+\frac{1}{2}\Big)x-\sin\Big(k-\frac{1}{2}\Big)x\Big]=\sin\frac{x}{2}+\Big[\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x\Big]+$$

$$+\Big[\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\Big]+\cdots+\Big[\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)x-\sin\Big(n-\frac{1}{2}x\Big)\Big]=\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)x$$

კი გამომდინარეობს ტოლობა

$$D_n(x)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}},\quad x\neq 2k\pi. \tag{5}$$

ანალოგიურად,

$$2\sin\frac{x}{2}\widetilde{D}_n(x)=2\sin x\sin\frac{x}{2}+2\sin 2x\sin\frac{x}{2}+\cdots+2\sin nx\sin\frac{x}{2}=$$

$$=\Big[\cos\Big(x-\frac{x}{2}\Big)-\cos\Big(x+\frac{x}{2}\Big)\Big]+\Big[\cos\Big(2x-\frac{x}{2}\Big)-\cos\Big(2x+\frac{x}{2}\Big)\Big]+\cdots+$$

$$+\Big[\cos\Big(nx-\frac{x}{2}\Big)-\cos\Big(nx+\frac{x}{2}\Big)\Big]=\cos\Big(x-\frac{x}{2}\Big)-\cos\Big(nx+\frac{x}{2}\Big)=$$

$$=\cos\frac{x}{2}-\cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)x.$$

აქედან

$$\widetilde{D}_n(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{x}{2}},\quad x\neq 2k\pi. \tag{6}$$

(3), (4) და (5), (6) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx=2\pi, \tag{7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx=0. \tag{8}$$

(5) და (6) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$|D_n(x)|\leq\frac{1}{2|\sin\frac{x}{2}|},\quad \text{როცა}\quad x\neq 2k\pi, \tag{9}$$

$$|\widetilde{D}_n(x)|\leq\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|},\quad \text{როცა}\quad x\neq 2k\pi. \tag{10}$$

რადგან $\dfrac{\sin x}{x}$ ფუნქცია კლებადია $(0,\pi/2)$ ინტერვალზე[4], ამიტომ $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{\sin\pi/2}{\pi/2} = \dfrac{1}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$. მაშასადამე,

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}, \quad \text{როცა} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

აქედან $\dfrac{\sin x/2}{x/2} > \dfrac{2}{\pi}$, როცა $0 < x < \pi$. ამგვარად,

$$\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}, \quad \text{როცა} \quad 0 < x < \pi. \tag{12}$$

(12) უტოლობის გამოყენება (9) და (10) უტოლობების მიმართ გვაძლევს[5]

$$|D_n(x)| < \frac{\pi}{2|x|}, \quad \text{როცა} \quad 0 < |x| < \pi, \tag{13}$$

$$|\widetilde{D}_n(x)| < \frac{\pi}{|x|}, \quad \text{როცა} \quad 0 < |x| < \pi, \tag{14}$$

(13) და (14) შეფასებებს ზოგჯერ წერენ ასე:

$$D_n(x) = O\Big(\frac{1}{x}\Big) \quad \text{და} \quad \widetilde{D}_n(x) = O\Big(\frac{1}{x}\Big), \quad \text{როცა} \quad x \to 0. \tag{15}$$

(13) და (14) უტოლობებიდან მიიღება

$$|D_n(x)| < \frac{\pi}{2\delta} \quad \text{და} \quad |\widetilde{D}_n(x)| < \frac{\pi}{\delta}, \quad \text{როცა} \quad \delta \le |x| < \pi \quad \text{და} \quad 0 < \delta < \pi. \tag{16}$$

---

[4] ფუნქცია $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ კლებადია ინტერვალზე $(0, \frac{\pi}{2})$. მართლაც, მისი წარმოებული $\varphi'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2} < 0$, რადგანაც $(0, \frac{\pi}{2})$ ინტერვალზე $x - \operatorname{tg} x < 0$ (ვინაიდან $\sin x < x < \operatorname{tg} x$) და $\cos x > 0$.

[5] თუ $-\pi < x < 0$, მაშინ $0 < -x < \pi$ და (12)-ის ძალით $\sin\frac{-x}{2} > \frac{-x}{\pi}$, ანუ $-\sin\frac{x}{2} > \frac{|x|}{\pi}$. აქედან $|\sin\frac{x}{2}| > \frac{|x|}{\pi}$, რადგან $\sin\frac{x}{2} < 0$, როცა $-\pi < x < 0$. მაშასადამე,

$$|\sin\frac{x}{2}| > \frac{|x|}{\pi}, \quad \text{როცა} \quad -\pi < x < 0. \tag{12$'$}$$

(12) და (12$'$) უტოლობებიდან გამომდინარეობს $|\sin\frac{x}{2}| > \frac{|x|}{\pi}$, როცა $x \in (-\pi, 0) \cup (0,\pi)$ ანუ

$$|\sin\frac{x}{2}| > \frac{|x|}{\pi}, \quad \text{როცა} \quad 0 < |x| < \pi. \tag{12$''$}$$

$D_n(x)$ და $\widetilde{D}_n(x)$ ფუნქციების 2π პერიოდულობის გამო, (16) უტოლობებს ადგილი აქვს, როცა $\delta \le x \le 2\pi - \delta$.

შევნიშნოთ, რომ (11) და (12) უტოლობანი ცნობილია **ჟორდანის** უტოლობების სახელწოდებით.

4 ფურიეს მწკრივის და შეუღლებული მწკრივის კერძო ჯამების ინტეგრალური წარმოდგენები

ფურიეს მწკრივის კრებადობის გასარკვევად ძალიან მოხერხებულია ამ მწკრივის კერძო ჯამის ინტეგრალური წარმოდგენა, რომელიც დირიჰლემ დაადგინა 1929 წელს.

1. ვთქვათ, f 2π პერიოდული და პერიოდზე ჯამებადი ფუნქციაა. განვიხილოთ f-ის შესაბამისი ფურიეს მწკრივი

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1}$$

აქ ტოლობის ნიშანი "=" ნიშნავს მხოლოდ იმას, რომ $S[f]$-ით **აღნიშნულია** (1) დამოკიდებულების მარჯვენა მხარე, რომელშიც a_0, a_n და b_n $(n \ge 1)$ რიცხვები წარმოადგენენ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს ანუ (იხ. თავი 2, §2)

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ b_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,\dots). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(1) დამოკიდებულების მარჯვენა მხარეში მდგომი მწკრივის n-რი კერძო ჯამის მნიშვნელობას x წერტილზე აღვნიშნავთ სიმბოლოთი $S_n(f;x)$ ანუ

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{3}$$

ამ ტოლობაში, (2) კოეფიციენტების ჩასმით მივიღებთ

$$S_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt\right)\cos kx + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt\right)\sin kx\right].$$

აქ მარჯვენა მხარეში გვაქვს შესაკრებთა სასრული რაოდენობა, ამიტომ ინტეგრებისა და შეკრების ოპერაციებს შეიძლება შევუცვალოთ ადგილები. მივიღებთ

$$S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt,$$

სადაც ლუწი ფუნქცია $D_n(u)$ ანუ დირიჰლეს გული (იხ.§3) მოცემულია ტოლობებით

$$D_n(u)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}},\quad \text{როცა}\quad u\neq 2k\pi \tag{4}$$

და

$$D_n(2k\pi)=n+\frac{1}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\dots\ . \tag{5}$$

ამრიგად,

$$S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt. \tag{6}$$

თუ მოვახდენთ t ცვლადის გარდაქმნას $y=t-x$, მივიღებთ

$$S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y)D_n(y)dy. \tag{7}$$

რადგან f და D_n 2π პერიოდული ფუნქციებია, ამიტომ (7) შეიძლება ასე ჩაიწეროს (იხ. თავი 1, §3, (8) ტოლობა)

$$S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)D_n(y)dy \tag{8}$$

ანუ

$$S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{y}{2}}dy-\textbf{დირიჰლეს ინტეგრალი}. \tag{9}$$

აქვე აღვნიშნოთ, რომ $D_n(x)$-ის გამოსახულებიდან (იხ. §3, ტოლობა (1)) გამომდინარეობს

$$|D_n(y)| \leq n + \frac{1}{2}, \quad -\infty < y < +\infty, \tag{10}$$

და

$$D_n(2k\pi) = n + \frac{1}{2}, \quad k = 0, \pm1; \pm2, \dots\ . \tag{11}$$

(10) შეფასების ძალით, (8)-დან ვღებულობთ

$$|S_n(f;x)| \leq (n + \frac{1}{2})\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{12}$$

2. განვიხილოთ f ფუნქციის ფურიეს (1) მწკრივისადმი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{13}$$

შეუღლებული ტრიგონომეტრიული (იხ. თავი 1, §5, მწკრივი (9))

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-b_n \cos nx + a_n \sin nx) \tag{14}$$

მწკრივის n-რი კერძო $\widetilde{S}_n(f;x)$ ჯამი

$$\widetilde{S}_n(f;x) = \sum_{k=1}^{n}(-b_k \cos kx + a_k \sin kx). \tag{15}$$

თუ (15)-ის მარჯვენა მხარეში ჩავსვამთ a_k და b_k კოეფიციენტების (2) გამოსახვას, როცა $k = 1, 2, \dots$ მივიღებთ

$$\widetilde{S}_n(f;x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\widetilde{D}_n(t-x)dt, \tag{16}$$

სადაც კენტი $\widetilde{D}_n(u)$ ფუნქციისთვის გვაქვს (იხ. ტოლობა (2) §3-დან)

$$\widetilde{D}_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \sin ku. \tag{17}$$

როგორც ვნახეთ (იხ. §3, ტოლობა (6))

$$\widetilde{D}_n(u) = \frac{\cos\frac{u}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}, \quad \text{როცა} \quad u \neq 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots) \tag{18}$$

და

$$\widetilde{D}(m\pi) = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{19}$$

ამიტომ

$$\widetilde{S}_n(f;x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\cos\frac{t-x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt \tag{20}$$

ანუ

$$\widetilde{S}_n(f;x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\cos\frac{u}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du. \tag{21}$$

5 ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების გამარტივებული ფორმა

1. გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u} = \frac{\sin nu\cos\frac{1}{2}u + \cos nu\sin\frac{1}{2}u}{2\sin\frac{1}{2}u} = \frac{\sin nu\cos\frac{1}{2}u}{2\sin\frac{1}{2}u} +$$
$$+\frac{1}{2}\cos nu = \frac{\sin nu}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}u} + \frac{1}{2}\cos nu. \tag{1}$$

ახლა $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე განვიხილოთ ფუნქცია

$$g(u) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi}, & \text{როცა} \quad u = \pi, \\ \frac{1}{\pi}, & \text{როცა} \quad u = -\pi, \\ 0, & \text{როცა} \quad u = 0, \\ \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}u} - \frac{1}{u}, & \text{როცა} \quad -\pi < u < \pi. \end{cases} \tag{2}$$

როცა $-\pi < u < \pi$, მაშინ ფუნქცია $g(u) = \frac{\cos\frac{1}{2}u}{2\sin\frac{1}{2}u} - \frac{1}{u}$ და ვიპოვოთ:

(1) $g(u)$-ს ზღვარი $u=0$ წერტილზე. გვაქვს

$$\lim_{u\to 0} g(u) = \lim_{u\to 0}\Big(\frac{\cos\frac{1}{2}u}{2\sin\frac{1}{2}u} - \frac{1}{u}\Big) =$$

$$\lim_{u\to 0}\Big(\frac{\cos\frac{1}{2}u}{2\cdot\frac{1}{2}u} - \frac{1}{u}\Big) = \lim_{u\to 0}\Big(\frac{\cos\frac{1}{2}u}{u} - \frac{1}{u}\Big) = -\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos\frac{1}{2}u}{u} =$$

$$= -\lim_{u\to 0}\frac{2\sin^2\frac{1}{4}u}{u} = -\lim_{u\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{16}u^2}{u} = -\lim_{u\to 0}\frac{1}{8}u = 0 = g(0).$$

ამრიგად, $g(u)$ ფუნქცია უწყვეტია $u=0$ წერტილზე.

(2) $g(u)$-ს მარცხენა ზღვარი $u=\pi$ წერტილზე. გვაქვს $\lim_{u\to\pi^-}\Big(\frac{\cos\frac{1}{2}u}{2\sin\frac{1}{2}u} - \frac{1}{u}\Big) = \frac{0}{2\cdot 1} - \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi} = g(\pi)$. მაშასადამე, $g(u)$ უწყვეტია $u=\pi$ წერტილზე[6].

(3) $g(u)$-ს მარჯვენა ზღვარი $u=-\pi$ წერტილზე. გვაქვს $\lim_{u\to-\pi+} g(u) = \frac{0}{2(-1)} - \frac{1}{-\pi} = \frac{1}{\pi} = g(-\pi)$, ე.ი. $g(u)$ უწყვეტია $u=-\pi$ წერტილზეც.

მაშასადამე, $g(u)$ ფუნქცია უწყვეტია $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე და ამიტომ შემოსაზღვრულიცაა ამ სეგმენტზე.

დგება საჭიროება $g(u)$ ფუნქციის 2π პერიოდით გაგრძელებისა $[-\pi,\pi]$-ს გარეთ მთელ $(-\infty,+\infty)$-ზე. რადგან $g(-\pi)\neq g(\pi)$, ამიტომ g ფუნქციის მნიშვნელობა $[-\pi,\pi]$-ს ერთ-ერთ ბოლოზე უნდა შეიცვალოს მეორე ბოლოზე მისი მნიშვნელობით. მაგალითად ასე, $g(-\pi) = -\frac{1}{\pi}$ და ახლა გვექნება $g(-\pi) = g(\pi)$ (იხ. თავი 1, §4). ამის შემდეგ მოვახდინოთ 2π პერიოდით გაგრძელება ტოლობით $g(x+2\pi) = g(x)$. ასე შეცვლილი g ფუნქცია შემოსაზღვრული დარჩება, გახდა 2π პერიოდული, ოღონდ $u=-\pi$ წერტილზე გაუჩნდა სასრული წყვეტა, რაც გავლენას ვერ მოახდენს ინტეგრალებზე. ამის შემდეგ, $g(u)$ ფუნქციას ვიგულისხმებთ ასეთნაირად შესწორებულს!

---

[6] როცა ამბობენ, რომ $\varphi(t)$ ფუნქცია მოცემულია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ φ-ს მნიშვნელობანი $[a,b]$-ს გარეთ მდებარე წერტილზე, თუკი ასეთი მნიშვნელობანი მას გააჩნია, მხედველობაში არ მიიღება. აქედან გამომდინარე, φ ფუნქციის უწყვეტობა $[a,b]$ სეგმენტზე ნიშნავს φ-ს უწყვეტობას $[a,b]$-ს ყველა შიგა t წერტილზე, $a< t< b$ და a წერტილზე მარჯვნიდან უწყვეტობას, ხოლო b წერტილზე კი მარცხნიდან უწყვეტობას (იგულისხმება, როგორც ყოველთვის, რომ $a<b$).

მაშასადამე, φ ფუნქციის უწყვეტობა a წერტილზე ნიშნავს φ-ს მხოლოდ მარჯვნიდან უწყვეტობას a-ზე. ასევე, φ ფუნქციის უწყვეტობა b წერტილზე ნიშნავს მის მარცხნიდან უწყვეტობას b-ზე ([12], გვ. 507).

ანალოგიურად განიხილება სეგმენტზე წარმოებადობის საკითხიც ([4], გვ. 160-163).

(1) და (2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u}=\frac{\sin nu}{u}+g(u)\sin u+\frac{1}{2}\cos nu. \tag{3}$$

ამიტომ, §4-ის (9) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\frac{\sin nu}{u}du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+u)g(u)\sin nudu+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\cos nudu. \tag{4}$$

2. თავი 3-დან §11-ში დამტკიცებული იყო **პლესნერის** თეორემა 11.3 იმის შესახებ, რომ $\chi_x(t)=f(x+t)g(t)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი $c_n(\chi_x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_x(t)e^{-int}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_x(t)\cos ntdt-i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_x(t)\sin ntdt\to 0$ თანაბრად x-ის მიმართ, როცა $n\to\infty$.

ეს ნიშნავს, რომ ინტეგრალები $\int_{-\pi}^{\pi}\chi_x(t)\cos ntdt$ და $\int_{-\pi}^{\pi}\chi_x(t)\times\sin ntdt$ თანაბრად x-ის მიმართ ისწრაფვიან ნულისკენ, როცა $n\to\infty$.

მაშასადამე, (4) ტოლობის ორი ბოლო ინტეგრალი თანაბრად $x\in[-\pi,\pi]$-ის მიმართ ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n\to\infty$.

ეს ნიშნავს ტოლობას

$$S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\frac{\sin nu}{u}du+o(1), \tag{5}$$

სადაც $o(1)$ არის n-ზე და $x\in[-\pi,\pi]$-ზე დამოკიდებული ფუნქცია, რომელიც x-ის მიმართ **თანაბრად** ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n\to\infty$.

3. შესაძლებელია (5) ტოლობაში შემავალი ინტეგრალის გამარტივებაც. ვთქვათ, $0<\delta<\pi$ და $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე განვსაზღვროთ ψ ფუნქცია ტოლობებით

$$\psi(u)=\begin{cases}0, & \text{როცა} \quad -\delta\le u\le\delta,\\ \frac{1}{u}, & \text{როცა} \quad u\in(-\pi,-\delta)\cup(\delta,\pi],\\ \frac{1}{\pi}, & \text{როცა} \quad u=-\pi.\end{cases} \tag{6}$$

აქედან ჩანს, რომ $\psi(\pi)=\frac{1}{\pi}=\psi(-\pi)$ და $[-\pi,\pi]$-ს გარეთ ψ ფუნქცია გავაგრძელოთ 2π პერიოდულად: $\psi(x+2\pi)=\psi(x)$. ამრიგად, ψ

ფუნქცია შემოსაზღვრულია $[-\pi, \pi]$-ზე და, ამავე დროს, არის 2π პერიოდული.

(5) ტოლობაში მონაწილე ინტეგრალი გადავწეროთ ასე:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin nu}{u}du =$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\frac{\sin nu}{u}du + \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} f(x+u)\frac{\sin nu}{u}du. \tag{7}$$

მაგრამ

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} f(x+u)\frac{1}{u}\sin nudu = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\psi(u)\sin nudu = o(1)$$

თანაბრად $x \in [-\pi, \pi]$-ის მიმართ, თავი 3-დან §11-ში დამტკიცებული **პლესნერის** 11.3 თეორემის ძალით. ამგვარად, (7) მიიღებს სახეს:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin nu}{u}du = \int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\frac{\sin nu}{u} + o(1). \tag{8}$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $o(1) + o(1) = o(1)$, (8)-ის ჩასმა (5) ტოლობაში მოგვცემს

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\frac{\sin nu}{u}du + o(1), \tag{9}$$

სადაც $o(1)$ ისევ არის n-ზე და x-ზე დამოკიდებული რაღაც ფუნქცია, რომლის ზღვარი ნულია **თანაბრად** $x \in [-\pi, \pi]$-ის მიმართ, როცა $n \to \infty$.

6 ლოკალიზების რიმანის პრინციპი

ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების ინტეგრალური (9) ფორმულა წინა პარაგრაფიდან საშუალებას იძლევა დავამტკიცოთ რიმანის მეტად მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც ცნობილია ლოკალიზების რიმანის პრინციპის სახელწოდებით.

თეორემა 6.1 (რიმანი, 1853, [7], გვ. 110). 2π პერიოდული და პერიოდზე ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის კრებადობა ან განშლადობა რაიმე x_0 წერტილზე, დამოკიდებულია მხოლოდ და მხოლოდ f ფუნქციის მნიშვნელობებზე x_0 წერტილის ნებისმიერად მცირე მიდამოში.

დამტკიცება. §5-ის (9) ტოლობას x_0 წერტილისთვის აქვს სახე

$$S_n(f;x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x_0+u)\frac{\sin nu}{u}du + o(1). \tag{1}$$

აქედან ჩანს, რომ $S_n(f;x_0)$ რიცხვითი მიმდევრობის ზღვრის არსებობა ან არარსებობა x_0 წერტილზე, როცა $n \to \infty$, დამოკიდებულია f ფუნქციის მნიშვნელობებზე მხოლოდ $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ მიდამოში ნებისმიერად მცირე $\delta > 0$ რიცხვისთვის.

უფრო მეტი, რადგან წინა პარაგრაფის (9) ტოლობაში $o(1)$ ფუნქცია თანაბრად x-ის მიმართ $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \to \infty$, ამიტომ $S_n(f;x)$ ფუნქციური მიმდევრობის x-ის მიმართ თანაბრად კრებადობა რაიმე (a,b) ინტერვალზე ეკვივალენტურია (9) ტოლობის **ინტეგრალის** თანაბრად კრებადობის იმავე (a,b) ინტერვალზე, როცა $n \to \infty$.

ამასთან ერთად, ამ ინტეგრალის ზღვარი ემთხვევა, თუ ის არსებობს, $S_n(f;x)$-ის ზღვარს.

უკანასკნელი ფაქტი შეიძლება ასე გამოითქვას:

თეორემა 6.2. თუ 2π პერიოდული $f_1 \in L[-\pi,\pi]$ და $f_2 \in L[-\pi,\pi]$ ფუნქციები ერთიმეორის ტოლია რაიმე (a,b) ინტერვალზე, მაშინ მათი ფურიეს $S[f_1]$ და $S[f_2]$ მწკრივები ყოველ $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, მონაკვეთზე **თანაბრად** ტოლადკრებადებია ანუ, რაც იგივეა, ამ მწკრივების სხვაობა $S[f_1]-S[f_2]$ თანაბრად კრებადია ნულისკენ $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. განვიხილოთ სხვაობა $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, რომელიც ნულის ტოლია (a,b) ინტერვალზე. ავიღოთ $0 < \delta \le \varepsilon$ და $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. მაშინ $u+x \in (a,b)$, როცა $-\delta \le u \le \delta$. ამიტომ $f(x+u) = 0$, როცა $-\delta \le u \le \delta$.

ახლა წინა პარაგრაფის (9) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ x-ის მიმართ თანაბრად $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ სეგმენტზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$S_n(f;x) = o(1), \quad a+\varepsilon \le x \le b-\varepsilon, \tag{2}$$

სადაც $o(1)$ ფუნქცია **თანაბრად** x-ის მიმართ $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ მონაკვეთზე კრებადია ნულისკენ, როცა $n \to \infty$.

მაშასადამე, f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი **თანაბრად** კრებადია $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ სეგმენტზე ნულისკენ ანუ, რაც იგივეა, $f(x)$-სკენ.

ეს ნიშნავს, რომ $S[f_1] - S[f_2] = S[f_1 - f_2]$ თანაბრად კრებადია ნულისკენ $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

7 დირიჰლეს გამარტივებული გული

დირიჰლეს გამარტივებული გული ეწოდება ფუნქციას

$$D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{u}. \tag{1}$$

§3-ის (5) ტოლობიდან და §5-ის (3) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$D_n(u) = D_n^*(u) + O(1). \tag{2}$$

რადგან $D_n^*(-u) = \frac{\sin n(-u)}{-u} = \frac{-\sin nu}{-u} = \frac{\sin nu}{u} = D_n^*(u)$, ამიტომ $D_n^*(u)$ ლუწი ფუნქცია:

$$D_n^*(-u) = D_n^*(u). \tag{3}$$

ახლა §5-ის (9) ტოლობა წარმოვადგინოთ ასე:

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0} f(x+u)D_n^*(u)du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} f(x+u)D_n^*(u)du + o(1).$$

თუ აქ პირველ ინტეგრალში მოვახდენთ გარდაქმნას $v = -u$, მაშინ ის მიიღებს სახეს, $D_n^*(u)$ ფუნქციის ლუწობის გათვალისწინებით,

$$\int_{-\delta}^{0} f(x+u)D_n^*(u)du = \int_{0}^{\delta} f(x-v)D_n^*(v)dv.$$

მაშასადამე:

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} [f(x+u) + f(x-u)]\frac{\sin nu}{u}du + o(1). \tag{4}$$

შენიშვნა 7.1. ტრიგონომეტრიული სისტემის

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \tag{5}$$

რომელიმე წევრისთვის ფურიეს მწკრივი იმავე (5) სისტემის მიმართ იქნება თვით ეს წევრი. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საჭიროა ამ წევრისთვის გამოვთვალოთ ფურიეს კოეფიციენტები და ვნახავთ, რომ ამ წევრთან მდგომი კოეფიციენტი იქნება 1, ხოლო ყველა დანარჩენი კოეფიციენტი ნულია. თვალსაჩინოებისთვის განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა.

1) თუ f ფუნქცია მუდმივია ანუ $f(x) = C$ ყველა $x \in [-\pi, \pi]$-ისთვის, მაშინ მისი a_0 კოეფიციენტი იქნება (იხ. თავი 2, §2) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C dx = \frac{1}{\pi} \cdot C \cdot 2\pi = 2C$ და ამიტომ $\frac{a_0}{2} = C$. ყველა დანარჩენი a_k და b_k $(k = 1, 2, \dots)$ კოეფიციენტი ნულია (იხ. იქვე (3) ფორმულები). ამრიგად $C \sim C$.

2) თუ $f(x) = B\cos nx$, მაშინ ყველა $a_k = 0$, როცა $k \neq n$ და ყველა $b_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$ (იხ. იქვე (6) ტოლობები). თვით $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B\cos^2 nx dx = \frac{B}{\pi}\cdot\pi = B$ (იხ. იქვე ტოლობა (4)). ამგვარად, $B\cos nx \sim B\cos nx$.

3) თუ $f(x) = \cos 2x \sin 3x$, მაშინ $\cos 2x \sin 3x = \frac{1}{2}[\cos(2x - 3x) - \cos(2x + 3x)] = \frac{1}{2}[\cos x - \cos 5x]$. აქედან, 2) შემთხვევის გათვალისწინებით ვღებულობთ $\cos 2x \sin 3x \sim \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 5x$.

(4) ტოლობაში ავიღოთ კერძო შემთხვევა $f(t) = 1$ ყველა $t \in [-\pi, \pi]$ მნიშვნელობისთვის. მაშინ, 1) შემთხვევის გათვალისწინებით $1 \sim 1$ და ამიტომ $S_n(1; x) = 1$ ყველა x-ისთვის $[-\pi, \pi]$-დან და ყველა მნიშვნელობისთვის $n = 0, 1, 2, \dots$. ამიტომ (4) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}(1+1)\frac{\sin nu}{u}du + o(1) \quad \text{ანუ} \quad 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin nu}{u}du + o(1). \tag{6}$$

თუ აქ ჩავსვამთ $nu = t$, მაშინ მივიღებთ $1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{n\delta}\frac{\sin t}{t/n}\cdot\frac{1}{n}dt + o(1) = \frac{2}{\pi}\int_0^{n\delta}\frac{\sin t}{t}dt + o(1)$. აქედან

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\delta}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

ანუ

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

8 ფურიეს მწკრივის კრებადობის კრიტერიუმი

ჩვენი მთავარი მიზანია დავადგინოთ f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის რაიმე x წერტილზე L რიცხვისკენ, კერძოდ, $f(x)$ მნიშვნელობისკენ, კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

§7-ის (4) ტოლობის თანახმად,

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta [f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin nu}{u}du + o(1), \tag{1}$$

სადაც $o(1)$ აღნიშნავს n-ზე და x-ზე დამოკიდებულ ფუნქციას, რომელიც $[-\pi,\pi]$-ზე **თანაბრად** კრებადია ნულისკენ, როცა $n\to\infty$.

თუ §7-ის (6) ტოლობას გავამრავლებთ რაიმეს $L\neq 0$ რიცხვზე, მივიღებთ:

$$L = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\delta L\frac{\sin nu}{u}du + o(1). \tag{2}$$

(1) და (2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$S_n(f;x) - L = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta [f(x+u)+f(x-u)-2L]\frac{\sin nu}{u}du + o(1). \tag{3}$$

აქედან ცხადია, რომ $S[f]$ მწკრივის კრებადობისთვის x წერტილზე L რიცხვისკენ აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\delta [f(x+u)+f(x-u)-2L]\frac{\sin nu}{u}du = 0. \tag{4}$$

ხოლო $f(x)$ მნიშვნელობისკენ $S[f]$ მწკრივის კრებადობისთვის x წერტილზე კი აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\delta [f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\frac{\sin nu}{u}du = 0. \tag{5}$$

თუ f ფუნქციასთან დაკავშირებულ $f(x+u)+f(x-u)-2f(x)$ გამოსახულებას აღვნიშნავთ $F_f(x,u)$ სიმბოლოთი ანუ

$$F_f(x,u)=f(x+u)+f(x-u)-2f(x), \tag{6}$$

მაშინ (5) ტოლობა შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ.

თეორემა 8.1. $f\in L[-\pi,\pi]$ ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის კრებადობისთვის x წერტილზე $f(x)$ მნიშვნელობისკენ, აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობა

$$\lim_{n\to 0}\int\limits_0^\delta F_f(x,u)\frac{\sin nu}{u}du=0, \tag{7}$$

სადაც $\delta>0$ და $F_f(x,u)$ განსაზღვრულია (6) ტოლობით.

თუკი f ფუნქცია **უწყვეტია** რაიმე (a,b) ინტერვალზე, მაშინ შეიძლება დაისვას საკითხი მისი ფურიეს $S[f]$ მწკრივის $f(x)$-ისკენ **თანაბრად** კრებადობის შესახებ ქვეინტერვალზე $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$.

თუკი $\varepsilon>0$ რიცხვს ავიღებთ ისეთს, რომ სეგმენტი $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\subset(a,b)$, მაშინ f ფუნქცია უწყვეტი და შემოსაზღვრულია $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ სეგმენტზე. §7-ის (6) ტოლობის გამრავლებით $f(x)$ მნიშვნელობაზე, $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$, მივიღებთ:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\delta f(x)\frac{\sin nu}{u}du+o(1), \tag{8}$$

სადაც $o(1)$ **თანაბრად** კრებადია ნულისკენ $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ სეგმენტზე, როცა $n\to\infty$. (1) და (8) ტოლობებიდან ვღებულობთ:

$$S_n(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta[f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\frac{\sin nu}{u}+o(1). \tag{9}$$

თუ აქ ავიღებთ $0<\delta<\varepsilon$, მაშინ $x\pm u\in(a,b)$, როცა $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ და თუ $|u|<\delta$. ამიტომ (6) ტოლობით განსაზღვრული $F_f(x,u)$ ფუნქცია უწყვეტია (a,b) ინტერვალზე.

აქედან, (9) ტოლობის გათვალისწინებით მიიღება

თეორემა 8.2. თუ ფუნქცია $f \in L[-\pi, \pi]$ უწყვეტია (a, b) ინტერვალზე და $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(b-a)$, მაშინ ფურიეს $S[f]$ მწკრივის **თანაბრად** კრებადობისთვის $f(x)$-სკენ $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ სეგმენტზე, აუცილებელი და საკმარისია ტოლობის

$$\lim_{n\to 0} \int\limits_0^{\delta} F_f(x,u) \frac{\sin nu}{u} du = 0 \tag{10}$$

შესრულება **თანაბრად** x-ის მიმართ $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ სეგმენტზე.

აქ $0 < \delta < \varepsilon$ და (6) ტოლობით განსაზღვრული $F_f(x,u)$ ფუნქცია უწყვეტია x-ის მიმართ $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ სეგმენტზე, ამასთან $|u| \le \delta$.

9 რიმანის აზრით გლუვი ფუნქცია

რიმანიმ თავის ფუნდამენტურ შრომაში "ფუნქციის წარმოდგენა ტრიგონომეტრიული მწკრივით" (1854 წ.), შემოიღო მეტად მნიშვნელოვანი კლასი ფუნქციებისა, რომელთაც ზიგმუნდმა თავის 1945 წლის შრომაში [47] უწოდა "გლუვი ფუნქციები".

ამ ტერმინის საფუძველია ის ფაქტი, რომ ფუნქციის გლუვობის წერტილზე მის გრაფიკს არ შეიძლება ჰქონდეს კუთხიანი წერტილი ანუ მას ამ წერტილზე არ აქვს ურთიერთგანსხვავებული ცალმხრივი წარმოებულები, რომელთაგან ერთი მაინც სასრულია. უფრო ზუსტად, გლუვობის წერტილზე ფუნქციის გრაფიკს ან აქვს **მხები** ან არ აქვს არც ერთი **ცალმხრივი მხები**.

1. გლუვ ფუნქციებს ხშირი და მრავალმხრივი გამოყენება აქვთ ფუნქციათა თეორიაში, კერძოდ კი ტრიგონომეტრიული მწკრივების კრებადობა-შეჯამებადობის საკითხებში ([7], გვ. 181; [12], გვ. 75).

განსაზღვრა 9.1. x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება **გლუვი** x_0 წერტილზე, როცა სრულდება ტოლობა

$$\lim_{u\to 0} \frac{f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2f(x_0)}{u} = 0. \tag{1}$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ ცალმხრივ გლუვობას აზრი არ აქვს! არაა სავალდებულო, რომ გლუვობის წერტილზე ფუნქცია უწყვეტი იყოს. მაგალითად, (1) პირობას ასრულებს x_0 წერტილის მიმართ კენტი ფუნქცია, თუნდაც ის უწყვეტი არ იყოს x_0 წერტილზე.

უწყვეტობასთან დაკავშირებით ცნობილია, რომ პირობა ([44], გვ. 266)

$$\lim_{u\to 0} [f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2f(x_0)] = 0 \tag{2}$$

იწვევს f ფუნქციის უწყვეტობას თითქმის ყველა ასეთ x_0 წერტილზე (x_0 წერტილზე f ფუნქციის უწყვეტობა რომ იწვევს (2) ტოლობას, ცხადია).

არსებობს $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი g ფუნქცია, რომელიც გლუვია (a,b) ინტერვალის ყოველ წერტილზე და $g'(x)$ არსებობს მხოლოდ **ნული ზომის** სიმრავლეზე ([12], გვ. 83, 330-331).

ამასთან, $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი და (a,b)-ში გლუვი ფუნქციის წარმოებული არსებობს (a,b)-ში ყველგან მკვრივ სიმრავლეზე ([7], გვ. 182; [12], გვ. 76).

უნდა აღინიშნოს $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი და (a,b)-ში გლუვი ფუნქციის ის მნიშვნელოვანი თვისება, რომ მისთვის მართებულია **ლაგრანჟის** საშუალო მნიშვნელობის ფორმულა, თუნდაც ის წარმოებულს მოკლებული იყოს თითქმის ყველგან, რომელიც არსებობს ყველგან მკვრივ სიმრავლეზე ([7], გვ. 182).

ადვილად მტკიცდება, რომ $f'(x_0)$ წარმოებულის სასრულობა იწვევს f-ის გლუვობას x_0 წერტილზე. ეს გამომდინარეობს (1) პირობის შემდეგი ჩაწერიდან:

$$\lim_{u\to 0}\Big(\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}-\frac{f(x_0-u)-f(x_0)}{-u}\Big)=0. \tag{3}$$

წინადადება 9.2. თუ x_0 წერტილზე გლუვ f ფუნქციას x_0-ზე აქვს ცალმხრივი სასრული წარმოებული, მაშინ f-ს x_0-ზე აქვს წარმოებულიც $f'(x_0)$.

ეს გამომდინარეობს (3) ტოლობიდან.

უკანასკნელი წინადადება ნიშნავს, რომ x_0 წერტილზე გლუვი F ფუნქციის გრაფიკისთვის $(x_0,F(x_0))$ წერტილი არ არის კუთხიანი[7] წერტილი (აქედან მომდინარეობს ტერმინი "გლუვი ფუნქცია").

2. როგორც უკვე ვიცით, გლუვ ფუნქციას შეიძლება არ ჰქონდეს წარმოებული. ამასთან დაკავშირებით ისმება კითხვა: გლუვი ფუნქციის კიდევ რა დამატებითი თვისება უზრუნველყოფს მის წარმოებადობას? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად დაგვჭირდება სიმეტრიული წარმოებულის ცნება.

განსაზღვრა 9.3. φ ფუნქციის **სიმეტრიული წარმოებული** x_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\varphi^{(\prime)}(x_0)$, ეწოდება შემდეგ ზღვარს, თუ იგი

[7] ვთქვათ, x_0 არის φ ფუნქციის განსაზღვრის ინტერვალის შიგა წერტილი და დავუშვათ ამავე წერტილზე მარცხენა $\varphi'_-(x_0)$ და მარჯვენა $\varphi'_+(x_0)$ წარმოებულების არსებობა. თუ $\varphi'_-(x_0)$ და $\varphi'_+(x_0)$ რიცხვთაგან ერთი მაინც სასრულია და, გარდა ამისა, ადგილი აქვს უტოლობას $\varphi'_-(x_0)\neq\varphi'_+(x_0)$, მაშინ ცალმხრივი მხებები $(x_0,\varphi(x_0))$ წერტილზე ქმნიან კუთხეს. ასეთ შემთხვევაში $(x_0,\varphi(x_0))$ წერტილს ეწოდება $y=\varphi(x)$ ფუნქციის Γ გრაფიკის **კუთხიანი** წერტილი.

არსებობს სასრული ან ნიშნიანი უსასრულო,

$$\lim_{u\to 0}\frac{\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0-u)}{2u}=\varphi^{(\prime)}(x_0). \tag{4}$$

შევნიშნოთ, რომ (4) ტოლობაში ზღვარქვეშ მდგომი შეფარდება ლუწი ფუნქცია არის u-ს მიმართ და ამიტომ (4) ტოლობაში შეგვიძლია ვწეროთ $u\to 0+$, ზოგადობის შეუზღუდავად.

წინადადება 9.4. თუ არსებობს ჩვეულებრივი $\varphi'(x_0)$ წარმოებული, მაშინ არსებობს სიმეტრიული წარმოებულიც და ადგილი აქვს ტოლობას $\varphi^{(\prime)}(x_0)=\varphi'(x_0)$. შებრუნებული გამოთქმა მცდარია.

დამტკიცება. ტოლობის

$$\frac{\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0-u)}{2u}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0)}{u}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi(x_0-u)-\varphi(x_0)}{-u} \tag{5}$$

მარჯვენა მხარე ისწრაფვის $\frac{1}{2}\varphi'(x_0)+\frac{1}{2}\varphi'(x_0)=\varphi'(x_0)$ რიცხვისკენ, როცა $u\to 0+$.

შებრუნებული გამოთქმის მცდარობა ჩანს $\mu(t)=|t|$ ფუნქციის მაგალითზე, როცა $t_0=0$. მართლაც $\mu'_+(0)=1$ და $\mu'_-(0)=-1$, ე.ი. $\mu'(0)$ არ არსებობს. ამავე დროს ადგილი აქვს ტოლობას $\mu^{(\prime)}(0)=0$, რაც გამომდინარეობს შემდეგი წინადადებიდან.

წინადადება 9.5. სასრული ცალმხრივი $\lambda'_+(t_0)$ და $\lambda'_-(t_0)$ წარმოებულების არსებობა იწვევს სასრული სიმეტრიული $\lambda^{(\prime)}(t_0)$ წარმოებულის არსებობას და ტოლობას:

$$\lambda^{(\prime)}(t_0)=\frac{1}{2}[\lambda'_+(t_0)+\lambda'_-(t_0)]. \tag{6}$$

დამტკიცება. (6) გამომდინარეობს (5)-დან იმის გათვალისწინებით, რომ (5)-ში შეგვიძლია ვწეროთ $u\to 0+$, როგორც უკვე აღვნიშნეთ.

მიუხედავად ამისა, წინადადება 9.4-ის შებრუნებული მართებულია **თითქმის ყველგან**, როგორც ამას ადასტურებს **ხინჩინის** შემდეგი

თეორემა 9.6 (ხინჩინი, [32], გვ. 381). თუ ზომად φ ფუნქციას ზომადი E სიმრავლის ყოველ წერტილზე აქვს სასრული სიმეტრიული წარმოებული, მაშინ φ ფუნქციას E სიმრავლის თითქმის ყველა x_0 წერტილზე აქვს სასრული ჩვეულებრივი წარმოებული და ადგილი აქვს ტოლობას $\varphi'(x_0)=\varphi^{(\prime)})(x_0)$.

გლუვი ფუნქციისთვის სიტუაცია სხვაგვარია. სახელდობრ, მართებულია

წინადადება 9.7 ([16], გვ. 475). x_0 წერტილზე გლუვ φ ფუნქციას წარმოებული $\varphi'(x_0)$ აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს მისივე სიმეტრიული წარმოებული $\varphi^{(\prime)}(x_0)$. როცა არსებობს $\varphi^{(\prime)}(x_0)$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\varphi'(x_0) = \varphi^{(\prime)}(x_0). \tag{7}$$

დამტკიცება. საკმარისია გამოვიყენოთ შემდეგი ტოლობა:

$$\frac{\varphi(x_0+u)+\varphi(x_0-u)-2\varphi(x_0)}{u} + \frac{\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0-u)}{u} = \\ = 2\frac{\varphi(x_0+u)-\varphi(x_0)}{u}. \tag{8}$$

(დამატებითი ინფორმაციისთვის [4], გვ: 159, 165, 166, 281, 326).

10 გლუვი ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კრებადობა

თეორემა 10.1. $f \in L[-\pi,\pi]$ ფუნქციას თუ აქვს გლუვობის x_0 წერტილი, მაშინ f-ის ფურიეს $S[f]$ მწკრივი კრებადია x_0 წერტილზე $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ.

დამტკიცება. §9-დან (1) ტოლობის შესრულება ნიშნავს, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ რიცხვი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)-2f(x_0)}{u}\right| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad 0 < |u| < \delta. \tag{1}$$

§8-ის (9) ტოლობის თანახმად კი

$$S_n(f;x_0) - f(x_0) = \\ = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)-2f(x_0)}{u}\sin nu du + o(1), \tag{2}$$

სადაც n-ზე და x_0-ზე დამოკიდებული $o(1)$ ფუნქციის ზღვარი ნულია, როცა $n \to \infty$. ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური

$N(x_0,\varepsilon)$ რიცხვი, რომ $|o(1)| < \varepsilon$, როცა $n > N(x_0,\varepsilon)$. ამის გამო და (1) უტოლობის ძალით, (2)-დან გამომდინარეობს უტოლობა $|S_n(f;x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$, $n > N(x_0,\varepsilon)$.

მაშასადამე,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,x_0) = f(x_0). \tag{3}$$

შედეგი 10.2 ([7], გვ. 120). თუ $f \in L[-\pi,\pi]$ ფუნქციას რაიმე x_0 წერტილზე აქვს სასრული წარმოებული $f'(x_0)$, მაშინ f-ის ფურიეს $S[f]$ მწკრივი კრებადია x_0 წერტილზე $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ.

შედეგი 10.3. თუ $f \in L[-\pi,\pi]$ დიფერენცირებადია, ე.ი. აქვს სასრული წარმოებული, $(-\pi,\pi)$ ინტერვალის ყოველ წერტილზე, მაშინ $S[f]$ კრებადია $(-\pi,\pi)$ ინტერვალის ნებისმიერ წერტილზე f-ის შესაბამისი მნიშვნელობისკენ.

შენიშვნა 10.4. როგორც უკვე ვიცით (იხ. §9), $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტ და (a,b) ინტერვალში **გლუვ** ფუნქციას წარმოებული აქვს (a,b)-ში ყველგან მკვრივ სიმრავლეზე—ეს არის **რაიჰმანის** 1919 წლის შედეგი. რაიჰმანის ეს მტკიცება გააძლიერა **ზალცვასერმა** (Zalcwasser) თავის გამოუქვეყნებელ შრომაში შემდეგნაირად ([12], გვ. 76, თეორემა 3.3): I ინტერვალზე უწყვეტ და გლუვ F ფუნქციას სასრული F' წარმოებული აქვს კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეზე ყოველი სეგმენტიდან, რომლებიც ეკუთვნიან I ინტერვალს.

ზალცვასერის ამ შედეგის გათვალისწინებით, თეორემა 10.1-დან გამომდინარეობს

შედეგი 10.5. თუ $F \in L[-\pi,\pi]$ ფუნქცია უწყვეტი და **გლუვია** რაიმე ინტერვალზე $I \subset [-\pi,\pi]$, მაშინ I-დან აღებულ ყოველ სეგმენტზე არსებობს კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლე, რომლის ყოველ წერტილზე F-ისკენ კრებადია F-ის ფურიეს მწკრივი $S[F]$.

11 ფურიეს მწკრივის კრებადობის დინის ნიშანი

როგორც ვიცით, რაიმე x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ φ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს პირველი გვარის წყვეტა, თუ x_0 წერტილზე მისი მარჯვენა $\varphi(x_0+0) \equiv \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \varphi(x)$ და მარცხენა $\varphi(x_0-0) \equiv \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \varphi(x)$ ზღვრები სასრულია და სრულდება უტოლობა $\varphi(x_0+0) \neq \varphi(x_0-0)$.

თუ ეს ცალმხრივი ზღვრები ტოლია, მაშინ φ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს ზღვარი $\lim_{x\to x_0} \varphi(x)$ და იგი ტოლია ცალმხრივი

ზღვრების ანუ

$$\varphi(x_0+0) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0-0).$$

თუკი $\varphi(x_0)$ **სასრულია** და ადგილი აქვს ტოლობას $\varphi(x_0) = \lim_{x\to x_0}\varphi(x)$, მაშინ φ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილზე, რაც სიმბოლურად შეიძლება გამოისახოს ასე:

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) - \varphi(x_0) = 0. \tag{1}$$

განსაზღვრა 11.1 (ლებეგი). x_0 წერტილს ეწოდება **რეგულარული** φ ფუნქციისთვის, თუ არსებობს სასრული $\varphi(x_0-0)$ და $\varphi(x_0+0)$ და, გარდა ამისა, სრულდება ტოლობა

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{2}[\varphi(x_0+0)+\varphi(x_0-0)]. \tag{2}$$

ცხადია, რომ φ ფუნქციის **უწყვეტობის** ყოველი წერტილი, თუკი ასეთი წერტილი მას გააჩნია, არის φ ფუნქციის **რეგულარული** წერტილი.

როცა φ ფუნქციას არ აქვს (2) ტოლობით გამოსახული თვისება, მაგრამ **არსებობს** სასრული $\varphi(x_0+0)$ და $\varphi(x_0-)$ ცალმხრივი ზღვრები[8], მაშინ ამ ზღვრების არითმეტიკულ საშუალოს აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\overset{\circ}{\varphi}$ ანუ (იხ. [17], გვ. 739)

$$\overset{\circ}{\varphi}(x_0) = \frac{1}{2}[\varphi(x_0+0)+\varphi(x_0-0)]. \tag{3}$$

ახლა დავამტკიცოთ ფურიეს მწკრივის წერტილზე კრებადობის დინის შემდეგი ნიშანი.

დინის ნიშანი 11.2 (1880 წ, [7], გვ. 120). თუ $f \in L[-\pi,\pi]$ ფუნქცია ისეთია, რომ რაიმე x_0 წერტილისთვის და რომელიმე $\delta > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ინტეგრალი

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0+u)+f(x_0-u)-2\overset{\circ}{f}(x_0)|}{u}du, \tag{4}$$

[8](2) ტოლობის არ შესრულება შეიძლება გამოწვეული იყოს არა მარტო იმით, რომ x_0 წერტილზე φ ფუნქციის სასრული $\varphi(x_0)$ მნიშვნელობა განსხვავებულია (2) ტოლობის მარჯვენა მხარისგან, არამედ იმითაც, რომ არ არსებობს ერთ-ერთი ცალმხრივი ზღვარი ან ორივე კი არსებობს, მაგრამ ერთ-ერთი უსასრულოა.

მაშინ f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივი კრებადია x_0 წერტილზე $\overset{\circ}{f}(x_0)$ მნიშვნელობისკენ, სიმბოლურად

$$S[f](x_0) = \overset{\circ}{f}(x_0). \tag{5}$$

დამტკიცება. (4) ინტეგრალის არსებობა ნიშნავს ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ისეთი $\eta(x_0, \varepsilon) > 0$ რიცხვის არსებობას, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\int\limits_0^{\eta} \left| f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2\overset{\circ}{f}x_0 \right| \frac{du}{u} < \varepsilon. \tag{6}$$

რადგან $|\sin nu| \leq 1$ ყოველი n-ისთვის და ნებისმიერი u-ისთვის, ამიტომ

$$\left| \int\limits_0^{\eta} \left[f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2\overset{\circ}{f}(x_0) \right] \frac{\sin nu}{u} du \right| < \varepsilon. \tag{7}$$

მეორე მხრივ, ფუნქცია $l(u) = \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)-2\overset{\circ}{f}x_0}{u}$ ჯამებადია (η, δ) ინტერვალზე. ამიტომ რიმან-ლებეგის თეორემის ძალით [9] (იხ. თავი 3, §9)

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\eta}^{\delta} \left[\frac{f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2\overset{\circ}{f}x_0}{u} \right] \sin nu du = 0. \tag{8}$$

(7) და (8) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\delta} [f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2\overset{\circ}{f}x_0] \frac{\sin nu}{u} du = 0,$$

რაც ნიშნავს ტოლობას (იხ. §8, ტოლობა (7))

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f; x_0) = \overset{\circ}{f}(x_0). \tag{9}$$

[9] რიმან-ლებეგის თეორემა მართებულია $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი ყოველი φ ფუნქციისთვის. ამის დასანახად, საკმარისია განვიხილოთ ახალი ფუნქცია $\psi(x) = \varphi(x)$, როცა $x \in [a, b]$ და $\psi(x) = 0$, როცა $x \in [-\pi, \pi] \setminus [a, b]$.

შედეგი 11.3. თუ $f \in L[-\pi,\pi]$ ფუნქციისთვის x_0 წერტილი რეგულარულია, კერძოდ, თუ f უწყვეტია x_0 წერტილზე და რომელიმე $\delta > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ინტეგრალი (იხ. თეორემა 8.1)

$$\int_0^\delta \frac{|F_f(x_0,u)|}{u}du, \tag{10}$$

მაშინ

$$S[f](x_0) = f(x_0). \tag{11}$$

შედეგი 11.4 ([7], გვ. 120). ვთქვათ, $f \in L[-\pi,\pi]$ ფუნქცია x_0 წერტილის მიდამოში აკმაყოფილებს ლიპშიცის $\alpha > 0$ პირობას [10]

$$|f(x_0+u) - f(x_0)| \leq k|u|^\alpha, \tag{12}$$

სადაც $\alpha > 0$ და $|u| \leq \delta$. მაშინ (4) ინტეგრალი არსებობს[11] და f ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილზე. ამიტომ, ტოლობა (11)-ის ძალით გვაქვს

$$S[f](x_0) = f(x_0). \tag{13}$$

12 ფურიეს მწკრივის კრებადობის ჟორდანის ნიშანი

ჟორდანის თეორემის ძალით, სასრული ვარიაციის ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი ზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით, რომელთაგან თითოეული სასრული ვარიაციის მქონეა ([1], გვ. 303, 309). მონოტონური ფუნქცია კი არის უწყვეტი ან აქვს პირველი გვარის წყვეტა და ასეთ წერტილთა სიმრავლე სასრულია ან თვლადი ([1], გვ. 287, 288). თუ სასრული ვარიაციით ფუნქცია უწყვეტიცაა, მაშინ მის წარმოდგენაში მონაწილე ზრდადი ფუნქციებიც უწყვეტია.

თეორემა 12.1 (ჟორდანი, 1881 წ., [7], გვ. 121). თუ $f \in L[-\pi,\pi]$ ფუნქცია არის სასრული ვარიაციით $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$ სეგმენტზე, მაშინ მისი ფურიეს $S[f]$ მწკრივი კრებადია (a,b) ინტერვალზე. ამასთან ერთად, $S[f]$ მწკრივის ჯამია $f(x_0)$, როცა წერტილი $x_0 \in (a,b)$ არის f ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი და არის $\overset{\circ}{f}(x_0)$, როცა x_0 არის f-ის წყვეტის წერტილი. გარდა ამისა, თუკი f ფუნქცია უწყვეტიცაა

---

[10] შემთხვევა $\alpha = 1$ განხილული იყო ადრე (იხ. თავი 3, §10).

[11] (4) ინტეგრალი $\leq 2k\int_0^\delta \frac{u^\alpha}{u}du = 2k\int_0^\delta u^{\alpha-1}du = 2k\lim_{t\to 0}\int_t^\delta u^{\alpha-1}du = 2k\lim_{t\to 0}\left[\frac{u^\alpha}{\alpha}\right]_{u=t}^{u=\delta} = 2k\frac{1}{\alpha}\lim_{t\to 0}[\delta^\alpha - t^\alpha] = \frac{2k}{\alpha}\delta^\alpha$.

(a, b) ინტერვალში, მაშინ $S[f]$ მწკრივი თანაბრად კრებადია ყოველ $[a', b'] \subset (a, b)$ სეგმენტზე $f(x)$-ისკენ, როცა $x \in [a', b']$.

დამტკიცება. ზემოაღნიშნულის ძალით, f ფუნქცია წარმოდგენადია ზრდადი f_1 და f_2 ფუნქციების სხვაობის სახით $f = f_1 - f_2$. ამასთან, $S[f] = S[f_1 - f_2] = S[f_1] - S[f_2]$ (იხ. თავი 3, §12). ამგვარად, თუ თეორემა დამტკიცებული იქნება $S[f_1]$ და $S[f_2]$ მწკრივებისთვის, მაშინ იგი დამტკიცებული იქნება $S[f]$-საც. ამიტომ, თავიდანვე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ f ფუნქცია ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე.

რადგან
$$\overset{\circ}{f}(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)], \tag{1}$$
ამიტომ
$$\begin{aligned} f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2\overset{\circ}{f}(x_0) &= \\ = [f(x_0+u) - f(x_0+0)] + [f(x_0-u) - f(x_0-0)]. \end{aligned} \tag{1'}$$

აქ თითოეულ კვადრატულ ფრჩხილშიგა სხვაობა არაუარყოფითია და წარმოადგენს ზრდად ფუნქციას u-ს მიმართ.

$x_0 \in (a, b)$ წერტილისთვის არსებობს $\delta = \delta(x_0) > 0$ ისეთი რიცხვი, რომ $x_0 \pm \delta \in (a, b)$ და
$$0 \le f(x_0+u) - f(x_0+0) < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad 0 \le u \le \delta. \tag{2}$$

რადგან $f(x_0+u) - f(x_0+0)$ წარმოადგენს u-ს ზრდად და არაუარყოფით ფუნქციას, ამიტომ საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულით ანუ, რაც იგივეა, **ბონეს** ფორმულით[12],
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

[12] თუ $f \in L[a, b]$ და $g(x)$ ზრდადია და $g(a) \ge 0$, მაშინ $[a, b]$ სეგმენტზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ (იხ. [1]; გვ. 515) ადგილი აქვს ტოლობას
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

$$\int_0^{\delta}[f(x_0+u)-f(x_0+0)]\frac{\sin nu}{u}du =$$

$$= [f(x_0+\delta)-f(x_0+0)]\int_{\delta_1}^{\delta}\frac{\sin nu}{u}du, \tag{3}$$

სადაც $0 < \delta_1 < \delta$. ამავე დროს (იხ. [7], გვ. 114)

$$\left|\int_{\delta_1}^{\delta}\frac{\sin nu}{u}du\right| < 2\pi \quad \text{ნებისმიერი } n-\text{ისთვის}. \tag{4}$$

(2) და (4) უტოლობების გათვალისწინებით, (3) ტოლობიდან გვაქვს

$$\left|\int_0^{\delta}[f(x_0+u)-f(x_0+0)\frac{\sin nu}{u}du\right| < 2\pi\varepsilon. \tag{5}$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ

$$\left|\int_0^{\delta}[f(x_0-u)-f(x_0-0)\frac{\sin nu}{u}du\right| < 2\pi\varepsilon. \tag{6}$$

($1'$) ტოლობის გათვალისწინებით, უკანასკნელი ორი უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\left|\int_0^{\delta}[f(x_0+u)-f(x_0-u)-2\overset{\circ}{f}(x_0)]\frac{\sin nu}{u}du\right| < 4\pi\varepsilon. \tag{7}$$

ეს კი ნიშნავს §8-დან ტოლობა (4)-ის შესრულებას მნიშვნელობისთვის $L = \overset{\circ}{f}(x_0)$ ანუ, რაც იგივეა, $S[f]$ მწკრივი $x_0 \in (a,b)$ წერტილზე კრებადია მნიშვნელობისკენ $\overset{\circ}{f}(x_0)$.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $[a,b]$ სეგმენტზე სასრული ვარიაციის მქონე f ფუნქცია უწყვეტია ღია (a,b) ინტერვალში და სეგმენტი $[a',b']$ ეკუთვნის (a,b)-ს. მაშინ არსებობს ისეთი $\delta_2(\varepsilon) > 0$ რიცხვი, რომ

$$|f(x+u)-f(x)| < \varepsilon,\ |f(x-u)-f(x)| < \varepsilon \text{ როცა } a' \le x \le b' \text{ და } 0 < u \le \delta_2.$$

წინა მსჯელობები ძალაშია, თუ x_0 შეცვლილია ნებისმიერი x-ით $[a', b']$-დან. ამის გამო

$$\left|\int_0^\delta [f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\frac{\sin nu}{u}du\right| < 4\pi\varepsilon, \quad \text{როცა } a' \le x \le b'.$$

ეს ნიშნავს $S[f]$ მწკრივის თანაბარ კრებადობას $[a', b']$ სეგმენტზე $f(x)$ მნიშვნელობებისკენ, $x \in [a', b']$. თეორემა დამტკიცებულია.

ჟორდანის ამ თეორემიდან გამომდინარეობს

თეორემა 12.2 ([7], გვ. 122). თუ f ფუნქცია არის სასრული ვარიაციის მქონე და უწყვეტი $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე და ამასთან სრულდება $f(-\pi) = f(\pi)$ ტოლობა ანუ, რაც იგივეა, თუ f უწყვეტია წრეწირზე და აქვს სასრული ვარიაცია $[-\pi, \pi]$-ზე, მაშინ $S[f]$ მწკრივი თანაბრად კრებადია ნებისმიერ სეგმენტზე $[A, B] \subset (-\infty, +\infty)$. კერძოდ, ამ დასკვნას ადგილი აქვს თუ f აბსოლუტურად უწყვეტია $[-\pi, \pi]$-ზე და სრულდება ტოლობა $f(-\pi) = f(\pi)$ ანუ, რაც იგივეა, თუ f აბსოლუტურად უწყვეტია წრეწირზე.

შენიშვნა 12.3. როცა ვსაუბრობთ u ცვლადის $f(x_0+u)+f(x_0-u)-2\overset{\circ}{f}(x_0)$ ფუნქციაზე, ცხადია ვგულისხმობთ f-ის განსაზღვრულობას x_0 წერტილის მიდამოში და $2\overset{\circ}{f}(x_0) = f(x_0+0)+f(x_0-0)$ მნიშვნელობის სასრულობას, რაც, თავის მხრივ, გულისხმობს ცალმხრივი $f(x_0+0)$ და $f(x_0-0)$ ზღვრების არსებობასა და მათ სასრულობას.

როცა რაიმე ფაქტის დასადგენად წინაპირობად მოთხოვნილია, რომ f ფუნქციის მნიშვნელობა x_0 წერტილზე არის $\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$ ანუ,რაც იგივეა, x_0 არის f-ის **რეგულარული** წერტილი, ეს გარკვეულწილად ზღუდავს f ფუნქციას და თანაც, გამიზნული ფაქტისთვის ეს არც კი არის არსებითი. მართლაც, გამიზნული ფაქტის დადგენისას მთავარია თვით მნიშვნელობა $\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$ და არა ის, რომ ამ მნიშვნელობას f ღებულობს x_0 წერტილზე.

ერთხელ კიდევ, რაღაც პირობებში ფურიეს მწკრივის x_0 წერტილზე $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$ მნიშვნელობისკენ კრებადობა იმ მოთხოვნით, რომ x_0 იყოს **რეგულარული** წერტილი f-ისთვის, კრებადობა არ საჭიროებს. საქმე ისაა, რომ ამდაგვარ თეორემებში კრებადობა $\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$ მნიშვნელობისკენ მტკიცდება იმისგან დამოუკიდებლად, არის თუ არ არის ეს არითმეტიკული საშუალო f ფუნქციის მნიშვნელობა x_0 წერტილზე.

ამიტომაა, რომ ფურიეს მწკრივის კრებადობის **დინისა** და **ჟორდანის** აქ მოტანილ ფორმულირებებში ფიგურირებს $\overset{\circ}{f}(x_0)$ მნიშვნელობა (იხ. §11-დან თეორემა 11.2 და §12-დან თეორემა 12.1).

13 ფურიეს მწკრივის კრებადობის ვალე პუსენის ნიშანი

ახლა დავამტკიცოთ **ვალე პუსენის** თეორემა, რომელშიც ფიგურირებს §8-ში ტოლობა (6)-ით მიღებული

$$F_f(x,u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x) \tag{1}$$

აღნიშვნისგან განსხვავებული შემდეგი აღნიშვნა

$$\overset{\circ}{F}_f(x,u) = f(x+u) + f(x-u) - 2\overset{\circ}{f}(x), \tag{2}$$

სადაც (იხ. §11, ტოლობა (3))

$$\overset{\circ}{f}(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]. \tag{3}$$

თეორემა 13.1 (ვალე პუსენი, 1911 წ., [7], გვ. 247). ვთქვათ $t > 0$,

$$\omega_{x_0}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \overset{\circ}{F}_f(x_0,u)du, \quad \omega_{x_0}(0) = 0 \tag{4}$$

და ვთქვათ

$$\lim_{t\to 0+} \omega_{x_0}(t) = 0. \tag{5}$$

თუკი $\omega_{x_0}(t)$ ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია რაიმე $[0,\delta]$ სეგმენტზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$S[f](x_0) = \overset{\circ}{f}(x_0). \tag{6}$$

დამტკიცება. რადგან $t\omega_{x_0}(t) = \int_0^t \overset{\circ}{F}_f(x_0,u)du$, ამიტომ თითქმის ყველ-

და t-სთვის $[0,\delta]$-დან $(t\omega_{x_0}(t))' = \overset{\circ}{F}_f(x_0,t)$ და

$$\int\limits_0^\delta \overset{\circ}{F}_f(x_0,u)\frac{\sin nu}{u}du = \int\limits_0^\delta [u\omega_{x_0}(u)]'\frac{\sin nu}{u}du =$$

$$= \int\limits_0^\delta u\omega'_{x_0}(u)\frac{\sin nu}{u}du + \int\limits_0^\delta \omega'_{x_0}(u)\frac{\sin nu}{u}du =$$

$$= \int\limits_0^\delta \omega'_{x_0}(u)\sin nudu + \int\limits_0^\delta \omega_{x_0}(u)\frac{\sin nu}{u}du \equiv I_1 + I_2.$$

რადგან $\omega_{x_0}(u)$ არის სასრული ვარიაციით $[0,\delta]$ სეგმენტზე, ამიტომ მისი $\omega'_{x_0}(u)$ წარმოებული ჯამებადია $[0,\delta]$-ზე (იხ. [18], გვ. 205) და რიმან-ლებეგის თეორემის თანახმად (იხ. თავი 3, §9, თეორემა 9.2)

$$\lim_{n\to\infty} I_1 = 0, \tag{7}$$

როგორც $[-\pi,\pi]$-ზე ჯამებადი

$$\psi(u) = \begin{cases} \omega'_{x_0}(u), & \text{როცა}, \quad u\in[0,\delta], \\ 0, & \text{როცა}, \quad u = [-\pi,\pi]\backslash[0,\delta] \end{cases}$$

ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი.

ახლა ვაჩვენოთ I_2 ინტეგრალის სწრაფვა ნულისკენ, როცა $n\to\infty$. ამ მიზნით შევნიშნოთ, რომ $\omega_{x_0}(t)$ ფუნქცია უწყვეტია $t=0$ წერტილზე (რადგან (5) ტოლობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს: $\lim_{t\to 0+}\omega_{x_0}(t) = \omega_{x_0}(0)$) და არის სასრულო ვარიაციის მქონე $[0,\delta]$-ზე. ამიტომ, ჟორდანის თეორემით $S[\omega_{x_0}](0) = 0$. ეს კი ნიშნავს ტოლობას (იხ. §8, ტოლობა (7))

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\delta [\omega_{x_0}(0+u)+\omega_{x_0}(0-u)-2\omega_{x_0}(0)]\frac{\sin nu}{u}du = 0$$

ანუ

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\delta [\omega_{x_0}(u)+\omega_{x_0}(u)]\frac{\sin nu}{u}du = 0. \tag{8}$$

მართლაც, u ცვლადის ფუნქცია $\overset{\circ}{F}_f(x_0,u)$ ლუწია. ამიტომ

$$\int\limits_0^t \overset{\circ}{F}_f(x_0,u)du = \int\limits_{-t}^0 \overset{\circ}{F}_f(x_0,u)du = -\int\limits_0^{-t} \overset{\circ}{F}_f(x_0,u)du$$

და

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \overset{\circ}{F}_f(x_0,u)du = \frac{1}{-t}\int\limits_0^{-t} \overset{\circ}{F}_f(x_0,u)du = \omega_{x_0}(-t), \quad \text{ე.ი.}$$

$$\omega_{x_0}(-t) = \omega_{x_0}(t), \quad t \geq 0. \tag{9}$$

ამის გამო, (8)-დან გამომდინარეობს

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\delta \omega_{x_0}(u)\frac{\sin nu}{u}du = 0. \tag{10}$$

(7) და (10) ტოლობების ძალით ვღებულობთ

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\delta \overset{\circ}{F}_f(x_0,u)\frac{\sin nu}{u}du = 0. \tag{11}$$

ეს კი ნიშნავს (6) ტოლობას, რადგანაც §8-ის (7) ტოლობაში $F_f(x,u)$-ს ადგილას ახლა გვაქვს $\overset{\circ}{F}_f(x_0,u)$, საიდანაც იმავე პარაგრაფის 8.1 თეორემის ძალით $S[f]$ კრებადია x_0 წერტილზე $\overset{\circ}{f}(x_0)$ მნიშვნელობისკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

14 ფურიეს მწკრივის კრებადობის იანგის, ლებეგის, ლებეგ-გერგენის ნიშნები და დამოკიდებულებანი კრებადობის ნიშნებს შორის

ფურიეს მწკრივის კრებადობის უკვე დამტკიცებული დინის, ჟორდანის და ვალე პუსენის ნიშნების გარდა, არსებობს კიდევ რამდენიმე ნიშანი, რომელთა შესახებ ინფორმაცია აქ მოცემული იქნება დამტკიცების გარეშე,

1. დავიწყოთ **იანგის** თეორემით.

თეორემა 14.1 (იანგი, 1916 წ., [7], გვ. 249). ვთქვათ:

1) $\overset{\circ}{F}_f(x_0,u) \to 0$, როცა $u \to 0$;

2) $\psi(t) = t\overset{\circ}{F}_f(x_0,t)$ ფუნქციას სასრული ვარიაცია აქვს $(0,\delta)$ ინტერვალზე;

3) ψ ფუნქციის $V_\psi(h)$ ვარიაციას $(0,h)$ ინტერვალზე აქვს თვისება

$$V_\psi(h) = O(h). \tag{1}$$

მაშინ $S[f]$ კრებადია x_0 წერტილზე $\overset{\circ}{f}(x_0)$ მნიშვნელობისკენ.

თეორემა 14.2 (ლებეგი, 1905 წ., [7], გვ. 254). თუ

$$\lim_{h\to 0+}\int_h^\delta \Big|\frac{\overset{\circ}{F}_f(x_0,u+h)}{u+h} - \frac{\overset{\circ}{F}_f(x_0,u)}{u}\Big|du = 0, \tag{2}$$

მაშინ

$$S[f](x_0) = \overset{\circ}{f}(x_0). \tag{3}$$

ამასთან ერთად, პირობა (2) ეკვივალენტურია შემდეგი ორი პირობის ([7], გვ. 257):

$$\int_0^t |\overset{\circ}{F}_f(x_0,u)|du = o(t), \quad t \to 0 \tag{4}$$

$$\int_h^\delta \Big|\frac{\overset{\circ}{F}_f(x_0,u+h) - \overset{\circ}{F}_f(x_0,u)}{u}\Big|du = o(1), \quad h \to 0. \tag{5}$$

თეორემა 14.3 (ლებეგი, გერგენი, 1930 წ., [7], გვ. 263). თუ

$$\int_0^t \overset{\circ}{F}_f(x_0,u)du = o(t) \tag{6}$$

და შესრულებულია (5) პირობა, მაშინ ადგილი აქვს (3) ტოლობას.

2. **დამოკიდებულებანი კრებადობის ნიშნებს შორის.**

1) გამოთქმა "კრებადობის A ნიშანი ძლიერია კრებადობის B ნიშანზე" ნიშნავს, რომ A ნიშანი ადგენს კრებადობას ყველა იმ მწკრივისას, რომელიც კრებადია B ნიშნის მიხედვით და ამავე დროს

არსებობს A ნიშნით კრებადი მწკრივი, რომელიც არაა კრებადი B ნიშნის მიხედვით.

2) გამოთქმა "კრებადობის A და B ნიშნები არასადარია" ნიშნავს ისეთი მწკრივის არსებობას, რომელიც კრებადია A ნიშნით, მაგრამ არაა კრებადი B ნიშნის მიხედვით და, გარდა ამისა, არსებობს B ნიშნით კრებადი მწკრივი, რომელიც არაა კრებადი A ნიშნით.

1. დინისა და ჟორდანის ნიშნები არასადარია ([7], გვ. 246).

2. ვალე პუსენის ნიშანი ძლიერია დინისა და ჟორდანის ნიშნებზე ([7], გვ. 248).

3. იანგის ნიშანი ძლიერია ჟორდანის ნიშანზე ([7], გვ. 251).

4. იანგისა და დინის ნიშნები არასადარია ([7], გვ. 252).

5. იანგისა და ვალე პუსენის ნიშნები არასადარია ([7], გვ. 254).

6. ლებეგის ნიშანი ძლიერია დინის, ჟორდანის, ვალე პუსენის და იანგის ნიშნებზე ([7], გვ. 258).

7. ლებეგ-გერგენის ნიშანი ძლიერია ლებეგის ნიშანზე ([7], გვ. 266).

15 ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება

თავი 3-დან §8-ში დამტკიცებული გვქონდა, რომ $L^2[a,b]$ სივრცეში სრული (ჩაკეტილი) $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ $f\in L^2[a,b]$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივის

$$f\sim c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+\cdots$$

წევრობრივი ინტეგრება მართლზომიერია ნებისმიერ $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას (ე.ი. შესაბამისობის "$\sim$" ნიშანი იცვლება ტოლობის "=" ნიშნით!):

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\int_{\alpha}^{\beta}\varphi_k(x)dx.$$

ახლა აქ დავამტკიცებთ ლებეგის ანალოგიურ თეორემას ტრიგონომეტრიული, როგორც ნამდვილი, ისე კომპლექსური ფორმის მწკრივისთვის უკვე პერიოდზე ჯამებადი ფუნქციისთვის, თუნდაც ეს მწკრივი განშლადი იყოს ყველგან! პერიოდზე **ჯამებადი** ფუნქციის ფურიეს **ყველგან განშლადი** მწკრივის არსებობა დაამტკიცა კოლმოგოროვმა.

1. **ფურიეს ნამდვილი ფორმის მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება.**

თეორემა 15.1 (ლებეგი, 1902 წ.). ვთქვათ f არის 2π პერიოდული და 2π სიგრძის მონაკვეთზე ჯამებადი ნებისმიერი ფუნქცია. განვიხილოთ f ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს ნამდვილი ფორმის მწკრივი

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

რომელიც შესაძლებელია განშლადიც კი იყოს ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე!

მაშინ, (1) დამოკიდებულების მარჯვენა მხარის წევრობრივი ინტეგრებით ნებისმიერ $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ სეგმენტზე მიიღება კრებადი რიცხვითი მწკრივი, რომლის ჯამია ინტეგრალი $[a, b]$ სეგმენტზე (1)-ის მარცხენა მხრიდან:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_a^b dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^b \cos nx dx + b_n \int_a^b \sin nx dx \right). \tag{2}$$

ამასთან ერთად, თუკი ინტეგრება ცვლადსაზღვრიანია, მაშინ წევრობრივი ინტეგრებით მიღებული მწკრივი თანაბრად კრებადია ნებისმიერ 2π სიგრძის სეგმენტზე და მას აქვს სახე

$$\int_a^x f(t)dt = \frac{a_0}{2} \int_0^x dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^x \cos nt dt + b_n \int_0^x \sin nt dt \right), \tag{3}$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx), \tag{4}$$

სადაც

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)(\pi - x)dx. \tag{5}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია

$$F(x) = \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}]dt, \tag{6}$$

სადაც

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx. \tag{7}$$

ცხადია, რომ $F(0) = 0$, ხოლო $F(2\pi) = \int_0^{2\pi}[f(t) - \frac{a_0}{2}]dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt - \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi a_0 - \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi = \pi a_0 - \pi a_0 = 0$, ე. ი. $F(0) = F(2\pi) = 0$. $[0, 2\pi]$ სეგმენტის გარეთ F ფუნქცია გავაგრძელოთ 2π პერიოდით: $F(x + 2\pi) = F(x)$.

ამრიგად, (6) ტოლობით მოცემული ფუნქცია არის 2π პერიოდული და აბსოლუტურად უწყვეტი ყოველ სეგმენტზე $(-\infty, +\infty)$-დან.

ჟორდანის თეორემის თანახმად (იხ. თავი 4, §12, თეორემა 12.2), (6) ტოლობით განსაზღვრული F ფუნქცია გაიშლება $[0, 2\pi]$-ზე თანაბრად კრებად ფურიეს მწკრივად

$$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx), \tag{8}$$

სადაც

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(x)dx, \quad A_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(x)\cos nxdx,$$
$$B_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(x)\sin nxdx. \tag{9}$$

ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდით A_n და B_n $(n = 1, 2, \dots)$ კოეფიციენტები გამოისახებიან a_n და b_n კოეფიციენტებით შემდეგნაირად, რადგანაც არაინტეგრალური წევრები ნულის ტოლია,

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(x)\cos nxdx = -\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = -\frac{b_n}{n},$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(x)\sin nxdx = \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{a_n}{n}.$$

A_n და B_n კოეფიციენტების ეს ნაპოვნი მნიშვნელობანი ჩავსვათ (8) ტოლობაში და გავითვალისწინოთ (6) ტოლობა, მივიღებთ:

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}A_0 + \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n \sin nx - b_n \cos nx). \tag{10}$$

თუ (10) ტოლობაში ჩავსვამთ კერძო $x = 0$ მნიშვნელობას, მივიღებთ $0 = \frac{1}{2}A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ ანუ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2}A_0. \tag{11}$$

ამის გამო

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{b_n}{n}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^x dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^x \cos nx dx + b_n \int_0^x \sin nx dx\right),$$

ე.ი. ტოლობა (3) მართებულია და იგი შესრულებულია თანაბრად $[0, 2\pi]$-ზე.

გარდა ამისა, ტოლობის

$$\int_a^b \lambda(t)dt = \int_0^b \lambda(t)dt - \int_0^a \lambda(t)dt$$

გამოყენებით (10) ტოლობიდან მივიღებთ (გამოკლებისას $\frac{1}{2}A_0$ გაქრება)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_a^b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n}\Big|_a^b,$$

რაც ნიშნავს (2) ტოლობას.

ახლა კი დავამტკიცოთ (5) ტოლობა. ამ მიზნით ვისარგებლოთ (11) ტოლობით და A_0 კოეფიციენტის გამოსათვლელი (9) ტოლობით. გვაქვს

$$\pi A_0 = \int_0^{2\pi} F(x)dx = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt\right)dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx - \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^x dt\right)dx. \qquad (12)$$

დირიჰლეს ფორმულაში (იხ. [3], გვ. 330)

$$\int_0^a\left(\int_0^x \varphi(x,y)dy\right)dx = \int_0^a\left(\int_y^a \varphi(x,y)dx\right)dy \qquad (13)$$

თუ ავიღებთ $a = 2\pi$ და $\varphi(x,y) = f(y)$, მაშინ მივიღებთ:

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx = \int_0^{2\pi}\left(\int_t^{2\pi} f(t)dx\right)dt = \int_0^{2\pi}\left(f(t)\int_t^{2\pi} dx\right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(f(t)[x]_t^{2\pi})dt = \int_0^{2\pi} f(t)(2\pi - t)dt. \qquad (14)$$

გარდა ამისა,

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^x dt\right)dx = \int_0^{2\pi}([t]_0^x)dx = \int_0^{2\pi} xdx = \frac{1}{2}x^2|_0^{2\pi} = 2\pi^2. \qquad (15)$$

ახლა (12), (14) და (15) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(2\pi - t)dt - \frac{a_0}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(2\pi - t)dt - \frac{a_0}{2}\pi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(2\pi - t)dt - \frac{\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(2\pi - t - \pi)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\pi - t)dt.$$

მაშასადამე,

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)(\pi - t)dt. \tag{16}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 15.2. ყოველი $f \in L[-\pi, \pi]$ ფუნქციის ფურიეს b_n კოეფიციენტებისგან შედგენილი მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \tag{17}$$

კრებადია და ადგილი აქვს (5) ტოლობას.

შედეგი 15.3. ლებეგის 15.1 თეორემიდან ტოლობა (3) შეიძლება ჩამოყალიბდეს ასე: $[0, 2\pi]$-ზე ჯამებადი f ფუნქციისთვის, თანაბრად $[0, 2\pi]$-ზე სრულდება შემდეგი ორი ურთიერთეკვივალენტური ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^x S_n(f;t)dt = \int\limits_0^x f(t)dt \tag{18}$$

და

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^x [S_n(f;t) - f(t)]dt = 0, \tag{18$'$}$$

სადაც

$$S_n(f;t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt). \tag{19}$$

შედეგი 15.4. თეორემა 15.1 საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ ჯამებადი f ფუნქცია, თუ ცნობილია f-ის ფურიეს კოეფიციენტები ანუ, რაც იგივეა, როცა ცნობილია f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივი. მართლაც, უნდა დაიწეროს (1) დამოკიდებულება, ვიპოვოთ (3) ტოლობის მარჯვენა მხარის ჯამი და ამის შემდეგ გავაწარმოოთ ეს ჯამი და შედეგად ვიპოვით $\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)$-ს თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ მნიშვნელობისთვის, თანახმად (3) ტოლობის მარცხენა მხარისა. ასე მიღებულ შედეგს დავამატოთ $\frac{1}{2}a_0$ და გვეცოდინება $f(x)$ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ მნიშვნელობისთვის.

შენიშვნა 15.5. (17) მწკრივის კრებადობა საშუალებას გვაძლევს მივუთითოთ **არაფურიეს** მწკრივი, რომლისთვისაც განშლადია (17) მწკრივი.

მაგალითად, **ფატუმ** მიუთითა ყველგან კრებადი ტრიგონომეტრიული მწკრივი $\sum_{k=2}^{\infty} \sin kx/\ln k$ (იხ. §17, შედეგი 17.4), რომელიც არ არის ფურიეს მწკრივი იმ მიზეზის გამო, რომ მწკრივი $\sum_{n=2}^{\infty} 1/k\ln k$ განშლადია [13] და, მაშასადამე, არ სრულდება აუცილებელი (17) პირობა.

ამასთან ერთად, კრებადი (17) მწკრივის გვერდით, მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ შეიძლება განშლადი იყოს. მართლაც, მწკრივი $\sum_{n=2}^{\infty} \cos kx/\ln k$ კრებადია ყველგან, გარდა $x = 2\pi k$ წერტილებისა და ეს მწკრივი წარმოადგენს არაუარყოფითი ფუნქციის **ფურიეს** მწკრივს (იხ. [7], გვ. 100 და 102), თუმცა მწკრივი $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} 1/n\ln n$ განშლადია.

შენიშვნა 15.6. განსხვავება $\sum_1^{\infty} a_n/n$ და $\sum_1^{\infty} b_n/n$ მწკრივებს შორის მათი კრებადობის თვალსაზრისით ქრება, თუ a_n და b_n წარმოადგენენ L^p, $p > 1$, კლასის ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს: მაშინ ორივე ეს მწკრივი კრებადია (იხ. [7], გვ. 216).

შენიშვნა 15.7. (4) ტოლობის მარჯვენა მხარე არ წარმოადგენს მისი მარცხენა მხარის გაშლას ფურიეს მწკრივად, რადგან მარჯვენა მხარეში დგას **არაპერიოდული** ფუნქცია $\frac{a_0}{2}x$! თუკი (4) ტოლობის ორივე მხარეს დავაკლებთ $\frac{a_0}{2}x$-ს, მაშინ ასე მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარე იქნება მისი მარცხენა $\left(\int_0^x f(t)dt - \frac{a_0}{2}x\right)$ მხარის ფურიეს მწკრივი.

შენიშვნა 15.8. (5) ტოლობის აქ მოტანილი დამტკიცება განსხვავდება ცნობილი დამტკიცებებისგან ([12], გვ. 120; [7], გვ. 217; [18], გვ. 276; [31], გვ. 53).

შენიშვნა 15.9. ($18'$) ტოლობასთან დაკავშირებით უნდა ითქვას: არსებობს $[0, 2\pi]$-ზე ჯამებადი ისეთი φ ფუნქცია, რომლის შეუღლებული $\overline{\varphi}$ ფუნქციაც ჯამებადია $[0, 2\pi]$-ზე, მაგრამ სიდიდეებიდან $\int_0^{2\pi} |\varphi(x) - S_n(\varphi; x)|dx$ და $\int_0^{2\pi} |\overline{\varphi}(x) - S_n(\overline{\varphi}; x)|dx$ არც ერთი არ ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \to \infty$ (იხ. [7], გვ. 602).

კითხვა. არსებობს თუ არა ისეთი $L^*[0, 2\pi]$ ქვეკლასი $L[0, 2\pi]\backslash L^p[0,$

[13] რადგან ფუნქცია $\frac{1}{x\ln x}$ კლებადია, ამიტომ $\frac{1}{n\ln n} > \int_n^{n+1} \frac{dx}{x\ln x}$. აქედან $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln n} > \int_2^N \frac{dx}{x\ln x} > \ln\ln N - \ln\ln 2 \to \infty$, როცა $N \to \infty$.

$2\pi]$-დან, $p > 1$, რომ ტოლობა $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|\psi(x) - S_n(\psi;x)|dx = 0$ სრულდება ყველა $\psi \in L^*[0,2\pi]$ ფუნქციისთვის?

2. ფურიეს ექსპონენტური მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება.

თეორემა 15.10 (ლებეგი, 1902 წ.). 2π პერიოდული და $[0,2\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი ნებისმიერი f ფუნქციის ფურიეს ექსპონენტური მწკრივის

$$f \sim c_0 + \sum_{|n|\geq 1} c_n e^{inx} \tag{20}$$

წევრობრივი ინტეგრება ყოველ სეგმენტზე $[0,x] \subset (-\infty,+\infty)$ მართლზომიერია, თუნდაც (20) მწკრივი განშლადი იყოს ყველა წერტილზე და ინტეგრების შედეგია

$$c_0x - i\sum_{|n|\geq 1}\frac{c_n}{n}e^{inx} = \int\limits_0^x f(t)dt - i\sum_{|n|\geq 1}\frac{c_n}{n}, \tag{21}$$

რომლის შემადგენელი მარცხენა მწკრივი თანაბრად კრებადია ნებისმიერ $[a,b] \subset (-\infty,+\infty)$ სეგმენტზე და c_n კოეფიციენტებს აქვთ თვისება

$$(PV)\sum_{|n|\geq 1}\frac{c_n}{n} = -\,i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} \tag{22}$$

$$= -\,i\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)(\pi - t)dt. \tag{23}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(x) = \int\limits_0^x [f(t) - c_0]dt, \tag{24}$$

რომლისთვისაც $F(0) = 0$ და $F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(t)dt - c_0\int_0^{2\pi} dt = 2\pi c_0 - 2\pi c_0 = 0$, რადგანაც (იხ. თავი 2, §2, ტოლობა (6)) $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$. $[0,2\pi]$-ს გარეთ F გავაგრძელოთ 2π პერიოდულად: $F(x+2\pi) = F(x)$.

ამრიგად, 2π პერიოდული F ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია, კერძოდ, სასრული ვარიაციის მქონეა ყოველ სეგმენტზე $(-\infty,+\infty)$-დან. ამიტომ, F ფუნქციის ფურიეს ექსპონენტური მწკრივი

$$F \sim d_0 + \sum_{|n|\geq 1} d_n e^{inx} \tag{25}$$

თანაბრად კრებადია $[0, 2\pi]$-ზე, თანახმად ჟორდანის 12.2 თეორემისა. ამრიგად, თანაბრად $[0, 2\pi]$-ზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$F(x) = d_0 + \sum_{|n|\geq 1} d_n e^{inx}, \tag{26}$$

სადაც

$$d_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)dt, \quad d_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}dt, \quad |n| \geq 1. \tag{27}$$

ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ:

$$d_n = \frac{1}{in}c_n, \quad |n| \geq 1 \tag{28}$$

და ამიტომ თანაბრად $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე სრულდება ტოლობა

$$F(x) = d_0 + \sum_{|n|\geq 1} \frac{1}{in}c_n e^{inx}. \tag{29}$$

აქ, კერძო $x = 0$ მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ:

$$d_0 = i\sum_{|n|\geq 1} \frac{1}{n}c_n \tag{30}$$

და, მაშასადამე, თანაბრად $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე გვაქვს ტოლობა:

$$F(x) = i\sum_{|n|\geq 1} \frac{c_n}{n}(1 - e^{inx}). \tag{31}$$

(30) მწკრივის კრებადობის გამო, (31) ტოლობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$F(x) = i\sum_{|n|\geq 1} \frac{c_n}{n} - i\sum_{|n|\geq 1} \frac{c_n}{n}e^{inx}$$

ანუ

$$\int_0^x f(t)dt - c_0 x = i\sum_{|n|\geq 1} \frac{c_n}{n} - i\sum_{|n|\geq 1} \frac{c_n}{n}e^{inx}, \tag{32}$$

რაც ეკვივალენტურია (21) ტოლობის.

ახლა დავამტკიცოთ (22) ტოლობა. ამ მიზნით უნდა განვიხილოთ სიმეტრიული კერძო ჯამები

$$\sum_{1\le|n|\le N}\frac{c_n}{n}=\sum_{n=-N}^{-1}\frac{c_n}{n}+\sum_{n=1}^{N}\frac{c_n}{n}=$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{c_{-n}}{-n}+\sum_{n=1}^{N}\frac{c_n}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}(c_n-c_{-n}).$$

მაგრამ $c_n-c_{-n}=-ib_n$ და $b_n=i(c_n-c_{-n})$ (იხ. თავი 1, §4, ტოლობები (8)) და ამიტომ

$$\sum_{1\le|n|\le N}\frac{c_n}{n}=-i\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{n}, \tag{33}$$

რაც იწვევს (22) ტოლობას. ხოლო ტოლობა (23) გამომდინარეობს (5) ტოლობიდან.

გარდა ამისა, (22) და (30) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$d_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} \tag{34}$$

და §15-ის (5) ტოლობის გამოყენებით კი ვღებულობთ:

$$d_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)(\pi-x)dx. \tag{35}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 15.11. ლებეგის 15.9 თეორემიდან (21) ტოლობის ეკვივალენტური ფორმა: $[0,2\pi]$-ზე ჯამებადი ყოველი f ფუნქციისთვის, თანაბრად $[0,2\pi]$-ზე ადგილი აქვს ურთიერთეკვივალენტურ ტოლობებს:

$$\int_0^x f(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^x\Big(\sum_{|k|\le n}c_ke^{ikt}dt\Big), \tag{36}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x[f(x)-\sum_{|k|\le n}c_ke^{ikt}]dt=0. \tag{36'}$$

16 აბელის გარდაქმნა. აბელის ლემა და თეორემები

აბელის გარდაქმნას, ლემას და თეორემებს მრავალმხრივი გამოყენება აქვთ ფუნქციათა თეორიაში, კერძოდ, ფურიეს მწკრივებში. რიმან-ლებეგის თეორემით (იხ. თავი 3, §9), ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ. აქ დავადგენთ ისეთი ტრიგონომეტრიული მწკრივის არსებობას, რომელიც კრებადია ყველგან და მისი კოეფიციენტები ისწრაფვიან ნულისკენ, მაგრამ ის არ არის ფურიეს მწკრივი!

აბელის გარდაქმნა 16.1. ვთქვათ გვაქვს ნამდვილ ან კომლექსურ რიცხვთა ორი სისტემა $a_1, a_2, \dots$ და $b_1, b_2, \dots$. შემოვიღოთ ჯამები

$$B_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k. \tag{1}$$

მაშინ ყოველი $m \geq 1$ და $n \geq m+1$ რიცხვებისთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_m B_{m-1}, \tag{2}$$

რომელსაც ეწოდება აბელის გარდაქმნა. ამასთან, $B_0 = 0$, როცა $m = 1$.

დამტკიცება (ინდუქციის მეთოდით). კერძო $n = m+1$ შემთხვევაში (2) ტოლობის მარცხენა მხარეა $a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1}$, ხოლო მისი მარჯვენა მხარე კი $(a_m - a_{m+1}) B_m + a_{m+1} B_{m+1} - a_m B_{m-1} = a_m B_m - a_{m+1} B_m + a_{m+1} B_{m+1} - a_m B_{m-1} = a_m (B_m - B_{m-1}) + a_{m+1} (B_{m+1} - B_m) = a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1}$.

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (2) ტოლობა მართებულია. ახლა დავუშვათ (2) ტოლობის მართებულობა რაიმე $n \geq m+2$-ისთვის და ვაჩვენოთ მისი სისწორე $n+1$ მნიშვნელობისთვის. ამ მიზნით, ცხადი ტოლობის $\sum_{k=m}^{n+1} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1}$ მარჯვენა ჯამისთვის გამოვიყენოთ (2) ტოლობა და გვექნება:

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n b_n - a_m B_{m-1} + a_{n+1} b_{n+1}. \tag{3}$$

თუ (2) ტოლობა მართებულია $(n+1)$-ისთვის, მაშინ

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+1} B_{n+1} - a_m B_{m-1}. \tag{4}$$

ახლა შევამოწმოთ, (3) და (4) ტოლობების მარჯვენა მხარეების ტოლობა. ამისთვის საჭიროა შესრულდეს ტოლობა $a_nB_n - a_mB_{m-1} + a_{n+1}b_{n+1} = (a_n - a_{n+1})B_n + a_{n+1}B_{n+1} - a_mB_{m-1}$ ანუ, უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$a_nB_n + a_{n+1}b_{n+1} = a_nB_n - a_{n+1}B_n + a_{n+1}B_{n+1}$$

და, მაშასადამე, ტოლობაც $a_{n+1}b_{n+1} = a_{n+1}(B_{n+1} - B_n)$, რაც ასეა.

შედეგი 16.2. თუ (2) ტოლობაში ავიღებთ $m = 1$ და გავითვალისწინებთ ტოლობას $B_0 = 0$, გვექნება

$$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + A_nB_n, \quad n = 2, 3, \dots . \tag{5}$$

ლემა 16.3 (აბელი). თუ $|B_k| \le c \ (k = 1, 2, \dots)$ და

$$a_1 > a_2 > \cdots a_n > 0, \tag{6}$$

მაშინ

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right| < 2ca_1. \tag{7}$$

დამტკიცება. (5) ტოლობის მარჯვენა წევრებისთვის გვაქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k\right| \le c\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) =$$
$$= c[(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n)] = c[a_1 - a_n] < ca_1$$

და $|a_nB_n| \le ca_n < ca_1$. ამით (7) დამტკიცებულია.

თეორემა 16.4 (აბელი). თუ $|B_k| \le c \ (k = 1, 2, \dots)$,

$$a_1 > a_2 < \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots \tag{8}$$

და

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{9}$$

მაშინ მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_kb_k \tag{10}$$

კრებადია და

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| \leq 4ca_1. \tag{11}$$

დამტკიცება. (7) უტოლობის მტკიცების მეთოდით მივიღებთ, რომ ყოველი p და $q > p$ რიცხვებისთვის მართებულია უტოლობა

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k b_k\right| \leq 2c_1 a_p, \tag{12}$$

სადაც $c_1 = \sup_{p \leq s \leq q} |b_p + \cdots + b_s| = \sup |(b_1 + \cdots + b_s) - (b_1 + \cdots + b_{p-1})| = \sup |B_s - B_{p-1}| \leq \sup\{|B_s| + |B_{p-1}|\} = \sup |B_s| + |B_{p-1}| \leq 2c$.

ამიტომ, (12) უტოლობის ძალით,

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k b_k\right| \leq 4ca_p. \tag{13}$$

თუ (13)-ში ავიღებთ $p = 1$ და $q = \infty$, მაშინ მივიღებთ (11)-ს.

შემდეგ, (9)-დან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $N(\varepsilon)$ ისეთი, რომ $a_p < \varepsilon/4c$, როცა $p \geq N$. ამის გათვალისწინებით, (13)-დან ვღებულობთ, რომ ყოველი $p \geq N$ და $q > p$ რიცხვებისთვის

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k b_k\right| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad p \geq N \quad \text{და} \quad q > p. \tag{14}$$

მწკრივის კრებადობის კოშის კრიტერიუმის თანახმად, (14)-დან გამომდინარეობს (10) მწკრივის კრებადობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 16.5 (აბელის განზოგადებული თეორემა). თუ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, მიმდევრობა (B_n) შემოსაზღვრულია და მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k+1}|$ კრებადია, მაშინ კრებადია მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k. \tag{15}$$

დამტკიცება. გვაქვს

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(B_k - B_{k-1}) =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1} =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} a_{k+1} B_k =$$
$$= a_{n+p}B_{n+p} - a_{n+1}B_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1})B_k.$$

აქედან

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le |a_{n+p}|\cdot|B_{n+p}|+|a_{n+1}|\cdot|B_n|+\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |B_k|\cdot|a_k-a_{k+1}|. \quad (16)$$

ახლა ვთქვათ, რომ $|B_n| \le L$ $(n = 1, 2, \dots)$ და $\varepsilon > 0$ ნებისმიერად მცირეა. მაშინ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $N(\varepsilon)$, რომ $|a_n| < \varepsilon/3L$ და $\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| < \varepsilon/3L$, როცა $n \ge N$ და $p \ge 1$ ნებისმიერია. ამიტომ (16)-დან გამომდინარეობს $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon$, ე.ი. (15) მწკრივი კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

აბელის განზოგადებულ თეორემას ზოგჯერ აყალიბებენ სხვა ფორმითაც, რისთვისაც დაგვჭირდება შემდეგი

განსაზღვრა 16.6. (a_n) მიმდევრობას ეწოდება შემოსაზღვრული ცვლილების[14], თუ

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| < +\infty. \quad (17)$$

ამჯერად აბელის განზოგადებული თეორემა ასე ჩამოყალიბდება.

თეორემა 16.7 (აბელის განზოგადებული თეორემა[15]). თუ ნულისკენ კრებადი (a_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრული ცვლილებებისაა და

---

[14] (17)-დან გამომდინარეობს კრებადობა მწკრივის $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$.

[15] თეორემა 16.5 არის 16.4 თეორემის განზოგადება რადგანაც, როცა (a_n) მიმდევრობას აქვს (8) თვისება, მაშინ კრებადია მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = a_1 - 0 = a_1$, რაც კერძო შემთხვევაა წინა სქოლიოში მითითებული 14-ის.

(B_n) მიმდევრობა კი შემოსაზღვრულია, მაშინ კრებადია მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k. \tag{18}$$

აბელის 16.4 თეორემის მტკიცებისას მიღებული (13) და (14) უტოლობების საფუძველზე მიიღება აბელის ამავე თეორემის გავრცელება ფუნქციურ მწკრივებზე.

თეორემა 16.8 (აბელის თეორემა ფუნქციური მწკრივისთვის). ვთქვათ,

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots \tag{19}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{20}$$

და $|B_n(x)| \le M$, როცა $x \in [\alpha, \beta]$ და $n = 1, 2, \ldots$. მაშინ ფუნქციური მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k(x)$ თანაბრად კრებადია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე და მის $S(x)$ ჯამს აქვს თვისება

$$|S(x)| \le 2Ma_1, \quad \alpha \le x \le \beta. \tag{21}$$

17 ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული მწკრივის შესახებ

ლემა 17.1. კრებადობის წერტილი არ გააჩნია მწკრივს

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx + \cdots \tag{1}$$

და მხოლოდ $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ წერტილებზეა კრებადი მწკრივი

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin mx + \cdots \tag{2}$$

დამტკიცება. თუ (1) მწკრივი კრებადი იქნება რომელიმე x_0 წერტილზე, მაშინ მისი ზოგადი წევრი $\cos nx_0 \to 0$, როცა $n \to \infty$. მაშინ $\sin^2 nx_0 = 1 - \cos^2 nx_0 \to 1$, როცა $n \to \infty$. მეორე მხრივ, $\sin^2 nx_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx_0) \to \frac{1}{2}$. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

მწკრივი (2) თუ კრებადია რაიმე x_0 წერტილზე, მაშინ $\sin nx_0 \to 0$, როცა $n \to \infty$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\sin(n+1)x_0 \to 0$ და $\sin(n-1)x_0 \to 0$ და, მაშასადამე, $\sin(n+1)x_0 - \sin(n-1)x_0 \to 0$, როცა $n \to \infty$. მაგრამ $\sin(n+1)x_0 - \sin(n-1)x_0 = 2\sin x_0 \cos nx_0$, ე.ი. $\sin x_0 \cos nx_0 \to 0$, როცა $n \to \infty$. (1) მწკრივის შესახებ მიღებული ინფორმაციით, $\cos nx_0$ არ ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \to \infty$. მაშასადამე, $\sin x_0 = 0$ და $x_0 = k\pi$.

ლემა 17.2. მწკრივების

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots, \tag{3}$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots \tag{4}$$

კერძო $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$ და $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$ ჯამებს აქვთ თვისება

$$|A_n(x)| \le \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \quad \text{როცა} \quad x \neq 2k\pi, \tag{5}$$

$$|B_n(x)| \le \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \text{ ნებისმიერი } x - \text{ისთვის } (-\infty, +\infty) - \text{დან.} \tag{6}$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ $A_n(x)$ და $B_n(x)$ წარმოადგენენ

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

ჯამის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს. ამიტომ $|A_n(x)| \le |c_n(x)|$ და $|B_n(x)| \le |c_n(x)|$, როცა $e^{ix} \neq 1$ ანუ, როცა $x \neq 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. გვაქვს

$$|c_n(x)| \le \frac{2}{|1 - e^{ix}|} = \frac{2}{|(1 - \cos x) + i \sin x|} =$$

$$= \frac{2}{|2\sin^2 \frac{x}{2} + i2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}|} = \frac{2}{|2 \sin \frac{x}{2}|\,|\sin \frac{x}{2} + i \cos \frac{x}{2}|} =$$

$$= \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|\,(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2})^{1/2}} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \quad x \neq 2k\pi.$$

ამით (5) და (6) უტოლობები დამტკიცებულია, როცა $x \neq 2k\pi$.

თუკი $x = 2k\pi$, მაშინ $B_n(2k\pi) = 0$ და (6)-ის მარჯვენა მხარე იქნება $+\infty$, ე.ი. (6) მართებულია ყველა x-ისთვის.

ლემა 17.3. თუ

$$q_1 > q_2 > q_3 > \cdots > q_n > \cdots \quad \text{და} \quad \lim_{n \to \infty} q_n = 0, \tag{7}$$

მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx \quad \text{კრებადია} \quad x \neq 2k\pi \quad \text{მნიშვნელობებისთვის} \tag{8}$$

და

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx \quad \text{კრებადია ყველა} \quad x \in (-\infty, +\infty) - \text{ისთვის}. \qquad (9)$$

დამტკიცება. შეგვიძლია გამოვიყენოთ აბელის 16.4 თეორემა §16-დან, რადგან ამ თეორემის (8) და (9) პირობები შესრულებულია (7)-ის ძალით, ხოლო $|B_k| \le c$ პირობაც შესრულებულია (5) და (6) უტოლობების სახით, იმის გათვალისწინებით, რომ $B_n(2k\pi) = 0$. ლემა დამტკიცებულია.

შედეგი 17.4. მწკრივები $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ და $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$ კრებადია ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$-ისთვის, ხოლო $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$ და $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{\ln k}$ მწკრივები კრებადია ყველა $x \neq 2k\pi$ მნიშვნელობისთვის.

ლემა 17.5 ([18], გვ. 275-276). ყოველი $x \in (-\infty, +\infty)$-ისთვის და ყველა $n = 1, 2, \ldots$ მნიშვნელობისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| < 2\sqrt{\pi}. \qquad (10)$$

18 ფურიეს მწკრივად გაშლის მაგალითები

ქვემოთ განხილულ მაგალითებში, ფურიეს შესაბამისი მწკრივის კრებადობას აღებული ფუნქციისკენ ადასტურებს ჟორდანის თეორემა (იხ. თავი 4, §12).

18.1. მართებულია ტოლობა

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\Big(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots \Big), \quad -\pi \le x \le \pi. \qquad (1)$$

ამ მიზნით, $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე განვიხილოთ ლუწი ფუნქცია $f(x) = x^2$. ლუწობის გამო, f-ს შეესაბამება კოსინუსების მწკრივი (იხ. თავი 2, §3). $x < -\pi$ და $x > \pi$ წერტილებზე f გავაგრძელოთ 2π პერიოდულობის მიხედვით. $(-\infty, +\infty)$-ზე ასე განსაზღვრული ფუნქცია 2π პერიოდულია და მისი გრაფიკი მოცემულია თავი 1-დან §2-ში, ნახ. 1.

ჟორდანის თეორემის მიხედვით, $S[f]$ მწკრივი კრებადია x^2-სკენ ყოველ $x \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე და პერიოდული გაგრძელებისკენ $[-\pi, \pi]$-ს გარეთ (იხ. ნახატი 1).

ახლა გამოვთვალოთ $f(x)=x^2$ ფუნქციის ფურიეს a_n კოეფიციენტები (f-ის ლუწობის გამო $b_n=0,\ n=1,2,\dots$).

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{x=0}^{x=\pi}=\frac{2\pi^2}{3}.$$

ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x^2\cos nxdx=-\frac{4}{n\pi}\int\limits_0^{2\pi}x\sin nxdx=$$

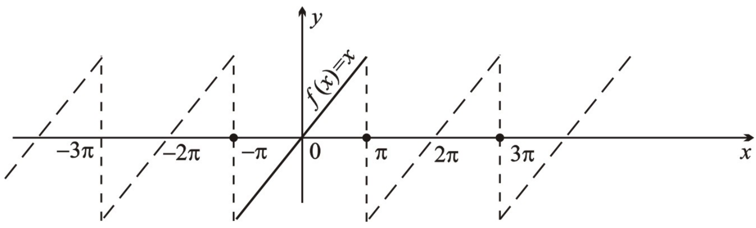
$$=\frac{4}{n^2\pi}[x\cos nx]_0^{\pi}-\frac{4}{n^2\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos nxdx=$$

$$=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=(-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

18.2. ადგილი აქვს ტოლობას

$$x=2\Big(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\Big),\quad -\pi<x<\pi. \tag{2}$$

ფუნქცია $f(x)=x$ კენტია და მისი 2π პერიოდული გაგრძელება გამოსახულია ნახატ 2-ზე ქვემოთ.



ნახ. 2

გაგრძელებული ფუნქცია წყვეტილია წერტილებზე $x=(2k+1)\pi$ ($k=0,\pm1,\pm2,\dots$). წყვეტის წერტილებზე მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები ერთიმეორეს აბათილებენ და ფურიეს მწკრივი კრებადია ნულისკენ $x=(2k+1)\pi$ წერტილებზე. f-ის კენტობის გამო $a_n=0$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$ და

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx dx = -\frac{2}{n\pi}[x\cos nx]_0^\pi +$$

$$+\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos nx dx = -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

შევნიშნოთ, რომ (2) ტოლობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi. \tag{3}$$

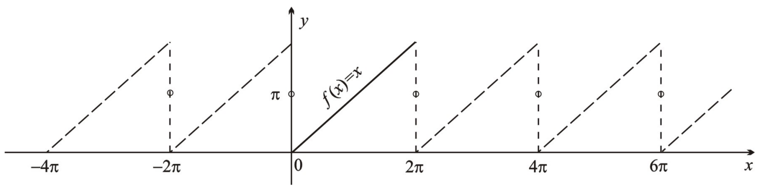
18.3. გვაქვს ტოლობა

$$x = \pi - 2\Big(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\Big), \quad 0 < x < 2\pi \tag{4}$$

ანუ

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots, \quad 0 < x < 2\pi. \tag{5}$$

გარეგნულად ეს შემთხვევა ჰგავს 18.2 შემთხვევას, მაგრამ იქ არის $(-\pi, \pi)$ ინტერვალი და აქ კი $(0, 2\pi)$. ეს განსხვავება კარგად ჩანს ნახატი 2-ის შედარებით ამ შემთხვევის 2π პერიოდულ გაგრძელებასთან ნახატ 3-ზე (იხ. თავი 2-დან §1-ის დასასრული).



ნახ. 3

2π პერიოდით გაგრძელებულ ფუნქციას წყვეტა აქვს წერტილებზე $x = 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. ამ წერტილებზე ფურიეს მწკრივი კრებადია მარცხენა და მარჯვენა ზღვრების არითმეტიკული საშუალოსკენ, ე.ი. მნიშვნელობისკენ π. $(0, 2\pi)$ ინტერვალზე $f(x) = x$ ტოლობით განსაზღვრული f ფუნქცია არც კენტია და არც ლუწი.

ახლა გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{2\pi} = 2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}[x\sin nx]_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin nxdx=0\ (n=1,2,\dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\sin nxdx = -\frac{1}{n\pi}[x\cos nx]_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos nxdx = -\frac{2}{n}.$$

18.4. მართებულია ტოლობა:

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi. \tag{6}$$

მაშასადამე, $(0,2\pi)$ ინტერვალზე ვიხილავთ ფუნქციას $f(x) = x^2$. ეს შემთხვევა ჰგავს 18.1 შემთხვევას, ოღონდ განსხვავებულ ინტერვალზე. ამ ფუნქციის 2π პერიოდულ გაგრძელებას $(0,2\pi)$-ს გარეთ აქვს წყვეტა $2\pi k$ წერტილებზე $(k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$. გაგრძელებული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი წყვეტის წერტილებზე კრებადია მარცხენა და მარჯვენა ზღვრების არითმეტიკული საშუალოსკენ ანუ რიცხვისკენ $2\pi^2 = \frac{1}{2}[(2\pi)^2+0] = \frac{1}{2}\cdot 4\pi^2$. ფუნქცია $f(x)$ არ მიეკუთვნება არც ლუწების და არც კენტების კლასს. გამოვთვალოთ ფურიეს კოეფიციენტები:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2dx = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos nxdx = -\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\sin nxdx =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}[x\cos nx]_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos nxdx = \frac{4}{n^2},$$

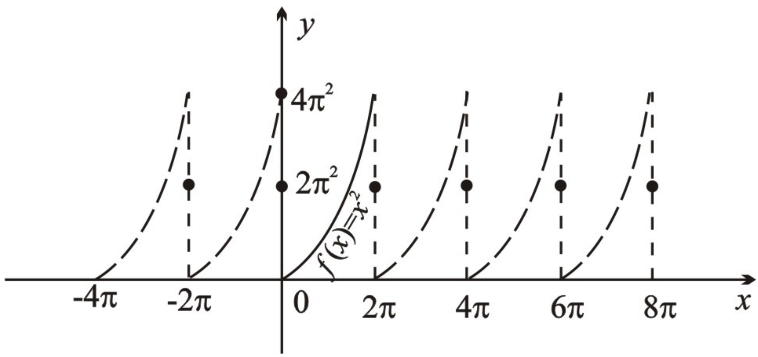
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2\sin nxdx = -\frac{1}{n\pi}[x^2\cos nx]_0^{2\pi} +$$

$$+\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nxdx = -\frac{4\pi}{n} - \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nxdx = -\frac{4\pi}{n}.$$

ამიტომ, როცა $0 < x < 2\pi$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\Big(\cos x - \pi\sin x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\pi\sin 2x}{2} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n} + \cdots\Big) =$$
$$= \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n}\Big) =$$
$$= \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

ამ შემთხვევის გრაფიკული გამოსახვა არის



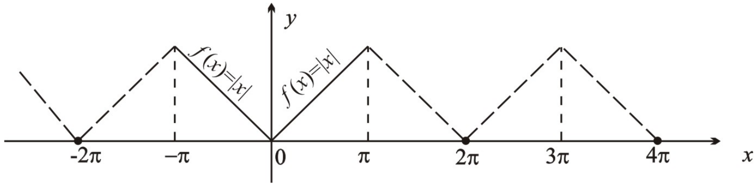
ნახ. 4

18.5. ადგილი აქვს ტოლობას

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\Big(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\Big), \quad -\pi \le x \le \pi. \qquad (7)$$

$[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ფუნქცია $f(x) = |x|$ ლუწია. ეს ფუნქცია თავის 2π პერიოდულ გაგრძელებასთან ერთად გრაფიკულად გამოსახულია ნახ. 5-ზე. რადგან $|x| = x$, როცა $x \ge 0$, ამიტომ

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\pi} = \pi,$$



ნახ. 5

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nx dx = -\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin nx dx = \frac{2}{n^2\pi}[\cos nx]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}[\cos n\pi - 1] = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1].$$

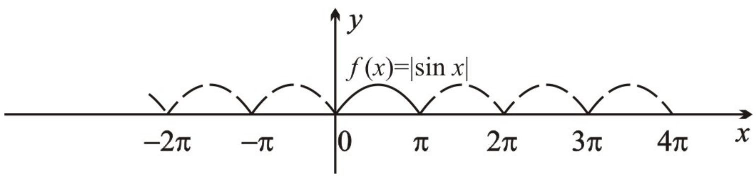
აქედან გამომდინარეობს, რომ ლუწი n-ისთვის $a_n = 0$ და კენტი n-ისთვის კი $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$.

დასასრულ, $b_n = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$, რადგან f ლუწი ფუნქციაა.

18.6. გვაქვს ტოლობა ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$-ისთვის:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\Big(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \cdots\Big). \tag{8}$$

$f(x) = |\sin x|$ ფუნქციის პერიოდია π (იხ. თავი 1, §2). რადგან $|\sin x| = \sin x$, როცა $0 \le x \le \pi$ და, როგორც ვთქვით, ამ ფუნქციის პერიოდია π, ამიტომ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი გავაგრძელოთ ამ სეგმენტიდან ორივე მხარეს π პერიოდით. გაგრძელებული ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე



ნახ. 6

ფურიეს კოეფიციენტებისთვის გვაქვს:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin x dx = \frac{4}{\pi}.$$

თუ $n \neq 1$, მაშინ

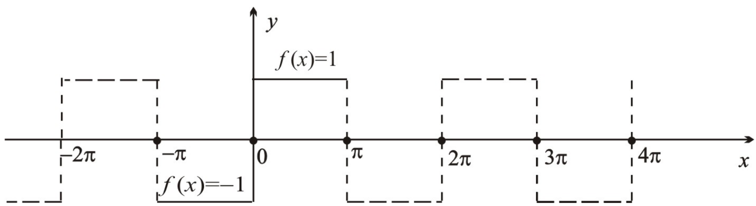
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]dx =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\Big]_0^\pi =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\Big[\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\Big] =$$
$$= -2\frac{(-1)^n+1}{\pi(n^2-1)}.$$

$n = 1$ შემთხვევისთვის

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin 2x dx = -\frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos 2x}{2}\Big]_0^\pi = 0.$$

ამავე დროს, $b_n = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$, რადგან $y = |\sin x|$ ლუწი ფუნქცია.

18.7. **ფუნქცია $f(x) = 1$, როცა $0 < x < \pi$ გავშალოთ სინუსების მწკრივად,** რაც ნიშნავს, რომ f უნდა გავაგრძელოთ კენტობით $[-\pi, 0]$ სეგმენტზე. ასეთი გაგრძელებით მივიღებთ $x = 0$ წერტილზე წყვეტის მქონე ფუნქციას. ამის შემდეგ კი უნდა გავაგრძელოთ 2π პერიოდით $[-\pi, \pi]$-ს გარეთ. გრაფიკულად ეს ასე გამოისახება:



ნახ. 7

წყვეტის $k\pi$ წერტილებზე ფურიეს მწკრივი კრებადია ნულისკენ, რადგან მარცხენა და მარჯვენა ზღვრების 1-სა და −1-ის არითმეტიკული საშუალო ნულია. სხვა წერტილებზე მწკრივი კრებადია 1-კენ. ახლა ვიპოვოთ ფურიეს კოეფიციენტები.

ფუნქციის კენტობის გამო $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi 1 \cdot \sin nx dx = \frac{2}{n\pi}[-\cos nx]_0^\pi = \frac{2}{n\pi}[1 - (-1)^n].$$

ამრიგად, $0 < x < \pi$ ინტერვალზე ადგილი აქვს ტოლობას:

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right). \tag{9}$$

თავი 5

ფურიეს და რიცხვითი მწკრივების შეჯამებადობის საკითხები

შესავალი

ვთქვათ, f ფუნქცია ჯამებადია 2π სიგრძის სეგმენტზე, კერძოდ, $[0, 2\pi]$-ზე ან $[-\pi, \pi]$-ზე და 2π პერიოდულადაა გაგრძელებული $(-\infty, +\infty)$-ზე.

$S[f]$ იყოს f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი, სიმბოლურად,

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) - \text{ნამდვილი ფორმის}$$

ან

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} - \text{კომპლექსური ანუ ექსპონენტური ფორმის,}$$

სადაც

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

A. **$S[f]$-ის წერტილოვანი კრებადობის შესახებ გვქონდა:**

1) თავი 4-ის §8-ში **თეორემა 8.1.** რაიმე x წერტილზე $S[f]$-ის კრებადობისთვის $f(x)$ მნიშვნელობისკენ, აუცილებელი და საკმარისია

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta F_f(x,u)\frac{\sin nu}{u}du=0$$

ტოლობის შესრულება, სადაც $\delta>0$ რაიმე ფიქსირებული რიცხვია და

$$F_f(x,u)=f(x+u)+f(x-u)-2f(x).$$

2) თავი 4-ის §10-ში **თეორემა 10.1.** თუ ჯამებად f ფუნქციას გააჩნია გლუვობის რაიმე x_0 წერტილი, მაშინ $S[f](x_0)=f(x_0)$.

ამ თეორემის კერძო შემთხვევაა.

შედეგი 10.2. თუ f ფუნქციას რაიმე x_0 წერტილზე აქვს სასრული $f'(x_0)$ წარმოებული, მაშინ $S[f](x_0)=f(x_0)$.

3) თავი 4-ის §11-ში დინის ნიშნის **შედეგი 11.3.** თუ f ფუნქცია უწყვეტია რაიმე x_0 წერტილზე და რომელიმე $\delta>0$ რიცხვისთვის არსებობს ინტეგრალი

$$\int_0^\delta\frac{|F_f(x_0,u)|}{u}du,$$

მაშინ $S[f](x_0)=f(x_0)$.

4) თავი 4-ის §12-ში **ჟორდანის ნიშანი.** თუ f ფუნქციას რაიმე სეგმენტზე $[a,b]\subset[0,2\pi]$ აქვს სასრული ვარიაცია, მაშინ ღია (a,b) ინტერვალის ყოველ x_0 წერტილზე $S[f]$ კრებადია რიცხვისკენ $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$, კერძოდ, $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ თუ x_0 არის f ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი.

B. **რამდენიმე ფაქტი $S[f]$-ის განშლადობის შესახებ.**

1) [7], გვ. 97. არსებობს $[-\pi,\pi]$-ზე თანაბრად კრებადი $S[f]$, რომელიც არაა აბსოლუტურად კრებადი $[-\pi,\pi]$-ზე.

2) [7], გვ. 130. არსებობს უწყვეტი f ფუნქცია, რომლისთვისაც $S[f]$ კრებადია ყველგან, მაგრამ არათანაბრად.

3) [7], გვ. 132-**ფეიერის მაგალითი.** არსებობს უწყვეტი f ფუნქცია, რომლისთვისაც $S[f]$-ს გააჩნია განშლადობის წერტილი.

4) [7], გვ. 222. თუ ფურიეს $\sum_{k=2}^\infty a_k\cos kx$ მწკრივში, სადაც $a_k=\frac{1}{\sqrt{\ln k}}$, ნულებით ჩავანაცვლებთ ყველა a_k კოეფიციენტს, როცა

$k \neq 2^n$, მაშინ ასე მიღებული მწკრივი $\sum a_{2^n} \cos 2^n x$ უკვე აღარ იქნება რაიმე ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი.

5) [7], გვ. 319. არსებობს უწყვეტი f ფუნქცია, რომლისთვისაც $S[f]$ განშლადია კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეზე.

6) [7], გვ. 321. არსებობს უწყვეტი f ფუნქცია, რომლის $S[f]$ განშლადია მოცემულ თვლად E სიმრავლეზე და კრებადია $[0, 2\pi] \backslash E$-ზე.

7) [7], გვ. 323. არსებობს უწყვეტი f ფუნქცია, რომლისთვისაც $S[f]$ კრებადია თანაბრად და $S[f^2]$ კი განშლადია კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეზე.

8) [7], გვ. 327. არსებობს უწყვეტი ისეთი f ფუნქცია, რომ $S[f]$ მწკრივის კერძო ჯამების ყოველი ქვემიმდევრობა განშლადია ერთ წერტილზე მაინც (ფეიერის მაგალითის გაძლიერება).

9) [7], გვ. 327. ყოველი უწყვეტი ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ორი ისეთი უწყვეტი ფუნქციის ჯამის სახით, რომ თითოეულის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობა შეიცავს თანაბრად კრებად ქვემიმდევრობას.

10) [7], გვ. 329. ყოველი უწყვეტი ფუნქცია შეიძლება წარმოდგეს ორი ისეთი უწყვეტი ფუნქციის ჯამის სახით, რომ თითოეულის ფურიეს მწკრივის კრებადობის წერტილთა სიმრავლეს აქვს დადებითი ზომა ყოველ $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ სეგმენტზე.

11) [7], გვ. 615. არსებობს აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია, რომლისთვისაც $S[f]$-ს არ აქვს აბსოლუტურად კრებადობის წერტილი.

12) [7], გვ. 635. $S[f]$-ის აბსოლუტურად კრებადობისთვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობა $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) g(t) dt$, სადაც $h \in L^2[-\pi, \pi]$ და $g \in L^2[-\pi, \pi]$.

C. **$S[f]$-ის თითქმის ყველგან კრებადობის შესახებ.**

A განყოფილებაში აღნიშნული ფაქტების დადგენიდან გავიდა ერთ საუკუნეზე მეტი და მას შემდეგ იყო ბევრი მცდელობა გადაჭრილიყო $S[f]$-ის თითქმის ყველგან კრებადობის პრობლემა, რაც აღმოჩნდა ძალიან ძნელი გადასაწყვეტი. **ლუზინმა** თავის გახმაურებული სადოქტორო დისერტაციაში "ინტეგრალი და ტრიგონომეტრიული მწკრივი", 1915 წელს ჩამოაყალიბა შემდეგი **ჰიპოტეტური თეორემა:** თუ F ფუნქცია ეკუთვნის $L^2[0, 2\pi]$ კლასს ანუ, თუ ინტეგრალი $\int_0^{2\pi} F^2(x) dx$ სასრულია, მაშინ $S[f]$ კრებადია $F(x)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$-ისთვის.

იყო ბევრი მცდელობა, **ლუზინის** ამ თეორემის დამტკიცების ან უარყოფის, მაგრამ უშედეგოდ. ამასობაში კოლმოგოროვმა დაამტ-

კიცა არსებობა ისეთი ჯამებადი ϕ ფუნქციისა, რომლის $S[\phi]$ განშლადია ყოველ წერტილზე! ([7], გვ. 412; [12], გვ. 488).

L^2 პრობლემის ვერგადაწყვეტამ და კოლმოგოროვის ამ შედეგმა უარყოფითად იმოქმედა აღნიშნული პრობლემით დაინტერესებულ მათემატიკოსებზე და სიტყვიერად კიდევაც აცხადებდნენ (მაგალითად ზიგმუნდი, ულიანოვი, მენშოვი, სტეჩკინი), რომ, ალბათ, არსებობს უწყვეტი f_0 ფუნქცია, რომლისთვისაც $S[f_0]$ განშლადი იქნება დადებითი ზომის სიმრავლეზე. და აი, 1966 წელს, დღესაც მოქმედმა კარლესონმა დადებითად გადაწყვიტა L^2-ის ანუ ლუზინის პრობლემა ([36]; დაწვრილებით УМН, Т. 23, No.6, 1968).

D. **გაგრძელება**

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს პრობლემა: შესაძლებელია თუ არა ჯამებადი f ფუნქციის $S[f]$ მწკრივი როგორმე გამოყენებულ იქნას $f(x)$ მნიშვნელობების მისაღებად, თუნდაც კოლმოგოროვის მაგალითის შემთხვევაში.

ამ პრობლემის ერთ-ერთი გადაწყვეტა ჩვენთვის ცნობილია $S[f]$-ის წევრობრივი ინტეგრებით (იხ. თავი 4, §15).

არსებობს ამ პრობლემის უფრო მრავალფეროვანი გადაწყვეტა, რაც უკავშირდება $S[f]$-ის სხვადასხვა მეთოდით "შეჯამებადობას". შეჯამებადობის მეთოდში მითითებულია ის ოპერაციები, რაც უნდა შესრულდეს $S[f]$-ზე რომ მივიღოთ f.

საკითხისადმი ასეთი მიდგომა აღმოჩნდა ძალიან შედეგიანი არა მარტო ფურიეს მწკრივის მიმართ, არამედ სხვა სახის მწკრივებისთვისაც. ამასთან სასურველია, რომ მწკრივის "განზოგადებული" ჯამი, რაც შეესაბამება შეჯამებადობის მოცემულ მეთოდს, იძლეოდეს მწკრივის ჩვეულებრივ ჯამს, როცა ეს უკანასკნელი არსებობს. თუ შეჯამებადობის მოცემულ მეთოდს გააჩნია ეს თვისება, მაშინ ამ მეთოდს ეწოდება **რეგულარული**. უნდა ითქვას, რომ არსებობს შეჯამებადობის არარეგულარული მეთოდიც, რაც იმას ნიშნავს, რომ მწკრივის წევრებს მოეთხოვება დამატებითი თვისება, რათა აღებულმა მეთოდმა შეაჯამოს ყველა კრებადი მწკრივი თავისი ჯამისკენ.

ჩვენი უახლოესი ამოცანაა, რიცხვითი მწკრივების შეჯამებადობის განხილვა სხვადასხვა მეთოდით. შემდეგ კი გადავალთ ფურიეს მწკრივების შეჯამებადობის განხილვაზე, რასაც შორს მიმავალი გაგრძელება აქვს ჰოლომორფულ და ჰარმონიულ ფუნქციებთან კავშირში.

1 რიცხვითი მწკრივის შეჯამებადობა ჩეზაროს $(C,1)$ მეთოდით

ვთქვათ, მოცემულია რიცხვითი მწკრივი

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

და განვიხილოთ მისი კერძო ჯამების მიმდევრობა

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \ . \tag{2}$$

როგორც ვიცით, (1) მწკრივს ეწოდება **კრებადი** s-ისკენ, თუ სრულდება ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} S_n = s \tag{3}$$

და ასეთ შემთხვევაში წერენ

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = s. \tag{4}$$

შეიძლება მოხდეს, რომ (1) მწკრივი არ იყოს კრებადი ანუ, რაც იგივეა, არ არსებობდეს (3) ზღვარი, მაგრამ ზღვარი გააჩნდეს შემდეგ მიმდევრობას

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

რომელსაც ეწოდება **არითმეტიკული საშუალოების** მიმდევრობა $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობისთვის.

რადგან $(n+1)\sigma_n = S_0 + S_1 \cdots S_n$ და $n\sigma_{n-1} = S_0 + S_1 \cdots S_{n-1}$, ამიტომ

$$(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1} = S_n. \tag{6}$$

შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა 1.1. თუ არსებობს შემდეგი ზღვარი

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma, \tag{7}$$

მაშინ ჩეზაროს აზრით σ-სკენ კრებადი ეწოდება როგორც (1) მწკრივს, ისე $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობას და, შესაბამისად, წერენ

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sigma \ \ (C,1) \tag{8}$$

და

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sigma \ \ (C,1). \tag{9}$$

(8) ტოლობას გამოთქვამენ ასე: (1) მწკრივი $(C,1)$-შეჯამებადია σ-სკენ. ანალოგიურად, (9) ტოლობა გამოითქმის: σ არის $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობის $(C,1)$-ზღვარი.

მაგალითი 1.2. განვიხილოთ მწკრივი

$$1-1+1-1+1-\cdots, \tag{10}$$

რომელიც განშლადია, რადგანაც მისი კრებადობის შემთხვევაში ზოგადი წევრის ზღვარი უნდა იყოს ნული, რაც ასე არ არის. (10) მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობაა $S_0=1,\ S_1=0,\ S_2=1,\ldots$, რომლისთვისაც (5) ტოლობით განსაზღვრული σ_n მიმდევრობა ასეთია: $\sigma_{2k}=\frac{k+1}{2k+1}$ და $\sigma_{2k-1}=\frac{1}{2}$. ამიტომ $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{1}{2}$. ამრიგად, (10) მწკრივი $(C,1)$-შეჯამებადია $\frac{1}{2}$-სკენ ანუ

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}\ (C,1). \tag{11}$$

მაშასადამე, არსებობს მწკრივი, რომელიც არაა კრებადი, მაგრამ არის $(C,1)$-შეჯამებადი.

დავამტკიცოთ, რომ მწკრივის შეჯამებადობის $(C,1)$ მეთოდი **რეგულარული** ანუ მართებულია

თეორემა 1.3. თუ (1) მწკრივი კრებადია რაიმე სასრული s რიცხვისკენ, მაშინ იგივე მწკრივი $(C,1)$-შეჯამებადია იმავე s რიცხვისკენ.[1]

დამტკიცება. რადგან ადგილი აქვს (3) ტოლობას, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს ნატურალური ისეთი N რიცხვი, დამოკიდებული მხოლოდ ε-ზე, რომ სრულდება უტოლობა

$$|S_n-s|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{ყველა}\quad n>N \quad \text{რიცხვისთვის}. \tag{12}$$

მეორე მხრივ, ყოველი n-ისთვის გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$\sigma_n-s=\frac{1}{n+1}(S_0+S_1+\cdots+S_n)-s=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k-s=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(S_k-s).$$

[1]შემთხვევა $s=+\infty$ განხილული იქნება ქვემოთ.

ახლა, აქ ავიღოთ (12) უტოლობაში მონაწილე $n > N$ ანუ $n \geq N+1$ და დავწეროთ

$$\sigma_n - s = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}(S_k - s) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n}(S_k - s),$$

საიდანაც

$$|\sigma_n - s| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}|S_k - s| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n}|S_k - s| \equiv A_n + B_n. \quad (13)$$

რადგანაც $\sum_{k=0}^{N}|S_k - s|$ ფიქსირებულ N-ზე დამოკიდებული სასრული რიცხვია, ამიტომ $A_n \to 0$, როცა $n \to \infty$. ეს ნიშნავს ისეთი $N_1 > N$ რიცხვის არსებობას, რომ უკვე აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის შესრულდება უტოლობა $A_n < \frac{\varepsilon}{2}$ ყველა $n > N_1$ რიცხვისთვის. გარდა ამისა, უტოლობა (12)-ის ძალით გვაქვს $B_n \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N+1}^{n} 1 < \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot n < \frac{\varepsilon}{2}$. მაშასადამე,

$$|\sigma_n - s| < \varepsilon \quad \text{ყველა} \quad n > N_1 \quad \text{რიცხვისთვის} \quad (14)$$

ანუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s. \quad (15)$$

წინადადება 1.4. მწკრივის შეჯამებადობის $(C,1)$ მეთოდი **სავსებით რეგულარულია** ანუ, თუ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty, \quad (16)$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty. \quad (17)$$

დამტკიცება. ნებისმიერად დიდი M რიცხვისთვის არსებობს ნატურალური ისეთი N რიცხვი, რომ ყველა $n \geq N$ რიცხვისთვის შესრულდება უტოლობა $S_n > M$, რაც გამომდინარეობს (16) ტოლობიდან. ასეთი n-ებისთვის გვაქვს ტოლობა:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \cdots + S_N) + \frac{1}{n+1}(S_{N+1} + \cdots + S_n). \quad (18)$$

N რიცხვი ფიქსირებულია და ამიტომ პირველი შესაკრები ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \to \infty$; მეორე შესაკრებისთვის კი გვაქვს:

$$\frac{1}{n+1}(S_{N+1} + \cdots + S_n) > M\frac{n-N}{n+1} > M \cdot \frac{1}{2},$$

როცა $n > 2N+1$ ანუ მეორე შესაკრები ისწრაფვის $+\infty$-სკენ, როცა $n \to \infty$.

ამრიგად, (18) ტოლობის მარჯვენა მხარე ისწრაფვის $+\infty$-სკენ, როცა $n \to \infty$ ((18) ტოლობის პირველი შესაკრები ვერ ჩააქრობს მისი მეორე წევრის სწრაფვას $+\infty$-სკენ!). მაშასადამე, ადგილი აქვს (17) ტოლობას.

წინადადება 1.5. თუ (1) მწკრივი $(C, 1)$-შეჯამებადია სასრული რიცხვისკენ, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0, \tag{19}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = 0. \tag{20}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, (1) მწკრივი $(C, 1)$-შეჯამებადია სასრული რაიმე σ რიცხვისკენ. მაშინ $\frac{n+1}{n}\sigma_n \to \sigma$, $\sigma_{n-1} \to \sigma$ და ამიტომ $\frac{n+1}{n}\sigma_n - \sigma_{n-1} \to 0$ ანუ $\frac{(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}}{n} \to 0$, როცა $n \to \infty$. ეს კი ნიშნავს (19) ტოლობას, ტოლობა (6)-ის ძალით.

(19) ტოლობა გამოვიყენოთ შემდეგი ტოლობის

$$\frac{u_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1}$$

მიმართ და მივიღებთ $\frac{u_n}{n} \to 0 - 1 \cdot 0 = 0$, როცა $n \to \infty$. ეს კი (20) ტოლობაა.

როგორც ვნახეთ, (1) მწკრივის კერძო S_n ჯამების არითმეტიკული σ_n საშუალოები განსაზღვრულია (5) ტოლობით. იგივე σ_n საშუალოები შეიძლება გამოისახოს თვით (1) მწკრივის წევრებით.

წინადადება 1.6. (5) ტოლობით მოცემული σ_n მიმდევრობისთვის მართებულია ტოლობა

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big) u_k. \tag{21}$$

დამტკიცება. (5) ტოლობიდან გვაქვს

$$(n+1)\sigma_n = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1} + S_n =$$
$$= (u_0) + (u_0 + u_1) + (u_0 + u_1 + u_2) + \cdots + (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) +$$
$$+ (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = (n+1)u_0 + nu_1 + \cdots +$$
$$+ (n+1-k)u_k + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n}(n+1-k)u_k.$$

ამიტომ

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n}\Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big)u_k.$$

წინადადება დამტკიცებულია.

შედეგი 1.7. (1) მწკრივის $(C,1)$-შეჯამებადობა რაიმე σ-სკენ ნიშნავს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}\Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big)u_k = \sigma. \tag{22}$$

შენიშვნა 1.8. თუ შემოვიღებთ რიცხვებს

$$\alpha_n^{(k)} = \begin{cases} 1 - \frac{k}{n+1}, & \text{როცა} \quad 0 \le k \le n \\ 0, & \text{როცა} \quad k > n, \end{cases} \tag{23}$$

მაშინ სრულდება ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{(k)} = 1 \quad \text{ყოველი} \quad k - \text{სთვის} \tag{24}$$

და (22) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^{(k)} u_k = \sigma. \tag{25}$$

ამრიგად, (1) მწკრივის $(C,1)$-შეჯამებადობა σ-სკენ ნიშნავს:

1) (1) მწკრივის "შეშფოთებას" მისი u_k წევრების გამრავლებით, n პარამეტრზე დამოკიდებულ $\alpha_n^{(k)}$ სიდიდეებზე; 2) σ არის შეშფოთებით მიღებული მწკრივის ჯამის ზღვარი, როცა პარამეტრი n ისწრაფვის თავის ზღვარ $+\infty$-სკენ.

დასკვნა 1.9. (1) მწკრივის $(C,1)$-შეჯამებადობა σ-სკენ მოიცემა ურთიერთეკვივალენტური (7) და (22) ტოლობებით.

წინადადება 1.10. (2) და (5) ტოლობებით განსაზღვრული S_n და σ_n მიმდევრობებისთვის მართებულია ტოლობა:

$$S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} ku_k. \tag{26}$$

დამტკიცება. (2) და (5) ტოლობების თანახმად, გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$S_n - \sigma_n = u_0 + u_1 + \cdot + u_n - \Big[u_0 + \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)u_1 + \Big(1 - \frac{2}{n+1}\Big)u_2 + \\ + \cdots + \Big(1 - \frac{n}{n+1}\Big)u_n\Big] = \frac{1}{n+1}u_1 + \frac{2}{n+1}u_2 + \cdots + \frac{n}{n+1}u_n = \\ = \frac{1}{n+1}(u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n),$$

რაც ადასტურებს (26) ტოლობის მართებულობას.

წინადადება 1.11. თუ (1) მწკრივი კრებადია, მაშინ მისი u_k წევრები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n] = 0. \tag{27}$$

დამტკიცება. თუ (1) მწკრივის ჯამია s, მაშინ ამ მწკრივის კერძო S_n ჯამების ზღვარია s. მეორე მხრივ, იმავე მწკრივისთვის შედგენილი σ_n მიმდევრობა კრებადია იგივე s-ისკენ თეორემა 1.3-ის თანახმად. მაშასადამე, მიმდევრობა $S_n - \sigma_n$ კრებადია ნულისკენ. ამიტომ (26) ტოლობიდან გამომდინარეობს ტოლობა:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n) = 0. \tag{28}$$

რადგან $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}$ და $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$, ამიტომ ტოლობა (27) გამომდინარეობს ტოლობა (28)-დან.

2 რიცხვითი მწკრივის შეჯამებადობის აბელ-პუასონის (A) მეთოდი

განვიხილოთ რიცხვითი მწკრივი

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

და მასთან **ასოცირებული** ხარისხოვანი მწკრივი

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n + \cdots . \tag{2}$$

(2) მწკრივის მეშვეობით განისაზღვრება (1) მწკრივის შეჯამებადობის გარკვეული მეთოდი, რომელთანაც სხვადასხვა გზით მივიდნენ პუასონი და აბელი.

მწკრივის $(C,1)$ მეთოდით შეჯამებადობის ურთიერთეკვივალენტური ორი ფორმის არსებობის ანალოგიურად, აქაც მოცემულ იქნება მწკრივის აბელ-პუასონის მეთოდით შეჯამებადობის ორი ფორმა და იქვე დადგენილ იქნება მათი ურთიერთეკვივალენტურობა.

განსაზღვრა 2.1. (1) მწკრივს ეწოდება **აბელ-პუასონის მეთოდით შეჯამებადი**, მოკლედ (A)-შეჯამებადი, s-ისკენ, თუ (2) მწკრივი კრებადია ყველა $x \in (0,1)$ წერტილზე და მისი ჯამი აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = s. \tag{3}$$

განსაზღვრა 2.2. (1) მწკრივს ეწოდება **აბელ-პუასონის მეთოდით შეჯამებადი**, მოკლედ (A)-შეჯამებადი, s-ისკენ, თუ (2) მწკრივი კრებადია ყველა $x \in (0,1)$ წერტილზე და სრულდება ტოლობა

$$\lim_{x\to 1-} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = s, \tag{4}$$

სადაც $S_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_k$.

თეორემა 2.3. 2.1. და 2.2. განსაზღვრებანი ურთიერთეკვივალენტურია.

დამტკიცება. ამ განსაზღვრებათა ეკვივალენტურობის დამტკიცების მიზნით დავადგინოთ, რომ (2) მწკრივის კრებადობა $(0,1)$ ინტერვალზე იწვევს ტოლობას

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^x, \quad 0 < x < 1, \tag{5}$$

და, მაშასადამე, $\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$ მწკრივის კრებადობას $(0,1)$ ინტერვალზე.

ამ მიზნით გამოვიყენოთ **აბელის გარდაქმნა** (იხ. თავი 4, §16, შედეგი 16.2)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n, \tag{6}$$

რომელშიც ახლა ავიღოთ $a_k = x$, $b_k = u_k$ და $B_k = \sum_{j=0}^{k} b_j = \sum_{j=0}^{k} u_j = S_k$. გვექნება

$$\sum_{k=0}^{n} u_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (x^k - x^{k+1}) S_k + S_n x^n. \tag{7}$$

მაგრამ

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x^k - x^{k+1}) S_k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k S_k - x \sum_{k=0}^{n-1} x^k S_k = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k.$$

მაშასადამე,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k + S_n x^n. \tag{8}$$

დავამტკიცოთ, რომ ყოველი ფიქსირებული $x \in (0,1)$-ისთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n \to \infty} S_n x^n = 0. \tag{9}$$

მართლაც, აღებული $x \in (0,1)$-ისთვის არსებობს ისეთი r რიცხვი, რომ $x < r < 1$. რადგან (2) მწკრივი კრებადია ღია $(0,1)$ ინტერვალის ყოველ წერტილზე, ამიტომ კრებადია მწკრივიც $\sum_{k=0}^{\infty} u_k r^k$. ამიტომ ამ მწკრივის ზოგადი წევრი $u_k r^k \to 0$, როცა $k \to \infty$. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს r-ზე დამოკიდებული c_r მუდმივი ისეთი, რომ $|u_k r^k| < c_r$ ყველა $k = 0, 1, 2, \ldots$ მნიშვნელობისთვის. უკანასკნელიდან გამომდინარეობს უტოლობა $|u_k| < c_r \left(\frac{1}{r}\right)^k$ ყველა $k = 0, 1, 2, \ldots$ მნიშვნელობისთვის.

მეორე მხრივ კი

$$|S_n| \le \sum_{k=0}^{n} |u_k| < c_r \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{r}\right)^k = c_r \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^n}\right) =$$

$$= c_r \cdot \frac{1}{r^n}(1 + r + \cdots + r^n) < \frac{c_r}{r^n} \cdot \frac{1}{1-r}.$$

ამრიგად,

$$|S_n x^n| = |S_n| x^n < \frac{x^n}{r^n} \cdot \frac{c_r}{1-r} = \frac{c_r}{1-r}\Big(\frac{x}{r}\Big)^n \to 0, \quad n \to \infty.$$

ცხადია, რომ ტოლობა (5) გამომდინარეობს (8) და (9) ტოლობებიდან (2) მწკრივის კრებადობის გამო. თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ **შეჯამებადობის (A) მეთოდი რეგულარულია.**

თეორემა 2.4. თუ (1) მწკრივი კრებადია სასრული s რიცხვისკენ, მაშინ (2) მწკრივი კრებადია ყოველ $x \in (0,1)$ წერტილზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = s \tag{10}$$

ანუ, რაც იგივეა, კრებადი (1) მწკრივი (A)-შეჯამებადია თავისივე s ჯამისკენ.

დამტკიცება. (1) მწკრივის კრებადობა ნიშნავს (2) მწკრივის კრებადობას $x = 1$ წერტილზე. ამიტომ ხარისხოვანი (2) მწკრივის კრებადობის რადიუსი არაა ნაკლები 1-ზე ანუ (2) მწკრივი ნამდვილად კრებადია ღია $(0,1)$ ინტერვალის ყოველ წერტილზე-აბსოლუტურადაც კი, აბელის პირველი თეორემის ძალით ([3], გვ. 73).

მეორე მხრივ, ყოველ $x \in (0,1)$ წერტილზე ადგილი აქვს ტოლობას $1 = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ანუ, s-ის სასრულობის გამო მართებულია ტოლობა

$$s = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s \cdot x^k, \quad 0 < x < 1. \tag{11}$$

(11)-დან (5)-ის წევრობრივი გამოკლება მოგვცემს ტოლობას

$$s - \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty}(s - S_k)x^k. \tag{12}$$

(1) მწკრივის s-სკენ კრებადობის გამო $s - S_k \to 0$, როცა $k \to \infty$. ამიტომ ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს შეესაბამება ნატურალური ისეთი

N რიცხვი, რომ $|s - S_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ ყოველი $k > N$ რიცხვისთვის. (12) ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$(1-x)\sum_{k=0}^{N}(s - S_k)x^k + (1-x)\sum_{k=N+1}^{\infty}(s - S_k)x^k. \tag{13}$$

(13)-ის მეორე შესაკრების აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება სიდიდეს:

$$(1-x)\sum_{k=N+1}^{\infty}|s - S_k|x^k < \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{k=N+1}x^k <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}x^k = \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14}$$

(13)-ის პირველი შესაკრების აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება $(1-x)\sum_{k=0}^{N}|s - S_k|$-ს და ეს კი შეგვიძლია გავხადოთ ნებისმიერად მცირე $(1-x)$ სხვაობის სიმცირის ხარჯზე ანუ არსებობს ε-ზე დამოკიდებული ისეთი $\delta > 0$, რომ

$$(1-x)\sum_{k=0}^{N}|s - S_k|x^k < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა} \quad 1-\delta < x < 1. \tag{15}$$

(14) და (15) უტოლობების საფუძველზე ვასკვნით, რომ (12) ტოლობის მარცხენა მხარისთვის მართებულია უტოლობა

$$\left|s - \sum_{k=0}^{\infty}u_k x^k\right| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad 1-\delta < x < 1. \tag{16}$$

ეს კი ადასტურებს (10) ტოლობის მართებულებას.

უკანასკნელ თეორემას ზოგჯერ ასე აყალიბებენ.

თეორემა 2.5 (აბელის მეორე თეორემა ხარისხოვანი მწკრივის უწყვეტობაზე). თუ (1) მწკრივი კრებადია, მაშინ (2) მწკრივი კრებადია ღია $(0,1)$ ინტერვალში და მისი ჯამი მარცხნიდან უწყვეტია $x = 1$ წერტილზე.

მაგალითი 2.6. დავამტკიცოთ, რომ განშლადი მწკრივი

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots . \tag{17}$$

(A)-შეჯამებადია $\frac{1}{2}$-სკენ ანუ

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}(A). \tag{18}$$

მართლაც, (2) სახის მწკრივი (17) მწკრივისთვის არის

$$1-x+x^2-x^3+\cdots=\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}\to\frac{1}{2}, \quad \text{როცა} \quad x\to 1-\,.$$

(18) ტოლობიდან და §1-ის (10) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ (17) მწკრივი შეჯამებადია $\frac{1}{2}$-სკენ როგორც $(C,1)$ მეთოდით, ისე (A) მეთოდით და ეს ფაქტი არაა შემთხვევითი.

წინადადება 2.7. მწკრივის **შეჯამებადობის (A) მეთოდი სავსებით რეგულარულია**, ე.ი. თუ (1) მწკრივი კრებადია $+\infty$-სკენ, მაშინ (10) ტოლობის მარჯვენა მხარეში გვექნება $+\infty$.

დამტკიცება. ნებისმიერად დიდი M რიცხვისთვის არსებობს ნატურალური ისეთი p რიცხვი, რომ $S_k>M$ ყველა $k>p$ რიცხვისთვის. მაშინ ტოლობა (4)-ის მარცხენა მხარისთვის გვექნება

$$(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}S_kx^k>(1-x)\sum_{k=0}^{p}S_kx^k+M(1-x)\sum_{k=p+1}^{\infty}x^k>$$
$$>M(1-x)\sum_{k=p+1}^{\infty}x^k=M(1-x)\frac{x^{p+1}}{1-x}=M\cdot x^{p+1},$$

ე.ი.

$$(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}S_kx^k>Mx^{p+1}, \quad 0<x<1. \tag{19}$$

რადგან $x^{p+1}\to 1$, როცა $x\to 1-$, ამიტომ (19)-დან ვღებულობთ, რომ

$$(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}S_kx^k>\frac{1}{2}M, \quad \text{როცა} \quad 1-\delta<x<1.$$

ეს კი ნიშნავს ტოლობას

$$\lim_{x\to 1-}(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}S_kx^k=+\infty, \tag{20}$$

რაც ეკვივალენტურია (10)-ის, რომელშიც ახლა $s=+\infty$.

3 მიმართება $(C,1)$ და (A) მეთოდებს შორის

თეორემა 3.1 (ფრობენიუსი; [7], გვ. 28). თუ მწკრივი

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

$(C,1)$-შეჯამებადია სასრული σ რიცხვისკენ, მაშინ (1) მწკრივი (A)-შეჯამებადიცაა იგივე σ რიცხვისკენ.

დამტკიცება. (1) მწკრივის (A)-შეჯამებადობაზე რომ შეგვეძლოს საუბარი, აუცილებელია (1) მწკრივთან **ასოცირებული** ხარისხოვანი მწკრივი

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n + \cdots \tag{2}$$

კრებადი იყოს ყველა $x \in (0,1)$ წერტილზე. ამის დასადგენად ვისარგებლოთ §1-ის (20) ტოლობით $\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{k} = 0$, საიდანაც გამომდინარეობს ნატურალური ისეთი N რიცხვის არსებობა, რომ უტოლობა $\frac{|u_k|}{k} < 1$ ანუ უტოლობა $|u_k| < k$ შესრულდება ყველა $k > N$ რიცხვისთვის.

ახლა, (2) მწკრივს მივცეთ სახე

$$\sum_{k=0}^{N} u_k x^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k x^k.$$

ცხადია, რომ სასრული რაოდენობის წევრებისგან შედგენილი ჯამი $\sum_{k=0}^{N} u_k x^k$ სასრულია ყველა $x \in (0,1)$ წერტილზე. გარდა ამისა,

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k x^k \right| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k| x^k < \sum_{k=N+1}^{\infty} k x^k,$$

ხოლო $\sum_{k=N+1}^{\infty} k x^k$ მწკრივის კრებადობის რადიუსია 1 ([3], გვ. 84), ე.ი. ეს მწკრივი კრებადია ყველა $x \in (0,1)$ წერტილზე. მაშასადამე, (2) მწკრივი კრებადია $(0,1)$ ღია ინტერვალზე და მისი ჯამი აღვნიშნოთ $f(x)$-ით, ე.ი.

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n + \cdots, \tag{3}$$

რის გამოც §2-ის (5) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$f(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k. \tag{4}$$

როგორც ვნახეთ, §2-ის (5) ტოლობის დამტკიცება ემყარება იმ ფაქტს, რომ მწკრივი $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ კრებადია $(0,1)$ ინტერვალზე. იმავე ტოლობიდან გამომდინარეობს, როგორც იქვე ითქვა, რომ $\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$ მწკრივიც კრებადია $(0,1)$ ინტერვალზე და ამ შემთხვევისთვის (5) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_k)x^k.$$

მაგრამ $S_0+S_1+\cdots+S_k=(k+1)\sigma_k$ (იხ.§1-ის (5) ტოლობა). ამიტომ გვაქვს

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k x^k. \tag{5}$$

(4) და (5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$f(x)=(1-x)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k x^k, \quad 0<x<1. \tag{6}$$

მეორე მხრივ, ტოლობის $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $0<x<1$, წევრობრივი გაწარმოებით, რაც მართებულია ([3], გვ. 87), მივიღებთ ტოლობას:

$$1=(1-x)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k, \quad 0<x<1. \tag{7}$$

უკანასკნელი ტოლობა გავამრავლოთ სასრულ σ-ზე და ასე მიღებულ ტოლობას წევრობრივ დავაკლოთ (6) ტოლობა, გვექნება:

$$\sigma-f(x)=(1-x)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(\sigma-\sigma_k)x^k. \tag{8}$$

რადგან (1) მწკრივი $(C,1)$-შეჯამებადია σ-სკენ, ამიტომ ყოველ $\varepsilon>0$ რიცხვს შეესაბამება ისეთი ნატურალური რიცხვი L, რომ

$$|\sigma_n-\sigma|<\frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n>L. \tag{9}$$

ამის შესაბამისად, (8) ტოლობის მარჯვენა მხარეს მივცეთ სახე:

$$(1-x)^2\sum_{k=0}^{L}(k+1)(\sigma-\sigma_k)x^k+(1-x)^2\sum_{k=L+1}^{\infty}(k+1)(\sigma-\sigma_k)x^k. \tag{10}$$

ცხადია, რომ $(0,1)$ ინტერვალზე $x^k < 1$ და $\left|(1-x)^2 \sum_{k=0}^{L}(k+1)(\sigma - \sigma_k)x^k\right| < (1-x)^2 \sum_{k=0}^{L}(k+1)|\sigma - \sigma_k|$. ეს უკანასკნელი გამოსახულება შესაკრებთა სასრული რაოდენობის გამო შეგვიძლია გავხადოთ ნებისმიერად მცირე $(1-x)$ სხვაობის სიმცირის ხარჯზე. ამიტომ უკვე აღებულ ε რიცხვს მოეძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $(1-x)^2 \sum_{k=0}^{L}(k+1)|\sigma - \sigma_k| < \frac{1}{2}\varepsilon$, როცა $1-\delta < x < 1$ და მით უფრო გვექნება

$$\left|(1-x)^2 \sum_{k=0}^{L}(k+1)(\sigma - \sigma_k)x^k\right| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad 1-\delta < x < 1. \tag{11}$$

ამასთან ერთად, (9) უტოლობის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\left|(1-x)^2 \sum_{k=L+1}^{\infty}(k+1)(\sigma - \sigma_k)x^k\right| < \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2 \sum_{k=L+1}^{\infty}(k+1)x^k <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(x^{k+1})' =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}\right)' = \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2(x + x^2 + \cdots)' =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2 \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) - 1\right]' = \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2 \left(\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამრიგად,

$$\left|(1-x)^2 \sum_{k=L+1}^{\infty}(k+1)(\sigma - \sigma_k)x^k\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა} \quad 0 < x < 1. \tag{12}$$

(3), (8) და (10)-(12) დამოკიდებულებათა საფუძველზე გვაქვს:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - \sigma\right| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad 1-\delta < x < 1. \tag{13}$$

ეს კი ნიშნავს (1) მწკრივის (A)-შეჯამებადობას σ რიცხვისკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 3.2. (1) მწკრივის არა მხოლოდ კრებადობა, არამედ მისი $(C, 1)$-შეჯამებადობაც კი სასრული რიცხვისკენ იწვევს (2) მწკრივის კრებადობას $(0, 1)$ ღია ინტერვალზე.

მაგალითი 3.3. მწკრივი

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots \tag{14}$$

არაა $(C, 1)$-შეჯამებადი, რადგან ის არ აკმაყოფილებს ამისთვის აუცილებელ (20) პირობას §1-დან $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.

მეორე მხრივ, (14) მწკრივთან ასოცირებული ხარისხოვანი

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots \tag{15}$$

მწკრივი კრებადია $(0, 1)$ ღია ინტერვალზე და მისი ჯამი

$$\begin{gathered}1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + = (x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots)' = \\ = [-(1 - x + x^2 - \cdots) + 1]' = -(1 - x + x^2 - \cdots)' = \\ = -\Big(\frac{1}{1+x}\Big)' = -\frac{0 - (1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}\end{gathered}$$

აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4},$$

ე.ი. (14) მწკრივი (A)-შეჯამებადი $\frac{1}{4}$-სკენ.

ფრობენიუსის 3.1 თეორემისა და 3.3 მაგალითის საფუძველზე გვაქვს

შედეგი 3.4. მწკრივის შეჯამებადობის (A) მეთოდი **ძლიერია** შეჯამებადობის $(C, 1)$ მეთოდზე, ე.ი. (A) მეთოდი აჯამებს უფრო ფართო კლასის მწკრივებს, ვიდრე $(C, 1)$ მეთოდი. ამასთან ერთად, ორივე მეთოდი **თანხვედრილია**, როცა ორივე გამოყენებადია.

შენიშვნა 3.5. როგორც ვნახეთ, u_n წევრებიანი მწკრივის (A)-შეჯამებადობა s-სკენ ნიშნავს: 1) მწკრივის **"შეშფოთებას"** მისი u_n წევრების გამრავლებით, $(0, 1)$ ინტერვალზე ცვალებად x პარამეტრის n-ურ x^n ხარისხზე; 2) s არის შეშფოთებით მიღებული მწკრივის ჯამის ზღვარი, როცა x პარამეტრი ისწრაფვის თავის ზღვარ 1-ისკენ და, მაშასადამე, მამრავლი x^n ყოველი ფიქსირებული n-ისთვის ისწრაფვის 1-სკენ, როცა x ისწრაფვის 1-სკენ.

4 ზღვარზე გადასვლა მწკრივში

აქ მოცემული იქნება ის საკმარისი პირობები, რომელნიც უზრუნველყოფენ მწკრივში წევრობრივ ზღვარზე გადასვლის მართებულებას.

თეორემა 4.1. განვიხილოთ დაგროვების წერტილის მქონე E სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციათა მიმდევრობა $(\varphi_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $x \in E$.

E სიმრავლის დაგროვების წერტილი იყოს a, სასრული ან ნიშნიანი უსასრულო, რომელიც შეიძლება არცკი ეკუთვნოდეს E-ს.

დავუშვათ, რომ ყოველ $\varphi_n(x)$ ფუნქციას გააჩნია სასრული ზღვარი a წერტილზე.

თუ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \tag{1}$$

თანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} \varphi_n(x), \tag{2}$$

რაც ასე გამოითქმის: **თანაბრად** კრებადი მწკრივის ზღვარი რაიმე წერტილზე, ტოლია მისი წევრების იმავე წერტილზე ზღვრების ჯამის.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \quad \lim_{x \to a} \varphi_n(x) = c_n, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

E სიმრავლეზე (1) მწკრივის **თანაბრად** კრებადობის გამო ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს შეესაბამება ნატურალური ისეთი $N = N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ უტოლობა

$$|\varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \cdots \varphi_{n+p}(x)| < \varepsilon \tag{3}$$

შესრულებულია ყოველი $n > N$ რიცხვისთვის, ყოველი $x \in E$ წერტილისთვის და ყოველი $p = 1, 2, \ldots$ რიცხვისთვის.

(3) უტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როცა $x \to a$ მივიღებთ

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+p}| \leq \varepsilon. \tag{4}$$

ამრიგად, რიცხვითი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ კრებადია (მწკრივის კრებადობის კოშის კრიტერიუმით), რომლის n-რი კერძო ჯამი და n-რი ნაშთი იყოს C_n და γ_n ანუ

$$C = C_n + \gamma_n. \tag{5}$$

ასევე, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ მწკრივის n-რი კერძო ჯამი და n-რი ნაშთი იყოს $S_n(x)$ და $\delta_n(x)$ ანუ

$$\varphi(x) = S_n(x) + \delta_n(x). \tag{6}$$

თუ (6) ტოლობიდან წევრობრივ გამოვაკლებთ (5) ტოლობას მივიღებთ $\varphi(x) - C = (S_n(x) - C_n) + (\delta_n(x) - \gamma_n)$, საიდანაც

$$|\varphi(x) - C| \leq |S_n(x) - C_n| + |\delta_n(x)| + |\gamma_n|. \tag{7}$$

(1) მწკრივის თანაბრად კრებადობის გამო, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის შეგვიძლია დავასახელოთ და **დავაფიქსიროთ** ისეთი n ნატურალური რიცხვი, რომ ყოველი $x \in E$-ისთვის შესრულებული იქნება უტოლობანი

$$|\delta_n(x)| < \varepsilon/3, \quad |\gamma_n| < \varepsilon/3. \tag{8}$$

რადგან

$$\lim_{x \to a} S_n(x) = \lim_{x \to a} \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{x \to a} \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k = C_n,$$

ამიტომ, თუ შემოვიფარგლებით სასრული a-ს შემთხვევით, გვექნება:

$$|S_n(x) - C_n| < \varepsilon/3, \qquad \text{როცა} \quad |x - a| < \delta \quad \text{და} \quad x \in E. \tag{9}$$

ახლა, (7)-(9) შეფასებებიდან გამომდინარეობს უტოლობა:

$$|\varphi(x) - C| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad |x - a| < \delta \quad \text{და} \quad x \in E.$$

მაშასადამე, E სიმრავლის გასწვრივ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = C, \tag{10}$$

რაც ეკვივალენტურია (2) ტოლობის. თეორემა დამტკიცებულია.

5 შეჯამებადობის ზოგადი შემთხვევა და ბორელის თეორემა

ვთქვათ, გვაქვს რიცხვითი მწკრივი

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

და განვიხილოთ ფუნქციათა მიმდევრობა $(a_n(x))_{n=0}^{\infty}$, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე E სიმრავლეზე, რასაც გააჩნია დაგროვების რომელიმე x_0 წერტილი და x_0 შეიძლება არცკი ეკუთვნოდეს E-ს.

დავუშვათ, რომ $(a_n(x))_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობას გააჩნია შემდეგი ოთხი თვისება:

1) $0 \leq a_n(x) \leq 1$ ყოველი n-ისთვის და ყოველი $x \in E$-ისთვის;

2) n-ის ზრდისას $a_n(x)$ არ იზრდება, როცა $x \in E$ ფიქსირებულია;

3) ყოველი ფიქსირებული n-ისთვის ფუნქცია $a_n(x)$ ისწრაფვის 1-ისკენ, როცა $x \in E$ ისწრაფვის თავისი x_0 ზღვრისკენ;

4) (1) მწკრივთან ასოცირებული მწკრივი

$$u_0 a_0(x) + u_1 a_1(x) + u_2 a_2(x) + \cdots + u_n a_n(x) + \cdots \tag{2}$$

კრებადია ყველა $x \in E$ წერტილზე.

ახლა შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა 5.1. როცა არსებობს ზღვარი

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n a_n(x) = s, \tag{3}$$

მაშინ (1) მწკრივს ეწოდება ფუნქციათა $(a_n(x))_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობით განსაზღვრული მეთოდით შეჯამებადი s რიცხვისკენ, ხოლო s-ს კი ეწოდება (1) მწკრივის განზოგადებული ჯამი, რომელიც შეესაბამება ამ მეთოდს.

მწკრივის განზოგადებული ჯამის ცნება საზოგადოდ იქნებოდა უსარგებლო, გარდა ზოგიერთი გამონაკლისისა, თუ უმრავლეს შემთხვევაში მართებული არ იქნებოდა ბორელის შემდეგი

თეორემა 5.2 (ბორელი). თუ (1) მწკრივი კრებადია s რიცხვისკენ, მაშინ იგი $(a_n(x))_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობის შესაბამისი მეთოდითაც შეჯამებადია იგივე s რიცხვისკენ ანუ ადგილი აქვს (3) ტოლობას.

დამტკიცება. რადგან $\lim_{x\to x_0} a_n(x) = 1$ ყოველი n-ისთვის, ამიტომ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია მართებულობა ტოლობის

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n a_n(x). \tag{4}$$

ამ ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია დავადგინოთ, §4-დან 4.1 თეორემის თანახმად, (2) მწკრივის თანაბრად კრებადობა $x \in E$-ის მიმართ.

რადგან (1) მწკრივი კრებადია, ამიტომ მისი n-რი ნაშთის

$$R_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \tag{5}$$

აბსოლუტური სიდიდე ნაკლები იქნება ნებისმიერად აღებულ $\varepsilon > 0$ რიცხვზე, როგორც კი n გადააჭარბებს ε-ისგან დამოკიდებულ გარკვეულ ნატურალურ $N = N(\varepsilon)$ რიცხვს, ე.ი.

$$|R_n| < \varepsilon \quad \text{ყველა} \quad n > N \quad \text{რიცხვისთვის}. \tag{6}$$

ახლა განვიხილოთ (1) მწკრივთან ასოცირებული (2) მწკრივის n-რი ნაშთი

$$\rho_n(x) = u_n a_n(x) + u_{n+1} a_{n+1}(x) + \cdots \tag{7}$$

და დავამტკიცოთ, რომ უკვე აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ნატურალური რიცხვი $L \geq N$-ზე ისეთი, რომ თანაბრად $x \in E$-ის მიმართ სრულდება უტოლობა

$$|\rho_n(x)| < \varepsilon \quad \text{ყველა} \quad n > L \quad \text{რიცხვისთვის}. \tag{8}$$

ამ მიზნით განვიხილოთ (7) მწკრივის p-ური კერძო ჯამი (წერის გამარტივების მიზნით, x არგუმენტს არ დავწერთ)

$$\begin{aligned} S_p^{(1)} = u_n a_n + u_{n+1} a_{n+1} + u_{n+2} a_{n+2} + \cdots + \\ + u_{n+p-1} a_{n+p-1} + u_{n+p} a_{n+p}, \end{aligned} \tag{9}$$

რომელიც ტოლობების $u_k = R_k - R_{k+1}$, $k = n, n+1, \ldots$ გამოყენებით ასე ჩაიწერება

$$\begin{aligned} S_p^{(1)} = a_n(R_n - R_{n+1}) + a_{n+1}(R_{n+1} - R_{n+2}) + a_{n+2}(R_{n+2} - R_{n+3}) + \\ + \cdots + a_{n+p-1}(R_{n+p-1} - R_{n+p}) + a_{n+p}(R_{n+p} - R_{n+p+1}). \end{aligned} \tag{10}$$

ამასთან ერთად განვიხილოთ ჯამი

$$S_p^{(2)} = a_n R_n + (a_{n+1} - a_n)R_{n+1} + (a_{n+2} - a_{n+1})R_{n+2} + \cdots +$$
$$+(a_{n+p-1} - a_{n+p-2})R_{n+p-1} + (a_{n+p} - a_{n+p-1})R_{n+p}.$$

1), 2) თვისებების გამო და (6) უტოლობის გათვალისწინებით გვაქვს დამოკიდებულებანი:

$$|S_p^{(2)}| \le \varepsilon[a_n + (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) +$$
$$+(a_{n+p-1} - a_{n+p})] = \varepsilon[2a_n - a_{n+p}] < 2\varepsilon a_n \le 2\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n > N.$$

ამრიგად,

$$|S_p^{(2)}(x)| < 2\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n > N \quad \text{და} \quad p \quad \text{ნებისმიერია.}$$

მეორე მხრივ, $S_p^{(1)}(x) = S_p^{(2)}(x) - a_{n+p} R_{n+p-1}$. ამიტომ

$$|S_p^{(1)}(x)| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n > N \quad \text{და} \quad p \quad \text{ნებისმიერია.}$$

მაშასადამე, მართებულია (8) უტოლობა ანუ (2) მწკრივი თანაბრად კრებადია E-ზე. თეორემა დამტკიცებულია

შედეგი 5.3. თუ მწკრივი

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{11}$$

კრებადია, მაშინ ხარისხოვანი მწკრივი

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots \tag{12}$$

თანაბრად კრებადია $[0, 1]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. თუ ბორელის 5.2 თეორემაში კერძოდ ავიღებთ $x_0 = 1$, $E = (0, 1)$, $a_n(x) = x^n$, $0 < x < 1$, მაშინ ამ თეორემის 1), 2) და 3) პირობები შესრულებულია. გარდა ამისა, ამავე თეორემის 4) პირობაც შესრულებულია აბელის 2.5 თეორემის ძალით §2-დან.

როგორც ბორელის 5.2 თეორემის მტკიცების პროცესი გვიჩვენებს, ოთხივე ეს პირობა (11) მწკრივის კრებადობასთან ერთად უზრუნველყოფს (12) მწკრივის **თანაბრად** კრებადობას $(0, 1)$ ღია ინტერვალზე.

ამასთან ერთად, (12) მწკრივი კრებადია $x = 1$ წერტილზე, (11) მწკრივის კრებადობის გამო. მაშასადამე, (12) მწკრივი თანაბრად კრებადია მარცხნიდან ღია და მარჯვნიდან ჩაკეტილ $(0, 1]$ ინტერვალზე და ამიტომაც $[0, 1]$ სეგმენტზეც.

შეიძლება 5.3 შედეგი ასეც გამოითქვას:

შედეგი 5.4. თუ რაიმე ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R > 0$ და ეს მწკრივი კრებადია $x = R$ წერტილზეც, მაშინ აღებული მწკრივი **თანაბრად** კრებადია $[-R+\varepsilon, R]$ სეგმენტზე, როცა $0 < \varepsilon < 2R$.

ამ ფაქტთან დაკავშირებით აღვნიშნოთ

შედეგი 5.5. თუ რაიმე ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი $r > 0$ და ეს მწკრივი არაა კრებადი $x = r$ წერტილზე, მაშინ იგი ვერ იქნება **თანაბრად** კრებადი $[0, r]$ სეგმენტზე!

დამტკიცება. $[0, r]$ სეგმენტზე თანაბრად კრებადობის შემთხვევაში შეგვეძლო მწკრივში ზღვარზე გადასვლა, როცა $x \to r$ (§4-ის 4.1 თეორემის თანახმად) და მივიღებდით $x = r$ წერტილზე კრებად მწკრივს, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

6 ტაუბერის ტიპის თეორემები შეჯამებადობის (A) და $(C, 1)$ მეთოდებისთვის

თუ მწკრივი შეჯამებადია $(C, 1)$ ან (A) მეთოდით, მაშინ ასეთი მწკრივი შეიძლება კრებადი არ იყოს (იხ. პარაგრაფები 1 და 2). ამიტომ ბუნებრივია კითხვა: მწკრივის წევრების რა თვისება უზრუნველყოფს მის კრებადობას, თუკი ეს მწკრივი შეჯამებადია რომელიმე მეთოდით?

1. ასეთი შინაარსის პირველი თეორემა შეჯამებადობის აბელ-პუასონის (A) მეთოდისთვის დაამტკიცა ტაუბერმა 1897 წელს. ამიტომაცაა, რომ თეორემას ეწოდება ტაუბერის ტიპის: თუ რომელიმე მეთოდით შეჯამებად მწკრივზე მითითებულია ის პირობა, რომელიც უზრუნველყოფს მის კრებადობას.

თეორემა 6.1 (ტაუბერი, [7], გვ. 889). თუ მწკრივი

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

(A) შეჯამებადია რაიმე s რიცხვისკენ, ე.ი. თუ ადგილი აქვს

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = s \tag{2}$$

ტოლობას და, გარდა ამისა, შესრულებულია პირობა

$$\lim_{k \to \infty} k u_k = 0, \tag{3}$$

მაშინ (1) მწკრივი კრებადია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = s. \tag{4}$$

დამტკიცება. თუ შემოვიღებთ $\delta_n = \max_{k\geq n} |ku_k|$ აღნიშვნას, მაშინ მონოტონურად კლებადი $(\delta_n)_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობა კრებადია ნულისკენ.

ყოველი ნატურალური N რიცხვისთვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\sum_{k=0}^{N} u_k - s = \sum_{k=0}^{N} u_k(1-x^k) - \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k x^k + \left[\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - s\right]. \tag{5}$$

გარდა ამისა, $0 < x < 1$ შემთხვევაში მართებულია დამოკიდებულებანი

$$1 - x^k = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) < k(1-x), \tag{6}$$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{N+1}}{1-x} < \frac{1}{1-x}. \tag{7}$$

უკანასკნელი უტოლობანი გამოვიყენოთ (5) ტოლობის მიმართ, გვექნება

$$\left|\sum_{k=0}^{N} u_k - s\right| \leq \sum_{k=0}^{N} |ku_k|(1-x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|ku_k|x^k}{k} +$$

$$+\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - s\right| \leq (1-x)N\delta_0 + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} + \left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - s\right|. \tag{8}$$

ნებისმიერად მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვთან ერთად განვიხილოთ $\eta = \frac{\varepsilon}{2+\delta_0}$ რიცხვი და ავიღოთ $x = 1 - \frac{\eta}{N}$ ანუ $(1-x)N = \eta$. მაშასადამე, $x \to 1$, როცა $N \to \infty$. ახლა N ავიღოთ ისეთი, რომ: 1) შესრულდეს უტოლობა $\delta_{N+1} < \eta^2$; 2) ამ N-ის შესაბამისი x იყოს ისე ახლოს ერთთან, რომ შესრულდეს უტოლობა (ეს შესაძლებელია (2) ტოლობის ძალით)

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - s\right| < \eta.$$

ამიტომ (8) უტოლობიდან ვღებულობთ, რომ

$$\left|\sum_{k=0}^{N} u_k - s\right| < (2+\delta_0)\eta = \varepsilon. \tag{9}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ მართებულია უფრო ძლიერი

თეორემა 6.2 (ტაუბერი). თუ (1) მწკრივი (A) შეჯამებადია რაიმე s რიცხვისკენ და, გარდა ამისა, შესრულებულია პირობა

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_1+2u_2+\cdots+ku_k}{k}=0, \tag{10}$$

მაშინ ადგილი აქვს (4) ტოლობას.

თეორემა 6.2-ის სიძლიერე 6.1 თეორემასთან შედარებით გამოიხატება იმით, რომ (10) სუსტი მოთხოვნაა (1) მწკრივზე, ვიდრე (3) პირობა. მართლაც, (3) პირობა ნიშნავს $(ku_k)_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობის კრებადობას ნულისკენ, ხოლო (10) პირობა ნიშნავს, რომ ნული არის $(C,1)$-ზღვარი იგივე $(ku_k)_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობის (იხ. 1.1 განსაზღვრის ბოლო წინადადება). მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ $(C,1)$-ზღვრის არსებობა გამომდინარეობს ჩვეულებრივი ზღვრის არსებობიდან შებრუნების გარეშე (იხ. 1.3 თეორემა მიმდევრობისთვის).

თეორემა 6.3. თუ $u_k\geq 0$ და (1) მწკრივი (A)-შეჯამებადია ან $(C,1)$-შეჯამებადი სასრული რაიმე რიცხვისკენ, მაშინ (1) მწკრივი კრებადია.

დამტკიცება. თუ (1) მწკრივი არ იქნებოდა კრებადი, მაშინ გვექნებოდა ტოლობა $\sum_{k=1}^{\infty}u_k=+\infty$, როგორც ზრდადი კერძო ჯამების ზღვარი. მაშინ (1) მწკრივი იქნებოდა $+\infty$-სკენ (A)- შეჯამებადი ($(C,1)$-შეჯამებადი) ამ მეთოდთა სავსებით რეგულარულობის გამო (იხ. 2.7 და 1.4 წინადადებანი), რაც ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას.

შედეგი 6.4. დადებითწევრებიანი (უარყოფითწევრებიანი) მწკრივებისთვის (A) და $(C,1)$ მეთოდებიდან თითოეული ეკვივალენტურია კრებადობის.

2. რადგან მწკრივის $(C,1)$-შეჯამებადობა რაიმე σ რიცხვისკენ იწვევს ამ მწკრივის (A)-შეჯამებადობას იმავე σ-სკენ (იხ. ფრობენიუსის 3.1 თეორემა), ამიტომ ტაუბერის 6.2 თეორემა შეჯამებადობის $(C,1)$ მეთოდისთვის მიიღებს სახეს.

თეორემა 6.5. თუ (1) მწკრივი $(C,1)$-შეჯამებადია რაიმე σ რიცხვისკენ და თუ შესრულებულია (10) პირობა, კერძოდ (3) პირობა, მაშინ (1) მწკრივი კრებადია და ადგილი აქვს (4) ტოლობას, რომლის მარჯვენა მხარეშია σ.

ჰარდიმ დაამტკიცა, რომ ტაუბერის 6.5 თეორემა ძალაშია, თუ (10) და (4) პირობები შეცვლილია ერთი პირობით $|ku_k| < c$ ($c =$ const; $k = 1, 2, 3, \dots$), ხოლო უკანასკნელი პირობის შეცვლის სამართლიანობა პირობით $ku_k > -c$ ($c =$ const; $m = 1, 2, \dots$) დაადგინა **ლანდაუმ**.

ფეიერის ლემა 6.6. თუ (1) მწკრივი $(C, 1)$-შეჯამებადია რაიმე s რიცხვისკენ და, გარდა ამისა, კრებადია მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} k|u_k|^2$, მაშინ ადგილი აქვს (4) ტოლობას.

გაფრთხილება! 6.7. მწკრივში ნულების ჩამატება არ ცვლის მისი კრებადობის ხასიათს, მაგრამ ცვლის შეჯამებადობის ხასიათს.

7 ფურიეს მწკრივის შეჯამებადობა ფეიერის მეთოდით

როგორც ვიცით:

1) არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივს გააჩნია განშლადობის წერტილი-ფეიერის მაგალითი;

2) არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია დასახელებულ თვლად სიმრავლეზე და კრებადია ყველა სხვა წერტილზე;

3) არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების ყოველი ქვემიმდევრობა განშლადია ერთ წერტილზე მაინც.

გარდა ამისა, ჯამებად ფუნქციათა კლასში არსებობს ისეთი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია ყველა წერტილზე-კოლმოგოროვის მაგალითი.

ყოველივე ამის ფონზე ბუნებრივად ჩნდება კითხვა: კი, მაგრამ მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობების მისაღებად ვარგისია თუ არა მისი ფურიეს მწკრივი?

ამ მიმართულებით უნდა მოისინჯოს განშლადი რიცხვითი მწკრივის შეჯამებადობის ცნობილი მეთოდები, სახელდობრ, $(C, 1)$ და (A) მეთოდები. უნდა ითქვას, რომ ამ თვალსაზრისით მიღებულია საკმაოდ კარგი შედეგები, რომელთა შესახებაც ქვემოთ გვექნება საუბარი.

1. განვიხილოთ 2π პერიოდული და პერიოდზე ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

რომლის კერძო ჯამების $S_0(x) = \frac{a_0}{2}$, $S_1(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, $S_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x \ldots$,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos lx + b_k \sin kx), \tag{2}$$

$\ldots$, მიმდევრობისგან შევადგინოთ მათი შესაბამისი $(C, 1)$ საშუალოები

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x), \tag{3}$$

რომელთაც ფურიეს მწკრივთან მიმართებაში ეწოდებათ **ფეიერის საშუალოები** ფურიეს (1) მწკრივისთვის. ეს სახელწოდება მომდინარეობს იქიდან, რომ ფეიერმა პირველმა აღმოაჩინა $(\sigma_n(x))_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობის ის შესანიშნავი თვისება, რაც მოცემული იქნება ქვემოთ ფეიერის თეორემაში (1905 წ).

რადგან $S_n(x)$ კერძო ჯამის ინტეგრალური წარმოდგენაა (იხ. თავი IV, §4, ფორმულა (6))

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt, \tag{4}$$

ამიტომ (3) ფორმულით განსაზღვრული **ფეიერის $\boldsymbol{\sigma_n(x)}$ საშუალო** მიიღებს სახეს

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt,$$

სადაც

$$K_n(u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(u) \tag{5}$$

წარმოადგენს **დირიხლეს** $D_k(u)$ გულების $(C, 1)$ საშუალოს.

ამრიგად,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) K_n(u) du. \tag{6}$$

K_n ფუნქციას ეწოდება **ფეიერის გული**. იგი არაა დამოკიდებული f ფუნქციაზე და არც f-ის შესაბამის (1) მწკრივზე!

(6) ტოლობის მარჯვენა მხარეს ზოგჯერ ეწოდება **ფეიერის ინტეგრალი** f ფუნქციისთვის.

პირველ რიგში, დავადგინოთ **ფეიერის** K_n გულის რამდენიმე მნიშვნელოვანი თვისება.

1)

$$K_n(u) = \frac{1}{2(n+1)}\Big[\frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}\Big]^2, \ u \neq 2l\pi, \ l = 0, \pm 1, \dots . \qquad (7)$$

მართლაც, ტოლობიდან (იხ. თავი 4, §4, ტოლობა (4))

$$D_n(u) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u \cdot \sin\frac{1}{2}u}{2\sin^2\frac{1}{2}u} = \\ = \frac{\cos nu - \cos(n+1)u}{4\sin^2\frac{1}{2}u}$$

ვღებულობთ

$$K_n(u) = \frac{1}{4(n+1)\sin^2\frac{1}{2}u}\sum_{k=0}^{n}[\cos ku - \cos(k+1)u] = \\ = \frac{1}{4(n+1)\sin^2\frac{1}{2}u}[1-\cos(n+1)u] = \frac{1}{2(n+1)}\Big[\frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}\Big]^2,$$

ხოლო $D_k(2l\pi) = k + \frac{1}{2}$ ტოლობის ძალით (იხ. თავი 4, §4, ტოლობა (11)) გვაქვს:

$$K_n(2l\pi) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(k+\frac{1}{2}) = \frac{1}{n+1}\Big[\sum_{k=1}^{n}k + \frac{1}{2}(n+1)\Big] = \\ = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

ამრიგად,

$$K_n(u) = \begin{cases} \frac{1}{2(n+1)}\Big[\frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}\Big]^2, & \text{როცა } u \neq 2l\pi, \\ & \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \frac{n+1}{2}, & \text{როცა } u = 2l\pi. \end{cases} \qquad (8)$$

უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს მომდევნო თვისება.

2) $K_n(u) \geq 0$ ყველა u-სთვის და ყველა n-ისთვის ანუ **ფეიერის $\boldsymbol{K_n}$ გული არაუარყოფითია!** ეს თვისება არ გააჩნია დირიხლეს D_n გულს.

3) ჟორდანის უტოლობის

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{როცა} \quad 0 < |\alpha| \leq \pi \tag{9}$$

გამოყენებით გვექნება

$$K_n(u) \leq \frac{1}{2(n+1)\sin^2 u/2} \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)u^2}, \quad \text{როცა} \quad 0 < |u| \leq \pi. \tag{10}$$

აქედან ვღებულობთ

$$K_n(u) = O\Big(\frac{1}{nu^2}\Big), \quad \text{როცა} \quad 0 < |u| \leq \pi \tag{11}$$

და

$$K_n(u) \leq \frac{\pi}{2(n+1)\delta^2}, \quad \text{როცა} \quad 0 < \delta \leq |u| \leq \pi. \tag{12}$$

თუ შემოვიღებთ მიმდევრობას

$$M_n(\delta) = \max_{\delta \leq |u| \leq \pi} K_n(u), \quad \text{როცა} \quad 0 < \delta < \pi, \tag{13}$$

მაშინ (12) უტოლობიდან გამომდინარეობს ტოლობა:

$$\lim_{n\to\infty} M_n(\delta) = 0. \tag{14}$$

4) ტოლობის (იხ. თავი 4, §3, ტოლობა (3))

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_k(u)du = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

გამოყენებით (5) ტოლობის მიმართ მივიღებთ:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(u)du = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{15}$$

5) (14) და (15) ტოლობებიდან მიიღება ტოლობა:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(u)du = 1, \quad 0 < \delta < \pi. \tag{16}$$

2. 2π პერიოდული და პერიოდზე ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ანუ (1) დამოკიდებულების მარჯვენა მხარე აღვნიშნოთ, როგორც ყოველთვის, $S[f]$-ით. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ მტკიცებულებებს.

ფეიერის თეორემა 7.1 ([7], გვ. 139). 1) თუ f ფუნქცია უწყვეტია x წერტილზე, მაშინ $S[f]$ **შეჯამებადია ფეიერის მეთოდით** ამ x წერტილზე $f(x)$ მნიშვნელობისკენ;

2) თუ f ფუნქციას x წერტილზე გააჩნია I გვარის წყვეტა, მაშინ $S[f]$ შეჯამებადია ფეიერის მეთოდით x წერტილზე მნიშვნელობისკენ $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$;

3) თუ f უწყვეტია რაიმე (a,b) ღია ინტერვალზე, მაშინ $S[f]$ თანაბრად შეჯამებადია ფეიერის მეთოდით ყოველ ქვესეგმენტზე $[\alpha,\beta]\subset[-\pi,\pi]$;

4) თუ f ფუნქცია უწყვეტია $(-\infty,+\infty)$-ზე, მაშინ $S[f]$ თანაბრად შეჯამებადია ფეიერის მეთოდით $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ტოლობა (15) გადავწეროთ ასე: $1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}K_n(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}K_n(t)dt$. ცვლადის გარდაქმნით $t=-\tau$ და K_n ფუნქციის ლუწობის გათვალისწინებით (იხ. (8) ტოლობა) გვექნება $\int_{-\pi}^{0}K_n(t)dt=\int_{\pi}^{0}K_n(-\tau)(-d\tau)=-\int_{\pi}^{0}K_n(\tau)d\tau=\int_{0}^{\pi}K_n(\tau)d\tau$. ამიტომ

$$1=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}K_n(t)dt, \tag{17}$$

საიდანაც

$$\int_{0}^{\pi}K_n(t)dt=\frac{\pi}{2}. \tag{18}$$

(17) ტოლობის გამრავლებით $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ მუდმივზე (საინტეგრაციო t ცვლადის მიმართ მუდმივზე) მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+0)+f(x-0)]K_n(t)dt. \tag{19}$$

გარდა ამისა, ტოლობა (6) ჩავწეროთ ასე: $\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+t)K_n(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+t)K_n(t)dt$. პირველ ინტეგრალში ცვლადის $t=$

$-\tau$ გარდაქმნით და K_n გულის ლუწობის გამო მივიღებთ: $\int_{-\pi}^{0} f(x+t)K_n(t)dt = \int_{\pi}^{0} f(x-\tau)K_n(-\tau)(-d\tau) = \int_0^{\pi} f(x-\tau)K_n(\tau)d\tau$. ამიტომ:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]K_n(t)dt. \tag{20}$$

ახლა (20) ტოლობას წევრობრივ დავაკლოთ (19) ტოლობა, მივიღებთ:

$$\sigma_n(x) - \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]K_n(t)dt. \tag{21}$$

ვაჩვენოთ, რომ (21) ტოლობის მარჯვენა მხარე ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \to \infty$. ამასთან ეს მისწრაფება არის თანაბარი ყოველ სეგმენტზე $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, როცა f ფუნქცია უწყვეტია (a,b) ღია ინტერვალზე. ამ მიზნით, ნებისმიერად აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის შევარჩიოთ ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ შესრულდეს უტოლობანი:

$$\left.\begin{aligned} &|f(x+t)-f(x+0)| < \varepsilon \\ &|f(x-t)-f(x-0)| < \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \text{როცა} \quad 0 \le t \le \delta. \tag{22}$$

ეს შესაძლებელია ყოველი ფიქსირებული x-ისთვის, თუკი x წერტილზე f ფუნქცია განიცდის I გვარის წყვეტას ანუ, რაც იგივეა, f-ს გააჩნია მარჯვენა $f(x+0)$ და მარცხენა $f(x-0)$ ზღვრები.

თუკი f ფუნქცია უწყვეტია (a,b) შუალედზე, მაშინ იგი თანაბრად უწყვეტია ყოველ $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე, როცა $a < \alpha < \beta < b$. ასეთ შემთხვევაში δ შეიძლება შეირჩეს ისე, რომ იგი არ იყოს დამოკიდებული x-ზე $[\alpha,\beta]$-დან; ამით მიიღწევა თანაბარი შეფასება.

ახლა (21) ტოლობაში ინტეგრალი დავანაწილოთ I_1 და I_2 ინტეგრალებად $[0,\delta]$ და $[\delta,\pi]$ სეგმენტებზე შესაბამისად. (22) უტოლობებისა და (18) ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება:

$$|I_1| < 2\varepsilon \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} K_n(t)dt < 2\varepsilon\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)dt = 2\varepsilon \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \varepsilon,$$

ხოლო

$$|I_2| \leq M_n(\delta) \int\limits_{\delta}^{\pi} [|f(x+t)| + |f(x-0)| + |f(x-t)| + |f(x-0)|]dt. \quad (23)$$

ფიქსირებული x-ისთვის უკანასკნელი ინტეგრალი სასრულია, ხოლო მასთან მდგომი $M_n(\delta)$ მამრავლი ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $n \to \infty$, ე.ი. $I_2 \to 0$, როცა $n \to \infty$ და x ფიქსირებულია.

თუ f ფუნქცია უწყვეტია (a,b) შუალედში და $x \in [\alpha,\beta] \subset (a,b)$, მაშინ ინტეგრალი (23) უტოლობაში არ აღემატება რიცხვს $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt + 2\pi|f(x)|$. რადგან f შემოსაზღვრულია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე მისი ამ სეგმენტზე უწყვეტობის გამო, ამიტომ $I_2 \to 0$ თანაბრად $[\alpha,\beta]$-ზე, როცა $n \to \infty$.

დასამტკიცებელი თეორემის ოთხივე მტკიცება გამომდინარეობს (21) ტოლობიდან ზემოთ მიღებული დასკვნების საფუძველზე. ამასთან, თანაბრად შეჯამებადობა ფეიერის მეთოდით რაიმე E სიმრავლეზე რომელიმე A სიდიდისკენ ნიშნავს, რომ სხვაობა $\sigma_n(x) - A \to 0$ თანაბრად E-ზე, როცა $n \to \infty$.

ამით ფეიერის 7.1 თეორემა დამტკიცებულია

3. რადგან მწკრივის შეჯამებადობის $(C,1)$ მეთოდი რეგულარულია (იხ. 1.3 თეორემა), ამიტომ **ფეიერის** ახლახან დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი

წინადადება 7.2. თუ f ფუნქციას გააჩნია უწყვეტობის x წერტილი და მისი ფურიეს მწკრივი $S[f]$ კრებადია ამ წერტილზე, მაშინ $S[f]$ კრებადია სწორედ $f(x)$ მნიშვნელობისკენ! ანალოგიურად, თუ $S[f]$ კრებადია f-ის პირველი გვარის წყვეტის x წერტილზე, მაშინ $S[f](x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

წინადადება 7.3. f ფუნქციის ფურიეს (1) მწკრივის $S_n(f;x)$ კერძო ჯამის და იმავე მწკრივის **ფეიერის** $\sigma_n(f;x)$ საშუალოსსხვაობა $S_n(f;x) - \sigma_n(f;x)$ x წერტილზე და თვით $\sigma_n(f;x)$, გამოისახებიან (1) მწკრივის $a_k \cos kx + b_k \sin kx$ წევრებით შემდეგნაირად:

$$S_n(f;x) - \sigma_n(f;x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (24)$$

$$\sigma_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big)(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (25)$$

ეს ტოლობანი, შესაბამისად, გამომდინარეობს §1-ის (26) და (21) ტოლობებიდან.

შენიშვნა 7.4. შეჯამებადობის **ფეიერის** მეთოდის გამორჩეულობა ფურიეს მწკრივებისთვის კარგად ჩანს ფეიერის 7.1 თეორემიდან 1) მტკიცების შედარებიდან ფეიერის იმ უწყვეტი ფუნქციისთვის, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია რომელიღაც წერტილზე (იხ. თავი 5-სადმი შესავლიდან B განყოფილების 3) პუნქტი).

შენიშვნა 7.5. ფეიერის 7.1 თეორემიდან 4) მტკიცება იძლევა $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე უწყვეტი და 2π პერიოდული ანუ წრეწირზე უწყვეტი ფუნქციის ტრიგონომეტრიული პოლინომებით თანაბრად მიახლოების შესახებ ვაიერშტრასის კლასიკური თეორემის ერთ-ერთ ვარიანტს.

8 ფეიერ-ლებეგის თეორემა

როგორც ვნახეთ, ფეიერის 7.1 თეორემა იძლევა f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის $(C,1)$-შეჯამებადობას $f(x)$ მნიშვნელობისკენ ან მნიშვნელობისკენ $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ შესაბამისად, თუკი x არის f-ის უწყვეტობის წერტილი ან ამ წერტილზე მას გააჩნია I გვარის წყვეტა.

ასეთი წერტილი ჯამებად ფუნქციას შეიძლება არც კი ჰქონდეს. ამიტომ საჭირო იყო ამ ზოგადი შემთხვევის გამოკვლევა, რაც 1905 წელს მოახდინა ლებეგმა. ლებეგის მიერ მოძებნილ საკმარის პირობას ყოველი ჯამებადი ფუნქცია აკმაყოფილებს თითქმის ყველა წერტილზე და ასეთია ამ **ფუნქციის ლებეგის წერტილი**.

ამავე დროს, ლებეგის ეს პირობა შესრულებულია ფუნქციის უწყვეტობის და პირველი გვარის წყვეტის წერტილებზე. მაშასადამე, ლებეგის თეორემა წარმოადგეს ფეიერის თეორემის განზოგადებას და ამიტომაც ეწოდა მას ფეიერ-ლებეგის თეორემა.

ფეიერ-ლებეგის თეორემა 8.1 ([7], გვ. 143). ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივი შეჯამებადია ფეიერის მეთოდით $f(x)$ მნიშვნელობისკენ ყველა იმ x წერტილზე, რომელიც წარმოადგენს ლებეგის წერტილს f ფუნქციისთვის, ე.ი. $[0, 2\pi]$-ის თითქმის ყველა წერტილზე.

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in [0, 2\pi]$ არის ლებეგის წერტილი [2] f ფუნქციისთვის და განვიხილოთ t ცვლადის და x პარამეტრის ფუნქცია

$$L_x(t) = \int_0^t |F_f(x,u)|du, \tag{1}$$

[2] x-ს ეწოდება ლებეგის წერტილი ჯამებადი φ ფუნქციისთვის, როცა ადგილი აქვს ტოლობას $\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_0^h |\varphi(\pm t) - \varphi(x)|dt = 0$.

სადაც გამოყენებულია აღნიშვნა (იხ. თავი 4, §8, ტოლობა (6))

$$F_f(x,u)=f(x+u)+f(x-u)-2f(x). \tag{2}$$

რადგან x არის ლებეგის წერტილი f-ისთვის, ამიტომ გვაქვს

$$L_x(t)=o(t), \quad t\to 0+\,. \tag{3}$$

$\sigma_n(x)$-ის ინტეგრალური გამოსახვა (იხ. §7, ტოლობა (6)) გადავწეროთ ასე, K_n გულის ლუწობის გათვალისწინებით,

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]K_n(t)dt. \tag{4}$$

მეორე მხრივ, ისევ K_n-ის ლუწობის გამო, §7-ის (15) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}K_n(t)dt=1, \tag{5}$$

რომლის გამრავლებით $f(x)$-ზე მივიღებთ:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}2f(x)K_n(t)dt. \tag{6}$$

ახლა, (4) ტოლობას წევრობრივ დავაკლოთ (6) და გვექნება

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}F_f(x,t)K_n(t)dt. \tag{7}$$

მაშასადამე, თეორემის დასამტკიცებლად აუცილებელი და საკმარისია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\pi}F_f(x,t)K_n(t)dt=0. \tag{8}$$

§7-ის ტოლობა (6)-ის ძალით

$$K_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(t)$$

და ასევე ყველა t-სთვის (იხ. თავი 4, §3, ტოლობა (1))

$$|D_k(t)| \leq k + \frac{1}{2} < 2n, \quad \text{როცა} \quad k \leq n.$$

ამიტომ, ყველა t-სთვის მართებულია უტოლობა

$$|K_n(t)| \leq 2n, \quad n \geq 1. \tag{9}$$

ტოლობა (3)-ის ძალით, ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს შეესაბამება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ შესრულდება უტოლობა

$$\frac{L_x(t)}{t} < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad 0 < t \leq \delta. \tag{10}$$

აღებული δ-სთვის, ავიღოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი N, რომ შესრულდეს უტოლობა $\frac{1}{N} < \delta$. ამის შემდეგ, ყოველი $n > N$ რიცხვისთვის ინტეგრალი (7) ტოლობიდან წარმოვადგინოთ $(0, 1/n)$, $(1/n, \delta)$ და (δ, π) ინტერვალებზე I_1, I_2 და I_3 ინტეგრალების ჯამად. ამის შესაბამისად გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}|I_1| = \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{1/n} F_f(x,t) K_n(t) dt \right| \leq \frac{2n}{\pi} \int\limits_0^{1/n} |F_f(x,t)| dt = \\ = \frac{2n}{\pi} L_x\Big(\frac{1}{n}\Big) < \frac{2n}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \varepsilon < \varepsilon. \end{aligned} \tag{11}$$

შემდეგ, §7-დან უტოლობა (10)-ის თანახმად გვექნება

$$\frac{1}{\pi}|I_2| = \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_{1/n}^{\delta} F_f(x,t) K_n(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2(n+1)} \int\limits_{1/n}^{\delta} |F_f(x,t)| \frac{dt}{t^2} < \frac{\pi}{2n} \int\limits_{1/n}^{\delta} |F_f(x,t)| \frac{dt}{t^2}.$$

უკანასკნელი ინტეგრალის ნაწილობითი ინტეგრებით და შემდეგ (10) უტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\int\limits_{1/n}^{\delta} |F_f(x,t)| dt \cdot \frac{1}{t^2} = L_x(t) \cdot \frac{1}{t^2}\Big|_{1/n}^{\delta} + 2 \int\limits_{1/n}^{\delta} \frac{L_x(t)}{t} \cdot \frac{dt}{t^2} = \frac{L_x(\delta)}{\delta} \cdot \frac{1}{\delta} -$$

$$-\frac{L_x(1/n)}{1/n}\cdot n+2\varepsilon\int\limits_{1/n}^{\delta}\frac{dt}{t^2}<\varepsilon\cdot\frac{1}{\delta}+\varepsilon n+2\varepsilon\Big(-\frac{1}{t}\Big|_{1/n}^{\delta}\Big)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{n}+\varepsilon n+2\varepsilon\Big(n-\frac{1}{\delta}\Big)<\frac{\varepsilon}{\delta}+\varepsilon n+2\varepsilon n=3\varepsilon n+\varepsilon\cdot\frac{1}{\delta}<4\varepsilon n,$$

რადგან $\frac{1}{\delta}<N<n$.

მაშასადამე,

$$\frac{1}{\pi}|I_2|<\frac{\pi}{2n}\cdot 4\varepsilon n=2\pi\varepsilon. \tag{12}$$

დაბოლოს, ისევ (10) უტოლობის ძალით §7-დან გვაქვს შეფასება:

$$\frac{1}{\pi}|I_3|\le\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}|F_f(x,t)|K_n(t)dt\le\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2(n+1)}\int\limits_{\delta}^{\pi}|F_f(x,t)|\frac{dt}{t^2}<$$

$$<\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{\delta^2}\int\limits_{0}^{\pi}|F_f(x,t)|dt\le\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{\delta^2}\cdot 4\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt<\varepsilon, \tag{13}$$

თუკი n საკმარისად დიდია. ახლა, ტოლობა (8) გამომდინარეობს (11)-(13) უტოლობებიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

წინადადება 8.2. ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივი **თუ კრებადია** რაიმე E სიმრავლეზე, მაშინ $S[f]$ **კრებადია** $f(x)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა x-სთვის E-დან.

დამტკიცება. რადგან შეჯამებადობის $(C,1)$ მეთოდი რეგულარულია, ამიტომ $S[f]$ მწკრივი კრებადი უნდა იყოს იმ მნიშვნელობებისკენ, საითკენაც აჯამებს მას $(C,1)$ მეთოდი. მაგრამ, ფეიერ-ლებეგის თეორემით $S[f]$ მწკრივი $(C,1)$-შეჯამებადია $f(x)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველგან. ამრიგად, $S[f]$ მწკრივი კრებადია $f(x)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა $x\in E$ წერტილზე.

წინადადება 8.3. არ არსებობს ჯამებადი ისეთი φ ფუნქცია, რომლის ფურიეს $S[\varphi]$ მწკრივი კრებადი ან $(C,1)$-შეჯამებადი იქნება $+\infty$-სკენ ან $-\infty$-სკენ დადებითი ზომის რაიმე E სიმრავლეზე.

დამტკიცება. მწკრივის შეჯამებადობის $(C,1)$ მეთოდის სავსებით რეგულარულობის გამო, $S[\varphi]$ იქნებოდა ფეიერის მეთოდით შეჯამებადი $+\infty$-სკენ ან $-\infty$-სკენ E სიმრავლეზე. მაგრამ ფეიერ-ლებეგის თეორემის ძალით, $S[\varphi]$-ის $(C,1)$-ჯამი უნდა იყოს $\varphi(x)$ მნიშვნელობანი თითქმის ყველა x-ისთვის E-დან. ეს გამოიწვევდა ჯამებადი φ

ფუნქციის მნიშვნელობების ტოლობას $+\infty$-სთან ან $-\infty$-სთან დადებითი ზომის სიმრავლეზე. ეს კი შეუძლებელია, რადგან ჯამებადი ფუნქცია სასრულია თითქმის ყველგან.

შენიშვნა 8.4. ფეიერ-ლებეგის თეორემის თანახმად, ჯამებადი f-ის ფურიეს $S[f]$ მწკრივი ჯამებადია ფეიერის მეთოდით $f(x)$ მნიშვნელობისკენ, როცა x არის ლებეგის წერტილი f-ისთვის.

აქ ჩნდება ბუნებრივი კითხვა: **ფეიერ-ლებეგის** თეორემა ხომ არ არის მართებული იმ x წერტილზეც, რომლისთვისაც $f(x)$ მნიშვნელობა წარმოადგენს f-ის განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებულს x წერტილზე?

ამ კითხვას უარყოფითი პასუხი გასცა (1905 წელს) ლებეგმა და დაადგინა მისი მართებულება $(C, 2)$ მეთოდისთვის, რომელიც ძლიერია $(C, 1)$ მეთოდზე.

შენიშვნა 8.5. წინა შენიშვნაში დასმულ კითხვაზე არსებობს დადებითი პასუხი, ოღონდ მწკრივის შეჯამებადობის **აბელ-პუასონის** (A) მეთოდისთვის, რაც ერთხელ კიდევ ადასტურებს (A) მეთოდის სიძლიერეს $(C, 1)$ მეთოდთან შედარებით (იხ. §17).

9 პუასონის ინტეგრალი

1. თუ f ფუნქცია 2π პერიოდულია და ჯამებადი 2π სიგრძის რომელიმე სეგმენტზე, ვთქვათ $[-\pi, \pi]$-ზე ან $[0, 2\pi]$-ზე, მაშინ მას შეესაბამება ფურიეს მწკრივი

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

სადაც f-ისთვის ფურიეს a_n და b_n კოეფიციენტები მოცემულია **ფურიეს** ფორმულებით

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \tag{2}$$

a_n და b_n კოეფიციენტების მეშვეობით შევადგინოთ კომპლექსური $z = x + iy$ ცვლადის ხარისხოვანი მწკრივი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)z^n, \tag{3}$$

რაც პოლარულ r და θ კოორდინატებში, $z = re^{i\theta}$ ტოლობის გათვალისწინებით, მიიღებს სახეს

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)r^n e^{in\theta}. \tag{4}$$

რადგან a_n და b_n წარმოადგენენ ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს, ამიტომ **რიმან-ლებეგის თეორემის** ძალით $a_n \to 0$ და $b_n \to 0$, როცა $n \to \infty$ (იხ. თავი 3, §9). ამის გამო, $re^{i\theta}$-ის მიმართ ხარისხოვანი (4) მწკრივის **კრებადობის რადიუსი კოში-ადამარის**

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n - ib_n|}}$$

ფორმულის თანახმად, არ იქნება 1-ზე ნაკლები ანუ $R \geq 1$. ეს ნიშნავს,რომ (4) მწკრივის ჯამი $\phi_f(re^{i\theta})$ ანალიზური ფუნქციაა ერთეულოვან წრეში $r < 1$ და ეილერის $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ფორმულის გათვალისწინებით გვაქვს ტოლობა

$$\phi_f(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

მაგრამ **მუავრის ფორმულით**[3]

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

და ამიტომ

$$\phi_f(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \tag{6}$$

[3]ფორმულა (5) მართებულია უარყოფითი მთელი n-ებისთვისაც იმის გათვალისწინებით, რომ $z^n = 1/z^{|n|}$, როცა $z \neq 0$ და მთელი რიცხვი $n < 0$. მართლაც, $n = -|n|$ და $[r(cos\theta + i\sin\theta)]^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-|n|} = \frac{1}{[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^{|n|}} = \frac{1}{r^{|n|}(\cos|n|\theta+i\sin|n|\theta)} = r^{-|n|}\cdot\frac{1}{\cos n\theta - i\sin n\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

თუ (6) მწკრივში მოვახდენთ აღნიშნულ გამრავლებას და ასე მიღებულ მწკრივში გამოვყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს და, გარდა ამისა (6)-ის მარცხენა მხარეს ჩავწერთ $\phi_f = u_f + iv_f$ სახით, მივიღებთ ტოლობებს

$$u_f(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \tag{7}$$

$$v_f(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta). \tag{8}$$

$\phi_f(z)$ ფუნქციის ანალიზურობიდან $|z| < 1$ წრეში გამომდინარეობს მისი ჰარმონიულობა იმავე წრეში. ეს ნიშნავს, რომ ϕ_f ფუნქცია ამ წრეში აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} = 0, \quad r \neq 0.$$

რადგან ამ განტოლებაში ფიგურირებს კერძო წარმოებულები **ნამდვილი** r და θ ცვლადების მიმართ, ამიტომ კომპლექსური ϕ_f ფუნქციის ჰარმონიულობა ეკვივალენტურია u_f და v_f ფუნქციების ერთდროული ჰარმონიულობის.

ამრიგად, (7) და (8) ტოლობებით მოცემული $u_f(re^{i\theta})$ და $v_f(re^{i\theta})$ წარმოადგენენ ერთეულოვან $r < 1$ წრეში ჰარმონიულ ფუნქციებს, ამასთან v_f-ს ეწოდება u_f-სადმი ჰარმონიულად შეუღლებული ფუნქცია.

2. ჩვენი უახლოესი მიზანია ჰარმონიული u_f და v_f ფუნქციები წარმოვადგინოთ ინტეგრალების სახით, რაც საშუალებას მოგვცემს მათი თვისებები დავაკავშიროთ (1) მწკრივის წარმომქმნელი f ფუნქციის თვისებებთან.

ამ მიზნით, (7)-ში ჩავსვათ a_n და b_n კოეფიციენტების გამოსახვა (2) ფორმულებით და მივიღებთ

$$u_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\pi} f(t)[\cos n\theta \cos nt + \sin \theta \sin nt]r^n dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - t)\Big]dt. \tag{9}$$

აქ მწკრივშიგა ინტეგრალი გამოტანილია მწკრივის წინ. ეს მართლზომიერია (9) მწკრივის თანაბრად კრებადობის გამო საინტეგრაციო $t \in [-\pi, \pi]$ ცვლადის მიმართ, რაც გამომდინარეობს t-ს

მიმართ თანაბარი შეფასებიდან $\sum_{n=1}^{\infty}|r^n \cos n(\theta-t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} r^n$ და ფუნქციური მწკრივის თანაბრად კრებადობის "ვაიერშტრასის ნიშნიდან": თუ $\sup_{x\in E}|A_n(x)| = \alpha_n$ მიმდევრობისთვის რიცხვითი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ კრებადია, მაშინ ფუნქციური მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)$ თანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე (აქ თანაბრად კრებადობა არის მხოლოდ და მხოლოდ საკმარისი პირობა. მართლაც, ჩვენ გვქონდა (იხ. თავი 4, §15) ფურიეს ნებისმიერი მწკრივის წევრობრივ ინტეგრების მართლზომიერება, თუმცა ზოგიერთი მათგანი შეიძლება ყველგან განშლადიც კი იყოს და თანაბრად კრებადი ვერ იქნება).

ტოლობის

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} = \frac{1}{1-re^{i\theta}}, \quad 0 \le r < 1 \tag{10}$$

მარცხენა მხარე ეილერისა და მუავრის ფორმულების ძალით მიიღებს სახეს

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

ხოლო მარჯვენა მხარე ასე გარდავქმნათ

$$\frac{1}{1-re^{i\theta}} = \frac{1-re^{-i\theta}}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} =$$
$$= \frac{1-r\cos\theta + ir\sin\theta}{1-r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+r^2} = \frac{1-r\cos\theta+ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

ამრიგად,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} + i\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}. \tag{11}$$

ამ ტოლობაში ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების გატოლებით გვექნება:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}, \tag{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}. \tag{13}$$

(12) ტოლობის ძალით $1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\theta = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$. ამიტომ

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\theta = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} - \frac{1}{2} = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos\theta+r^2)}. \tag{14}$$

უკანასკნელი ტოლობის ძალით (9) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$u_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos(\theta-t)+r^2)}dt \tag{15}$$

ანუ

$$u_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)P(r,\theta-t)dt, \tag{16}$$

სადაც

$$P(r,\tau) = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos\tau+r^2)}, \quad 0 \leq r < 1. \tag{17}$$

$P(r,\tau)$-ს ეწოდება **პუასონის გული.**

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ ტოლობას:

$$v_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n(\theta-t)\right]dt, \tag{18}$$

რომლის მიმართ (13) ტოლობის გამოყენება მოგვცემს

$$v_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{r\sin(\theta-t)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}dt \tag{19}$$

ანუ

$$v_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)Q(r,\theta-t)dt, \tag{20}$$

სადაც

$$Q(r,\tau) = \frac{r\sin\tau}{1-2r\cos\tau+r^2}, \quad 0 \leq r < 1. \tag{21}$$

$Q(r,\tau)$-ს ეწოდება **პუასონის შეუღლებული გული.**

პუასონმა (16) და (20) ფორმულები დაამტკიცა 1820 წელს.

(12), (13) და (17), (21) ტოლობებიდან ჩანს, რომ $P(r,\theta)$ და $Q(r,\theta)$ ფუნქციები წარმოადგენენ ერთეულოვან $r<1$ წრეში ანალიზური $\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}$ ფუნქციის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს. ეს ნიშნავს, რომ $P(r,\theta)$ და $Q(r,\theta)$ გულები წარმოადგენენ ერთეულოვან $r<1$ წრეში ჰარმონიულ ფუნქციებს და მათ აქვთ ყველა

რიგის კერძო წარმოებული ისევე, როგორც $u_f(re^{i\theta})$ და $v_f(re^{i\theta})$ ფუნქციებს. ამასთან ერთად, აღნიშნული ყველა კერძო წარმოებული ჰარმონიულია იმავე წრეში გარკვეული შესწორებით. სახელდობრ, ჰარმონიულია ფუნქციები: $\frac{\partial}{\partial\theta}u_f$, $\frac{\partial}{\partial\theta}v_f$, $\frac{\partial}{\partial\theta}P$, $\frac{\partial}{\partial\theta}Q$, $r\frac{\partial}{\partial r}u_f$, $r\frac{\partial}{\partial r}v_f$, $r\frac{\partial}{\partial r}P$, $r\frac{\partial}{\partial r}Q$.

შენიშვნა 9.1. შვარცმა 1872 წელს დაამტკიცა, რომ $(-\infty,+\infty)$-ზე უწყვეტი და 2π პერიოდული f ფუნქციისთვის (16) ინტეგრალს ყოველ $(1,\theta_0)$ წერტილზე გააჩნია $f(\theta_0)$-ის ტოლი ზღვარი, როცა წრის შიგა წერტილი (r,θ) ისწრაფვის საზღვრის $(1,\theta_0)$ წერტილისკენ რაიმე შეზღუდვის გარეშე (ეს შედეგი გამოქვეყნდა 1890 წელს). ამის შემდეგ ეწოდა (16) ინტეგრალს **პუასონის ინტეგრალი f ფუნქციისთვის და (20)-ს კი პუასონის შეუღლებული ინტეგრალი იგივე f ფუნქციისთვის.**

ერთიდაიგივე f ფუნქციით წარმოქმნილ (16) და (20) ინტეგრალებს გააჩნიათ საკმაოდ განსხვავებული თვისებები.

10 P და Q გულების თვისებანი

1. §9-ის (14) და (17) ტოლობების თანახმად, პუასონის $P(r,\tau)$ გულის გამწკრივებაა

$$P(r,\tau)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n\tau, \quad 0\le r<1. \tag{1}$$

ასევე

$$Q(r,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin n\tau, \quad 0\le r<1. \tag{2}$$

2. რადგან $r=0$ მნიშვნელობას შეესაბამება კოორდინატთა სათავე $O=(0,0)$, ამიტომ ამ O წერტილზე P ფუნქციის მნიშვნელობაა, (1) ტოლობის ძალით, $P(0,0)=\frac{1}{2}$ ან მეორენაირად $P(0,\tau)=\frac{1}{2}$ ყოველი $\tau\in(-\infty,+\infty)$-ისთვის. ამიტომ, §9-ის (16) ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$u_f(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{a_0}{2}. \tag{3}$$

ამრიგად, §9-ის (7) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$u_f(re^{i\theta})=u_f(0,0)+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \quad 0<r<1. \tag{4}$$

ასევე, (2) ტოლობიდან $Q(0,0) = 0$ და ამის გამო §9-ის (20) ტოლობიდან გამომდინარეობს $v_f(0,0) = 0$. სწორედ ამ ტოლობის გამოისობითაა მიღებული შეთანხმება, რომ ჰარმონიული u_f ფუნქციისადმი ჰარმონიულად შეუღლებული v_f ფუნქცია, რომელიც u_f-ით განისაზღვრება მუდმივი შესაკრების სიზუსტით, აკმაყოფილებდეს პირობას $v_f(0,0) = 0$ და ამით v_f განისაზღვრა ცალსახად.

3. (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს $P(r,\tau)$ ფუნქციის ლუწობა τ-ს მიმართ: $P(r,-\tau) = P(r,\tau)$. ამიტომაც გვაქვს ტოლობა

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} P(r,t)dt = 2\int\limits_{0}^{\pi} P(r,t)dt. \tag{5}$$

ასევე, ტოლობა (2) გვიჩვენებს $Q(r,\tau)$ ფუნქციის კენტობას τ-ს მიმართ: $Q(r,-\tau) = -Q(r,\tau)$. ამის გამო

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} Q(r,t)dt = 0. \tag{6}$$

4. თუ ავიღებთ კერძო შემთხვევას $f(t) = 1$ ყველა t-სთვის, მაშინ §9-ის (2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს იგივური 1-იანის შესაბამისი a_n და b_n კოეფიციენტების ნულობა n-ის მნიშვნელობებისთვის $1, 2, 3, \ldots$, (იხ. თავი 1, §3, ტოლობები (3)). ამიტომ იგივური 1-იანის შესაბამისი მარჯვენა მხარე §9-ის (7) ტოლობაში იქნება $\frac{a_0}{2}$, რაც ტოლობა (3)-ის ძალით არის რიცხვი $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dt = 1$. მაშასადამე, იგივური 1-იანის შესაბამისი მარცხენა მხარე (7) ტოლობისა §9-დან არის 1. ეს კი §9-ის (16) ტოლობით ნიშნავს, რომ

$$1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot P(r,t)dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} P(r,t)dt.$$

მაშასადამე,

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P(r,t)dt = 1, \quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} P(r,t)dt = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

5. მართებულია დამოკიდებულება

$$\begin{gathered} 1 - 2r\cos\tau + r^2 = (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{1}{2}\tau > 0, \\ \tau \in (-\infty, +\infty), \quad 0 \le r < 1. \end{gathered} \tag{8}$$

6. უკანასკნელი უტოლობიდან და §9-ის (17) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ პუასონის $P(r,\tau)$ გული დადებითია. ასე გამოთქვამენ $P(r,t)$ გულის თვისებას

$$P(r,t)>0, \quad t\in(-\infty,+\infty), \quad 0\le r<1. \tag{9}$$

7. აგრეთვე

$$Q(r,t)>0, \quad \text{როცა} \quad 0<t<\pi \quad \text{და} \quad 0<r<1. \tag{10}$$

8. ვთქვათ, $0<\delta<\pi$ და შემოვიღოთ აღნიშვნა $m(r,\delta)=\max\limits_{\delta\le|t|\le\pi}P(r,t)$. მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{r\to1-}m(r,\delta)=0. \tag{11}$$

ეს ტოლობა ნიშნავს, რომ $P(r,t)$ ფუნქციის სწრაფვა ნულისკენ, როცა $r\to1-$, **თანაბარია** გაერთიანებაზე $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ ყოველი $\delta>0$ რიცხვისთვის. მართლაც, როცა $\delta\le|t|\le\pi$, მაშინ $1-2r\cos t+r^2\ge1-2r\cos\delta+r^2$ და ამიტომ

$$\begin{aligned}\max_{\delta\le|t|\le\pi}P(r,t)&\le\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos\delta+r^2)}=\\&=P(r,\delta)\to0, \quad \text{როცა} \quad r\to1-,\end{aligned} \tag{12}$$

9. (12) შეფასების გაუმჯობესებაა

$$\max_{\delta\le|t|\le\pi}P(r,t)\le\frac{1-r^2}{2\sin^2\delta}. \tag{13}$$

მართლაც, $\lambda(r)=1-2r\cos\delta+r^2$ ფუნქციის წარმოებული $\lambda'(r)=2r-2\cos\delta$ ნული გახდება წერტილზე $r=\cos\delta$, რომელზეც წარმოებული $\lambda'(r)=2(r-\cos\delta)$ უარყოფით ნიშანს იცვლის დადებითზე r-ის ზრდისას. ამიტომ $\lambda(r)$ ფუნქციას მინიმუმი აქვს წერტილზე $r=\cos\delta$ და ეს მინიმუმი ტოლია რიცხვის $1-2\cos\delta\cos\delta+\cos^2\delta=1-\cos^2\delta=\sin^2\delta$ და აქედან გამომდინარეობს (13).

მაშასადამე,

$$\min_{\substack{\delta\le|t|\le\pi\\0\le r<1}}(1-2r\cos t+r^2)=\sin^2\delta, \quad \delta>0. \tag{14}$$

10. გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$P(r,o)=\frac{1-r^2}{2(1-r)^2}=\frac{1+r}{2(1-r)}\to+\infty \quad \text{როცა} \quad r\to1- \tag{15}$$

და

$$P(r,\pi)=\frac{1-r^2}{2(1+r)^2}=\frac{1-r}{2(1+r)}\to 0,\quad \text{როცა}\quad r\to 1-. \tag{16}$$

11. თუ $0<\delta<\pi$, მაშინ

$$\lim_{r\to 1-}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta P(r,t)=\frac{1}{2}, \tag{17}$$

$$\lim_{r\to 1-}\int_\delta^\pi P(r,t)dt=0. \tag{18}$$

მართლაც, (7) ტოლობებიდან მეორე ინტეგრალი ჩავწეროთ ასე $\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta P(r,t)dt+\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi P(r,t)dt$, რომლის მეორე შესაკრები არ აღემატება სიდიდეს $\frac{1}{\pi}m(r,\delta)\cdot(\pi-\delta)\to 0$, როცა $r\to 1-$.

12. მართებულია ორმხრივი შეფასებანი

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r}{1+r}\le P(r,t)\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1+r}{1-r},\quad t\in(-\infty,+\infty),\quad 0\le r<1. \tag{19}$$

ამასთან ერთად ეს შეფასებანი ზუსტია, რადგან $r=0$ მნიშვნელობისთვის მისი განაპირა წევრები ემთხვევიან ტოლობა (1)-დან გამომდინარე ტოლობას $P(0,\tau)=\frac{1}{2}$, $\tau\in(-\infty,+\infty)$.

(19) დამოკიდებულებების საჩვენებლად შევნიშნოთ, რომ ფიქსირებული r-ისთვის $P(r,t)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი და მინიმუმი $t=0$ და $t=\pi$ წერტილებზე შესაბამისად.

13. §9-ის (16) ტოლობა ვაინტეგროთ θ ცვლადით $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე და ასე მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარეში მოვახდინოთ ინტეგრების რიგის შენაცვლება ფუბინის თეორემის თანახმად. შემდეგ გამოვიყენოთ (7)-ის პირველი ტოლობა და მივიღებთ:

$$\int_{-\pi}^{\pi}u_f(re^{i\theta})d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt. \tag{20}$$

კერძოდ, თუ აქ ავიღებთ $r=0$, მაშინ გვექნება ტოლობა:

$$u_f(0,0)\cdot 2\pi=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt,$$

რაც სრულ შესაბამისობაშია (3) ტოლობის მარცხენა მხარესთან.

მაშასადამე, (20) ტოლობის მარცხენა მხარე არაა დამოკიდებული r-ზე.

11 ფურიეს მწკრივის შეჯამებადობა (A) მეთოდით

9 და 10 პარაგრაფების საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ

თეორემა 11.1. 2π პერიოდულ და $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებად ყოველ f ფუნქციას, მისი ფურიეს მწკრივის

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

a_n და b_n კოეფიციენტების მეშვეობით შეესაბამება ერთეულოვან ღია წრეში $|z| < 1$ ანალიზური ფუნქცია

$$\phi_f(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta), \tag{2}$$

რომლის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები—იმავე წრეში ჰარმონიული ფუნქციები—

$$u_f(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \tag{3}$$

და

$$v_f(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) \tag{4}$$

შეიძლება ჩაიწეროს f ფუნქციის შესაბამისი პუასონის ინტეგრალის და პუასონის შეუღლებული ინტეგრალის სახით შემდეგნაირად:

$$u_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P(r, \theta - t)dt, \tag{5}$$

$$v_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)Q(r, \theta - t)dt, \tag{6}$$

სადაც იმავე წრეში ჰარმონიული ფუნქციები-

$$P(r,\tau)=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos\tau+r^2)} \tag{7}$$

და

$$Q(r,\tau)=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\tau+r^2} \tag{8}$$

წარმოადგენენ პუასონის გულს და პუასონის შეუღლებულ გულს.

ცხადია, რომ (3) ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს (1) მწკრივთან **ასოცირებულ**, r-ის მიმართ ხარისხოვან მწკრივს (იხ.§2) ანუ **პუასონ-აბელის საშუალოს** f ფუნქციის ფურიეს (1) მწკრივისთვის.

თავი 5-დან §3-ის 3.1 თეორემის ძალით, მწკრივის $(C,1)$ შეჯამებადობა რაიმე s რიცხვისკენ იწვევს იმავე მწკრივის (A)-შეჯამებადობას იგივე s-ისკენ.

მეორე მხრივ, ფეირის თეორემის თანახმად (იხ.§7), f ფუნქციის ფურიეს (1) მწკრივი $(C,1)$-შეჯამებადია $f(x)$ რიცხვისკენ f-ის უწყვეტობის x წერტილზე, რიცხვისკენ $\frac{1}{2}[f(x+0)+\frac{1}{2}f(x-0)]$ f-ის I გვარის წყვეტის x წერტილზე და არის თანაბრად $(C,1)$-შეჯამებადი $f(x)$-სკენ f-ის უწყვეტობის ჩაკეტილ ინტერვალზე.

უფრო ზოგადად, ფეიერ-ლებეგის თეორემის ძალით (იხ.§8), (1) მწკრივი $(C,1)$-შეჯამებადია $f(x)$ მნიშვნელობისკენ ყველა იმ x წერტილზე, რომელიც წარმოადგენს ლებეგის წერტილს f ფუნქციისთვის, ე.ი. თითქმის ყველა $x\in[-\pi,\pi]$ წერტილზე.

მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს

თეორემა 11.2. f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის პუასონ-აბელის საშუალოების კავშირი თვით f ფუნქციასთან გამოისახება შემდეგი ტოლობებით:

1) $\lim\limits_{r\to1-}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)P(r,\theta-t)dt=f(\theta)$ f-ის უწყვეტობის θ წერტილზე;

2) თანაბრად θ-ს მიმართ, 1) ტოლობას ადგილი აქვს f-ის უწყვეტობის ჩაკეტილ ინტერვალზე;

3) $\lim\limits_{r\to1-}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)P(r,\theta-t)dt=\frac{1}{2}[f(\theta+0)+f(\theta-0)]$ f-ის I გვარის წყვეტის θ წერტილზე;

4) $\lim\limits_{r\to1-}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)P(r,\theta-t)dt=f(\theta)$ f ფუნქციის ლების θ წერტილზე.

1)-4) მტკიცებულებებში ზღვარი განხილულია რადიუსის გასწვრივ ანუ, რაც იგივეა, ერთეულოვანი ღია წრის შიგა $(r,\theta) = re^{i\theta}$ წერტილი ისწრაფვის ერთეულოვანი წრეწირის $(1,\theta) = e^{i\theta}$ წერტილისკენ. ასეთ შემთხვევაში ლაპარაკობენ **რადიალურ** ზღვარზე.

ცხადია, რომ შეიძლება $(r,\theta) = re^{i\theta}$ წერტილი ისწრაფვოდეს საზღვრის რაღაც $(1,\theta_0) = e^{i\theta_0}$ წერტილისკენ, რომლის პოლარული θ_0 კუთხე განსხვავებულია θ-სგან, ე.ი. $(r,\theta) = re^{i\theta}$ ისწრაფვის $(1,\theta_0) = e^{i\theta_0}$-სკენ ნებისმიერი გზით, სიმბოლურად $(r,\theta) \to (1,\theta_0)$. ასეთ მისწრაფებას ეწოდება **თავისუფალი**, ე.ი. (r,θ)-ის სწრაფვა $(1,\theta_0)$-სკენ არაა შეზღუდული რაიმე პირობით.

თუკი მისწრაფება ისეთია, რომ (r,θ) მუდმივად რჩება იმ კუთხეში, რომელიც შედგენილია $(1,\theta_0)$ წერტილიდან გამომავალი ორი ქორდით და ამ კუთხისთვის რადიუსი კი წარმოადგენს ბისექტრისას, მაშინ ამბობენ რომ (r,θ) ისწრაფვის $(1,\theta_0)$-სკენ **კუთხურად**, ან სხვაგვარად, წრეწირისადმი **არამხები გზით** და წერენ $(r,\theta) \overset{\wedge}{\to} (1,\theta_0)$.

მაშასადამე, კუთხური ზღვარი არის შეზღუდული, არათავისუფალი ზღვრის კერძო სახეობა.

ჩვენ ძირითადად განვიხილავთ პუასონის ინტეგრალის **თავისუფალ, კუთხურ** და **რადიალურ ზღვრებს**.

ცხადია, რომ თავისუფალი ზღვრის არსებობა იწვევს მისივე ტოლი კუთხური ზღვრის არსებობას და ეს უკანასკნელი კი იწვევს რადიალური ზღვრის არსებობას და მათ ტოლობას.

მაგალითი 11.3. პუასონის $P(r,\tau)$ გულის ზღვარი (თავისუფალი) ნულია ყველა $e^{i\theta}$ წერტილზე, როცა $0 < \theta < 2\pi$. ეს გამომდინარეობს მისი წარმოდგენიდან (იხ.§9, ტოლობა (17)) და §10-ის (8) უტოლობიდან. როცა $(r,0) \to (1,0)$-სკენ, მაშინ $P(r,0) \to +\infty$ (იხ.§10, ტოლობა (15)) და $P(r,\pi) \to 0$, როცა $(r,\pi) \to (1,\pi)$-სკენ (იხ. იქვე, დამოკიდებულება (16)).

12 უწყვეტი ფუნქციის პუასონის ინტეგრალის ზღვარი

2π პერიოდული და 2π სიგრძის რაიმე სეგმენტზე ჯამებადი და, მაშასადამე, 2π სიგრძის ყოველ სეგმენტზე ჯამებადი, რომელიმე ψ ფუნქციის პუასონის ინტეგრალს ჩვენ აღვნიშნავდით $u_\psi(re^{i\theta})$ სიმბოლოთი. ამიერიდან, წერის გამარტივების მიზნით, იმავე ინტეგრალს აღვნიშნავთ $\psi(r,x)$ სიმბოლოთი. გარდა ამისა, ყოველ ფუნქციას, რომლის პუასონის ინტეგრალსაც განვიხილავთ, ვიგულისხმებთ 2π პერიოდულს და ჯამებადს $[-\pi,\pi]$ ან $[0,2\pi]$ სეგმენტზე.

ახლა დავამტკიცოთ ფატუს შემდეგი

თეორემა 12.1 ([37]; [7], გვ. 154). თუ f ფუნქცია უწყვეტია რაიმე x_0 წერტილზე, მაშინ f-ის პუასონის $f(r,x)$ ინტეგრალს $(1,x_0)$ წერტილზე გააჩნია $f(x_0)$-ის ტოლი ზღვარი (თავისუფალი) ანუ მართებულია ტოლობა

$$\lim_{(r,x)\to(1,x_0)} f(r,x) = f(x_0), \tag{1}$$

კერძოდ, რადიალური ზღვარი

$$\lim_{(r,x)\to(1,x_0)} f(r,x_0) = f(x_0), \tag{2}$$

სადაც

$$f(r,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P(r,x-t)dt. \tag{3}$$

დამტკიცება. §10-დან (7) დამოკიდებულებების პირველი ტოლობა

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)dt = 1 \tag{4}$$

შეიძლება ასეც ჩაიწეროს, ნებისმიერი x-ისთვის,

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,x-t)dt. \tag{5}$$

მართლაც, (5)-ის ინტეგრალში მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $x-t=u$ და მივიღებთ $-\frac{1}{\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} P(r,u)du$. მაგრამ, $P(r,u)$ არის 2π პერიოდული ფუნქცია u ცვლადის მიმართ (იხ.§10, (1) ტოლობა) და ამიტომ უკანასკნელი ინტეგრალი ტოლია ინტეგრალის (იხ. თავი 1, §3, (8) ტოლობა) $-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} P(r,u)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,u)du = 1$ ანუ ადგილი აქვს (5) ტოლობას.

ახლა (5)-ის ორივე მხარე გავამრავლოთ $f(x_0)$ რიცხვზე, რომელიც სასრულია f-ის უწყვეტობის გამო x_0 წერტილზე. ასე მიღებული ტოლობა წევრობრივ დავაკლოთ (3) ტოლობას და მივიღებთ

$$f(r,x) - f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)-f(x_0)]P(r,x-t)dt. \tag{6}$$

f ფუნქციის x_0 წერტილზე უწყვეტობის გამო, ნებისმიერად აღებულ $\varepsilon > 0$ რიცხვს შეესაბამება $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ შესრულდება უტოლობა

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon/2, \quad \text{როცა} \quad x_0 - \delta \leq t \leq x_0 + \delta. \tag{7}$$

ახლა, (6) ტოლობის ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ასე:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus(x_0-\delta,x_0+\delta)} \equiv I_1(r,x) + I_2(r,x).$$

(5) და (7) დამოკიდებულებათა ძალით გვაქვს უტოლობა:

$$|I_1(r,x)| \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} P(r,x-t)dt \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P(r,x-t)dt = \frac{\varepsilon}{\pi.}$$

ამრიგად, ნებისმიერი x-ისთვის და ნებისმიერი r-ისთვის, $0 \leq r < 1$, გვაქვს:

$$|I_1(r,x)| < \varepsilon/2, \quad 0 \leq r < 1, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \tag{8}$$

ვინაიდან შემდეგ ეტაპზე x უნდა მივასწრაფოთ x_0-სკენ (იხ.(1) ტოლობა), ამიტომ ბუნებრივი იქნება $I_2(r,x)$ ინტეგრალში x ვიგულისხმოთ $(x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$ ინტერვალში, ე.ი. $x \in (x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$.

რადგან $I_2(r,x)$ ინტეგრალში საინტეგრაციო t ცვლადი არ ეკუთვნის $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ინტერვალს, ამიტომ $|x - t| \geq \frac{\delta}{2}$.

ახლა გამოვიყენოთ §10-ის (13) უტოლობა და მივიღებთ:

$$|I_2(r,x)| \leq \frac{1-r^2}{2\sin^2\delta/2} \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt < \frac{1-r}{\sin^2\delta/2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt. \tag{9}$$

რადგან უკანასკნელი ინტეგრალი სასრულია (f-ის ჯამებადობის გამო $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე) და $\delta > 0$ არაა დამოკიდებული r-ზე, ამიტომ (9) უტოლობის მარჯვენა მხარე შეგვიძლია გავხადოთ ნებისმიერად მცირე r-ის ერთთან მარცხნიდან სიახლოვის ხარჯზე. ეს ნიშნავს, რომ უკვე აღებული ε რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $\eta > 0$ რიცხვი, რომ (9) უტოლობის მარჯვენა მხარე ნაკლები აღმოჩნდება $\varepsilon/2$-ზე, როცა r აკმაყოფილებს პირობას $1 - \eta < r < 1$.

ამრიგად, ადგილი აქვს უტოლობას

$$|I_2(r,x)| < \varepsilon/2, \text{ როცა } x \in (x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2) \text{ და } 1 - \eta < r < 1. \quad (10)$$

(8) და (10) უტოლობებიდან ვღებულობთ

$$|f(r,x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ როცა } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \text{ და } 1 - \eta < r < 1. \quad (11)$$

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან ჩანს, რომ η და δ რიცხვები დამოკიდებულია მხოლოდ და მხოლოდ ε რიცხვზე. ამიტომ (11) უტოლობა შესრულებულია ამ უტოლობაში მითითებული თვისებების მქონე $\delta > 0$ და $\eta > 0$ რიცხვებისთვის, რომელნიც დამოკიდებული არიან მხოლოდ ε-ზე! ეს ნიშნავს, რომ უტოლობა $|f(r,x) - f(x_0)| < \varepsilon$ შესრულებული $(1, x_0)$ წერტილის მიდამოს ერთეულოვან ღია წრესთან თანაკვეთაში და ეს თანაკვეთა დამოკიდებულია მხოლოდ (11) უტოლობაში მონაწილე ε რიცხვზე. ეს კი, ზღვრის განმარტების თანახმად, ნიშნავს (1) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შვარცის მიერ დამტკიცებული.

თეორემა 12.2 (შვარცი, 1872 წ., [43]). თუ 2π პერიოდული f ფუნქცია უწყვეტია $(-\infty, +\infty)$-ზე, მაშინ მისი პუასონის $f(r,x)$ ინტეგრალს ერთეულოვანი წრეწირის ყოველ $(1, x_0)$ წერტილზე გააჩნია თვისება

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ x\to x_0}} f(r,x) = f(x_0), \quad (12)$$

კერძოდ,

$$\lim_{r\to 1} f(r,x_0) = f(x_0). \quad (13)$$

შვარცმა ეს თეორემა დაამტკიცა შემდეგი ფორმით ([20], გვ. 28): პირველი სასაზღვრო ამოცანა უწყვეტი u ფუნქციისთვის იხსნება პუასონის ინტეგრალით $u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\theta$.

13 დირიჰლეს პრობლემა წრისთვის

1. დირიჰლემ 1850 წელს დასვა შემდეგი პრობლემა.

დირიხლეს პრობლემა 13.1. ერთეულოვანი ღია D წრის C საზღვარზე მოცემული უწყვეტი f ფუნქციისთვის (ე.ი. f არის 2π პერიოდული და უწყვეტი $(-\infty, +\infty)$-ზე) არსებობს თუ არა ერთეულოვან ჩაკეტილ $\overline{D} = D \cup C$ წრეზე უწყვეტი და ღია D წრეში ჰარმონიული ω ფუნქცია თვისებით

$$\omega(1,x) = f(x). \quad (1)$$

თეორემა 13.2. დირიჰლეს პრობლემის ამოხსნაა ფუნქცია

$$\omega(r,x)=\begin{cases} f(r,x), & \text{როცა} \quad 0\le r<1,\\ f(x), & \text{როცა} \quad r=1. \end{cases} \tag{2}$$

დამტკიცება. $\omega(r,x)$ ფუნქციის უწყვეტობა და ჰარმონიულობა ღია D წრეში ნიშნავს f ფუნქციის პუასონის $f(r,x)$ ინტეგრალის იმავე თვისებებს, რაც გარანტირებულია (იხ.§11).

$\omega(r,x)$ ფუნქციის უწყვეტობის დასადგენად ერთეულოვანი C წრეწირის ყოველ წერტილზე, ავიღოთ C-ს ნებისმიერი წერტილი $(1,x_0)$.

ცხადია, რომ $(1,x_0)$ წერტილი წარმოადგენს დაგროვების წერტილს როგორც D სიმრავლის, ისე C სიმრავლის.

პირველ შემთხვევაში, D-ს **გასწვრივ** $\omega(r,x)=f(r,x)$ ფუნქციის უწყვეტობას $(1,x_0)$ წერტილზე ადასტურებს §12-ის (1) ტოლობა.

მეორე შემთხვევაში კი, $\omega(1,x)=f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობას C წრეწირის **გასწვრივ** უზრუნველოფს თვით f ფუნქციის უწყვეტობა C-ს ყველა წერტილზე (მოცემულობის თანახმად), სახელდობრ, $(1,x_0)$ წერტილზე.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (2) ტოლობით მოცემული ფუნქცია ერთადერთია. დავუშვათ, რომ არსებობს კიდევ სხვა $\omega_1(r,x)$ ფუნქცია იმავე თვისებებით. მაშინ სხვაობა $\omega(r,x)-\omega_1(r,x)$ უწყვეტია $\overline{D}$-ზე და ჰარმონიულია D-ში. ამიტომ ეს სხვაობა მაქსიმუმს და მინიმუმს მიაღწევს მხოლოდ C საზღვარზე ([8], გვ. 130), მაგრამ C საზღვარზე ეს სხვაობა ნულია. მაშასადამე, შიგნით ეს სხვაობა ვერ მიიღებს ვერც დადებით და ვერც უარყოფით მნიშვნელობას. ამგვარად, ეს სხვაობა ნულია D-ში.

როგორც ვნახეთ, C-ზეც ნულია ეს სხვაობა.

მაშასადამე, ეს სხვაობა ნულია $\overline{D}$-ზე ანუ $\omega_1(r,x)=\omega(r,x)$-ს ყველა $r\in[0,1]$-ისთვის და ყველა $x\in(-\infty,+\infty)$-ისთვის.

ამრიგად, $\omega_1(z)=\omega(z)$ ყველა $z\in\overline{D}$ წერტილზე. თეორემა დამტკიცებულია.

2. რადგან დირიჰლეს პრობლემის გადამჭრელი $\omega(r,x)$ ფუნქცია, რომელიც მოცემულია (2) ტოლობით, წარმოადგენს ჩაკეტილ $\overline{D}$ წრეზე უწყვეტ ფუნქციას, ამიტომ $\omega(r,x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია $\overline{D}$-ზე და, მაშასადამე, D-შიც. ამიტომ გვაქვს

წინადადება 13.3. ერთეულოვან C წრეწირზე უწყვეტი ფუნქციის პუასონის ინტეგრალი **თანაბრად უწყვეტია** ერთეულოვან ღია D წრეში.

მართებულია შებრუნებული

წინადადება 13.4. თუ პუასონის ინტეგრალი **თანაბრად უწყვეტია** ერთეულოვან ღია D წრეში, მაშინ შესაძლებელია ამ ინტეგრალის უწყვეტად გაგრძელება $\overline{D}$-ზე. მაშასადამე, ასეთ შემთხვევაში პუასონის ინტეგრალი წარმოადგენს $(-\infty, +\infty)$-ზე უწყვეტი და 2π პერიოდული ფუნქციის პუასონის ინტეგრალს.

ამ წინადადებათა ძალით გვაქვს

თეორემა 13.5. პუასონის ინტეგრალის უწყვეტი გაგრძელება რომ შეიძლებოდეს ღია D წრიდან ჩაკეტილ $\overline{D}$ წრეზე, აუცილებელი და საკმარისია ამ ინტეგრალის თანაბრად უწყვეტობა D-ში.

წინადადება 13.4 კი არის შემდეგი თეორემის კერძო შემთხვევა.

თეორემა 13.6 ([21], გვ, 290). თუ არაჩაკეტილ A სიმრავლეზე განსაზღვრული f ფუნქცია **თანაბრად უწყვეტია** A-ზე, მაშინ არსებობს f-ის ისეთი ერთადერთი გაგრძელება A სიმრავლიდან $\overline{A}/A$ სიმრავლეზე, რომ ასე მიღებული ფუნქცია უწყვეტია $\overline{A}$-ზე.

ადვილი მისახვედრია, რომ 13.5 თეორემა ეკვივალენტურია შემდეგი თეორემის.

თეორემა 13.7. პუასონის ინტეგრალით მოცემული ჰარმონიული ფუნქციის ზღვარი ერთეულოვან წრეწირზე იქნება ამ წრეწირის მიმართ (გასწვრივ) უწყვეტი, როცა ეს ინტეგრალი **თანაბრად უწყვეტია** ერთეულოვან ღია წრეში.

14 პუასონის ინტეგრალის წარმოებულის ზღვარი

§12-ში ჩვენ დავადგინეთ, რომ პუასონის $f(r,x)$ ინტეგრალს გააჩნია $f(x_0)$ ზღვარი $(1, x_0)$ წერტილზე, როცა f ფუნქცია უწყვეტია ამ x_0 წერტილზე ანუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{(r,x)\to(1,x_0)} f(r,x) = f(x_0). \tag{1}$$

პუასონის ინტეგრალს, როგორც ღია ერთეულოვან წრეში ჰარმონიული ფუნქციას (იხ.§11) გააჩნია კერძო წარმოებული $\frac{\partial}{\partial x} f(r,x)$ ნებისმიერი 2π პერიოდული და $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი f ფუნქციისთვის. ჩვენი მიზანია დავადგინოთ კავშირი ამ კერძო წარმოებულის ზღვარსა და f ფუნქციის წარმოებულს შორის. ამასთან დაკავშირებით მართებულია

თეორემა 14.1 (ფატუ, [37]; [7], გვ. 156). თუ f ფუნქციას სასრული წარმოებული გააჩნია რაიმე (a,b) ინტერვალში და თუ ეს წარმოებული უწყვეტია (a,b)-ს შიგა რომელიმე x_0 წერტილზე, მაშინ $f'(x_0)$ წარმოადგენს კერძო $\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)$ წარმოებულის ზღვარს $(1,x_0)$ წერტილზე ანუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{(r,x)\to(1,x_0)}\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)=f'(x_0), \tag{2}$$

რომლის კერძო შემთხვევაა რადიალური ზღვარი

$$\lim_{r\to 1-}\Big(\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)\Big)(x_0)=f'(x_0). \tag{3}$$

დამტკიცება. როგორც ვიცით, f ფუნქციის პუასონის ინტეგრალს აქვს სახე (იხ.§12)

$$f(r,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)P(r,x-t)dt, \tag{4}$$

სადაც პუასონის გული

$$P(r,u)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos u+r^2},\quad -\pi\le u\le\pi,\quad 0\le r<1.$$

აქედან

$$\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)=-\frac{2r(1-r^2)\sin u}{[1-2r\cos u+r^2]^2} \tag{5}$$

და

$$\Big|\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)\Big|\le\frac{4(1-r)}{[1-2r\cos u+r^2]^2}. \tag{6}$$

მაგრამ $[-\pi,\pi]$-ზე, $1-2r\cos u+r^2\ge 1-2r+r^2=(1-r)^2$. ამიტომ

$$\Big|\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)\Big|\le\frac{4(1-r)}{(1-r)^4}=\frac{4}{(1-r)^3},\quad 0\le r<1. \tag{7}$$

(7) შეფასების საფუძველზე შეგვიძლია გამოვიყენოთ ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოების წესი[4] და გვექნება ტოლობა:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\partial}{\partial x}P(r,x-t)dt. \tag{8}$$

[4] თუ კერძო წარმოებული $\frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x)$ შემოსაზღვრულია $Q=[a\le t\le b,\ c\le x\le d]$ მართკუთხედზე და $\psi(t)$ ფუნქცია ჯამებადია $[a,b]$-ზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

გარდა ამისა,

$$\frac{\partial}{\partial x}P(r,x-t)=\frac{\partial}{\partial u}P(r,u),\quad u=x-t. \tag{9}$$

რადგან x_0 არის (a,b) ინტერვალის შიგა წერტილი და წარმოებული f' უწყვეტია x_0 წერტილზე, ამიტომ არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$ და f' შემოსაზღვრულია $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ინტერვალზე: $|f'(x)|<M$, როცა $x_0-\delta<x<x_0+\delta$.

ამის შემდეგ ვიგულისხმოთ $x\in(x_0-\delta/2,x_0+\delta/2)$ და ინტეგრალი (8) ტოლობაში დავშალოთ $I_1(r,x)$ და $I_2(r,x)$ ინტეგრალების ჯამად ინტერვალებზე $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ და $[-\pi,\pi]\backslash(x_0-\delta,x_0+\delta)$ შესაბამისად.

$I_2(r,x)$-ში $|x-t|\geq\frac{\delta}{2}$ და (6) უტოლობის მიმართ ტოლობის

$$\min_{\substack{\delta\leq|u|\leq\pi\\0\leq r<1}}(1-2r\cos u+r^2)=\sin^2\delta \tag{10}$$

გამოყენებით (იხ.§10, (14) ტოლობა) მივიღებთ შეფასებას:

$$\Big|\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)\Big|\leq\frac{4(1-r)}{\sin^4\delta/2}\to 0,\quad \text{როცა}\quad r\to 1-,\quad \delta\leq|u|\leq\pi, \tag{11}$$

რომელსაც **ადგილი არ აქვს ფეიერის** გულისთვის.

ამრიგად, ნებისმიერი $x\in(x_0-\delta/2,x_0+\delta/2)$-ისთვის და ყოველი $r\in[0,1)$-ისთვის მართებულია უტოლობა, (9) ტოლობის და (11)-ის გამო,

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x}P(r,x-t)\Big|\leq\frac{4(1-r)}{\sin^4\delta/2},\quad \text{როცა}\quad |x-t|\geq\frac{\delta}{2}, \tag{12}$$

და ამიტომ

$$|I_2(r,x)|\leq\frac{1}{\pi}\cdot\frac{4(1-r)}{\sin^4\delta/2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt,\quad x\in(x_0-\delta/2,x_0+\delta/2). \tag{13}$$

([38], გვ. 356)

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_a^b\psi(t)\phi(t,x)dt=\int\limits_a^b\psi(t)\frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x)dt.$$

ჩვენს შემთხვევაში $a=c=-\pi$, $b=d=\pi$, $\phi(t,x)=P(r,x-t)$ (r ფიქსირებულია), $\psi=f$ და ფიქსირებული r-ისთვის კერძო წარმოებული $\frac{\partial}{\partial x}P(r,x-t)$ შემოსაზღვრულია (9) ტოლობისა და (7) უტოლობის ძალით.

შემდეგ, $I_1(r,x)$ ინტეგრალისთვის გამოვიყენოთ ტოლობა:

$$\frac{\partial}{\partial x}P(r,x-t)=-\frac{\partial}{\partial t}P(r,x-t),\quad 0\le r<1 \tag{14}$$

და მოვახდინოთ ნაწილობითი ინტეგრება, მივიღებთ:

$$I_1(r,x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,x-t)dt=-\frac{1}{\pi}f(t)P(r,x-t)\Big|_{t=x_0-\delta}^{t=x_0+\delta}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f'(t)P(r,x-t)dt. \tag{15}$$

თუ შემოვიღებთ დამხმარე ფუნქციას $F(t)=f'(t)$, როცა $t\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ და $F(t)=0$, როცა $t\overline{\in}(x_0-\delta,x_0+\delta)$, მაშინ §12-დან ტოლობა (1)-ის ძალით გვექნება:

$$\lim_{(r,x)\to(1,x_0)}\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f'(t)P(r,x-t)dt=f'(x_0). \tag{16}$$

გარდა ამისა,

$$\Big|-\frac{1}{\pi}f(t)P(r,x-t)\Big|_{t=x-\delta}^{t=x_0+\delta}\le$$

$$\le\frac{M}{\pi}\big[|P(r,x-(x_0+\delta))|+|P(r,x-(x_0-\delta))|\big]. \tag{17}$$

რადგან $|x-(x_0+\delta)|\ge\delta/2$ და $|x-(x_0-\delta)|\ge\delta/2$, ამიტომ §10-დან (13) უტოლობის ძალით

$$|P(r,x-(x_0+\delta))|\le\frac{1-r^2}{2\sin^2\delta/2},\quad |P(r,x-(x_0-\delta))|\le\frac{1-r^2}{2\sin^2\delta/2}. \tag{18}$$

ტოლობა (2) გამომდინარეობს (13), (17), (18) უტოლობებიდან და (15), (16) ტოლობებიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

15 კუთხური(არამხებითი) მისწრაფების დახასიათება

კუთხური (არამხებითი) ზღვრის ცნება 15.1. ერთეულოვან ღია D წრეში $|z|<1$ ავიღოთ უსასრულო რაიმე E სიმრავლე, რომელსაც C

წრეწირზე $|z| = 1$ გააჩნია დაგროვების რაიმე e^{ix_0} წერტილი. D წრეში განსაზღვრული რაიმე ψ ფუნქციის ზღვარი e^{ix_0} წერტილზე E სიმრავლის გასწვრივ ეწოდება ზღვარს

$$\lim_{\substack{z\to e^{ix_0}\\ z\in E}} \psi(z), \tag{1}$$

როცა ეს ზღვარი არსებობს სასრული ან უსასრულო.

თუ E არის e^{ix_0} წერტილზე გამავალი რადიუსი, ქორდა ან სხვა რაიმე წირი, მაშინ ლაპარაკობენ ψ ფუნქციის **რადიალურ**, **ქორდულ** ან **წირით** ზღვარზე e^{ix_0} წერტილზე შესაბამისად.

ახლა განვიხილოთ კუთხური ზღვრის ცნება. ზემოთ აღნიშნულ E სიმრავლედ მივიღოთ e^{ix_0} წერტილიდან გამომავალი ორი ქორდის მიერ შედგენილი 2θ გაშლილობის კუთხე, სიმბოლურად $V_\theta(x_0)$, რომლისთვისაც ბისექტრისას წარმოადგენს e^{ix_0} წერტილზე გამავალი რადიუსი და $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

თუკი არსებობს ψ ფუნქციის ზღვარი e^{ix_0} წერტილზე $V_\theta(x_0)$ კუთხის გასწვრივ, სიმბოლურად,

$$\lim_{\substack{z\to e^{ix_0}\\ z\in V_\theta(x_0)}} \psi(z) = A(x_0) \tag{2}$$

და $A(x_0)$ **არაა დამოკიდებული** θ-ზე, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, მაშინ ამბობენ, რომ ψ ფუნქციას e^{ix_0} წერტილზე გააჩნია **კუთხური** $A(x_0)$ ზღვარი და წერენ

$$\lim_{z\overset{\triangle}{\to} e^{ix_0}} \psi(z) = A(x_0). \tag{3}$$

ურთიერთეკვივალენტური (2) და (3) ტოლობები ნიშნავს, რომ $\psi(z)$ მნიშვნელობების სწრაფვას $A(x_0)$-სკენ ადგილი აქვს ყოველი ფიქსირებული $V_\theta(x_0)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, კუთხის გასწვრივ z წერტილის სწრაფვისას e^{ix_0} წერტილისკენ. ეს უკანასკნელი კი ნიშნავს, რომ $V_\theta(x_0)$ კუთხეში მდებარე z წერტილი საკმარისად ახლოს უნდა იყოს e^{ix_0} წერტილთან.

ყველაფერი ეს შეიძლება გამოითქვას ასე: $\psi(z)$ მნიშვნელობები ნებისმიერად ახლოსაა $A(x_0)$-თან, როცა z იმყოფება $V_\theta(x_0)$ კუთხისა და იმ წრის თანაკვეთაში, რომლის ცენტრია e^{ix_0} და რადიუსი კი საკმარისად მცირე. აქედან ჩანს, რომ უკანასკნელი წრის რადიუსად შეიძლება თავიდანვე ვიგულისხმოთ რიცხვი $\cos\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

მაშასადამე, z წერტილი ეკუთვნის $V_\theta(x_0)$ კუთხისა და $|z - e^{ix_0}| < \cos\theta$ წრის თანაკვეთას და ეს თანაკვეთა აღვნიშნოთ $V_{\theta,\cos\theta}(x_0)$ სიმბოლოთი.

ამრიგად, z წერტილი ისწრაფვის e^{ix_0} წერტილისკენ ისე, რომ მუდმივად რჩება $V_{\theta,\cos\theta}(x_0)$ სიმრავლეში, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

ამიტომ ტოლობა (2) გახდება უფრო ინფორმაციული, თუ მას ჩავწერთ შემდეგი სახით:

$$\lim_{\substack{z\to e^{ix_0}\\ z\in V_{\theta,\cos\theta}(x_0)}}\psi(z)=A, \tag{4}$$

რომელიც უფრო გამჭვირვალეს ხდის (3) ჩანაწერს.

აქედან ჩანს, რომ $A(x_0)$ იქნება ψ ფუნქციის კუთხური ზღვარი e^{ix_0} წერტილზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (4) ტოლობა შესრულებულია π-ზე ნაკლები გაშლილობის **ყველა** იმ კუთხისთვის, რომლისთვისაც $[0,e^{ix_0}]$ მონაკვეთი-რადიუსი არის ბისექტრისა.

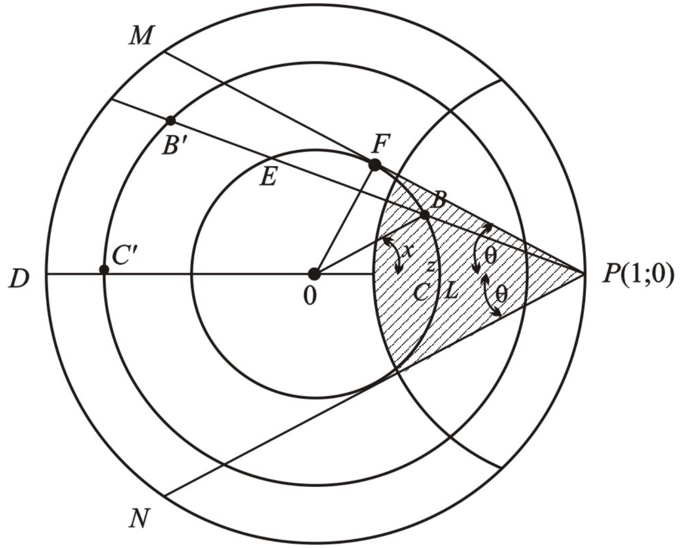
ხშირად კუთხური ზღვრის ნაცვლად ამბობენ **არამხებით** ზღვარს იმის ხაზგასასმელად, რომ e^{ix_0} წერტილისკენ სწრაფვისას $z=re^{ix}$ წერტილები ეკუთვნის 2θ გაშლილობის, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, კუთხეს წვეროთი e^{ix_0} წერტილზე, რომლის ბისექტრისას წარმოადგენს e^{ix_0} წერტილზე გამავალი რადიუსი.

D-ში აღებული უსასრულო რაიმე E სიმრავლე იქნება C წრეწირისადმი **მხები სიმრავლე** e^{ix_0} წერტილზე, თუ e^{ix_0} წერტილიდან გამოსული **ყოველი** ორი ქორდით შედგენილი კუთხის გარეთ რჩება E სიმრავლის უსასრულო სიმრავლე re^{ix} წერტილებისა, e^{ix_0} წერტილის ნებისმიერ სიახლოვეს.

მაგალითად, $|z|=1$ წრეწირისადმი $(1;0)$ წერტილზე მხები სიმრავლეა წრეწირი $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ და, აგრეთვე, ამ წრეწირებს შორის მოქცეული სიმრავლეც.

წერტილის კუთხური (არამხებითი) მისწრაფების პირობები 15.2. შემდგომში უმეტესად ლაპარაკი გვექნება კუთხური (არამხებითი) ზღვრის არსებობის შესახებ. ამიტომ ჯერ უნდა დავადგინოთ წერტილის არამხებითი (კუთხური) მისწრაფების განმსაზღვრელი პირობა. ასეთი ჩვენ გვექნება ორი პირობა: მიმსწრაფი $z=re^{ix}$ წერტილის მეშვეობით და ამ წერტილის x არგუმენტით.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია განვიხილოთ ერთეულოვანი ღია D წრის z წერტილის კუთხური მისწრაფება $P(1;0)$ წერტილისკენ. ეს ნიშნავს, რომ $z\in D$ ისწრაფვის $P(1;0)$ წერტილისკენ ისე, რომ z მუდმივად რჩება $V_{\theta,\cos\theta}(0)$ სიმრავლეში, რომლის ბისექტრისაა PD დიამეტრი. ნახაზზე 2θ გაშლილობის კუთხის შემქმნელი ქორდებია PM, PN და დაშტრიხულია $V_{\theta,\cos\theta}(0)$ სიმრავლე, რომლის გასწვრივაც მიისწრაფვის z-ის შესაბამისი B წერტილი $P(1;0)$ წერტილისკენ.



ნახ. 8

სკოლის გეომეტრიიდან კარგად ცნობილი ერთ-ერთი თეორემის თანახმად-წრის გარეთ მდებარე წერტილიდან წრისადმი გავლებული ყოველი მკვეთის ნამრავლი თავისსავე გარე ნაწილზე ერთიდაიგივე რიცხვია და უდრის ამავე წერტილიდან იმავე წრისადმი გავლებული მხების კვადრატს–გვაქვს ტოლობა $PB \cdot PB' = PL \cdot PC'$ ანუ $\frac{PB}{PL} = \frac{PC'}{PB'}$, მაგრამ $\frac{PB}{PL} = \frac{|1-z|}{1-|z|}$ და $\frac{PC'}{PB'} < \frac{PD}{PB'} < \frac{PD}{PE} < \frac{PD}{PF} = \frac{2 \cdot OP}{PF} = 2\frac{OP}{OP\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$. ამიტომ $\frac{|1-z|}{1-|z|} < \frac{2}{\cos\theta}$ ანუ $|1-z| < \frac{2}{\cos\theta}(1-|z|)$. ეს უკანასკნელი ჩაიწერება სახით

$$|1-z| < C(1-|z|), \tag{5}$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნა $C = 2/\cos\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

აშკარაა, რომ C დამოკიდებულია θ-ზე, მაგრამ ამის შესახებ მინიშნება არ არის. საქმე ისაა, რომ კუთხური ზღვრის არსებობის შესახებ ნებისმიერი ფაქტის დადგენის პროცესში π-ზე ნაკლები გაშლილობის 2θ კუთხე ფიქსირებულია და იმ მსჯელობაში C მუდმივია.

ანალოგიურ მდგომარეობასთან გვაქვს საქმე ქვემოთ დამტკიცებულ (9) პირობაში მონაწილე K მუდმივის მიმართაც.

$z = re^{ix}$ წერტილის $P(1;0)$ წერტილისკენ კუთხური სწრაფვის (5)

პირობა შეიძლება გადაიწეროს x-ზე პირობის სახითაც. ამ მიზნით შევნიშნოთ, რომ (იხ. ნახატი 8) $|1-z| > BC = OB\sin x = |z|\cdot|\sin x|$. ამიტომ (5)-ის ძალით $|z|\cdot|\sin x| < C(1-|z|)$, მაგრამ $\frac{2}{\pi}|x| \le |\sin x|$, როცა $0 \le |x| \le \frac{\pi}{2}$. ამრიგად, $\frac{2}{\pi}|z||x| < C(1-|z|)$ ანუ $|x| < C\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-|z|}{|z|}$.

მეორე მხრივ, $1-|z| \le |1-z|$ და აქედან

$$|z| \ge 1 - |1-z|. \tag{6}$$

რადგან z წერტილი $V_{\theta,\cos\theta}(0)$ სიმრავლის ფარგლებში მიისწრაფვის $P(1;0)$ წერტილისკენ, ამიტომ ზემოთ აღნიშნულის ძალით (იხ. $|z-e^{ix_0}| < \cos\theta$ პირობა) გვაქვს $|1-z| < \cos\theta$. ამის გათვალისწინებით (6)-დან ვღებულობთ

$$|z| > 1 - \cos\theta. \tag{7}$$

მაშასადამე,

$$|x| < C\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-|z|}{1-\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-|z|}{1-\cos\theta} < \frac{4(1-|z|)}{\cos\theta(1-\cos\theta)}. \tag{8}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $K = \frac{4}{\cos\theta(1-\cos\theta)}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, მაშინ $z = re^{ix}$ წერტილის კუთხური სწრაფვის (8) პირობა $P(1;0)$ წერტილისკენ მიიღებს სახეს

$$|x| < K(1-|z|). \tag{9}$$

15.3. როცა ვიხილავთ $z = re^{ix} \in D$ წერტილის არამხებურ (კუთხურ) სწრაფვას $\boldsymbol{e^{ix_0}}$ **წერტილისკენ**, მაშინ (5) და (9) პირობები ასე შეიცვლებიან:

$$|e^{ix_0} - z| < C(1-|z|), \tag{10}$$

$$|x - x_0| < K(1-|z|). \tag{11}$$

ამ შემთხვევაში $z = re^{ix}$ წერტილი ეკუთვნის $V_{\theta,\cos\theta}(x_0)$ კუთხეს, რომლის e^{ix_0} წვეროსკენ ისწრაფვის z წერტილი. $V_{\theta,\cos\theta}(x_0)$ კუთხის წვერო e^{ix_0} არ ეკუთვნის, საზოგადოდ, იმ ფუნქციის განსაზღვრის არეს, რომლის კუთხური ზღვარიც განიხილება e^{ix_0} წერტილზე, თუმც e^{ix_0} არის ფუნქციის განსაზღვრის არეს დაგროვების წერტილი.

შენიშვნა 15.4. (3) და (4) ტოლობის რეალიზაციისთვის აუცილებელია $V_{\theta,\cos\theta}(x_0)$ სიმრავლეში მდებარე z წერტილი აკმაყოფილებდეს

პირობას $|e^{ix_0}-z|<\cos\theta$, რომელიც არაა საკმარისი იმისთვის, რომ $|\psi(z)-A(x_0)|$ გახდეს ნებისმიერად მცირე, ვთქვათ, მოცემულ $\varepsilon>0$ რიცხვზე ნაკლები. ამასთან, კუთხის გაფართოება იწვევს e^{ix_0} წერტილის იმ **კუთხური მიდამოს** დავიწროებას, რომელზეც უნდა შესრულდეს უტოლობა $|\psi(x)-A(x_0)|<\varepsilon$. ამ ინფორმაციას შეიცავს აღნიშვნა $V_{\theta,\cos\theta}(x_0)$: როცა $\theta\to\frac{\pi}{2}-$, მაშინ $\cos\theta\to 0+$ და ამიტომ $V_{\theta,\cos\theta}(x_0)$ მიისწრაფვის სიცარიელისკენ! ამიტომაცაა, რომ კუთხური ზღვრის არსებობა არ იწვევს, საზოგადოდ, ზღვრის (თავისუფალის) არსებობას! ეს ფაქტი საჭიროებს სათანადო ყურადღებას!

აქ თქმული და მომდევნო პარაგრაფებში გადმოცემული მასალა გვიჩვენებს, რომ კუთხური ზღვარი წარმოადგენს ზღვრის კარგ მიახლოებას.

16 პუასონის ინტეგრალის წარმოებულის კუთხური ზღვარი

თეორემა 16.1 (ფატუ, [37]; [12]. გვ. 167). ვთქვათ, 2π პერიოდულ და $[-\pi,\pi]$-ზე ჯამებად f ფუნქციას რაიმე x_0 წერტილზე გააჩნია სასრული წარმოებული $f'(x_0)$.

მაშინ f-ის პუასონის $f(r,x)$ ინტეგრალის x-ით კერძო $\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)$ წაროებულს e^{ix_0} წერტილზე გააჩნია $f'(x_0)$-ის ტოლი კუთხური ზღვარი ანუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{(r,x)\overset{\triangle}{\to} e^{ix_0}} \frac{\partial}{\partial x} f(r,x) = f'(x_0), \tag{1}$$

რომლის კერძო შემთხვევაა რადიალური ზღვარი

$$\lim_{r\to 1-} \Big(\frac{\partial}{\partial x} f(r,x)\Big)(x_0) = f'(x_0). \tag{2}$$

დამტკიცება.[5] შემოვიღოთ დამხმარე ფუნქცია $\phi(x)=f(x)-f(x_0)-\sin(x-x_0)f'(x_0)$. მაშინ $\phi(x_0)=0$, $\phi'(x_0)=f'(x_0)-\cos(x_0-x_0)f'(x_0)=$

[5] (1) ტოლობის [7] წიგნში მოცემული დამტკიცება არაკორექტულია. გვ. 158-ზე (56.7) ტოლობით განსაზღვრული $Q=Q_r(t,\omega)$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობის დადგენის მცდელობა, როცა $-\delta\le t\le\delta$ და $|t|<c(1-r)$, ემყარება მცდარ $|Q|=2r(1-r^2)\frac{t\cdot\sin(t-\omega)}{|e^{it}-re^{i\omega}|^2}$ ტოლობას.

აქ მნიშვნელში უნდა იყოს $|e^{it}-re^{i\omega}|^4$. იგივეა გამეორებული წიგნში: Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966, стр. 370.

უფრო ზუსტად, $Q_r(t,\omega)$ ფუქნცია აღნიშნულ პირობებში **არაა შემოსაზღვრული.**

$f'(x_0)-f'(x_0)=0$, მაგრამ, $\phi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}[\phi(x)-\phi(x_0)]$. თუ აქ გავითვალისწინებთ წინა ტოლობებს, მივიღებთ $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{x-x_0}\phi(x)\right]$ $=0$.

ეს ნიშნავს, რომ ყოველ $\varepsilon>0$ რიცხვს ეთანადება ისეთი $\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას $\left|\frac{1}{x-x_0}\phi(x)\right|<\varepsilon$ ანუ

$$|\phi(x)|<\varepsilon|x-x_0|, \quad \text{როცა} \quad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta). \tag{3}$$

რადგან:

1) მუდმივის გაშლა ფურიეს მწკრივად არის თვით ეს მუდმივი;

2) $\sin x$ ფუნქციის გაშლა ფურიეს მწკრივად არის $\sin x$;

3) $\sin x$ ფუნქციისთვის პუასონ-აბელის საშუალოა $r\sin x$;

4) $c\sin x$ ფუნქციისთვის პუასონ-აბელის საშუალო არის $cr\sin x$, ამიტომ $f(x)=\phi(x)+f(x_0)+\sin(x-x_0)f'(x_0)$ ტოლობის შესაბამისი პუასონის ინტეგრალებისთვის გვექნება ტოლობა

$$f(r,x)=\phi(r,x)+f(x_0)+r\sin(x-x_0)f'(x_0), \tag{4}$$

საიდანაც

$$\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)=\frac{\partial}{\partial x}\phi(r,x)+r\cos(x-x_0)f'(x_0). \tag{5}$$

რადგან $\lim_{(r,x)\to e^{ix_0}} r\cos(x-x_0)f'(x_0)=f'(x_0)$, ამიტომ (1) ტოლობის დასამტკიცებლად აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს ტოლობა (იხ. §15, (11) უტოლობა)

$$\lim_{\substack{(r,x)\to e^{ix_0}\\ |x-x_0|<c(1-r)}} \frac{\partial}{\partial x}\phi(r,x)=0. \tag{6}$$

მართლაც,

$$Q_r(t,\omega)=2r(1-r^2)\frac{t\sin(t-\omega)}{[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t-\omega}{2}]^2}$$

ტოლობიდან, როცა $0\le t\le\delta$ გამომდინარეობს

$$Q_r(t,0)=2r(1-r^2)\frac{t\sin t}{[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}]^2}\ge$$

$$\ge 2r(1-r^2)\frac{t\cdot t/2}{[(1-r)^2+rt^2]^2}=$$

$$=r(1+r)(1-r)\frac{t^2}{[(1-r)^2+rt^2]^2}.$$

ვთქვათ, $0<t_n\to0$, როცა $n\to\infty$ და ავიღოთ $r_n=1-t_n$. მაშინ $t_n/(1-r_n)=1$ და $Q_{r_n}(t_n,0)\ge r_n(1+r_n)\frac{t_n^3}{t_n^4(1+r_n)^2}\to+\infty$, $n\to\infty$.

გვაქვს $\phi(r,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(t)P(r,t-x)dt$ და $\frac{\partial}{\partial x}\phi(r,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(t)\frac{\partial}{\partial x}P(r,$ $t-x)dt$. მაგრამ, $\frac{\partial}{\partial x}P(r,t-x)=-\frac{\partial}{\partial t}P(r,t-x)$. ამიტომ

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(r,x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\phi(t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,t-x)dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x}\phi(x+\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}P(r,\tau)d\tau=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\phi(x+t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt. \quad (7)$$

წერის გამარტივების მიზნით და ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x_0=0$. ამის გამო,უტოლობა (3) მიიღებს სახეს:

$$|\phi(\tau)|<\varepsilon|\tau|,\quad \tau\in(-\delta,\delta). \quad (8)$$

(7) ტოლობათა ბოლო ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ასე:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\phi(x+t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt=$$

$$=\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}\phi(x+t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt+\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta/2,\delta/2)}\phi(x+t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt. \quad (9)$$

უკანასკნელი ტოლობის ბოლო ინტეგრალის აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება, §14-ის (11) უტოლობის თანახმად, სიდიდეს

$$\frac{4(1-r)}{\sin^4\delta/2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\phi(r,\tau)|d\tau\to 0,\quad \text{როცა}\quad r\to 1. \quad (10)$$

რადგან x უნდა მივასწრაფოთ $x_0=0$-სკენ, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x\in(-\delta/2,\delta/2)$. ამასთან ერთად, (9) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველ ინტეგრალში $J(r,x)\equiv\int_{-\delta/2}^{\delta/2}\phi(x+$ $t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt$ ცვლადი $t\in(-\delta/2,\delta/2)$. ამის გამო, $x+t\in(-\delta,\delta)$. ამიტომ, (8)-დან გვაქვს უტოლობა

$$|\phi(x+t)|<\varepsilon|x+t|. \quad (11)$$

(11)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$|J(r,x)|\le\varepsilon\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}[|x|+|t|]\Big|\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\Big|dt=\varepsilon\int\limits_{-\delta/2}^{0}(|x|+|t|)\Big|\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\Big|dt+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^{\delta/2}(|x|+|t|)\Big|\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\Big|dt \equiv \varepsilon\cdot(J_1+J_2). \tag{12}$$

J_1 ინტეგრალში $-\delta/2 < t \le 0$, ამიტომ §14-დან (5) ტოლობის ძალით

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\Big| &= \frac{2r(1-r^2)[-\sin t]}{(1-2r\cos t+r^2)^2} = \\ &= -\frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1-2r\cos t+r^2)^2} = \frac{\partial}{\partial t}P(r,t).\end{aligned} \tag{13}$$

ასევე, J_2 ინტეგრალში $0 \le t < \frac{\delta}{2}$ და

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\Big| = \frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1-2\cos t+r^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial t}P(r,t). \tag{14}$$

ამიტომ

$$J_1 = \int\limits_{-\delta/2}^{0}(|x|-t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt = |x|\int\limits_{-\delta/2}^{0}\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt - \int\limits_{-\delta/2}^{0} t\cdot\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt,$$

$$J_2 = -\int\limits_0^{\delta/2}(|x|+t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,t) = -|x|\int\limits_0^{-\delta/2}\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt - \int\limits_0^{-\delta/2} t\cdot\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt.$$

აქედან,

$$\begin{aligned}J_1+J_2 = |x|\Big[\int\limits_{-\delta/2}^{0}\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt - \int\limits_0^{\delta/2}\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt\Big] -\\ -\Big[\int\limits_{-\delta/2}^{0} t\cdot\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt + \int\limits_0^{\delta/2} t\cdot\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\Big] \equiv |x|A - B.\end{aligned} \tag{15}$$

§14-ის (5) ტოლობიდან ჩანს, რომ $\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)$ არის კენტი ფუნქცია, ხოლო $t\cdot\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)$ კი ლუწია. ამის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$A = -2\int\limits_0^{\delta/2}\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt = -2P(r,t)\Big|_{t=0}^{t=\delta/2} = 2[P(r,0)-P(r,\delta/2)],$$

$$B = 2\int\limits_0^{\delta/2} t\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt = 2\Big[tP(r,t)\Big|_{t=0}^{t=\delta/2} - \int\limits_0^{\delta/2} P(r,t)dt\Big].$$

მაგრამ §10-ის (15) ტოლობიდან $P(r,0) = \frac{1+r}{2(1-r)} < \frac{1}{1-r}$ და თუ ვისარგებლებთ იმავე პარაგრაფის (8) ტოლობით, მივიღებთ $P(r,\delta/2) < \frac{1-r^2}{2\cdot 4r\sin^2\delta/4} < \frac{1-r}{4r\sin^2\delta/4}$. გარდა ამისა, §10-ის (17)-(18) ტოლობებიდან $\int_0^{\delta/2} P(r,t)dt = \frac{\pi}{2} + O(1) = O(1)$.

ამრიგად,

$$A = 2\Big[\frac{1}{1-r} + \frac{1-r}{r\sin^2\delta/4}\Big] = \frac{2}{1-r} + o(1), \tag{16}$$

$$B = \frac{1-r}{2r\sin^2\delta/4} + O(1) = o(1) + O(1) = O(1) \tag{17}$$

და (15)-დან ვღებულობთ $J_1 + J_2 \le 2\frac{|x|}{1-r} + o(1) + O(1) = 2\frac{|x|}{1-r} + O(1)$.

როცა $(r,x) \overset{\triangle}{\to} 1$-სკენ, მაშინ $\frac{|x|}{1-r} < K$ (იხ. §15-ის (9) უტოლობა) და $J_1 + J_2 = O(1)$. ახლა (12)-დან ვღებულობთ $J(r,x) = \varepsilon \cdot O(1)$, როცა $(r,x) \overset{\triangle}{\to} 1$. ეს კი ε-ის ნებისმიერი სიმცირის გამო იწვევს (6) ტოლობას, რომელიც ტოლფასია (1) ტოლობის. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 16.2. თუ 2π პერიოდულ და $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე ჯამებად f ფუნქციას რაიმე x_0 წერტილზე გააჩნია სასრული წარმოებული $f'(x_0)$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{(r,x)\overset{\triangle}{\to} e^{ix_0}} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)P(r,x-t)\cdot Q(r,x-t) = -\frac{1}{4}f'(x_0), \tag{18}$$

რომლის კერძო შემთხვევაა რადიალური ზღვარი:

$$\lim_{(r,x_0)\to e^{ix_0}} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)P(r,x_0-t)\cdot Q(r,x_0-t)dt = -\frac{1}{4}f'(x_0). \tag{19}$$

დამტკიცება. §14-ის (5) ტოლობა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial}{\partial u}P(r,u) = -2\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos u + r^2}\cdot\frac{r\sin u}{1-2r\cos u + r^2} \tag{20}$$

და გამოვიყენოთ §11-ის (7), (8) ტოლობები, მივიღებთ:

$$\frac{\partial}{\partial u}P(r,u) = -4P(r,u)\cdot Q(r,u). \tag{21}$$

ამიტომ, §14-ის (8) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial}{\partial x}f(r,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)[-4P(r,x-t)\cdot Q(r,x-t)]dt. \tag{22}$$

ახლა, საკმარისია გამოვიყენოთ 16.1 თეორემა.

17 პუასონის ინტეგრალის კუთხური ზღვარი

წინა პარაგრაფის 16.1 თეორემის გამოყენებით მტკიცდება

თეორემა 17.1 (ფატუ, [37]; [7], გვ. 160; [12], გვ. 168). ვთქვათ, f ფუნქცია ჯამებადია $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე და მის გარეთ გაგრძელებულია 2π პერიოდით. თუ $x_0 \in [-\pi,\pi]$ წერტილზე $f(x_0)$ მნიშვნელობა სასრულია და იგი ტოლია f-ის განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებულის x_0-ზე, მაშინ ყველა ასეთ x_0 წერტილზე ანუ თითქმის ყველა x_0-ზე, კერძოდ კი f-ის ლებეგის წერტილებზე, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{(r,x_0)\overset{\triangle}{\to} e^{ix_0}} f(r,x) = f(x_0). \tag{1}$$

კერძოდ, ადგილი აქვს რადიალურ ტოლობას

$$\lim_{(r,x_0)\to e^{ix_0}} f(r,x_0) = f(x_0), \tag{2}$$

რაც ნიშნავს f ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს $S[f]$ მწკრივის (A)-შეჯამებადობას x_0 წერტილზე $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ.

დამტკიცება. შემოვიღოთ რიცხვი $A = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ და $(f-A)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი $F(u) = \int_{-\pi}^{u}[f(t)-A]dt$. მაშინ

$$f(r,x) - A = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)P(r,x-t)dt - A =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)P(r,x-t)dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} AP(r,x-t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(t)-A]P(r,x-t)dt;$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ §10-ის (7) ტოლობის პირველი ნაწილი.

მაგრამ, თითქმის ყველა $t \in [-\pi,\pi]$-სთვის $F'(t) = f(t) - A$. ამიტომ უკანასკნელი ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F'(t)P(r,x-t)dt = \frac{1}{\pi}\cdot F(t)\cdot P(r,x-t)\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,x-t)dt.$$

მაგრამ $F(-\pi) = 0 = F(\pi)$. ამიტომ აღნიშნული ჩასმა ნულია, ხოლო §14-ის (14) ტოლობის ძალით უკანასკნელი ინტეგრალი თავისივე ნიშნით ასე ჩაიწერება:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(t)\frac{\partial}{\partial x}P(r,x-t)dt = \frac{\partial}{\partial x}F(r,x).$$

უკანასკნელი წარმოებულის კუთხური ზღვარი e^{ix_0} წერტილზე ტოლია $F'(x_0) = f(x_0) - A$ რიცხვის, §16-ის (1) ტოლობის ძალით.

მაშასადამე, $f(r,x) - A$ სხვაობის კუთხური ზღვარი e^{ix_0} წერტილზე ტოლია რიცხვის $f(x_0) - A$. ეს კი ეკვივალენტურია (1) ტოლობის.

18 დირიჰლეს განზოგადებული პრობლემა

§13-ში გადაწყვეტილი იყო **დირიჰლეს პრობლემა წრისთვის**: ერთეულოვან C წრეწირზე მოცემული უწყვეტი ყოველი f ფუნქციისთვის არსებობს ერთეულოვან ღია D წრეში ჰარმონიული და ჩაკეტილ $\overline{D}$ წრეზე უწყვეტი ისეთი $F(r,x)$ ფუნქცია–f ფუნქციის პუასონის ინტეგრალი, რომლის **ზღვარი** D-ს გასწვრივ **ყოველ** e^{ix_0} წერტილზე ტოლია $f(x_0)$ მნიშვნელობის, ე.ი. $F(r,x)$ არის წრეწირზე უწყვეტი f ფუნქციის ჰარმონიული გაგრძელება D-ში.

წინა პარაგრაფში დამტკიცებული 17.1 თეორემა იძლევა **დირიჰლეს განზოგადებული ამოცანის ამოხსნას**: ერთეულოვან C წრეწირზე მოცემული ჯამებადი ყოველი φ ფუნქციისთვის არსებობს D-ში

ჰარმონიული $\varphi(r,x)$ ფუნქცია–φ ფუნქციის პუასონის ინტეგრალი, რომლის **კუთხური** ზღვარი **თითქმის ყველა** e^{ix_0} წერტილზე ტოლია $\varphi(x_0)$ მნიშვნელობის.

დირიჰლეს განზოგადებულ ამოცანასთან დაკავშირებით ისმის კითხვა: რა შეიძლება ითქვას იმ შემთხვევაში, როცა ერთეულოვან C წრეწირზე მოცემული ψ ფუნქცია **არაა ჯამებადი**?

ამ კითხვაზე პასუხი დამოკიდებულია იმაზე, ψ ფუნქცია თითქმის ყველგან სასრულია, თუ მას შეუძლია გახდეს $+\infty$ ან $-\infty$ დადებითი ზომის რაიმე ქვესიმრავლეზე C-დან.

1. თითქმის ყველგან სასრული ფუნქციების შემთხვევაში პასუხს იძლევა ლუზინის შემდეგი

თეორემა 18.1 (ლუზინი, 1915, [16], გვ. 87). ყოველი ზომადი, 2π პერიოდული და თითქმის ყველგან $[-\pi,\pi]$-ზე **სასრული** ψ ფუნქციისთვის არსებობს ერთეულოვანი ღია D წრეში ჰარმონიული ისეთი $\omega(r,x)$ ფუნქცია, რომლის კუთხური ზღვარი, კერძოდ, რადიალური ზღვარი, თითქმის ყველა $x_0\in[-\pi,\pi]$ წერტილზე ტოლია $\psi(x_0)$ მნიშვნელობის.

დამტკიცება. ლუზინის ერთ-ერთი ძირითადი თეორემის თანახმად, ψ ფუნქციისთვის არსებობს $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე უწყვეტი ისეთი Ψ ფუნქცია, რომ ტოლობა $\Psi'(x)=\psi(x)$ სრულდება თითქმის ყველა $x\in[-\pi,\pi]$ წერტილზე ([16], გვ. 78).

ახლა განვიხილოთ Ψ ფუნქციისთვის პუასონის $\Psi(r,x)$ ინტეგრალი. §16-დან (1) ტოლობის ძალით, კერძო $\frac{\partial}{\partial x}\Psi(r,x)$ წარმოებულის კუთხური ზღვარი თითქმის ყველა x_0 წერტილზე არის $\Psi'(x_0)=\psi(x_0)$.

მეორე მხრივ, კერძო წარმოებული $\frac{\partial}{\partial x}\Psi(r,x)$ ჰარმონიული ფუნქციაა ღია D წრეში (იხ.§9), რომელიც გამოდგება თეორემაში აღნიშნულ $\omega(r,x)$ ფუნქციად. თეორემა დამტკიცებულია.

რადიალური ზღვრის შემთხვევისთვის, 18.1 თეორემა შეიძლება ასეც ჩამოყალიბდეს.

თეორემა 18.1$'$ (ლუზინი). ყოველი ზომადი, 2π პერიოდული და თითქმის ყველგან $[-\pi,\pi]$-ზე **სასრული** ψ ფუნქციისთვის არსებობს ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

რომელიც (A)-შეჯამებადია $\psi(x_0)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა

$x_0 \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე ანუ ადგილი აქვს რადიალურ ტოლობას:

$$\lim_{r\to 1}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0)r^n\right]=\psi(x_0).$$

18.1 თეორემასთან დაკავშირებით ბუნებრივია კითხვა: რა შეიძლება ითქვას ამ თეორემაში ხსენებული ჰარმონიული $\omega(r,x)$ ფუნქციისადმი ჰარმონიულად შეუღლებული ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობების არსებობის შესახებ?

თეორემა 18.2 (პრივალოვი, 1919; [7]. გვ. 605). ერთეულოვან ღია წრეში ჰარმონიულ რომელიმე $u(r,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n$ ფუნქციას **სასრული კუთხური** ზღვარი თუ გააჩნია რაიმე ზომად $E\subset[-\pi,\pi]$ სიმრავლეზე, მაშინ შეუღლებულ ჰარმონიულ $v(r,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)r^n$ ფუნქციასაც გააჩნია **სასრული კუთხური** ზღვარი, ოღონდ **თითქმის** ყველგან E სიმრავლეზე.

2. განსაკუთრებული შემთხვევაა, როცა ერთეულოვან C წრეწირზე მოცემული ნამდვილი ფუნქცია შეიძლება გახდეს $+\infty$ ან $-\infty$ დადებითი ზომის რაიმე ქვესიმრავლეზე C-დან.

ამასთან დაკავშირებით აუცილებელია აღინიშნოს **ლუზინ-პრივალოვის** შემდეგი (1925 წ.)

თეორემა 18.3 ([23], გვ. 292). არ არსებობს ერთეულოვან D წრეში ანალიზური (მერომორფულიც კი) ფუნქცია, რომლის **კუთხური** ზღვარი იქნება ∞ დადებითი ზომის რაიმე ქვესიმრავლეზე C-დან.

რადიალურ ზღვართან დაკავშირებით მართებულია, ისევ **ლუზინ-პრივალოვის** შემდეგი (1925 წ.)

თეორემა 18.4 ([23], გვ. 309, 316). არსებობს ერთეულოვან ღია D წრეში ანალიზური $\omega(z)$ ფუნქცია და 2π ზომის პირველი კატეგორიის $E\subset[0,2\pi]$ სიმრავლე ისეთები, რომ E სიმრავლის ყოველ x წერტილზე სრულდება რადიალური ტოლობა

$$\lim_{r\to 1-}\omega(re^{ix})=\infty. \tag{1}$$

ამიტომაც, ჩვენი უახლოესი საუბარი შეეხება რადიალურ ზღვარს.

ამ თემას აქვს ხანგრძლივი ისტორია და სათავეს იღებს ვაიერშტრასის კლასიკური თეორემიდან, რომლის თანახმად $[0,1]$ სეგმენტზე უწყვეტი ყოველი ფუნქციის თანაბრად მიახლოება შეიძლება პოლინომებით.

ვაიერშტრასის ეს თეორემა უსასრულო ინტერვალზე გაავრცელა კარლემანმა შემდეგნაირად.

თეორემა 18.5 (კარლემანი, 1927 წ., [35]). ვთქვათ $f(x)$ და $\varepsilon(x)>0$ ფუნქციები უწყვეტია $(-\infty,+\infty)$-ზე და $[0,+\infty)$-ზე შესაბამისად. მაშინ არსებობს $z=x+iy$ კომპლექსური ცვლადის მთელი $G(z)$ ფუნქცია ისეთი, რომ მისი $G(x)$ შეზღუდვა ნამდვილ $(-\infty,+\infty)$ ღერძზე აკმაყოფილებს პირობას

$$|G(x)-f(x)|<\varepsilon(|x|),\quad -\infty<x<+\infty. \tag{2}$$

ამ თეორემის განზოგადებაა შემდეგი

თეორემა 18.6 ([41]). ვთქვათ $E\subset[0,2\pi]$ ჩაკეტილი არსად მკვრივი სიმრავლეა, $f(z)$ კი $z=x+iy$ ცვლადის უწყვეტი კომპლექსური ფუნქციაა ღია წრეში $|z|<r$ $(0<r\le+\infty)$, ხოლო $\varepsilon(t)>0$ უწყვეტია მარჯვნიდან ღია $0\le t<r$ ინტერვალზე. მაშინ არსებობს $|z|<r$ წრეში ანალიზური $F(z)$ ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველ $x\in E$ წერტილზე ადგილი აქვს უტოლობას

$$|F(\rho e^{ix})-f(\rho e^{ix})|<\varepsilon(\rho), \tag{3}$$

როცა $0\le\rho<r$.

ამ თეორემის შემდეგი **გასრულება** ეკუთვნით **ბეიდქმილს და ზეიდელს** [34], რომლის კერძო შემთხვევაა **რუდინის** [42] შემდეგი

თეორემა 18.7 ([34], §3). ვთქვათ მოცემულია ერთეულოვან ღია D წრეში ნებისმიერი უწყვეტი კომპლექსური $g(z)$ ფუნქცია და F_σ ტიპის პირველი კატეგორიის $E\subset[0,2\pi]$ სიმრავლე, შესაძლოა 2π ზომის. მაშინ არსებობს D-ში ანალიზური $f(z)$ ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველ $x\in E$ წერტილზე სრულდება რადიალური ტოლობა

$$\lim_{r\to1-}[f(re^{ix})-g(re^{ix})]=0. \tag{4}$$

უკანასკნელი თეორემის მტკიცებიდან გამომდინარეობს

თეორემა 18.8 ([22], გვ. 138). D წრეში ნებისმიერი უწყვეტი კომპლექსური $g(z)$ ფუნქციისთვის და 2π-ზე ნაკლები დადებითი ყოველი η რიცხვისთვის არსებობს D წრეში ანალიზური $f(z)$ ფუნქცია და $[0,2\pi]$ სეგმენტზე არსად მკვრივი ჩაკეტილი e სიმრავლე ისეთები, რომ $2\pi-\eta<|e|<2\pi$ და e სიმრავლეზე **თანაბრად** სრულდება რადიალური ტოლობა

$$\lim_{r\to1-}[f(re^{ix})-g(re^{ix})]=0. \tag{5}$$

ზემოთ აღნიშნული 18.7. თეორემიდან მიიღება

თეორემა 18.9 ([34], გვ. 191; [22], გვ. 138). არსებობს ერთეულოვან ღია წრეში ანალიზური ისეთი $f(z) = u(z)+iv(z)$ ფუნქცია, რომ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე ადგილი აქვს რადიალურ ტოლობებს

$$\lim_{r\to 1-} u(re^{ix}) = 0, \quad \lim_{r\to 1-} v(re^{ix}) = +\infty. \tag{6}$$

დამტკიცება. P_n-ით აღვნიშნოთ $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე არსად მკვრივი სრულყოფილი სიმრავლე, რომლის ზომაა $2\pi - \frac{1}{n}$ ([1], გვ. 349). მაშინ სიმრავლე $E = \cup_{n=1}^{\infty} P_n$ არის F_σ ტიპის და პირველი კატეგორიის, რომლის ზომაა 2π. თუ 18.7 თეორემაში ავიღებთ $g(re^{ix}) = \frac{i}{1-r}$, მაშინ $\operatorname{Re} g(re^{ix}) = 0$ და $\operatorname{Im} g(re^{ix}) \to +\infty$, როცა $r \to 1$ და $x \in E$. აქედან, (4) ტოლობის ძალით მივიღებთ (6) ტოლობებს. თეორემა დამტკიცებულია.

უკანასკნელ თეორემაზე ზოგადია შემდეგი

თეორემა 18.10 ([34], თეორემა 7; [22], გვ. 141). ვთქვათ φ და ψ ნებისმიერი ზომადი ნამდვილი ფუნქციებია $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე. მაშინ არსებობს ერთეულოვან ღია D წრეში ანალიზური ისეთი $f = u+iv$ ფუნქცია, რომ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე სრულდება რადიალური ტოლობები:

$$\lim_{r\to 1-} u(re^{ix}) = \varphi(x), \quad \lim_{r\to 1-} v(re^{ix}) = \psi(x). \tag{7}$$

ცხადია, რომ თავი 1-დან §5-ის (5) და (6) ტოლობების მარჯვენა მხარეები წარმოადგენენ იმავე §5-დან (8) და (9) ტრიგონომეტრიულ მწკრივებთან ასოცირებულ (იხ. თავი 5, §2) მწკრივებს შესაბამისად. ამიტომ 18.10 თეორემა შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც (8) და (9) მწკრივების (A)-შეჯამებადობის შესახებ მტკიცება ანუ მართებულია

თეორემა 18.11. $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ზომადი ნებისმიერი ნამდვილი φ და ψ ფუნქციებისათვის არსებობს ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{8}$$

ისეთი, რომ თითქმის ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე (A)-შეჯამებადია: $\varphi(x)$-სკენ (8) მწკრივი, ხოლო $\psi(x)$-სკენ შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx - b_n \sin nx) \tag{9}$$

ანუ, ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\lim_{r\to 1-}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n\right]=\varphi(x), \tag{10}$$

$$\lim_{r\to 1-}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)r^n\right]=\psi(x). \tag{11}$$

შენიშვნა 18.12. ამ პარაგრაფის მასალა გვიჩვენებს, რომ

$$u(re^{ix})=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n \tag{12}$$

და

$$v(re^{ix})=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)r^n \tag{13}$$

ტოლობების ორივე მხარის მიმართ შეგვიძლია განვიხილოთ ზღვარი, როცა re^{ix} წერტილი ისწრაფვის e^{ix_0} წერტილისკენ რომელიმე აზრით: თავისუფლად, კუთხურად თუ რადიალურად.

ამასთან ერთად, $r=1$ მნიშვნელობის პირდაპირი ჩასმის მიმართ გამოუსადეგარია (12) და (13) ტოლობების მარცხენა მხარეები, ხოლო მათი მარჯვენა მხარეები მიიღებენ (8) და (9) ფორმებს შესაბამისად.

როგორც ვნახეთ, (8) და (9) მწკრივების მიმართ კი შეგვიძლია ვილაპარაკოთ კრებადობაზე ან შეჯამებადობაზე. ამიტომაა ეს მწკრივები უფრო მოხერხებული იმ ფუნქციების წარმოსადგენად, რომელთაც არ გააჩნიათ გამორჩეული დიფერენციალური თვისებები (იხ. ავტორისგან).

19 პუასონის ინტეგრალის წარმოებულის რადიალური ზღვარი

1. 2π პერიოდული და $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი f ფუნქციის ფურიეს

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

მწკრივს (ე.ი. a_n და b_n წარმოადგენენ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებს; იხ. თავი 2, §2, ფორმულები (2)) შეესაბამება მასთან ასოცირებული (იხ. §2) r-ის მიმართ ხარისხოვანი მწკრივი

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n, \tag{2}$$

რომელსაც ეწოდება (1) მწკრივისთვის შედგენილი **პუასონ-აბელის საშუალო** და აღინიშნება $f(r,x)$ სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$f(r,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n, \quad 0<r<1 \tag{3}$$

§11-დან ვიცით ტოლობაც

$$f(r,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)P(r,x-t)dt, \tag{4}$$

რომლის მარჯვენა მხარეს ეწოდება f ფუნქციის **პუასონის ინტეგრალი** (იხ. §9-ის დასასრული).

მაშასადამე, **პუასონ-აბელის $f(r,x)$ საშუალოსთვის** გვაქვს ინტეგრალური (4) წარმოდგენა და მწკრივით (3) წარმოდგენა.

აქამდე ჩვენ, კერძო $\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)$ წარმოებულს ვაკავშირებდით (4) ტოლობის მარჯვენა მხარის ინტეგრალის შესაბამის $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\partial}{\partial x}\times P(r,x-t)dt$ წარმოებულთან და ვადგენდით $\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)$-ის კავშირს f ფუნქციის f' წარმოებულთან.

მეორე მხრივ, კერძო $\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)$ წარმოებული შეიძლება დავაკავშიროთ (3) ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგომ მწკრივთანაც. მართლაც, გვაქვს ტოლობა

$$\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n\right]$$

ანუ

$$\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)=\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n. \tag{5}$$

რადგან ფურიეს a_n და b_n კოეფიციენტები შემოსაზღვრულია (იხ. თავი 3, §9) და ტრიგონომეტრიული სისტემაც შემოსაზღვრულია,

ამიტომ არსებობს ისეთი მუდმივი $M > 0$, რომ $|a_n \cos nx + b_n \sin nx| < M$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

ამრიგად, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)r^n$ მწკრივის **მაჟორანტი (მეტობითი)** მწკრივია $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, რომელიც და მისი ნებისმიერ რიცხვჯერ წევრობრივი გაწარმოებით მიღებული მწკრივებიც თანაბრად კრებადია ყოველ სეგმენტზე $[0, l] \subset [0, r)$, $l < r$. ამიტომ (5) ტოლობის მარჯვენა მხარის გაწარმოება შეგვიძლია მოვახდინოთ მწკრივის შიგნით, რაც მოგვცემს მწკრივს

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx)r^n. \tag{6}$$

მაგრამ ეს მწკრივი შეიძლება მოვიაზროთ ასეც: ჯერ წევრობრივ, ფორმალურად, გავაწარმოოთ (1) მწკრივი, რაც მოგვცემს $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nx - a_n \sin nx)$ მწკრივს და ამ უკანასკნელისთვის შევადგინოთ პუასონ-აბელის საშუალო, მივიღებთ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx)r^n. \tag{7}$$

რადგანაც (6) და (7) ერთიდაიგივეა, ამიტომ (1) მწკრივისთვის წევრობრივი წარმოებულის **პუასონ-აბელის საშუალო** და (1) მწკრივისთვის **პუასონ-აბელის საშუალოს** x-ით წარმოებული ერთიდაიგივეა.

მაშასადამე, f ფუნქციის პუასონის ინტეგრალის x-ით წარმოებულის შესახებ ყოველი მტკიცებულება ეკვივალენტურია f-ის ფურიეს მწკრივის წევრობრივი, ფორმალურად, გაწარმოებით მიღებული მწკრივის პუასონ-აბელის საშუალოს შესახებ მტკიცებულების.

ამიტომ, §16-ის (2) ტოლობა შეიძლება განხილულ იქნას როგორც $S[f]$ მწკრივის წევრობრივი გაწარმოებით მიღებული მწკრივისთვის პუასონ-აბელის საშუალოს თვისება: მისი რადიალური ზღვარი ტოლია $f'(x_0)$-ის, როცა $f'(x_0)$ სასრულია.

მაგრამ უკანასკნელი ფაქტისთვის აუცილებელი არ აღმოჩნდა $f'(x_0)$ წარმოებულის არსებობა.

ფატუმ დაადგინა, რომ ამისთვის საკმარისია სასრული სიმეტრიული $f^{(\prime)}(x_0)$ წარმოებულის არსებობა.

სიმეტრიული წარმოებულის შესახებ, იხ. თავი 4, §9.

2. ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 19.1 (ფატუ, [37]; [7], გვ. 161). ვთქვათ, 2π პერიოდულ და $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ჯამებად f ფუნქციას რომელიმე x_0 წერტილზე გააჩნია სასრული სიმეტრიული წარმოებული $f^{(\prime)}(x_0) \equiv l$. მაშინ,

პუასონის $f(r,x)$ ინტეგრალის კერძო $\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)$ წარმოებულს e^{ix_0} წერტილზე გააჩნია l-ის ტოლი რადიალური ზღვარი:

$$\lim_{r\to 1-}\frac{\partial}{\partial x}f(r,x_0)=l. \tag{8}$$

დამტკიცება. §14-ის (9) და (8) ტოლობების ძალით გვაქვს:

$$\pi\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\partial}{\partial x}P(r,x-t)dt=$$

$$=-\int\limits_{x+\pi}^{x-\pi}f(x-u)\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)du=\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{0}f(x-u)\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)du+\int\limits_{0}^{\pi}f(x-u)\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)du.$$

აქ პირველი ინტეგრალის მიმართ გამოვიყენოთ $\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)$ ფუნქციის კენტობა (იხ. §14-ის (5) ტოლობა), გვექნება

$$\int\limits_{-\pi}^{0}f(x-u)\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)du=\int\limits_{\pi}^{0}f(x+v)\Big[-\frac{\partial}{\partial v}P(r,v)\Big](-dv)=$$

$$=-\int\limits_{0}^{\pi}f(x+v)\frac{\partial}{\partial v}P(r,v)dv,$$

ამიტომ

$$\pi\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)=\int\limits_{0}^{\pi}f(x-u)\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)du-\int\limits_{0}^{\pi}f(x+u)\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)du$$

ანუ, გვაქვს

$$\frac{\partial}{\partial x}f(r,x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}[f(x+u)-f(x-u)]\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)du. \tag{9}$$

§14-დან (6) უტოლობის მიმართ თუ გამოვიყენებთ §10-ის (14) შეფასებას, მაშინ ყოველი $\delta > 0$ რიცხვისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\Big|\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)\Big| \leq \frac{4(1-r)}{\sin^4\delta}, \quad \text{როცა} \quad \delta \leq |u| \leq \pi. \tag{10}$$

ახლა (9) ინტეგრალი წარმოვიდგინოთ $I_1 = \int_0^\delta$ და $I_2 = \int_\delta^\pi$ ინტეგრალების ჯამად. (10) უტოლობის ძალით

$$|I_2| \leq \frac{8(1-r)}{\sin^4\delta}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt. \tag{11}$$

ხოლო

$$I_1 = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \frac{f(x+u)-f(x-u)}{2u}\cdot 2u\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)du =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta\Big[\frac{f(x+u)-f(x-u)}{2u}-l\Big]2u\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)du-$$

$$-\frac{l}{\pi}\int\limits_0^\delta 2u\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)du \equiv J_1+J_2.$$

რადგან (10) უტოლობა სრულდება ყველა $\delta > 0$ რიცხვისთვის, ამიტომ შეგვიძლია შესრულებულად ჩავთვალოთ შემდეგი უტოლობაც

$$|J_1| \leq \frac{1}{\pi}\cdot 2\delta\cdot\frac{4(1-r)}{\sin^4\delta}\cdot\varepsilon, \tag{12}$$

სადაც ნებისმიერად აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის გვაქვს

$$\Big|\frac{f(x+u)-f(x-u)}{2u}-l\Big| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad u\in(0,\delta). \tag{13}$$

ახლა განვიხილოთ J_2 ინტეგრალი, რომლის ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ:

$$-\frac{2l}{\pi}\int\limits_0^\delta u\frac{\partial}{\partial u}P(r,u)du = -\frac{2l}{\pi}u\cdot P(r,u)\Big|_{u=0}^{u=\delta}+$$

$$+\frac{2l}{\pi}\int\limits_0^\delta P(r,u)du = -\frac{2l}{\pi}P(r,\delta) + l\Big[\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\delta P(r,u)du\Big].$$

§10-დან (13) უტოლობის ძალით $P(r,\delta) \le \frac{1-r}{\sin^2\delta} \to 0$, როცა $r \to 1-$, ხოლო §10-ის უტოლობა (17)-ის თანახმად $\frac{2}{\pi}\int_0^\delta P(r,u)du \to 1$, როცა $r \to 1-$.

ტოლობა (4) გამომდინარეობს მიღებული შეფასებებიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

3. სასურველია 19.1 თეორემა ჩამოვაყალიბოთ მისი ეკვივალენტური სახით.

თეორემა 19.2 (ფატუ, [37]; [7], გვ. 161, 163). თუ 2π პერიოდულ და $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე ჯამებად f ფუნქციას რაიმე x_0 წერტილზე გააჩნია სასრული სიმეტრიული წარმოებული $f^{(\prime)}(x_0)$, კერძოდ, თუ მას გააჩნია სასრული ჩვეულებრივი წარმოებული $f'(x_0)$, მაშინ f ფუნქციის ფურიეს

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{14}$$

მწკრივის წევრობრივი გაწარმოებით მიღებული მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n\cos nx - a_n\sin nx) \tag{15}$$

არის (A)-შეჯამებადი x_0 წერტილზე $f^{(\prime)}(x_0)$ რიცხვისკენ ანუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{r\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty} nr^n(b_n\cos nx_0 - a_n\sin nx_0) = f^{(\prime)}(x_0). \tag{16}$$

შენიშვნა 19.3. ფატუს 19.1 თეორემის (და, აგრეთვე, მისი ეკვივალენტური 19.2 თეორემის) განზოგადება ცნობილია **ბორელის სიმეტრიული**

$$B_s' f(\theta_0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_0^h \frac{f(\theta_0+t) - f(\theta_0-t)}{2t}dt \tag{17}$$

წარმოებულისთვის ([39][6]). აქვე მტკიცდება, რომ ფატუს 19.1 თეორემას ადგილი არ აქვს აპროქსიმატული წარმოებულისთვის. შემდეგ ავტორს შემოაქვს $\alpha \geq 1$ რიგის აპროქსიმატული წარმოებულის ცნება $f'_\alpha(\theta_0)$ და ამბობს, რომ ფატუს 19.1 თეორემა ძალაშია, როცა $\alpha > 4$. მაგრამ შემდეგ გაირკვა ([45]), რომ აქ საჭიროა პირობა $\alpha > 5$.

20 ფურიეს ნამდვილი ფორმის მწკრივის შეჯამებადობა ლებეგის მეთოდით

A. ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივის შეჯამებადობა L და L^* მეთოდებით.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ტრიგონომეტრიული მწკრივი, საზოგადოდ არა ფურიეს მწკრივი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1}$$

1. შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა 20.1 ([12], გვ. 505; [7], გვ. 486). (1) მწკრივს ეწოდება ლებეგის მეთოდით შეჯამებადი, მოკლედ L-შეჯამებადი, რომელიმე x_0 წერტილზე რაიმე S რიცხვისკენ, თუ მწკრივი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0)\frac{\sin nh}{nh} \tag{2}$$

კრებადია ყველა h-ისთვის ღია რაიმე $(0, \eta)$ ინტერვალიდან[7] და ადგილი აქვს ტოლობას [8]

$$\lim_{h\to 0+}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0)\frac{\sin nh}{nh}\right] = S. \tag{3}$$

[6]**ბორელის წარმოებულია** $B'f(\theta_0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \frac{f(\theta_0+t)-f(\theta_0)}{t}dt$. ორივე შემთხვევაში ინტეგრალი გაგებულია $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^h$ აზრით.

[7]მწკრივი (2) არის h-ის ლუწი ფუნქცია და ამიტომ საკმარისია $(0, \eta)$ შემთხვევა.

[8]თვით $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx_0 + b_b \sin nx_0)$ მწკრივის კრებადობა არ მოითხოვება. სწორედ ასეთ შემთხვევასთან გვექნება საქმე ფურიეს მწკრივებისთვის.

ტოლობა (3) საშუალებას იძლევა შემოვიღოთ რაიმე რიცხვითი

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \tag{4}$$

მწკრივის L-შეჯამებადობა S რიცხვისკენ ტოლობით[9,10]

$$\lim_{h\to 0+} \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin nh}{nh} \right] = S. \tag{5}$$

შენიშვნა 20.2. მწკრივის შეჯამებადობის L მეთოდი არაა შედარებადი ამავე მწკრივის კრებადობასთან. კრებადობა ეკვივალენტურია L-შეჯამებადობის, თუ $n \cdot A_n \to 0$, როცა $n \to \infty$ (ფატუ, [7], გვ. 487; [12], გვ. 506).

2. თუკი (1) მწკრივის ფორმალურად წევრობრივი ინტეგრებით მიღებული მწკრივი[11]

$$\frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n \sin nx - b_n \cos nx) \tag{6}$$

კრებადია x_0 წერტილის მიდამოში რაიმე $l(x)$ ფუნქციისკენ, რომელსაც ეწოდება **(1) მწკრივის ლებეგის ფუნქცია**, და თუ x_0 წერტილზე არსებობს $l(x)$ ფუნქციის სასრული სიმეტრიული წარმოებული (იხ. §19) $l^{(\prime)}(x_0)$, მაშინ

$$l(x_0+h) - l(x_0-h) = a_0 h + 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0)\frac{\sin nh}{n} \tag{7}$$

და

$$\frac{l(x_0+h) - l(x_0-h)}{2h} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0)\frac{\sin nh}{nh} \tag{8}$$

ტოლობებიდან გამომდინარე, ტოლობა (3) მიიღებს სახეს

$$\lim_{h\to 0+} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0)\frac{\sin nh}{nh} \right] = l^{(\prime)}(x_0). \tag{9}$$

---

[9] მწკრივი (4) შეიძლება არ იყოს კრებადი.

[10] (1) და (4) მწკრივები "შეშფოთებულია" მათი n-ური წევრის გამრავლებით $\frac{\sin nh}{nh}$-ზე, რომლის ზღვარი $h=0$ წერტილზე არის 1 ყოველი ფიქსირებული ნატურალური n-ისთვის (ანალოგიური იხ. თავი V-დან §1-ში 1.8 შენიშვნა და §3-ში 3.5 შენიშვნა).

[11] ე.ი. (1) მწკრივი მიიღება (5) მწკრივისგან ფორმალურად წევრობრივი გაწარმოებით.

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (1) მწკრივი L შეჯამებადია x_0 წერტილზე რიცხვისკენ $l^{(\prime)}(x_0)$.

3. შესაძლებელია ლებეგის $l(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე გააჩნდეს ჩვეულებრივი

$$l'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}[l(x_0+2h)-l(x_0)] \tag{10}$$

წარმოებულიც კი. მაშინ ტოლობიდან

$$l(x_0+2h)-l(x_0)=$$

$$=a_0h+2\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n(x_0+h)+b_n\sin(nx_0+h)]\frac{\sin nh}{n} \tag{11}$$

გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n(x_0+h)+b_n\sin n(x_0+h)]\frac{\sin nh}{nh}\right\}=l'(x_0). \tag{12}$$

განსაზღვრა 20.3. (1) მწკრივს ვუწოდოთ ლებეგის **ინტენსიური მეთოდით** შეჯამებადი, მოკლედ L^*-შეჯამებადი, x_0 წერტილზე s რიცხვისკენ, როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n(x_0+h)+b_n\sin n(x_0+h)]\frac{\sin nh}{nh}\right\}=s. \tag{13}$$

(9) და (12) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

წინადადება 20.4. თუ (6) მწკრივის $l(x)$ ჯამს x_0 წერტილზე გააჩნია წარმოებული $l'(x_0)$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$l'(x_0)=\lim_{h\to}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0)\frac{\sin nh}{nh}\right] \tag{14}$$

და

$$l'(x_0)=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n(x_0+h)+b_n\sin n(x_0+h)\right]\frac{\sin nh}{nh}\right\}. \tag{15}$$

B. **ფურიეს ნამდვილი ფორმის მწკრივის შეჯამებადობა L და L^* მეთოდებით.** თავი 4-ის §15-ში დამტკიცებული ლებეგის 15.1

თეორემა გვეუბნება, რომ 2π პერიოდული და $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი ყოველი f ფუნქციის ფურიეს ნამდვილი ფორმის მწკრივის

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{16}$$

წევრობრივი ინტეგრება ნებისმიერ $[0,x] \subset (-\infty,+\infty)$ სეგმენტზე მართლზომიერია, თუნდაც (16) მწკრივი განშლადი იყოს ყველგან. ლებეგის ეს თეორემა, იქ დამტკიცებული (4) ტოლობიდან გამომდინარე, ასეთია:

$$\frac{1}{2}a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n \sin nx - b_n \cos nx) = \int_0^x f(t)dt - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}, \tag{17}$$

სადაც რიცხვითი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ კრებადია და

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\pi - t)dt. \tag{18}$$

(17) ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს **ლებეგის $l(x)$ ფუნქციას** (16) მწკრივისთვის და რადგან იგი ტოლია (17)-ის მარჯვენა მხარის, ამიტომ თითქმის ყველა $x_0 \in [-\pi,\pi]$ წერტილზე ადგილი აქვს ტოლობას $l'(x_0) = f(x_0)$.

ამგვარად, (14) და (15) ტოლობების მარცხენა მხარეში გვაქვს $f(x_0)$. მაშასადამე, მართებულია შემდეგი

თეორემა 20.5 (ლებეგი. [7], გვ. 486; [12], გვ. 506). ყოველი $f \in L[-\pi,\pi]$ ფუნქციისთვის მისი ფურიეს (16) მწკრივი L და L^* შეჯამებადია $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა $x_0 \in [-\pi,\pi]$ წერტილზე ანუ, ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$f(x_0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\frac{\sin nh}{nh}\right], \tag{19}$$

$$f(x_0) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos n(x_0+h) + b_n \sin n(x_0+h)]\frac{\sin nh}{nh}\right\}. \tag{20}$$

შენიშვნა 20.6. (19) და (20) ტოლობებს ადგილი აქვს f ფუნქციის ლებეგის x_0 წერტილებზე, კერძოდ, f-ის უწყვეტობის ყველა x_0 წერტილზე, თუკი f-ს გააჩნია უწყვეტობის წერტილი.

შენიშვნა 20.7. ცნობილია ისეთი უწყვეტი F ფუნქციის არსებობა—ფეიერის მაგალითი ([7], გვ. 132), რომლის ფურიეს $S[F]$ მწკრივი განშლადია ერთ x_0 წერტილზე მაინც. მაგრამ F-ის უწყვეტობის ყოველი წერტილი არის F-ისთვის ლებეგის წერტილი და შენიშვნა 20.6-ის ძალით უწყვეტობის x_0 წერტილზე $S[F]$ არის L და L^* მეთოდებით შეჯამებადი $F(x_0)$ მნიშვნელობისკენ. ამავე დროს, $S[F]$ განშლადია x_0 წერტილზე!

21 ექსპონენტური მწკრივის L და L^* შეჯამებადობა

A. ნამდვილი ფორმის ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

შეიძლება ჩაწერილ იქნას ექსპონენტური ფორმით (იხ. თავი 1, §4)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \tag{2}$$

სადაც $c_0=\frac{1}{2}a_0$ და $c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$, $c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$, როცა $n\geq 1$.

(1) ფორმიდან (2) ფორმაზე გადასვლას ზოგჯერ უწოდებენ "ტრიგონომეტრიული მწკრივის გაექსპონენტურებას". ასეთი გადასვლისას (1) მწკრივის n-რი კერძო

$$S_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos nx+b_k\sin kx),\quad S_0(x)=\frac{1}{2}a_0, \tag{3}$$

ჯამის ექსპონენტური ფორმაა

$$S_n(x)=\sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx},\quad n\geq 1,\quad S_0(x)=c_0. \tag{4}$$

ასეთ შემთხვევაში, ლებეგის თეორემას ფურიეს ექსპონენტური მწკრივის წევრობრივი ინტეგრების შესახებ აქვს სახე (იხ. თავი 4-დან 15.9 თეორემა).

თეორემა 21.1 (ლებეგი, 1902 წ.). 2π პერიოდული და $[0,2\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი ნებისმიერი f ფუნქციის ფურიეს ექსპონენტური

$$f\sim c_0+\sum_{|n|\geq 1} c_n e^{inx} \tag{5}$$

მწკრივის წევრობრივი ინტეგრება ნებისმიერ $[0,x]\subset(-\infty,+\infty)$ სეგმენტზე მართლზომიერია, თუნდაც (5) მწკრივი განშლადი იყოს ყველგან და ინტეგრების შედეგს აქვს სახე:

$$c_0x-i\sum_{|n|\geq 1}\frac{c_n}{n}e^{inx}=\int\limits_0^x f(t)dt-i\sum_{|n|\geq 1}\frac{c_n}{n}, \tag{6}$$

რომელშიც მწკრივი თანაბრად კრებადია ნებისმიერ $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$ სეგმენტზე და

$$(PV)\sum_{|n|\geq 1}\frac{c_n}{n}=-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}, \tag{7}$$

$$(PV)\sum_{|n|\geq 1}\frac{c_n}{n}=-i\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)(\pi-t)dt. \tag{8}$$

B. (6) ტოლობის მარჯვენა მხარე განსაზღვრულია ყველგან და, მაშასადამე, ყველგან განსაზღვრულია მისი მარცხენა მხარეც

$$L(x)\equiv c_0x-i\sum_{|n|\geq 1}\frac{c_n}{n}e^{inx}. \tag{9}$$

მეორე მხრივ, (9) ტოლობის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს (5) მწკრივისგან **ფორმალურად წევრობრივი ინტეგრებით** მიღებულ გამოსახულებას ანუ, (6) ტოლობის თანახმად, (9) ტოლობით ყველგან განსაზღვრული $L(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს, §20-ში მიღებული ტერმინის შესაბამისად, **ლებეგის ფუნქციას (5) მწკრივისთვის.** (6) და (9) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$L(x)=\int\limits_0^x f(t)dt-i\sum_{|n|\geq 1}\frac{c_n}{n}. \tag{10}$$

შემდეგ, (9) ტოლობიდან გამომდინარეობს ტოლობანი

$$L(x_0+h)-L(x_0-h)=2c_0h+2\sum_{|n|\geq 1}c_ne^{inx_0}\frac{\sin nh}{n}, \tag{11}$$

$$L(x_0+2h)-L(x_0)=2c_0h+2\sum_{|n|\geq 1}c_ne^{inx_0}e^{inh}\frac{\sin nh}{n}. \tag{12}$$

აქედან

$$\frac{L(x_0+h)-L(x_0-h)}{2h}=c_0+\sum_{|n|\geq 1}c_n e^{inx_0}\frac{\sin nh}{nh}, \tag{13}$$

$$\frac{L(x_0+2h)-L(x_0)}{2h}=c_0+\sum_{|n|\geq 1}c_n e^{inx_0}e^{inh}\frac{\sin nh}{nh}. \tag{14}$$

ამ ტოლობების მარცხენა მხარეთა ზღვარია $f(x_0)$, $h\to 0$, თითქმის ყველა x_0-ისთვის, თანახმად (10) ტოლობისა. ამრიგად, გვაქვს

თეორემა 21.2 (ლებეგი). 2π პერიოდული და $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი ყოველი f ფუნქციის ფურიეს ექსპონენტური (5) მწკრივი თითქმის ყველა $x_0\in[-\pi,\pi]$ წერტილზე შეჯამებადია L და L^* მეთოდებით $f(x_0)$ მნიშვნელობისკენ ანუ, ადგილი აქვს ტოლობებს

$$f(x_0)=\lim_{h\to 0}\left[c_0+\sum_{|n|\geq 1}c_n e^{inx_0}\frac{\sin nh}{nh}\right] \tag{15}$$

და

$$f(x_0)=\lim_{h\to 0}\left[c_0+\sum_{|n|\geq 1}c_n e^{inx_0}e^{inh}\frac{\sin nh}{nh}\right]. \tag{16}$$

22 რიმან-შვარცის მეორე წარმოებული

x წერტილის მიდამოში განსაზღვრული f ფუნქციის **სიმეტრიული წარმოებული** x წერტილზე, სიმბოლურად $f^{(\prime)}(x)$ ან $\Delta_1 f(x)$, ეწოდება ზღვარს

$$f^{(\prime)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}, \tag{1}$$

როცა ეს ზღვარი არსებობს და სასრულია.

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ჩვეულებრივი $f'(x)$ წარმოებულის არსებობა იწვევს მისივე ტოლი სიმეტრიული $f^{(\prime)}(x)$ წარმოებულის არსებობას (იხ. თავი 4, §9).

$f(x+h)-f(x-h)$ სხვაობას ეწოდება f ფუნქციის **სიმეტრიული** (ზოგჯერ პირველი სიმეტრიული) სხვაობა x წერტილზე და აღინიშნება $\Delta_h f(x)$ სიმბოლოთი.

ახლა განვიხილოთ $\Delta_h f(x)$ ფუნქციის სიმეტრიული სხვაობა იმავე x წერტილზე იგივე h-ისთვის, სიმბოლურად $\Delta_h^2 f(x)$, რომელსაც ეწოდება f ფუნქციის **სიმეტრიული მეორე სხვაობა** x წერტილზე.

რადგანაც

$$\Delta_h f(x+h) - \Delta_f(x-h) = [f(x+h+h) - f(x+h-h)] -$$
$$-[f(x-h+h) - f(x-h-h)] = f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x),$$

ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x). \tag{2}$$

განსაზღვრა 22.1 ([12], გვ. 44; [7], გვ. 185). x წერტილის მიდამოში განსაზღვრული F ფუნქციის **რიმან-შვარცის მეორე წარმოებული** x წერტილზე, სიმბოლურად $F^{('')}(x)$ ან $D_2F(x)$, ეწოდება ზღვარს

$$f^{('')}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}, \tag{3}$$

როცა ეს ზღვარი არსებობს და სასრულია.

წინადადება 22.2. თუ F ფუნქციას x წერტილზე გააჩნია **მეორე რიგის** ჩვეულებრივი $F''(x)$ წარმოებული, მაშინ F-ს იმავე x წერტილზე გააჩნია **რიმან-შვარცის მეორე წარმოებული** $F^{('')}$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$F^{('')}(x) = F''(x). \tag{4}$$

დამტკიცება. როგორც ვიცით, **მეორე რიგის** $F''(x)$ წარმოებული ეწოდება $F'(x)$ ფუნქციის წარმოებულს იმავე x წერტილზე: $F''(x) = (F')'(x)$.

თუ შემოვიღებთ h-ის ფუნქციას (x ფიქსირებულია) $\varphi(h) = F(x+h) + F(x-h)$, მაშინ გვექნება ტოლობა

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h^2}, \tag{5}$$

რომლის მარჯვენა მხარის მიმართ კოშის თეორემის (იხ. [2], გვ. 295) გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h^2} = \frac{\varphi'(\theta h)}{2\theta h}, \quad 0 < \theta < 1.$$

მაგრამ

$$\varphi'(h) = F'(x+h)\cdot 1 + F'(x-h)\cdot(-1) = F'(x+h) - F'(x-h).$$

ამიტომ

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}=\frac{F'(x+\theta h)-F'(x-\theta h)}{2\theta h}. \tag{6}$$

სიმეტრიული წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად (იხ. ტოლობა (1))

$$\lim_{h\to 0}\frac{F'(x+\theta h)-F'(x-\theta h)}{2\theta h}=(F')^{(\prime)}(x). \tag{7}$$

რადგან ჩვეულებრივი წარმოებულის არსებობა იწვევს მისივე ტოლი სიმეტრიული წარმოებულის არსებობას და, პირობის თანახმად, $(F')'(x)$ კი არსებობს, ამიტომ (7) ტოლობის მარჯვენა მხარე ტოლია $(F')'(x)=F''(x)$ რიცხვის. ამის გათვალისწინებით, (6) ტოლობიდან გამომდინარეობს $F^{(\prime\prime)}(x)=F''(x)$.

ამით წინადადების პირველი ნაწილი დამტკიცებულია, ხოლო მეორე ნაწილის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 22.3. ფუნქციისთვის

$$\varphi(x)=\begin{cases} x\sin^2\frac{1}{x}, & \text{როცა} \quad x\neq 0\\ 0, & \text{როცა} \quad x=0\end{cases}$$

გვაქვს $\varphi(h)+\varphi(-h)-2\varphi(0)=\varphi(h)-\varphi(h)-2\cdot 0=0$, ე.ი. $\varphi^{(\prime\prime)}(0)=0$. ამავე დროს, $\varphi'(0)$ არ არსებობს და მით უფრო არ არსებობს $\varphi''(0)$.

მაგალითი 22.4. $\psi(x)=\int_0^x t\sin\frac{1}{t}dt$. აქაც $\psi(h)+\psi(-h)-\psi(0)=\int_0^h t\sin\frac{1}{t}dt+\int_0^{-h} t\sin\frac{1}{t}dt-0=\int_0^h t\sin\frac{1}{t}dt-\int_0^h t\sin\frac{1}{t}dt=0$. ამიტომ $\psi^{(\prime\prime)}(0)=0$. ამასთან ერთად, როცა $x\neq 0$, მაშინ $\psi'(x)=x\sin\frac{1}{x}$ და $\psi''(0)$ არ არსებობს.

23 მწკრივის შეჯამებადობის რიმანის R^2 მეთოდი

1. რიმანის მიერ შესწავლილ მრავალ პრობლემათა შორისაა ტრიგონომეტრიული მწკრივით ფუნქციის წარმოდგენის პრობლემა. რიმანის თანამედროვენი დირიჰლე, ლიპშიცი და სხვანი იძიებდნენ ფუნქციის იმ საკმარის თვისებებს, რომელნიც უზრუნველყოფდნენ მის წარმოდგენას ტრიგონომეტრიული მწკრივით. რიმანი კი იკვლევდა ფუნქციის იმ აუცილებელ თვისებებს, რომელნიც გამოწვეული იქნებოდა მისი ტრიგონომეტრიული მწკრივით წარმოდგენისას ([11], გვ. 25-90; ჰენრიხ ვებერის მინიშნებებით რიმანის ამ შრომისადმი).

ამ პრობლემასთან დაკავშირებით რიმანიმ განიხილა ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

ერთადერთი მოთხოვნით $a_n\to 0$ და $b_n\to 0$, როცა $n\to\infty$ (თუმცა საკმარისია (a_n) და (b_n) მიმდევრობების შემოსაზღვრულობა).

რიმანიმ მოახდინა (1) მწკრივის ფორმალური წევრობრივი ინტეგრება ორჯერ და მიიღო ყველგან უწყვეტი ფუნქცია

$$F(x)=\frac{a_0}{4}x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{2}$$

რომლის **ფორმალურად** წევრობრივი ორჯერ გაწარმოებით მიიღება (1) მწკრივი. სწორედ ამას ნიშნავს **ფორმალური ინტეგრება**. F ფუნქციის ყველგან უწყვეტობა გამომდინარეობს (2) მწკრივის აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადობიდან.

(2) ტოლობით განსაზღვრულ F ფუნქციას ეწოდება **რიმანის ფუნქცია** (1) მწკრივისთვის ანდა, ზოგჯერ, **რიმანის (1) მწკრივთან ასოცირებული ფუნქცია**.

2. (2) ტოლობით განსაზღვრულ F ფუნქციასთან დავაკავშიროთ

$$G(x,h)=\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2} \tag{3}$$

ტოლობით განსაზღვრული $G(x,h)$ ფუნქცია, რომელიც (1) მწკრივს უკავშირდება ტოლობით:

$$G(x,h)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\frac{\sin^2 nh}{n^2h^2}. \tag{4}$$

უკანასკნელი ტოლობის დასამტკიცებლად უნდა გამოვთვალოთ (3) ტოლობის მარჯვენა მხარე (2) ტოლობით განსაზღვრული F ფუნქციისთვის და, ამავე დროს, ვისარგებლოთ ტოლობებით:

$$\cos n(x+2h)+\cos n(x-2h)-2\cos nx=-4\cos nx\sin^2 nh,$$
$$\sin n(x+2h)+\sin n(x-2h)-2\sin nx=-4\sin x\sin^2 nh.$$

ახლა შემოვიღოთ (1) მწკრივის რიმანის მეთოდით შეჯამებადობის ორი ურთიერთეკვივალენტური განსაზღვრა.

განსაზღვრა 23.1 ([12], გვ. 502; [7], გვ. 187). ტრიგონომეტრიულ (1) მწკრივს ეწოდება რიმანის R^2 მეთოდით შეჯამებადი $s(x)$-სკენ, როცა რიმანის F ფუნქცია აკმაყოფილებს ტოლობას

$$F^{('')}(x) = s(x). \tag{5}$$

განსაზღვრა 23.2 ([12], გვ. 502; [7], გვ. 187). ტრიგონომეტრიულ (1) მწკრივს ეწოდება რიმანის R^2 მეთოდით შეჯამებადი $s(x)$-სკენ, როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$s(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n nx)\Big(\frac{\sin nh}{nh}\Big)^2\right]. \tag{6}$$

ამ განსაზღვრათა ურთიერთეკვივალენტურობა გამომდინარეობს (3) და (4) ტოლობებიდან.

(6) ტოლობა საშუალებას იძლევა განვიხილოთ რიცხვითი მწკრივის R^2-შეჯამებადობის ცნება.

განსაზღვრა 23.3. რიცხვით $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ მწკრივს ეწოდება R^2-შეჯამებადი C რიცხვისკენ, როცა ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{h\to 0}\left[c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\Big(\frac{\sin nh}{nh}\Big)^2\right] = C. \tag{7}$$

შენიშვნა 23.4. (6) და (7) ტოლობებიდან ჩანს, რომ რაიმე მწკრივის R^2-შეჯამებადობის განხილვა ნიშნავს ამ მწკრივის n-რი წევრის გამრავლებას $\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$-ზე, რომლის ზღვარი h-ის მიმართ $h = 0$ წერტილზე ტოლია 1-ის ყოველი ფიქსირებული n-ისთვის. ამრიგად, R^2-შეჯამებადობა ნიშნავს მწკრივის წევრების "შეშფოთებას" $\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$ მამრავლებით.

შენიშვნა 23.5. ზოგიერთ საკითხთან დაკავშირებით განიხილება R^k-შეჯამებადობაც ($k = 1, 2, 3, \dots$), რაც ნიშნავს მწკრივის წევრების გამრავლებას $\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k$-ზე. ამ თვალსაზრისით, მწკრივის R^0-შეჯამებადობა ნიშნავს ამ მწკრივის კრებადობას. როცა $k = 1$, მაშინ გვაქვს მწკრივის შეჯამებადობის ლებეგის მეთოდი, რომელიც არ არის რეგულარული (იხ. 20 და 21 პარაგრაფები). საზოგადოდ, მწკრივის შეჯამებადობის R^k მეთოდი რეგულარულია, როცა $k > 1$.

24 შეჯამებადობის R^2 მეთოდის რეგულარულობა

მწკრივის შეჯამებადობის ყოველ მეთოდს წაეყენება ორი ძირითადი მოთხოვნა:

1) აჯამებს თუ არა ეს მეთოდი ყოველ კრებად მწკრივს ამ მწკრივის ჯამისკენ;

2) რამდენად ფართოა განშლად მწკრივთა ის კლასი, კერძოდ, შედის თუ არა ამ კლასში ფურიეს ყველა მწკრივი, რომელთაც აჯამებს განსახილველი მეთოდი.

პირველ კითხვას დადებითი პასუხი აქვე გაეცემა, ხოლო მეორეს კი-§26-ში.

თეორემა 24.1 (რიმანი, [11], გვ. 56-60[12]; [27], გვ. 242; [18], გვ. 290-291; [12], გვ. 502-503; [7], გვ. 188-189). მწკრივის შეჯამებადობის R^2 მეთოდი რეგულარულია, რაც ნიშნავს, რომ კრებად მწკრივს R^2 მეთოდი შეაჯამებს ანუ, რაც იგივეა, კრებადი მწკრივის

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = S \tag{1}$$

შესაბამისი **$\boldsymbol{R^2}$-საშუალო**

$$a_0 + a_1\Big(\frac{\sin h}{h}\Big)^2 + a_2\Big(\frac{\sin 2h}{2h}\Big)^2 + \cdots \equiv S(h) \tag{2}$$

კრებადია ყველა $h \neq 0$ მნიშვნელობისთვის და მის $S(h)$ ჯამს აქვს თვისება

$$\lim_{h\to 0} S(h) = S. \tag{3}$$

დამტკიცება. (1) მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს, რომ $|a_n| < M$ ყველა $n = 0, 1, 2, \ldots$ მნიშვნელობებისთვის (რადგანაც $a_n \to 0$, როცა $n \to \infty$), ე.ი. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|(\sin nh/nh)^2 < Mh^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ $< +\infty$ ყოველი $h \neq 0$ მნიშვნელობისთვის.

---

[12] აქ განხილულია ზოგადი შემთხვევაც $a_0 + a_1\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta} + a_2\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\cdot\frac{\sin 2\beta}{2\beta} + \cdots$, იმ პირობით, რომ α/β შეფარდება შემოსაზღვრულია. რიმანის ეს სტატია ძალზედ საინტერესოა იმითაც, რომ იქ ავტორი საუბრობს მომიჯნავე პრობლემებზე მომუშავე კოლეგების მიღწევებზე და უზუსტობებზეც, რაც დღევანდელ პრაქტიკაში მიუღებელია და ინტეგრალის ცნების ფორმირებისა და მისი გამოყენების შესახებ მათემატიკის მოსაზღვრე დარგებში. რიმანის ამ სტატიას ერთვის ჰენრიხ ვებერის შენიშვნები სტატიისადმი (გვ. 86-90.) ვებერმა გადაამუშავა რიმანის ლექციები მათემატიკურ ფიზიკაში და 1900-1901 წლებში გამოსცა "მათემატიკური ფიზიკის დიფერენციალური განტოლებების" სახელწოდებით.

(1) და (2) მწკრივების n-რი **ნაშთებისთვის**, შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \quad S_n(h) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k\Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2.$$

(1) მწკრივის კრებადობის გამო, ყოველი ε რიცხვისთვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი $n = n(\varepsilon)$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|A_k| < \varepsilon \quad \text{ყოველი} \quad k \geq n \quad \text{რიცხვისთვის.} \tag{4}$$

ამის შემდეგ, ეს $n = n(\varepsilon)$ რიცხვი აღარ შეიცვლება მთელი მსჯელობის განმავლობაში.

რადგან $a_k = A_k - A_{k+1}$, ამიტომ $S_n(h)$ ასეც ჩაიწერება

$$S_n(h) = \sum_{k=n}^{\infty}(A_k - A_{k+1})\Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2. \tag{5}$$

რადგან კრებადი მწკრივის წევრების დაჯგუფებით მიიღება იმავე ჯამისკენ კრებადი მწკრივი (იხ. [3], გვ. 15), ამიტომ (5) ტოლობა შეიძლება ასეც გადაიწეროს:

$$S_n(h) = A_n\Big(\frac{\sin nh}{nh}\Big)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k\Big[\Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 - \Big(\frac{\sin(k-1)h}{(k-1)h}\Big)^2\Big],$$

მაგრამ

$$\Big|\Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 - \Big(\frac{\sin(k-1)h}{(k-1)h}\Big)^2\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{(k-1)h}^{kh} \frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 dx\Big| \leq \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \Big|\frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\Big| dx.$$

ამიტომ

$$|S_n(h)| \leq |A_n| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k| \int\limits_{(k-1)h}^{kh} \Big|\frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin x}{2}\Big)^2\Big| dx.$$

აქედან, (4) უტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$|S_n(h)| \leq \varepsilon\Big[1 + \int\limits_{nh}^{+\infty} \Big|\frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\Big| dx\Big]. \tag{6}$$

ახლა დავადგინოთ სასრულობა ინტეგრალის

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \Big|\frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\Big| dx. \tag{7}$$

ტოლობიდან

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 = 2\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

ჩანს, რომ (7) ინტეგრალის არსებობისთვის აუცილებელი და საკმარისია, (7) ინტეგრალი არსებობდეს ნულის მიდამოში და $+\infty$-ის მიდამოში (სხვაგან ეს ინტეგრალი არსებობს).

როგორც ვიცით, არსებობს ისეთი $\delta > 0$, რომ $\sin \approx x$, როცა $0 < x < \delta$. ასეთი x-სთვის

$$\Big|2\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x - x}{x^2}\Big| \approx 2\Big|\frac{x(\cos x - 1)}{x^2}\Big| = 2\Big|\frac{-2\sin^2 x/2}{x}\Big| = 4\frac{x^2}{4x} = x,$$

ე.ი. ინტეგრალი $\int_0^\delta \Big|\frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\Big| dx < \delta^2$ და, მაშასადამე, არსებობს.

როცა $x \geq 1$, მაშინ

$$\Big|2\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\Big| \leq 2\frac{|sinx|}{x}\cdot\frac{x|\cos x| + |\sin x|}{x^2} \leq$$
$$\leq 2\frac{x+1}{x^3} \leq 2\frac{x+x}{x^3} = 4\frac{x}{x^3} = \frac{4}{x^2}.$$

ამიტომ

$$\int\limits_1^t \Big|\frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\Big| dx \leq 4\int\limits_1^t x^{-2}dx =$$
$$= -4\Big[\frac{1}{x}\Big]_1^t = -4\Big(\frac{1}{t} - 1\Big) = 4 - \frac{4}{t} \to 4, \quad \text{როცა} \quad t \to +\infty.$$

მაშასადამე, $\int_1^\infty \Big|\frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\Big| dx \leq 4$ და ამით დადგენილია (7) ინტეგრალის სასრულობა.

ახლა (6) უტოლობა მიიღებს სახეს

$$|S_n(h)| < \varepsilon(1 + I).$$

ადვილი შესამოწმებელია ტოლობა

$$S(h) - S = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \Big[\Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 - 1\Big] + S_n(h) - A_n,$$

საიდანაც

$$|S(h) - S| \le \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| \cdot \Big|\Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 - 1\Big| + (2 + I)\varepsilon.$$

ამასთან ერთად, ყოველი ფიქსირებული k-სთვის $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2 = 1$. ამიტომ ადრე აღებული ε-ისთვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$, რომ ყველა $|h| < \delta$ მნიშვნელობისთვის, სასრული რაოდენობის შესაკრებების მქონე ჯამი შეფასდება ასე:

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_k| \cdot \Big|\Big(\frac{\sin kh}{kh}\Big)^2 - 1\Big| < \varepsilon.$$

ამრიგად, $|S(h) - S| < (3 + I)\varepsilon$, როცა $|h| < \delta$. თეორემა დამტკიცებულია, საიდანაც გამომდინარეობს

რიმანის პირველი თეორემა 24.2 ([12], გვ. 502). თუ ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin x), \tag{8}$$

ნულისკენ კრებადი a_n და b_n კოეფიციენტებით, კრებადია რომელიმე x_0 წერტილზე $s(x_0)$ მნიშვნელობისკენ, მაშინ (8) მწკრივი R^2-შეჯამებადია იმავე x_0 წერტილზე იგივე $s(x_0)$ მნიშვნელობისკენ.

25 რიმანის ასოცირებული ფუნქციის გლუვობა

განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin x) \tag{1}$$

ნულისკენ კრებადი a_n და b_n კოეფიციენტებით და (1) მწკრივის შესაბამისი **რიმანის ფუნქციით** (იხ. §23):

$$F(x)=\frac{a_0}{4}x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{2}$$

ჩვენი მიზანია დავადგინოთ (2) ტოლობით განსაზღვრული F ფუნქციის გლუვობა (იხ. თავი 4, §9).

რიმანის მეორე თეორემა 25.1 ([11], გვ. 60; [27], გვ. 245; [28], გვ. 440; [12], გვ. 503). როცა (1) მწკრივის a_n და b_n კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ, მაშინ **რიმანის ასოცირებული Fფუნქცია გლუვია ყველა $x\in(-\infty,+\infty)$ წერტილზე** ანუ აკმაყოფილებს ურთიერთეკვივალენტურ ტოლობებს

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h}=0, \tag{3}$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{a_0}{2}h+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\frac{\sin^2 nh}{n^2h}\right]=0. \tag{4}$$

დამტკიცება. (3) და (4) ტოლობების ეკვივალენტურობა გამომდინარეობს ტოლობიდან (იხ. §23-ის (3) და (4) ტოლობანი)

$$\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h}=$$
$$=\frac{a_0}{2}h+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\frac{\sin^2 nh}{n^2h}. \tag{5}$$

ახლა დავადგინოთ (4) ტოლობის მართებულობა ყველა $x\in(-\infty,+\infty)$ წერტილზე, რაც, თავის მხრივ, ეკვივალენტურია ტოლობის $\left(\frac{a_0}{2}h\to 0, h\to 0\right)$.

$$\lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\frac{\sin^2 nh}{n^2h}=0. \tag{6}$$

თეორემის პირობით $a_n\to 0$ და $b_n\to 0$, როცა $n\to\infty$. ამიტომ არსებობს ისეთი მუდმივი $A>0$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|a_n|+|b_n|<A \quad (n=1,2,\dots). \tag{7}$$

ამასთან ერთად მართებულია უტოლობა

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n|, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad n = 1, 2, \dots . \quad (8)$$

(7) და (8) უტოლობებიდან ვღებულობთ:

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| < A, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad n = 1, 2, \dots . \quad (9)$$

ისევ პირობის $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, როცა $n \to \infty$, გამოყენებით და (8) უტოლობის გათვალისწინებით ვადგენთ, რომ ყოველ $\varepsilon > 0$ რიცხვს ეთანადება ისეთი $N = N(\varepsilon)$, რომ

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n > N \quad \text{და} \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (10)$$

ავიღოთ ნებისმიერად მცირე $h > 0$ და (6) ტოლობის მწკრივი დავშალოთ ასე:

$$\sum_{n=1}^{N} + \sum_{N<n\le 1/h} + \sum_{n>1/h} = S_1(h) + S_2(h) + S_3(h).$$

ცნობილი უტოლობის $|\sin t| \le |t|$ გამოყენებით გვაქვს

$$\sin^2 nh \le n^2 h^2. \quad (11)$$

$S_1(h)$ ჯამის მიმართ თუ გამოვიყენებთ (9) და (11) უტოლობებს, გვექნება:

$$|S_1(h)| < ANh. \quad (12)$$

რადგან $S_2(h)$ ჯამში $n > N$, ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ (10) უტოლობა და მასთან ერთად, ცხადია, (11) უტოლობაც. მივიღებთ შეფასებებს[13]:

$$|S_2(h)| \le \varepsilon h \sum_{N<n<1/h} \le \varepsilon h \cdot \left(\frac{1}{h} \cdot 1\right) = \varepsilon. \quad (13)$$

ახლა $S_3(h)$ ჯამში გამოვიყენოთ $\sin^2 nh \le 1$ უტოლობა და შეფასება (10), გვექნება:

$$|S_3(h)| \le \sum_{n>1/h} \varepsilon \frac{1}{n^2 h} = \frac{\varepsilon}{h} \sum_{n>1/h} \frac{1}{n^2}. \quad (14)$$

[13] აქ შესაკრებთა რაოდენობა არ აღემატება $\frac{1}{h}$-ს.

$\sum_{n>1/h} \frac{1}{n^2}$ მწკრივის ჯამის შესაფასებლად გამოვიყენოთ მაკლორენ-კოშის უტოლობები (იხ. [30], გვ. 286):

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} f(t)dt \tag{15}$$

და გვექნება

$$\sum_{n>\frac{1}{h}} \frac{1}{n^2} \leq \int_{\frac{1}{h}-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{\frac{1}{h}-1}^{+\infty} = \frac{1}{\frac{1}{h}-1} = \frac{h}{1-h}.$$

რადგან $h \to 0$, ამიტომ თავიდანვე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $h < \frac{1}{2}$ და $1-h > \frac{1}{2}$, ე.ი. $\frac{h}{1-h} < 2h$. ამგვარად, $\sum_{n>1/h} \frac{1}{n^2} < 2h$ და $|S_3(h)| \leq \frac{\varepsilon}{h} \cdot 2h = 2\varepsilon$.

მაშასადამე:

$$|S_1(h)| + |S_2(h)| + |S_3(h)| < ANh + \varepsilon + 2\varepsilon. \tag{16}$$

აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის განვიხილოთ რიცხვი $\delta = \frac{\varepsilon}{AN}$. მაშინ $ANh < \varepsilon$, როცა $0 < h < \delta$. ამგვარად, გვაქვს უტოლობა:

$$|S_1(h)| + S_2(h) + S_3(h)| < 4\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad 0 < h < \delta, \tag{17}$$

რაც ნიშნავს (6) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

26 ფურიეს მწკრივის შეჯამებადობა რიმანის R^2 მეთოდით

ჩვენ დამტკიცებული გვქონდა, რომ ჯამებადი f ფუნქციის $S[f]$ მწკრივი თითქმის ყველგან შეჯამებადია f-ის შესაბამისი მნიშვნელობისკენ: ჩეზაროს $(C,1)$ მეთოდით (იხ. თავი 5, §7) და ლებეგის L და L^* მეთოდებით (იხ. თავი 5, §20, §21).

ანალოგიურ ფაქტს შეჯამებადობის R^2 მეთოდისთვისაც დავადგენთ.

თეორემა 26.1 ([16], გვ. 235; [18], გვ. 292; [7], გვ. 190). 2π პერიოდული და $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე ჯამებადი ყოველი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

შეჯამებადია რიმანის R^2 მეთოდით $f(x)$ მნიშვნელობისკენ თითქმის ყველა $x \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე.

დამტკიცება. თავი 4-დან §15-ის ტოლობა (4)-ის ძალით, ანუ ლებეგის თეორემით ფურიეს მწკრივის წევრობრივი ინტეგრების მართლზომიერების შესახებ, გვაქვს ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$-ისთვის შესრულებული ტოლობა:

$$\int_0^x f(t)dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} - \frac{a_0}{2}x = \sum_{n=1} \frac{1}{n}(a_n \sin nx - b_n \cos nx). \tag{2}$$

თუ შემოვიღებთ ფუნქციას

$$\phi(x) = \int_0^x f(t)dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}, \tag{3}$$

მაშინ (2) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\phi(x) - \frac{a_0}{2}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n \sin nx - b_n \cos nx). \tag{4}$$

უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს ფურიეს მწკრივს ამავე ტოლობის მარცხენა $[\phi(x) - \frac{a_0}{2}x]$ მხარისთვის.

ლებეგის იმავე თეორემის თანახმად, მართებულია (4) ტოლობის წევრობრივი ინტეგრება და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_0^x \phi(t)dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} - \frac{a_0}{4}x^2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{5}$$

ამ ტოლობას მივცეთ სახე:

$$\int_0^x \phi(t)dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{a_0}{4}x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{6}$$

რომლის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს (1) მწკრივთან **ასოცირებულ რიმანის $\boldsymbol{F}$ ფუნქციას** (იხ. §23, ტოლობა (2)). ამრიგად,

$$F(x) = \int_0^x \phi(t)dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}. \tag{7}$$

თეორემის დასამტკიცებლად საჭიროა

$$F^{('')}(x) = f(x) \tag{8}$$

ტოლობის დადგენა (იხ. §23, ტოლობა (5)) თითქმის ყველა x-ისთვის $[-\pi, \pi]$-დან, სადაც $F^{('')}$ აღნიშნავს F ფუნქციის **რიმან-შვარცის მეორე წარმოებულს** (იხ. §22, ტოლობა (3)). უფრო მეტი, ახლავე დავამტკიცებთ ტოლობას

$$F''(x) = f(x) \tag{9}$$

თითქმის ყველა $x \in [-\pi, \pi]$-ისთვის.

მართლაც, ლებეგის თეორემის თანახმად, ცვლადსაზღვრიანი ინტეგრალის გაწარმოების შესახებ, ყველა x წერტილზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$F'(x) = \phi(x), \tag{10}$$

რადგანაც ϕ არის ყველგან უწყვეტი ფუნქცია და ამიტომ ყველა წერტილი მისი ლებეგის წერტილია.

მაგრამ, (3) ტოლობით მოცემულ ϕ ფუნქციას თითქმის ყველა წერტილზე გააჩნია წარმოებული ლებეგის იმავე თეორემის თანახმად, ე.ი. თითქმის ყველა x-ისთვის გვაქვს

$$\phi'(x) = f(x). \tag{11}$$

ახლა ტოლობა (8) გამომდინარეობს (9)-(11) ტოლობებიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

27 ფუნქციათა წარმოდგენის პრობლემა

აქამდე განხილულ საკითხთა უმრავლესობა ემსახურება მათემატიკური ანალიზის უმნიშვნელოვანეს მიზანს—ფუნქციათა წარმოდგენის პრობლემას.

მაგრამ ეს წინადადება საჭიროებს დაზუსტებას ორი მიმართულებით:

1) რა შინაარსი დევს სიტყვაში "წარმოდგენა";

2) რა საშუალებებით ხორციელდება წარმოდგენა.

საკმარისად კარგი თვისებების მქონე ჯამებადი ფუნქციები წარმოდგება თავისი ფურიეს მწკრივით წერტილოვანი კრებადობის თვალსაზრისით.

მაგრამ არის ჯამებადი ისეთი ფუნქციაც, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია ყველა წერტილზე—კოლმოგოროვის მაგალითი.

აქვე ისმის კითხვა: ნუთუ არ შეიძლება კოლმოგოროვის ჯამებადი $K(x)$ ფუნქციის წარმოდგენა, რაიმე აზრით, თავისი ფურიეს $S[K]$ მწკრივით?

ამ კითხვაზე პასუხს, კერძო სახით, შეიცავს ფურიეს მწკრივის სხვადასხვა მეთოდით შეჯამებადობა, რომელთაგან უმნიშვნელოვანესია: **ჩეზარო-ფეიერის** $(C, 1)$ მეთოდი, **პუასონ-აბელის** (A) მეთოდი და **რიმანის R^2 მეთოდი.**

ჩვენ ვნახეთ, რომ თითოეული ამ მეთოდით შეიძლება მიღებულ იქნას ნებისმიერი ჯამებადი ფუნქციის მნიშვნელობანი თითქმის ყველა წერტილზე (იხ. თავი 5-ის §17 და §26).

1. არაჯამებადი, მაგრამ თითქმის ყველგან სასრული ფუნქციებისთვის ადგილი აქვს შემდეგ თეორემებს.

§18-ში დამტკიცებული ლუზინის $18.1'$ თეორემის სრულყოფაა შემდეგი, აგრეთვე ლუზინის

თეორემა 27.1 (ლუზინი, [16], გვ. 236). ზომადი და თითქმის ყველგან $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე სასრული f ფუნქციისთვის არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელიც თითქმის ყველგან $f(x)$ მნიშვნელობისკენ შეჯამებადია, როგორც პუასონ-აბელის (A) მეთოდით, ისე რიმანის R^2 მეთოდით.

თეორემა 27.2. [14] ([24], გვ. 324) ზომადი და თითქმის ყველგან $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე **სასრული** f ფუნქციისთვის არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელიც თითქმის ყველა $x \in [-\pi, \pi]$-ისთვის $f(x)$ მნიშვნელობისკენ შეჯამებადია რიმანის, პუასონ-აბელის და (C, k) მეთოდებით $k > 1$.

მაგრამ ამ მეთოდთა განსხვავება თავს იჩენს მაშინ, როცა განიხილება დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე $+\infty$ ან $-\infty$ მნიშვნელობების მქონე ფუნქციების წარმოდგენის საკითხი.

ასეთი ფუნქციების წარმოდგენის საკითხს წარმატებით წყვეტს პუასონ-აბელის (A) საშუალოები (იხ. თავი 5, §18, თეორემა 18. 11).

რიმანის R^2 მეთოდით კი შეუძლებელია ისეთი ფუნქციის წარმოდგენა, რომელიც უსასრულობა ხდება დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე ([7], გვ. 865).

ეს გამოწვეულია იმით, რომ შეჯამებადობის R^2 მეთოდი დაკავშირებულია წარმოებულთან და ლუზინის თეორემის თანახმად, წარმოებული არ შეიძლება იყოს $\pm\infty$ დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე ([16], გვ. 285).

[14][7]-ში გვ. 852-ზე აღნიშნული $(C, 1)$-ის ნაცვლად უნდა იყოს (C, k), $k > 1$.

აქვე უნდა აღინიშნოს "უცნაური" მოვლენა: კოლმოგოროვის $K(x)$ ფუნქციისკენ არ იკრიბება მისი ფურიეს $S[K]$ მწკრივი, მაგრამ არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელიც თითქმის ყველა x-ისთვის კრებადია $K(x)$ მნიშვნელობისკენ. უფრო მეტი, მართებულია მენშოვის

თეორემა 27.3 (მენშოვი, [7], გვ. 852). ზომადი და თითქმის ყველგან $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე **სასრული** f ფუნქციისთვის არსებობს ისეთი ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელიც თითქმის ყველა $x \in [-\pi, \pi]$ წერტილზე **კრებადია** $f(x)$ მნიშვნელობისკენ.

2. თავი 5-დან §18-ის თეორემა 18.10 გვეუბნება, რომ ნებისმიერი ორი ზომადი φ და ψ ფუნქციისთვის, შესაძლოა $\pm\infty$ მნიშვნელობის მქონენი დადებითი ზომის სიმრავლეებზე, არსებობს ერთეულოვან ღია D წრეში ანალიზური $f = u + iv$ ფუნქცია, რომლის ნამდვილი u და წარმოსახვითი v ჰარმონიული ფუნქციების რადიალური ზღვარი თითქმის ყველგან ემთხვევა φ და ψ ფუნქციების მნიშვნელობებს.

აქ ხაზი უნდა გაესვას იმას, რომ φ და ψ ფუნქციებს შორის რაიმე **კავშირი არ არსებობს**. ამავე დროს, u და v ჰარმონიული ფუნქციები, როგორც ანალიზური ფუნქციის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, დაკავშირებული არიან ერთიმეორესთან **კოში-რიმანის** პირობებით $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$!

ამგვარად, ორ ნებისმიერ ზომად φ და ψ ფუნქციას იძლევა ორი ურთიერთშეუღლებული ჰარმონიული ფუნქციის (u, v) წყვილის რადიალური ზღვარი

ამ ფაქტის განხორციელება შეიძლება ერთი ჰარმონიული ფუნქციით, თუ გამოვიყენებთ ამ ფუნქციის კერძო წარმოებულებს.

თეორემა 27.4. $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე ზომადი ორი ნებისმიერი φ და ψ ფუნქციისთვის, შესაძლოა $\pm\infty$ მნიშვნელობების მქონენი დადებითი ზომის სიმრავლეებზე, არსებობს ერთეულოვან ღია D წრეში ჰარმონიული $u(z)$ ფუნქცია ისეთი, რომ თითქმის ყველა θ-სთვის $[-\pi, \pi]$-დან ადგილი აქვს რადიალურ ტოლობებს:

$$\lim_{r\to 1} \frac{\partial u}{\partial x}(re^{i\theta}) = \varphi(\theta), \quad \lim_{r\to 1} \frac{\partial u}{\partial y}(re^{i\theta}) = \psi(\theta), \quad x + iy = z.$$

დამტკიცება. 18.10 თეორემის ძალით, φ და $-\psi$ ფუნქციებისთვის არსებობს ანალიზური $f(z)$, $|z| < 1$, ფუნქცია ისეთი, რომ თითქმის ყველა θ-სთვის $[-\pi, \pi]$-დან ადგილი აქვს რადიალურ ტოლობას:

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = \varphi(\theta) - i\psi(\theta).$$

ახლა განვიხილოთ f ფუნქციის პირველადი ფუნქცია $F(z) = u(z) + iv(z)$. მაშინ $u'_x - iu'_y = u'_x + iv'_x = (u + iv)'_x = F'(z) = f(x) \to \varphi(\theta) - i\psi(\theta)$, როცა $r \to 1$. ე.ი. $u'_x \to \varphi(\theta)$ და $u'_y \to \psi(\theta)$, როცა $r \to 1$. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 27.5. 18.10 თეორემაში მითითებული $f(z)$ ფუნქცია შეიძლება დავუქვემდებაროთ პირობას $|f(z)| < \mu(|z|)$, სადაც $[0, 1)$ მარჯვნიდან ღია ინტერვალზე მოცემულ ნამდვილ $\mu(t)$ ფუნქციას გააჩნია თვისებები $0 < \mu(t) \uparrow +\infty$, როცა $t \to 1$ ([14]).

3. მენშოვის 27.3 თეორემით დადგინდა, ზომადი და თითქმის ყველგან **სასრული** ფუნქციის წარმოდგენის შესაძლებლობა თითქმის ყველგან კრებადი ტრიგონომეტრიული მწკრივით.

თავი 5-ის 8.3 წინადადებიდან ვიცით, რომ არ არსებობს ფურიეს ისეთი მწკრივი, რომლის კერძო ჯამების ზღვარი იქნება $+\infty$ ან $-\infty$ დადებითი ზომის რაიმე სიმრავლეზე.

ამავე დროს, დღემდე პასუხგაუცემელია კითხვა: არსებობს თუ არა ერთი ტრიგონომეტრიული მწკრივი მაინც, რომლის კერძო ჯამების ზღვარი იქნება $+\infty$ ან $-\infty$ დადებითი ზომის სიმრავლეზე?

ამგვარად, ჯერჯერობით ვერ ხერხდება ასეთი ფუნქციების წარმოდგენა ამგვარი აზრით უსასრულობისკენ კრებადი ტრიგონომეტრიული მწკრივებით. ამ ამოცანის გადაწყვეტაში ვერ დაგვეხმარება ის ფაქტი, რომ არ არსებობს $+\infty$-სკენ ან $-\infty$-სკენ R^2 მეთოდით შეჯამებადი ტრიგონომეტრიული მწკრივი ([7], გვ. 865). ვერდახმარების მიზეზია ის, რომ რიმანის R^2 მეთოდი რეგულარული კია, მაგრამ **არაა სავსებით რეგულარული**, ე.ი. ვერ აჯამებს უსასრულობისკენ კრებად მწკრივს.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 27.6 (მენშოვი, [7], გვ. 876). $[-\pi, \pi]$-ზე ზომადი ყოველი f ფუნქციისთვის, შესაძლოა $\pm\infty$-ს ტოლი დადებითი ზომის სიმრავლეებზე, არსებობს ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

რომელიც ზომით კრებადია f-ისკენ $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

ეს ნიშნავს, რომ (1) მწკრივის კერძო $S_n(x)$ ჯამებს შეიძლება მიეცეს შემდეგი სახე: $S_n(x) = g_n(x) + \alpha_n(x)$, სადაც $\lim_{n\to\infty} g_n(x) =$

$f(x)$ თითქმის ყველგან $[-\pi,\pi]$-ზე და α_n მიმდევრობა ზომით კრებადია ნულისკენ $[-\pi,\pi]$-ზე ანუ, რაც იგივეა, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ნულისკენ ისწრაფვის ზომა იმ E_n სიმრავლეებისა, რომლებზეც სრულდება უტოლობა $|\alpha_n(x)| \geq \varepsilon$.

28 ტრიგონომეტრიული მწკრივის კერძო ჯამების ერთი თვისების შესახებ

განვიხილოთ რაიმე ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

და $(-\infty,+\infty)$-ზე განსაზღვრული მისი კერძო ჯამები

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad S_0(x) = \frac{a_0}{2}. \tag{2}$$

ლემა 28.1. თუ $(S_n(x))_{n=0}^{\infty}$, $x \in (-\infty,+\infty)$, მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია **ქვემოდან** სასრული c რიცხვით, ე.ი. ადგილი აქვს უტოლობებს

$$c \leq S_n(x) \leq +\infty, \quad x \in (-\infty,+\infty), \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{3}$$

მაშინ ყოველი ზომადი და სასრული ზომის მქონე $E \subset (-\infty,+\infty)$ სიმრავლისთვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$c|E| \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E S_n(x)dx. \tag{4}$$

დამტკიცება. ფატუს ლემის თანახმად, ადგილი აქვს უტოლობას[15]

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} S_n(x)dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E S_n(x)dx. \tag{5}$$

[15] ფატუს ლემას აყალიბებენ ასე ([1], გვ. 466): სასრული ზომის E სიმრავლეზე თუ მოცემულია არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციების $(u_n(x))_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობა, ე.ი. თუ $0 \leq u_n(x) \leq +\infty$, როცა $x \in E$ და $n = 0,1,2,\dots$, მაშინ ადგილი აქვს **ფატუს უტოლობას**

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} u_n(x)dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E u_n(x)dx. \tag{6}$$

მაგრამ $\underline{\lim}_{n\to\infty} S_n(x) \geq c$ და ამიტომ $\int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} S_n(x)dx \geq \int_E cdx = c|E|$, ე.ი. ადგილი აქვს (4) უტოლობას.

ლემა 28.2. თუ $(S_n(x))_{n=0}^{\infty}$, $x \in (-\infty, \infty)$, მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია **ზემოდან** სასრული d რიცხვით, ე.ი. თუ $-\infty \leq S_n(x) \leq d$, მაშინ

$$d|E| \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_E S_n(x)dx. \tag{10}$$

დამტკიცება. ისევ **ფატუს** ლემით (იხ. [9], გვ. 188)

$$\int_E \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n(x)dx \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_E S_n(x)dx, \tag{11}$$

მაგრამ $\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n(x) \leq d$, ე.ი. ადგილი აქვს (10) უტოლობას.

შედეგი 28.3. თუ $(S_n(x))$, $x \in (-\infty, +\infty)$, მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია და $L \leq S_n(x) \leq M$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $n = 0, 1, \ldots,$ მაშინ

$$L|E| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E S_n(x)dx, \tag{12}$$

$$M|E| \geq \overline{\lim} \int_E S_n(x)dx. \tag{13}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (6)-დან გამომდინარეობს (5). მართლაც, (3)-დან გვაქვს $0 \leq S_n(x) - c \leq +\infty$ და (6)-ის ძალით

$$\int_E \underline{\lim}_{n\to\infty}(S_n(x) - c)dx \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E (S_n(x) - c)dx. \tag{7}$$

მაგრამ, ცნობილია, რომ ([იხ. [5], გვ. 146])

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n, \tag{8}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n, \tag{9}$$

როცა არსებობს $\lim_{n\to\infty} v_n$. ამის გათვალისწინებით (7)-დან მივიღებთ

$$\int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} S_n(x)dx - c|E| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E S_n(x)dx - c|E|,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (5).

თეორემა 28.4. თუ $(S_n(x))_{n=0}^{\infty}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია და ნულისკენ კრებადი ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \int_E S_n(x)dx = 0. \tag{14}$$

დამტკიცება. (5) და (11) უტოლობებიდან შესაბამისად გვაქვს

$$0 \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E S_n(x)dx, \tag{15}$$

$$0 \ge \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_E S_n(x)dx. \tag{16}$$

აქედან, უტოლობის $\underline{\lim}_{n\to\infty} l_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} l_n$, ძალით გამომდინარეობს უტოლობანი:

$$0 \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E S_n(x)dx \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_E S_n(x)dx \le 0$$

ანუ, ადგილი აქვს (14) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 28.5. თეორემა 28.4-ის პირობებში ადგილი აქვს ტოლობასაც

$$\lim_{n\to\infty} \int_E S_n(x)\cos kxdx = 0 \tag{17}$$

ყოველი ფიქსირებული $k = 0, 1, 2, \dots$ რიცხვისთვის.

თეორემა 28.6. თუ (1) ტრიგონომეტრიული მწკრივი ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე კრებადია ნულისკენ და ამ მწკრივის კერძო ჯამების $(S_n(x))_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია, მაშინ (1) მწკრივის ყველა კოეფიციენტი ნულია:

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots; \quad b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{18}$$

დამტკიცება. მოცემულობით, ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0. \tag{19}$$

ავიღოთ ნებისმიერი n და მასზე მეტი ნებისმიერი N, მაშინ გვექნება ტოლობა (იხ. თავი 1, §3)

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) \cos nx dx, \quad N > n. \tag{20}$$

რადგან a_n არაა დამოკიდებული N-ზე და (20) ტოლობას ადგილი აქვს ყველა $N > n$-ზე რიცხვისთვის, ამიტომ (20) ტოლობა ასეც ჩაიწერება

$$\pi a_n = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(x) \cos nx dx. \tag{21}$$

ახლა, (17) ტოლობის ძალით გვაქვს $a_n = 0$. ასევე დამტკიცდება $b_n = 0$.

დამტკიცებული 28.6 თეორემიდან გამომდინარეობს

თეორემა 28.7. თუ ორი ტრიგონომეტრიული მწკრივი ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე კრებადია ერთიდაიგივე სასრული $s(x)$ მნიშვნელობისკენ და ორივე ამ მწკრივს გააჩნია ერთობლივ შემოსაზღვრული კერძო ჯამები, მაშინ ამ მწკრივებში ტოლინდექსიანი კოეფიციენტები ტოლია ანუ, რაც იგივეა, ეს ორი მწკრივი იგივურია.

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ მწკრივების წევრობრივი სხვაობით მიღებული მწკრივი კრებადია ნულისკენ და ტოლინდექსიანი კერძო ჯამების სხვაობაც ერთობლივ შემოსაზღვრულია. ამიტომ, 28.6 თეორემის ძალით, სხვაობა-მწკრივის ყველა კოეფიციენტი ნულია ანუ, რაც იგივეა, ამ მწკრივებს გააჩნიათ ერთიდაიგივე კოეფიციენტები. თეორემა დამტკიცებულია.

29 რიმან-შვარცის მეორე წარმოებულის ერთი თვისების შესახებ

$x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილის მიდამოში განსაზღვრული F ფუნქციისთვის რიმან-შვარცის **მეორე** წარმოებული x წერტილზე, სიმბოლურად $F^{('')}(x)$, ეწოდება შემდეგ ზღვარს, როცა ის არსებობს და სასრულია (იხ. §22, ტოლობა (3)),

$$F^{('')}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}. \tag{1}$$

იქვე დადგენილია, რომ რიმან-შვარცის მეორე $F^{('')}(x)$ წარმოებული წარმოადგენს F ფუნქციის **მეორე რიგის** ჩვეულებრივი $F''(x)$ წარმოებულის განზოგადებას იმ აზრით, რომ $F''(x)$-ის არსებობა იწვევს $F^{('')}(x)$-ის არსებობას და ტოლობას $F^{('')}(x) = F''(x)$.

რიმან-შვარცის მეორე $F^{('')}(x)$ წარმოებული რომ მართლაც ჩვეულებრივი მეორე რიგის $F''(x)$ წარმოებულის განზოგადებაა, გამომდინარეობს იქიდან, რომ არსებობენ ფუნქციები, რომელთაც გააჩნიათ რიმან-შვარცის მეორე წარმოებული, მაგრამ არ გააჩნიათ ჩვეულებრივი მეორე რიგის წარმოებული (იხ. §22, მაგალითები 22.3 და 22.4).

მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ვიცით, რომ რაიმე ინტერვალზე ნულის ტოლი მეორე რიგის წარმოებულის მქონე f ფუნქცია წრფივია ამ ინტერვალზე ანუ, რაც იგივეა, მას აქვს $f(x) = Ax + B$ სახე, სადაც A და B მუდმივებია.

ახლა ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ეს თვისება გააჩნია რიმან-შვარცის მეორე წარმოებულსაც ანუ, რაც იგივეა, მართებულია შემდეგი

თეორემა 29.1 (შვარცი, 1890 წ.). თუ F ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და მისი რიმან-შვარცის $F^{('')}(x)$ მეორე წარმოებული კი ნულია (a, b) ინტერვალზე, მაშინ F ფუნქცია წრფივია $[a, b]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია

$$\varphi(x) = F(x) - F(a) - \frac{x-a}{b-a}[F(b) - F(a)]. \tag{2}$$

ცხადია ტოლობები $\varphi(a) = 0$ და $\varphi(b) = 0$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $\varphi(x) = 0$ ყველა x-ისთვისაც, სადაც $x < x < b$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, მაგალითად $\varphi(c) > 0$, სადაც $a < c < b$. მაშინ განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი მეორე ფუნქცია

$$\psi(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2}\varepsilon(x-a)(b-x), \tag{3}$$

სადაც $\varepsilon > 0$ რიცხვი იმდენად მცირეა, რომ $\psi(c) = \varphi(c) - \frac{\varepsilon}{2}(c-a)(b-c) > 0$.

ცხადია, აგრეთვე, რომ $\psi(a) = \varphi(a) = 0$ და $\psi(b) = \varphi(b) = 0$.

ψ ფუნქციის უწყვეტობის გამო $[a, b]$ სეგმენტზე, მისი ნულობის გამო ამ სეგმენტის ბოლოებზე, ხოლო მისი დადებითობის გამო (a, b)

ინტერვალის შიგა c წერტილზე, ψ ფუნქციას ექნება მაქსიმუმის შიგა η წერტილი, $a < \eta < b$.

ამიტომ საკმარისად მცირე დადებითი h-ისთვის შესრულდება უტოლობა

$$\psi(\eta + h) + \psi(\eta - h) - 2\psi(\eta) \leq 0. \tag{4}$$

მეორე მხრივ, ადვილად ვრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის სისწორეში

$$\frac{\psi(\eta + h) + \psi(\eta - h) - 2\psi(\eta)}{h^2} = \frac{F(\eta + h) + F(\eta - h) - 2F(\eta)}{h^2} + \varepsilon. \tag{5}$$

მოცემულობის ძალით $F^{('')}(\eta) = 0$ და ამიტომ (5) ტოლობის მარჯვენა მხარის ზღვარია ε, როცა $h \to 0$. ამრიგად, ამავე ტოლობის მარცხენა მხარის ზღვარიც დადებითი ε რიცხვია, რაც ეწინააღმდეგება (4) უტოლობას.

ანალოგიურ წინააღმდეგობას მივიღებთ იმის დაშვებით, რომ $\varphi(d) < 0$ რომელიმე d წერტილზე, $a < d < b$.

მაშასადამე, $\varphi(x) = 0$ ყველა $x \in [a, b]$ წერტილზე. ეს კი, (2) ტოლობის ძალით, ნიშნავს ტოლობას

$$F(x) = F(a) + \frac{x - a}{b - a}[F(b) - F(a)],$$

რაც ადასტურებს F ფუნქციის წრფივობას $[a, b]$ სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

30 ტრიგონომეტრიული მწკრივით ფუნქციის წარმოდგენის ერთადერთობა

აქამდის ჩვენ, 2π პერიოდულ და პერიოდზე ჯამებად ნებისმიერ f ფუნქციას ვაკავშირებდით მისთვის შედგენილ ფურიეს მწკრივთან და ეს დაკავშირება გამოიხატება იმით, რომ ფურიეს ამ ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტები გამოთვლილია f ფუნქციის მეშვეობით—ფურიეს ფორმულებით (იხ. თავი 2, §1).

განხილული გვქონდა f ფუნქციის ფურიეს $S[f]$ მწკრივის f-სკენ როგორც კრებადობის, ისე სხვადასხვა მეთოდით შეჯამებადობის საკითხი.

ბუნებრივად ჩნდება კითხვა: მოცემული ფუნქცია რამდენი სხვადასხვა ტრიგონომეტრიული მწკრივით შეიძლება წარმოდგეს?

აქ მნიშვნელოვანია, თუ რა იგულისხმება სიტყვა "წარმოდგენა" -ში.

1. ახლა ჩვენ განვიხილავთ იმ შემთხვევას, როცა ტრიგონომეტრიული მწკრივით ფუნქციის წარმოდგენაში იგულისხმება ამ მწკრივის ყველგან კრებადობა აღებული ფუნქციისკენ.

ამ მიზნით, ვისარგებლებთ მწკრივის შეჯამებადობის რიმანის R^2 მეთოდით (იხ. 23, 24, 26 პარაგრაფები) და პასუხს გავცემთ კითხვას: არსებობს თუ არა ორი სხვადასხვა ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომლებიც კრებადი იქნებიან ყველა წერტილზე ერთიდაიგივე ფუნქციისკენ?

უარყოფით პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა ფუნდამენტური მნიშვნელობის შემდეგი

თეორემა 30.1 (გ. კანტორი, 1872 წ.). თუ ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1)$$

კრებადია ნულისკენ ყველა $x\in[0,2\pi]$ წერტილზე, მაშინ (1) მწკრივის ყველა კოეფიციენტი ნულია: $a_n=0$, როცა $n=0,1,2,\ldots$ და $b_n=0$, როცა $n=1,2,\ldots$.

დამტკიცება. კანტორ-ლებეგის თეორემის ძალით $a_n\to 0$ და $b_n\to 0$, როცა $n\to\infty$ (იხ. თავი 4, §2). ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია (1) მწკრივისთვის ავაგოთ **რიმანის ასოცირებული** ფუნქცია (იხ. თავი 4, §25)

$$F(x)=\frac{a_0}{4}x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[a_n\cos nx+b_n\sin nx], \qquad (2)$$

რომელიც უწყვეტია $(-\infty,+\infty)$ ღერძზე.

რიმანის პირველი თეორემის თანახმად, (1) მწკრივი R^2 მეთოდით ნულისკენ შეჯამებადია ყველა $x\in[0,2\pi]$ წერტილზე (იხ. თავი 5, §24). ეს ნიშნავს ტოლობას (იხ. §23, განსაზღვრა 23.1)

$$F^{('')}(x)=0,\quad x\in[0,2\pi]. \qquad (3)$$

ახლა (3) ტოლობის მიმართ გამოვიყენოთ შვარცის თეორემა (იხ. §29) და გვექნება

$$F(x)=Ax+B,\quad x\in[0,2\pi]. \qquad (4)$$

(2) და (4) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{a_0}{4}x^2-Ax-B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (5)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე 2π პერიოდული უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ 2π პერიოდული უნდა იყოს მისი მარცხენა მხარეც. ამისთვის კი აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობები

$$a_0 = 0, \quad A = 0. \tag{6}$$

ამრიგად, გვაქვს ტოლობა

$$-B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(\cos nx + b_n \sin nx), \tag{7}$$

რომლის მარჯვენა მხარე თანაბრად კრებადია ნებისმიერ სეგმენტზე $(-\infty, +\infty)$-დან. ამიტომ (7) ტოლობის მარჯვენა მხარე იქნება მისი $(-B)$ ჯამისთვის ფურიეს მწკრივი (იხ. თავი 3, §1). მაგრამ მუდმივისთვის ფურიეს ყველა კოეფიციენტი ნულია, გარდა მისი თავისუფალი წევრისა (იხ. თავი 4, შენიშვნა 7.1). ამრიგად,

$$\frac{a_n}{n^2} = 0 \quad \text{და} \quad \frac{b_n}{n^2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{8}$$

ამასთან, (6) ტოლობის ძალით $a_0 = 0$. მაშასადამე, $a_n = 0$, როცა $n = 0, 1, 2, \dots$ და $b_n = 0$, როცა $n = 1, 2, \dots$. თეორემა დამტკიცებულია.

მართებულია ამ თეორემის შემდეგი სახის გაძლიერება.

თეორემა 30.2 (გ. კანტორი, 1872 წ.). თუ ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx) \tag{9}$$

კრებადია ნულისკენ **ყველა** $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე, გარდა შესაძლებელია სასრული რაოდენობის წერტილებისა, მაშინ (9) მწკრივის ყველა კოეფიციენტი ნულია.

დამტკიცება. წინა თეორემის მტკიცების მიხედვით $A_n \to 0$ და $B_n \to \ \infty$, როცა $n \to \infty$.

ამიტომ არსებობს (9) მწკრივთან ასოცირებული რიმანის ფუნქცია F, რომელიც წრფივია თითოეულ იმ ქვეინტერვალზე, რომლებზედაც ნულისკენაა კრებადი (9) მწკრივი, რადგანაც ამ ქვესიმარვლეებზე $F^{('')}(x) = 0$.

მაგრამ რიმანის ასოცირებული F ფუნქცია გლუვია ყველა $x \in (-\infty, +\infty)$ წერტილზე, თანახმად რიმანის მეორე თეორემის (იხ. §25, თეორემა 25.1).

ამიტომ $F(x)$ ფუნქციის გრაფიკს არ ექნება კუთხიანი წერტილი. ამგვარად, $F(x)$ ფუნქციის გრაფიკი სხვადასხვა ტეხილებისგან კი არ შედგება, არამედ ის არის მთლიანი ერთი წრფე. ამის გამო, თეორემის დამტკიცება დამთავრდება წინა თეორემის მტკიცების მიხედვით. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს უფრო ზოგადი

თეორემა 30.3 (გ. კანტორი, 1872 წ.). ვთქვათ $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე განსაზღვრული და 2π პერიოდული $f(x)$ ფუნქცია სასრულია **ყველა** $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე. მაშინ არ არსებობს ორი სხვადასხვა ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელნიც კრებადი იქნებიან $f(x)$-სკენ ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე, გარდა შესაძლებელი სასრული რაოდენობის წერტილისა.

დამტკიცება. ორი ასეთი მწკრივის სხვაობა კრებადია ნულისკენ ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე, გარდა შესაძლებელი სასრული რაოდენობის წერტილებისა. მაშინ თეორემა 30.2-ის ძალით ამ სხვაობა-მწკრივის ყველა კოეფიციენტი, რომელნიც წარმოადგენენ იმ ორი მწკრივის კოეფიციენტების სხვაობას, ნულია. ეს იწვევს იმ ორ მწკრივში შესაბამისი კოეფიციენტების ტოლობას ანუ, რაც იგივეა, ეს ორი მწკრივი იდენტურია იმ გაგებით, რომ მათი ტოლინდექსიანი კოეფიციენტები ერთიმეორის ტოლია. ამრიგად, აღნიშნული თვისების ორი მწკრივი არ არსებობს.

ზემოთ აღნიშნული თეორემების მტკიცების პროცესიდან, ჩანს შემდეგი თეორემის მართებულობა

თეორემა 30.4 (გ. კანტორი, 1872 წ.). თუ ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტები კრებადია ნულისკენ და თვით მწკრივი კი R^2 შეჯამებადია ნულისკენ ყველგან, გარდა შესაძლო სასრული რაოდენობის წერტილებისა, მაშინ ასეთი მწკრივის ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია.

2. 2π პერიოდული და $[0, 2\pi]$ სეგმენტზე ყველგან სასრული f ფუნქციისთვის არ არსებობს ორი სხვადასხვა ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელნიც კრებადი იქნებიან $f(x)$-სკენ ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე (იხ. 30.3 თეორემა).

ბუნებრივია კითხვა: თუკი ერთი ასეთი მწკრივი არსებობს, მაშინ ის იქნება თუ არა f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი?

პასუხი უარყოფითია: მწკრივი

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

კრებადია ყველგან, მაგრამ ის არ არის რომელიმე ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი (იხ. თავი 4, §§15-17).

მაშასადამე, კითხვა ზუსტდება ასე: ვთქვათ 2π პერიოდული f ფუნქცია სასრულია ყველგან $[0, 2\pi]$-ზე და ჯამებადია ამავე სეგმენტზე. თუკი არსებობს რაიმე ტრიგონომეტრიული მწკრივი, რომელიც კრებადია $f(x)$-ისკენ ყველა $x \in [0, 2\pi]$ წერტილზე, მაშინ ეს მწკრივი იქნება f ფუნქციისთვის ფურიეს მწკრივი თუ არა?

ამ კითხვაზე დადებით პასუხს იძლევა შემდეგი

თეორემა 30.5 (დიუ ბუა რეიმონი, [7], გვ. 790). ვთქვათ რაიმე ტრიგონომეტრიული მწკრივი კრებადია ყველგან $[0, 2\pi]$-ზე, გარდა შესაძლებელი თვლადი სიმრავლე წერტილებისა და ამ მწკრივის $f(x)$ ჯამი სასრულია ყველგან $[0, 2\pi]$-ზე და ჯამებადი ამავე სეგმენტზე. მაშინ ეს მწკრივი არის ფურიეს მწკრივი f ფუნქციისთვის.

შენიშვნა 30.6. §28-ის 28.6 თეორემაში, $(S_n(x))_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობის ერთობლივ შემოსაზღვრულობა ზედმეტი პირობაა. ეს გამომდინარეობს ამ პარაგრაფის თეორემებიდან.

ლიტერატურა

[1] ჭელიძე ვლ., ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია. თბილისი, 1964.

[2] ხარაძე ა., ჭელიძე ვლ., ხვედელიძე ბ., ქარცივაძე ი., მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I. თბილისი, 1952.

[3] ხარაძე ა., ჭელიძე ვლ., ხვედელიძე ბ., ქარცივაძე ი., მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. II. თბილისი, 1961.

[4] ძაგნიძე ო., ნამდვილ ცვლადთა ფუნქციების უწყვეტობა და დიფერენცირებადობა. თბილისი, 2010.

[5] Адександров П. С. и Колмогоров А. Н., Введение в теорию функций действительного переменного. М.-Л. 1938.

[6] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогольных рядов. М., 1963 (перевод с английского).

[7] Бари Н. К., Тригонометрические ряды. М., 1961.

[8] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., 1972.

[9] Бохнер С. и Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных. М., 1951 (перевод с английского).

[10] Гельбаум Б., Олмстед Дж., Контпримеры в анализе. М., 1967 (перевод с английского).

[11] Дирикле Лежен, Риман, Липшиц, Разложение функций в тригонометрические ряды, Пер. с немецкого Грузинцева Г. А. и Бернштейна С. Н., Харьков, 1914.

[12] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, Т. I. М., 1965 (перевод с английского).

[13] Зобин Н. М., Креин С. Г., Математический анализ гладких функций. Воронежский университет, 1978.

[14] Кегеян Э. М., О граничном поведении неограниченных аналитических функций, заданных в круге. Доклады АН Арм. ССР, 1966, 42, N2, 65-72.

[15] Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1989.

[16] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд. М., 1951.

[17] Математическая энциклопедия, Т. 5. М., 1985.

[18] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной. М., 1974.

[19] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной. М., 1950.

[20] Неванлина Р., Однозначные аналитические функции. М.-Л., 1941 (перевод с немецкого).

[21] Никольский С. М., Курс математического анализа, Т. I. М., 1990.

[22] Носиро К., Предельные множества. М., 1950 (перевод с английского).

[23] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.

[24] Привалов И. И., Свойства рядов по ортогольным функциям. Матем. сб., Т. 29, N2 (1914), 182-185.

[25] Привалов И. И., О дифференцировании рядов Фурье. Матем. сб., Т. 30 (1916), 320-324.

[26] Плеснер А. И., О сопраженных тригонометрических рядах. ДАН СССР. 4(1935), 235-238.

[27] Риман Б., Сочинения. М.-Л., 1948 (перевод с немецкого).

[28] Титчмарш Е. Теория функций. М., 1980 (перевод с английского).

[29] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, часть первая. Основные операции анализа, издание второе, М., 1962 (перевод с английского).

[30] Фихтенгольц Г. М., Курс диференциального и интегрального исчисления,Т. II. М., 1959.

[31] Харди Г. Х. и Рогозинский В. В., Ряды Фурье. М., 1959 (перевод с третьего английского издания).

[32] Хинчин А. Я., Исследования о строении измеримых функций. Глава вторая. Опыт сравнительной характеристики обобщений понятия производной. Матем. сб., XXXI:3-4(1924), 377-433.

[33] Шилов Г. Е., Математический анализ–функции одного переменного, части 1-2. М., 1969.

[34] Bagemihl F. and Seidel W., Some boundary properties of analytic functions. Math. Zeitschr., 61, No. 2(1954), 186-199.

[35] Carleman T., Sur un théoreme de Weierstrass. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 20B, No. 4(1927), 1-5.

[36] Carleson L., On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math., 116(1966), 135-157.

[37] Fatou P. Séries trigonométriques et séries de Tayler. Acta Math., 30(1906), 335-400.

[38] Hobson E. W., The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, second edition, vol. II, Cambridge at the University press, 1926.

[39] Ikegami T., On Poisson integral. Proc. Japan Acad., 37(1961), 14-17.

[40] Meyerson M. D., Every power series is a Taylor series. Amer. Math. Month., 88, No. 1(1981), 51-52.

[41] Roth A., Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen. Comment. Math. Helv., 11(1938-1939), 77-125.

[42] Rudin W., Radial cluster sets of analityc functions. Bull. Amer. Math. Soc., 60, No. 6(1954), p. 545.

[43] Schwarz H. A., Zur Integration der partiellen Diffeerentialgleichung $u''_{xx}+u''_{yy}=0$ (1872). Gesammelte Abhandligen, Bd. II. Berlin, 1890, s. 175-210.

[44] Stein E. M., Zygmund A., On the differentiability of functions. Studia Math., 23(1964), 247-283.

[45] Waterman D., On the summability of the differentiated Fourier series. Bull. Amer. Math. Soc., 73(1967), 109-112.

[46] Young W. H., A note on trigonometrical series. Messenger of Mathematics, 38(1909), 44-48.

[47] Zygmund A., Smooth functions. Duke Math. J., 12(1945), No. 1, 47-76.

საძიებელი

წიგნში ციტირებულნი

პარსევალი (Parseval M. A., 1755-1836),
პლესნერი (Плеснер А. И., 1900-1961),
პრივალოვი (Привалов И. И., 1891-1941),
პრინსჰეიმი (Prinsheim A., 1850-1941),
პუანკარე (Poincare H., 1854-1912),
პუასონი (Poisson S. D., 1781-1840),
ჟორდანი (Jordan M. E. C., 1838-1922),
რიმანი (Riemann G. F. B., 1826-1866),
რისი ფ. (Riesz F.,1880-1956),
რისი მ. (Riesz M., 1886-1969),
ტაუბერი (Tauber A., 1866-1942 საკონცენტრაციო ბანაკში),
ტოლსტოვი (Толстов Г. П., 1911-1981),
ფატუ (Fatou P. J. L., 1878-1929),
ფეიერი (Fejer L., 1880-1959),
ფრობენიუსი (Frobenius F. G., 1849-1917),
ფიშერი (FisherR. A., 1890-1962),
ფურიე (Forier J. B. J., 1768-1830),
შვარცი (Schwarz H. A.,1843-1921),
შტოლცი (Stolz O., 1842-1905),
ჩეზარო (Cesaro E., 1859-1906),
ხინჩინი (Хинчин А. Я., 1894-1959),
ჰარდი (Hardy G. H., 1877-1947).

გამომცემლობის რედაქტორი **რუსუდან მიქენაია**

გარეკანის დიზაინი **ნინო ებრალიძე**

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14

14, Ilia Chavchavadze Ave., Tbilisi 0179

Tel 995(32) 225 14 32

www.press.tsu.ge